

ROZ HLEDY

MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ

ČASOPIS PRO ZÁJEMCE O MATEMATIKU, FYZIKU A INFORMATIKU

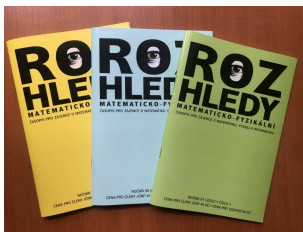
ROČNÍK 100 (2025) • ČÍSLO 1

100. výročí

Milí čtenáři,

právě držíte v ruce 1. číslo **100. ročníku** *Rozhledů matematicko-fyzikálních*. Časopis vznikl roku 1921 pod názvem *Rozhledy matematicko-přírodovědecké*, nejprve se objevil jako příloha *Časopisu pro pěstování matematiky a fyziky* vydávaného JČSMF. V roce 1957 dostal dnešní název a pravidelně bez přerušení vycházel až do roku 2001. Teprve v letech 2002–2005 došlo k přerušení, proto 100. ročník vychází až v roce 2025.

A kulatý 100. ročník je jistě důvod k oslavě!



Všichni jste srdečně zváni na neformální konferenci věnovanou 100. ročníku, která se uskuteční 20. června 2025 na Fakultě jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze.

Na konferenci se vystřídá celá řada řečníků – autorů článků v RMF, a to i z řad studentů. Uveďme alespoň pár jmen řečníků, kteří přislíbili svou účast a které pravidelní čtenáři RMF jistě dobře znají: Vlastimil Dlab, Ivo Kraus, Oldřich Lepil, Dalibor Martišek, Luboš Pick, Mirko Rokyta, Tomáš Roskovec, Marie Snětinová, Martina Škorpilová, Alena Šolcová, Vladimír Wagner, Jaroslav Zhouf.

Přednášky budou 15minutové a budou v nich zadávány zajímavé úlohy. Posluchači budou mít možnost získat za vyřešené úlohy zajímavé ceny (knihy, hlavolamy). Program a další informace budou brzy zveřejněny na webu rozhledy.jcmf.cz

Dovolte mi na závěr popřát Rozhledům matematicko-fyzikálním do další stovky zajímavý inspirativní obsah v každém čísle a především hodně nadšených čtenářů!

Za redakční radu: *Ľubomíra Dvořáková (vedoucí redaktorka)*

Wythoffova hra aneb zraněná dáma

Lubomíra Dvořáková, Milena Svobodová, FJFI ČVUT v Praze
a tvůrčí tým¹⁾ *Wojciech Bureš, Monika Drexlerová, Vojtěch Lorenc,*
Maximilián L. Skuda, Vladimír Tureček

Abstrakt. Wythoffova hra je klasická kombinatorická hra a lze ji interpretovat také jako tzv. zraněnou dámu na nekonečné šachovnici. V článku popíšeme prohrávající a vyhrávající pozice třemi způsoby: pomocí rekurentní posloupnosti, pomocí zápisu čísel ve Fibonaccioho soustavě a pomocí slavného iracionálního čísla – zlatého řezu. Naučíme se samozřejmě také vyhrávající strategii, která právě s prohrávajícími a vyhrávajícími pozicemi souvisí.

Pravidla Wythoffovy hry

Wythoffova hra pochází pravděpodobně z Číny, ale jméno nese po holandském matematikovi Willemu Abrahamu Wythoffovi, který v roce 1907 zveřejnil kompletní analýzu hry [4].

Wythoffova hra je kombinatorická hra pro dva hráče, která spočívá v odebrání prvků ze dvou disjunktních množin (reprezentovaných např. hromádkami herních kamenů či žetonů, krabičkami sirek nebo v našem případě pro jednoduchost pouze dvěma čísly).

Odebírání se řídí přesně danými pravidly. Hráči se střídají a vždy provedou právě jeden z povolených tahů. Vítězem hry je ten hráč, který udělá poslední tah (tedy odebere poslední žeton), resp. poraženým je ten hráč, jenž nemůže táhnout (obě množiny jsou prázdné, tj. hráč je na tahu z pozice $(0, 0)$).

Povolené tahy:

- Hráč může vzít libovolný nenulový počet prvků z jedné množiny.
- Hráč může vzít libovolný nenulový počet prvků z druhé množiny.
- Hráč může odebrat prvky z obou množin najednou, ale v takovém případě musí z obou odebrat stejný nenulový počet.

¹⁾Středoškolské studenti, kteří pracovali na stejnojmenném projektu v rámci Týdne vědy na Jaderce v červnu 2024 a svými reakcemi a dobrými nápady ovlivnili výslednou podobu článku.

Příklad 1. Ilustrujme si možný průběh hry. Začíná Šárka, přičemž počáteční počty žetonů na hromádkách jsou 27 a 32.

- (27, 32) \rightarrow (8, 13) Šárka odebere z obou hromádek 19 žetonů.
- (8, 13) \rightarrow (8, 10) Ctirad odebere 3 žetony z druhé hromádky.
- (8, 10) \rightarrow (3, 5) Šárka vezme 5 žetonů z obou hromádek.
- (3, 5) \rightarrow (2, 4) Ctirad bere jeden žeton z každé hromádky.
- (2, 4) \rightarrow (2, 1) Šárka vezme 3 žetony z druhé hromádky.
- (2, 1) \rightarrow (1, 1) Ctirad bere jeden žeton z první hromádky.
- (1, 1) \rightarrow (0, 0) Šárka vítězí odebráním posledních žetonů.

Prohrávající a vyhrávající pozice

Naším cílem je udržet protihráče v takzvaných prohrávajících pozicích, zatímco my chceme vždy táhnout z pozic vyhrávajících. Tyto pozice (dvojice nezáporných celých čísel vyjadřující počet žetonů na hromádkách) jsou definovány rekurzivně následujícím způsobem.

- (i) (0, 0) je prohrávající.
- (ii) $(x, y) \neq (0, 0)$ je *vyhrávající*, pokud existuje tah do prohrávající pozice.
- (iii) $(x, y) \neq (0, 0)$ je *prohrávající*, pokud všechny tahy vedou do vyhrávajících pozic.

Je snadné si rozmyslet, že každá pozice je buď vyhrávající, nebo prohrávající. Také je ze symetrie povolených tahů zřejmé, že (x, y) je prohrávající, právě když (y, x) je prohrávající. Množinu prohrávajících pozic označíme P , vyhrávajících pozic V ²⁾. Předchozí tvrzení tedy můžeme matematicky zapsat jako³⁾:

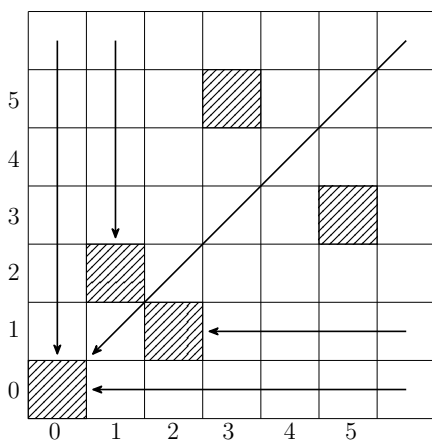
$$P \cup V = \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \wedge P \cap V = \emptyset \wedge (x, y) \in P \Leftrightarrow (y, x) \in P.$$

Příklad 2. Pozice (0, 0) je prohrávající. Z každé pozice tvaru $(x, 0)$, $(0, y)$ a (x, x) , kde x, y jsou přirozená čísla, existuje tah do (0, 0) odebráním žetonů z první, resp. druhé hromádky, resp. obou hromádek. Na

²⁾Většina zdrojů používá značení \mathcal{P} (previous) a \mathcal{N} (next), přičemž $P = \mathcal{P}$ a $V = \mathcal{N}$ [3].

³⁾ \mathbb{N} značí množinu přirozených čísel a $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

obrázku 1 to znamená, že spodní řádek, levý sloupec a úhlopříčka bez pozice (0, 0) obsahují samé vyhrávající pozice. Odhalili jsme prohrávající pozice (1, 2) a (2, 1), protože každý tah z nich vede do pozice, o které již víme, že je vyhrávající. Nyní opět můžeme říci, že pozice ve stejném řádku vpravo od (1, 2), resp. (2, 1), ve stejném sloupci nahoru od (1, 2), resp. (2, 1) a na stejné úhlopříčce vpravo nahoru od (1, 2), resp. (2, 1) jsou vyhrávající pozice. Odkryli jsme tak další prohrávající pozice (3, 5) a (5, 3). Podobným způsobem si můžeme pro libovolné přirozené číslo N konstruovat všechny prohrávající a vyhrávající pozice (x, y) splňující $x \leq N, y \leq N$. Pár prvních prohrávajících pozic je v tabulce 1.



Obr. 1: Prohrávající (šrafované) a vyhrávající (bílé) pozice

x	0	1	3	4	6	8	9	11	12	14	16	17	19	21	22	24	25	27
y	0	2	5	7	10	13	15	18	20	23	26	28	31	34	36	39	41	44

Tabulka 1: Prohrávající pozice (x, y) , kde $x \leq y$ a $x \leq 27$

Zraněná dáma

Alternativní reprezentací Wythoffovy hry je dáma na nekonečné šachovnici $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ ⁴⁾, také známá jako zraněná dáma. Dáma se umístí kamkoliv na šachovnici a poté se hráči střídají v tazích: posun doleva

⁴⁾ Políčka šachovnice jsou popsána nezápornými celými čísly, lze si ji představovat jako první kvadrant v rovině, viz obrázek 1.

(odpovídá odebrání žetonů z první hromádky), posun dolů (odebrání žetonů z druhé hromádky), posun po úhlopříčce doleva dolů (odebrání stejného počtu žetonů z obou hromádek). Vítězí hráč, který dostane dámu do rohu šachovnice, tedy na pozici $(0, 0)$. Dáma je zraněná, protože se pohybuje pouze třemi z obvyklých osmi směrů.

Rekurentní posloupnost

Již v kapitole o prohrávajících a vyhrávajících pozicích jsme si ukázali, že umíme takové pozice rekurzivně konstruovat. Abychom byli schopni vyhrávat ve Wythoffově hře, musíme se naučit tahy z vyhrávajících do prohrávajících pozic. Právě to a také jednodušší popis prohrávajících pozic si nyní ukážeme.

Věta 1. ([4]) *Množina prohrávajících pozic ve Wythoffově hře má tvar $P = \{(a_n, b_n), (b_n, a_n) \mid n \in \mathbb{N}_0\}$, kde*

- $a_0 = b_0 = 0$,
- a_n pro $n \geq 1$ je nejmenší ještě nepoužité přirozené číslo (tj. nevy-skytuje se mezi čísly a_k, b_k pro $k < n$),
- $b_n = a_n + n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
a_n	0	1	3	4	6	8	9	11	12	14	16	17	19	21	22	24	25	27
b_n	0	2	5	7	10	13	15	18	20	23	26	28	31	34	36	39	41	44

Tabulka 2: Hodnoty a_n a b_n pro $n \leq 17$

Než se pustíme do důkazu věty 1, máme pro čtenáře úkol.

Úkol 1. Dokažte, že stejné posloupnosti $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ a $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ jako ve větě 1 vzniknou, když požadujeme splnění podmínek:

1. $a_0 = b_0 = 0$.
2. $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je ostře rostoucí posloupnost přirozených čísel, tj. $a_n < a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.
3. $b_n = a_n + n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.

4. Pro každé přirozené číslo x existuje právě jedno $n \in \mathbb{N}$ takové, že $x = a_n$, nebo $x = b_n$. Zapsáno formálně:

$$\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{b_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N},$$

$$\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cap \{b_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \emptyset.$$

Důkaz věty 1. Označíme $A = \{(a_n, b_n), (b_n, a_n) \mid n \in \mathbb{N}_0\}$. Pro důkaz, že $A = P$, stačí ověřit, že A splňuje rekurzivní definici prohrávajících pozic:

- (i) $(0, 0) \in A$.
- (ii) Pokud $(x, y) \notin A$, pak existuje tah z (x, y) do A .
- (iii) Pokud $(x, y) \in A, (x, y) \neq (0, 0)$, pak všechny tahy z (x, y) vedou mimo A .

Ověřme to tedy:

- (i) $(0, 0) \in A$, protože $a_0 = b_0 = 0$.
- (ii) Pokud $(x, y) \notin A$, pak buď $x = y$ a zmenšením obou složek o x dostaneme $(0, 0) \in A$, nebo můžeme bez újmy na obecnosti uvažovat, že $x < y$. Máme následující možnosti:
 - $x = b_n, y > x > a_n$: Zmenšíme y o $y - a_n$ a dostaneme dvojici $(x, y') = (b_n, a_n) \in A$.
 - $x = a_n, y > b_n$: Zmenšíme y o $y - b_n$ a dostaneme dvojici $(x, y') = (a_n, b_n) \in A$.
 - $x = a_n, y < b_n$: Zmenšíme x i y o $a_n - a_k$, kde $k = y - x < n = b_n - a_n$, a dostaneme dvojici $(x', y') = (a_k, b_k) \in A$. Platí totiž $x - (a_n - a_k) = a_n - (a_n - a_k) = a_k$ a $y - (a_n - a_k) = (y - x) + a_k = k + a_k = b_k$.
- (iii) Necht' $(x, y) \in A, (x, y) \neq (0, 0)$, a bez újmy na obecnosti $x = a_n, y = b_n$. Když zmenšíme x , jsme v pozici (x', b_n) , kde $x' < a_n$. Podle bodu 4 z úkolu 1 je b_n členem prohrávající pozice jedině ve dvojici s a_n , tudíž $(x', b_n) \notin A$. Podobně když zmenšíme y , dostaneme ze stejného důvodu pozici (a_n, y') mimo A . Pokud zmenšíme x i y o stejnou hodnotu, pořád platí $x' < y'$. Jediná možnost, aby (x', y') bylo v A , je $x' = a_k, y' = b_k$ pro nějaké $k < n$. Jelikož $y' - x' = n$ a $b_k - a_k = k$, taková situace nenastává a i v tomto případě nepatří (x', y') do A .

Výherní strategie

Shrňme výherní strategii, kterou jsme se naučili v důkazu věty 1:

- Máme-li si vybrat, jestli chceme začít, zkontrolujeme, zda počáteční pozice (x, y) je vyhrávající. To uděláme tak, že si napočítáme dostatek členů posloupností $(a_n), (b_n)$ a ověříme, že $(x, y) \neq (a_n, b_n)$ a $(x, y) \neq (b_n, a_n)$ pro každé $n \in \mathbb{N}_0$.
- Pokud je pozice prohrávající, necháme začít soupeře. Ten ať táhne jakkoliv, vyrobí pozici vyhrávající.
- Pokud (x, y) je vyhrávající, použijeme následující tah. Bez újmy na obecnosti uvažujeme $x \leq y$. Pokud je $x \geq y$, tak si hromádky přejmenujeme :)

- Pro $x = y$ odebereme z obou hromádek x žetonů a dostaneme pozici $(0, 0)$, čímž jsme vyhráli.
- Pro $x < y$ a $x = b_n$ zmenšíme y o $y - a_n$ a dostaneme pozici (b_n, a_n) .
- Pro $x < y$ a $x = a_n < b_n < y$ zmenšíme y o $y - b_n$ a dostaneme pozici (a_n, b_n) .
- Pro $x < y$ a $x = a_n < y < b_n$ spočítáme $k = y - x$ a zmenšíme x i y o $a_n - a_k$ a dostaneme pozici (a_k, b_k) .

Poznámka 1. Ve Wythoffově hře s dost velkým počtem kamenů není laikovi až na speciální případy jasné, jak táhnout. Jelikož je prohrávajících pozic mnohem méně než vyhrávajících, je pravděpodobné, že soupeř neznalý strategie bude hrát i z vyhrávající pozice opět do vyhrávající. Z té my už pak umíme vyhrát podle výše popsané strategie. Takže hrajeme-li s laikem, není velký problém, když si nemůžeme určit, kdo začíná.

Příklad 3. Vraťme se k příkladu 1 a ukažme, že Šárka správně používala výherní strategii. Podle tabulky 2 je pozice $(x, y) = (27, 32)$ vyhrávající, proto si Šárka vybrala, že začne.

$$(27, 32) \rightarrow (8, 13) \quad x = 27 = a_{17} < y = 32 < b_{17} = 44:$$

Šárka spočítá $y - x = 5$ a odebere

$$a_{17} - a_5 = 27 - 8 = 19 \text{ žetonů z obou hromádek.}$$

$$(8, 13) \rightarrow (8, 10) \quad \text{Ctirad odebere 3 žetony z druhé hromádky.}$$

MATEMATIKA

- (8, 10) \rightarrow (3, 5) $x = 8 = a_5 < y = 10 < b_5 = 13$:
 Šárka spočítá $y - x = 2$ a vezme
 $a_5 - a_2 = 8 - 3 = 5$ žetonů z obou hromádek.
- (3, 5) \rightarrow (2, 4) Ctírad bere po jednom žetonu z každé hromádky.
- (2, 4) \rightarrow (2, 1) $x = 2 = b_1$:
 Šárka si vezme $y - a_1 = 4 - 1 = 3$ žetony
 z druhé hromádky.
- (2, 1) \rightarrow (1, 1) Ctírad odebere jeden žeton z první hromádky.
- (1, 1) \rightarrow (0, 0) Šárka vítězí odebráním posledních žetonů.

Zápis čísel ve Fibonacciho soustavě

Definice 1. Fibonacciho čísla jsou členy posloupnosti splňující rekurtní vztah $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ pro $n \geq 2$. Za počáteční členy zvolíme čísla $f_1 = 2$ a $f_0 = 1$.⁵⁾

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
f_n	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144

Tabulka 4: Fibonacciho čísla f_n pro $n \leq 10$

Posloupnost Fibonacciho čísel spolu s ciframi 0 a 1 tvoří tzv. Fibonacciho (číselnou) soustavu, která slouží k reprezentaci přirozených čísel – podobně jako dobře známá desítková soustava. Zatímco v desítkové soustavě jsou cifry 0, 1, ..., 9 a posloupnost $(10^n)_{n=0}^\infty$, ve Fibonacciho soustavě jsou cifry 0, 1 a posloupnost $(f_n)_{n=0}^\infty$.

Věta 2. Každé $N \in \mathbb{N}$ lze zapsat ve Fibonacciho soustavě pomocí cifer 0 a 1, tj. ve tvaru

$$N = a_n f_n + a_{n-1} f_{n-1} + \dots + a_1 f_1 + a_0 f_0,$$

kde $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \{0, 1\}$, $a_n = 1$.

Platnost věty zaručuje tzv. hladový rozvoj. Pro číslo N se získá tak, že vždy najdeme největší Fibonacciho číslo f_n , které je menší nebo rovno

⁵⁾Počáteční podmínky jsou většinou definovány jako $f_1 = 1$ a $f_0 = 0$. Pro práci se zápisem přirozených čísel ve Fibonacciho soustavě musíme však definovat podmínky tak, jak jsme to učinili, aby posloupnost $(f_n)_{n=0}^\infty$ byla ostře rostoucí.

danému N . Spočítáme zbytek $N - f_n$ a se zbytkem postupujeme stejně.
 Například

$$66 = 55 + 11 = 55 + 8 + 3 = f_8 + f_4 + f_2.$$

Posloupnost cifer v hladovém rozvoji značíme $66_F = (100010100)$.

Hladový rozvoj neobsahuje cifru 2 nebo vyšší, což plyne z faktu, že $2f_n > f_n + f_{n-1} = f_{n+1}$, a neobsahuje po sobě jdoucí jedničky, protože $f_n + f_{n-1} = f_{n+1}$.

Abyste s čtenáři seznámili blíže s hladovým rozvojem, máme pro ně dva úkoly.

Úkol 2. Dokažte, že zápis přirozeného čísla ve Fibonacciho soustavě je hladový, právě když cifry v zápisu jsou pouze 0 a 1 a neobsahuje po sobě jdoucí jedničky.

Příklad 4. $66 = f_8 + f_4 + f_2 = 3f_6 + f_2 = f_7 + f_6 + f_4 + f_2$, první zápis je hladový rozvoj, další dva zápisy nikoliv.

Úkol 3. Dokažte platnost následujícího tvrzení. Necht' M, N jsou přirozená čísla. Pak $M < N$, právě když M_F má buď méně cifer než N_F , nebo mají stejně cifer a M_F je lexikograficky menší než N_F , tj. na prvním místě zleva, kde se rozvoje liší, je 0 v M_F a 1 v N_F .

Příklad 5. Uvažujme čísla 71, 66, 33 a jejich hladové rozvoje ve Fibonacciho soustavě:

$$71_F = (100100100), \quad 66_F = (100010100), \quad 33_F = (1010101).$$

Čísla 71 a 66 mají po devíti cifrách a skutečně 71_F je lexikograficky větší než 66_F , což odpovídá faktu, že $71 > 66$. Dále počet cifer 33_F je $7 < 9$, což je v souladu s tím, že $33 < 66$ a $33 < 71$.

Nyní si ukážeme zajímavou souvislost mezi prohrávajícími pozicemi ve Wythoffově hře a hladovými rozvoji čísel ve Fibonacciho soustavě.

Věta 3. ([1]) *Označme jako s_n n -té přirozené číslo (řazeno podle velikosti), jehož hladový rozvoj ve Fibonacciho soustavě končí sudým počtem nul, a jako ℓ_n n -té přirozené číslo, jehož hladový rozvoj ve Fibonacciho soustavě končí lichým počtem nul. Pro posloupnosti (a_n) a (b_n) z věty 1 platí, že $a_n = s_n$ a $b_n = \ell_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.*

Než okomentujeme důkaz, máme pro čtenáře úkol.

Úkol 4. Dokažte, že pro posloupnosti $(s_n)_{n=1}^\infty$ a $(\ell_n)_{n=1}^\infty$ z věty 3 platí:

- Hladový rozvoj ℓ_n vznikne vždy přidáním nuly na konec hladového rozvoje s_n .
- Posloupnost $(\ell_n - s_n)_{n=1}^\infty$ ostře roste.

Důkaz věty 3. V důkazu využijeme alternativního popisu posloupností (a_n) a (b_n) v úkolu 1. Stačí ukázat, že (s_n) a (ℓ_n) splňují podmínky 2., 3. a 4. Pak už nutně platí $a_n = s_n$ a $b_n = \ell_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Evidentně je splněna podmínka 2., jelikož (s_n) je podle definice ostře rostoucí posloupnost přirozených čísel. Dále platí podmínka 4., protože každé přirozené číslo má na konci hladového rozvoje buď sudý počet nul, a je tedy rovno nějakému s_n , nebo lichý počet nul, a je tedy rovno nějakému ℓ_n . Zbývá pouze ověřit 3. podmínku, že $\ell_n - s_n = n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Z tabulky 5 je vidět platnost pro $n \leq 4$.

n	1	2	3	4
s_n	1: (1) = 1_F	3: (100) = 3_F	4: (101) = 4_F	6: (1001) = 6_F
ℓ_n	2: (10) = 2_F	5: (1000) = 5_F	7: (1010) = 7_F	10: (10010) = 10_F

Tabulka 5: Hodnoty s_n a ℓ_n pro $n \leq 4$

Uvažujme libovolné přirozené $n \geq 5$ a zkonstruuje s_k a ℓ_k tak, že $\ell_k - s_k = n$. Najdeme hladový rozvoj $(n-1)_F = (a_j \cdots a_1 a_0)$. Položíme

$$s = a_j f_{j+1} + \cdots + a_1 f_2 + a_0 f_1 + 1,$$

$$\ell = a_j f_{j+2} + \cdots + a_1 f_3 + a_0 f_2 + f_1.$$

Pak platí:

- $\ell - s = a_j f_j + \cdots + a_1 f_1 + a_0 f_0 + 1 = n$, kde jsme využili rekurence $f_{i+2} = f_{i+1} + f_i$ pro Fibonacciho čísla.
- s má zápis $(a_j \cdots a_1 a_0 1)$ ve Fibonacciho soustavě, který ovšem nemusí být hladový. Na hladový rozvoj ho ale snadno převedeme. Pokud zápis končí 11, tj. $a_0 = 1$, pak jistě $a_1 = 0$, protože posloupnost cifer $(a_j \cdots a_1 a_0)$ neobsahuje po sobě jdoucí jedničky. Původní zápis $(a_j \cdots a_1 a_0 1) = (a_j \cdots 011)$ a $(a_j \cdots 100)$ odpovídají stejnému číslu s , protože $f_1 + f_0 = f_2$. A oba mají sudý počet nul na konci. Nový zápis $(a_j \cdots 100)$ je buď hladový rozvoj čísla s , nebo je tvaru

$(a_j \cdots 01100)$, což opět přepíšeme na zápis $(a_j \cdots 10000)$ odpovídající stejné hodnotě s mající sudý počet nul na konci. Analogicky postupujeme dále, až dostaneme hladový rozvoj čísla s , který má sudý počet nul na konci, tudíž $s = s_k$ pro nějaké $k \in \mathbb{N}$. Přidáním nuly na konec hladového rozvoje s dostaneme hladový rozvoj ℓ , proto $\ell = \ell_k$. Zbývá si uvědomit, že podle 2. bodu úkolu 4 je jasné, že $k = n$, tj. $n = \ell_n - s_n$.

Poznámka 2. Výherní strategii ve Wythhoffově hře z kapitoly Rekurtní posloupnost můžeme využívat, aniž bychom museli vyrábět dostatečný počet členů posloupností (a_n) a (b_n) . Když budeme pracovat s definicí (s_n) a (ℓ_n) , pak je třeba umět počítat hladové rozvoje, k čemuž stačí znát dostatečné množství Fibonacciho čísel. K použití výherní strategie potřebujeme:

- Umět rozhodnout, zda je daná pozice (x, y) , kde $x < y$, prohrávající, tedy zda platí $(x, y) = (s_n, \ell_n)$ pro nějaké n . To se snadno vyčte z hladového rozvoje x a y ve Fibonacciho soustavě.
- Umět pro dané přirozené n spočítat s_n . To umíme z důkazu věty 3. Najdeme hladový rozvoj $(n - 1)_F = (a_j \cdots a_1 a_0)$. Pak položíme $s_n = a_j f_{j+1} + \cdots + a_1 f_2 + a_0 f_1 + 1$.

Příklad 6. Ukažme, jak první tah Šárky v příkladu 1 získat použitím hladového rozvoje. Pozice $(27, 32)$ je vyhrávající, protože $27_F = (1001001) = s_n$ pro nějaké n . Pak $\ell_{n_F} = (10010010)$, tedy $\ell_n = 44 > y$. Šárka si tedy spočítá $y - x = 5$ a určí s_5 . Podle 2. bodu poznámky 2 najdeme $4_F = 101$ a $s_5 = f_3 + f_1 + 1 = 8$. Poté z obou hromádek odebere $s_n - s_5 = 27 - 8 = 19$ žetonů.

Zlatý řez

Zlatý řez je slavné iracionální číslo $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \doteq 1,618$, které splňuje rovnost $\tau^2 = \tau + 1$. Hraje roli v mnoha oblastech matematiky a souvisí s Fibonacciho čísly, viz např. [2, 5].

V této části si ukážeme, jak popsat prohrávající pozice pomocí zlatého řezu a jak uplatnit vyhrávající strategii ve Wythhoffově hře, aniž bychom dopředu napočítávali hodnoty posloupností (a_n) a (b_n) z věty 1 a aniž bychom museli znát Fibonacciho čísla. Bude nám tentokrát stačit dostatečně přesná kalkulačka.

Věta 4. (*[4]*) Pro posloupnosti (a_n) a (b_n) z věty 1 platí, že $a_n = \lfloor n\tau \rfloor$ a $b_n = \lfloor n\tau^2 \rfloor$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ ⁶⁾.

Než se pustíme do důkazu věty 4, vyslovíme šikovné lemma.

Lemma 1. Pro každé přirozené číslo x existuje přirozené číslo n takové, že $x = \lfloor n\tau \rfloor$ nebo $x = \lfloor n\tau^2 \rfloor$.

Důkaz. Pro zadané $x \in \mathbb{N}$ porovnáme zlomkovou část x/τ , tj. číslo $\{x/\tau\} := x/\tau - \lfloor x/\tau \rfloor$, s číslem $1/\tau^2$.

- Nejprve vysvětlíme, že $\{x/\tau\} \neq 1/\tau^2$.
Dokažme tvrzení sporem. Předpokládejme, že pro nějaké $x \in \mathbb{N}$ rovnost platí:

$$\left\{ \frac{x}{\tau} \right\} = \frac{x}{\tau} - \left\lfloor \frac{x}{\tau} \right\rfloor = \frac{1}{\tau^2} = 1 - \frac{1}{\tau}.$$

Odtud vidíme, že

$$\frac{x+1}{\tau} = \left\lfloor \frac{x}{\tau} \right\rfloor + 1.$$

Jelikož x i $\lfloor x/\tau \rfloor$ jsou celá čísla, získáváme

$$\tau = \frac{x+1}{\left\lfloor \frac{x}{\tau} \right\rfloor + 1} \in \mathbb{Q},$$

což je spor s iracionalitou čísla τ .

- Pokud $\{x/\tau\} > 1/\tau^2$, položíme $n = \lfloor (x+1)/\tau \rfloor$. Pak platí $x = \lfloor n\tau \rfloor$. Dokažme toto tvrzení. Jelikož vzdálenost x/τ od dolní celé části je větší než $1/\tau^2$, tj.

$$\left\{ \frac{x}{\tau} \right\} = \frac{x}{\tau} - \left\lfloor \frac{x}{\tau} \right\rfloor > \frac{1}{\tau^2},$$

z rovnosti $1/\tau^2 + 1/\tau = 1$ plyne, že musí být vzdálenost x/τ od dolní celé části zvětšené o jedna menší než $1/\tau$, tj.

$$\left\lfloor \frac{x}{\tau} \right\rfloor + 1 - \frac{x}{\tau} < \frac{1}{\tau}.$$

Proto

$$\frac{x}{\tau} < \left\lfloor \frac{x}{\tau} \right\rfloor + 1 < \frac{x+1}{\tau},$$

⁶⁾Dolní celá část $\lfloor x \rfloor$ z reálného čísla x je největší celé číslo $\leq x$.

tj. mezi x/τ a $(x+1)/\tau$ leží právě jedno celé číslo $n = \lfloor x/\tau \rfloor + 1$, které je zároveň samozřejmě rovno $\lfloor (x+1)/\tau \rfloor$. Nyní vynásobením zlatým řezem dostaneme nerovnost $x < n\tau < x+1$, tudíž $x = \lfloor n\tau \rfloor$.

- Pokud $\{x/\tau\} < 1/\tau^2$, položíme $n = \lfloor (x+1)/\tau^2 \rfloor$. Potom platí $x = \lfloor n\tau^2 \rfloor$. Důkaz tohoto tvrzení necháme jako úkol pro čtenáře.

Důkaz věty 3. V důkazu opět využijeme alternativního popisu posloupností (a_n) a (b_n) v úkolu 1. Je potřeba ověřit, že posloupnosti $(\lfloor n\tau \rfloor)$ a $(\lfloor n\tau^2 \rfloor)$ splňují podmínky 2., 3. a 4. Podmínka 2. je splněna, protože

$$\lfloor (n+1)\tau \rfloor \geq \lfloor n\tau + 1 \rfloor = \lfloor n\tau \rfloor + 1 > \lfloor n\tau \rfloor.$$

Také platí podmínka 3., jelikož

$$\lfloor n\tau^2 \rfloor - \lfloor n\tau \rfloor = \lfloor n(\tau+1) \rfloor - \lfloor n\tau \rfloor = \lfloor n\tau \rfloor + n - \lfloor n\tau \rfloor = n.$$

Zbývá pouze dokázat 4. podmínku, že pro každé přirozené číslo x existuje právě jedno $n \in \mathbb{N}$ takové, že $x = \lfloor n\tau \rfloor$, nebo $x = \lfloor n\tau^2 \rfloor$.⁷⁾ Jak takové n najít víme z lemmatu 1. Ověřme tedy jednoznačnost.

Uvažujme libovolnou mez $K \in \mathbb{N}$. Pro důkaz jednoznačnosti spočítejme, kolik přirozených čísel tvaru $\lfloor n\tau \rfloor$, resp. $\lfloor n\tau^2 \rfloor$ je menších nebo rovných K . Nerovnost $\lfloor n\tau \rfloor \leq K$ nastává právě pro ta přirozená n , pro která platí $n\tau < K+1$. Tedy určíme všechna $n \in \mathbb{N}$ splňující $n < (K+1)/\tau$, a těch je $\lfloor (K+1)/\tau \rfloor$. Podobně počet přirozených čísel $\lfloor n\tau^2 \rfloor \leq K$ je $\lfloor (K+1)/\tau^2 \rfloor$. Sečtením získáme

$$\begin{aligned} \left\lfloor \frac{K+1}{\tau} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{K+1}{\tau^2} \right\rfloor &= \frac{K+1}{\tau} - \left\{ \frac{K+1}{\tau} \right\} + \frac{K+1}{\tau^2} - \left\{ \frac{K+1}{\tau^2} \right\} = \\ &= K+1 - \left\{ \frac{K+1}{\tau} \right\} - \left\{ \frac{K+1}{\tau^2} \right\}. \end{aligned}$$

Využili jsme vztahu $1/\tau + 1/\tau^2 = 1$. Jelikož počítáme zlomkové části z iracionálních čísel, musí platit

$$0 < \left\{ \frac{K+1}{\tau} \right\} < 1 \quad \text{a} \quad 0 < \left\{ \frac{K+1}{\tau^2} \right\} < 1.$$

⁷⁾Dokonce platí obecnější tvrzení, říká se mu Beattyho věta: Pro libovolná iracionální kladná čísla α, β splňující $1/\alpha + 1/\beta = 1$ platí, že pro každé přirozené číslo x existuje právě jedno $n \in \mathbb{N}$ takové, že $x = \lfloor n\alpha \rfloor$, nebo $x = \lfloor n\beta \rfloor$. Snadno ověříme, že čísla $\alpha = \tau$ a $\beta = \tau^2$ předpoklady věty splňují.

Zároveň musí být $\{(K+1)/\tau\} + \{(K+1)/\tau^2\}$ rovno celému číslu 1, protože $K+1 - \{(K+1)/\tau\} - \{(K+1)/\tau^2\}$ je celé. Odtud plyne, že $K+1 - \{(K+1)/\tau\} - \{(K+1)/\tau^2\} = K$. Jelikož každé přirozené číslo $\leq K$ lze podle lemmatu 1 napsat ve tvaru $\lfloor n\tau \rfloor$ nebo $\lfloor n\tau^2 \rfloor$, jsou nutně všechna čísla $\lfloor n\tau \rfloor \leq K$ i $\lfloor n\tau^2 \rfloor \leq K$ vzájemně různá. Tudíž jde každé přirozené číslo $x \leq K$ zapsat jediným způsobem jako $x = \lfloor n\tau \rfloor$, nebo $x = \lfloor n\tau^2 \rfloor$. Mez K jsme volili libovolně, proto tvrzení platí pro libovolné přirozené x .

Příklad 7. Ukažme, jak první tah Šárky v příkladu 1 získat použitím zlatého řezu. Nejprve zjistíme, zda je pozice (27, 32) vyhrávající. Porovnáme $\{27/\tau\} \doteq 0,687 > 1/\tau^2 \doteq 0,382$. Podle důkazu lemmatu 1 položíme $n = \lfloor 28/\tau \rfloor = 17$. Pak platí $27 = \lfloor n\tau \rfloor = a_{17}$. Poté spočítáme $b_{17} = a_{17} + 17 = 44$. Dostáváme $y = 32 < 44$, tudíž pozice je vyhrávající. Podle výherní strategie spočítáme $y - x = 5$. Dále musíme vypočítat také $a_5 = \lfloor 5\tau \rfloor = 8$ a odebereme z obou hromádek $a_{17} - a_5 = 27 - 8 = 19$ žetonů.

Závěr

Wythoffova hra je zábavná, a jistě o to více, když zná hráč výherní strategii. Ale navíc je u ní velmi zajímavé, jak úzce souvisí s Fibonacciho soustavou a se zlatým řezem. Snad se tyto souvislosti líbily i vám, čtenářům. Pro ty z vás, které zaujaly úkoly, máme i pěkná témata pro další práci v rámci středoškolských projektů. Ozvěte se na email redakce, zkontrolujeme vaše řešení a můžete spolu s námi proniknout do dalších tajů Fibonacciho čísel a zlatého řezu.

Literatura

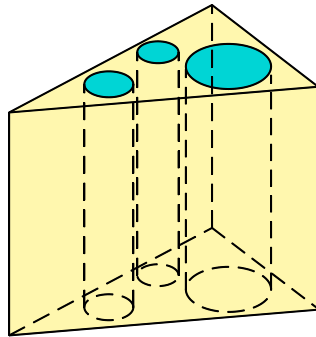
- [1] Fraenkel, A. S.: How to beat your Wythoff games' opponent on three fronts. *Amer. Math. Monthly*, roč. 89 (1982), s. 353–361.
- [2] Masáková, Z., Pelantová, E., Svobodová, M.: Rozklad množiny přirozených čísel pomocí zlatého řezu. *Rozhledy matematicko-fyzikální*, roč. 78 (2001), č. 1, s. 8–15.
- [3] Vopravil, V.: Nestranné hry. *Učitel matematiky*, roč. 26 (2018), č. 2, s. 98–114.
- [4] Wythoff, W. A.: A modification of the game of Nim. *Nieuw Arch. Wisk*, roč. 7(1907), č. 2, s. 199–202.
- [5] Zdeborová, L.: Květ slunečnice a Fibonacciova čísla. *Rozhledy matematicko-fyzikální*, roč. 82 (2007), č. 1, s. 1–10.

Válcové sloupy tesané z hranolu

Martina Škorpilová, MFF UK Praha

Na začátku třicátých let 18. století se v italské vesnici Ala neda-
leko známého jezera Lago di Garda narodil Giovanni Francesco Malfatti
(26. září 1731–9. říjen 1807; též nazývaný Gian Francesco Malfatti či
Gianfrancesco Malfatti). Později se stal výraznou osobností italské mate-
matické komunity. Byl například jedním ze zakladatelů *Societa Italiana
delle Scienze* a od roku 1771 byl profesorem na univerzitě ve Ferrare.
V tomto středověkém, na severovýchodě Itálie ležícím městě, jehož his-
torické centrum patří mezi světové bohatství UNESCO a jehož univerzita
byla založena již v roce 1391, také krátce po svých sedmdesátých šestých
narozeninách zemřel.

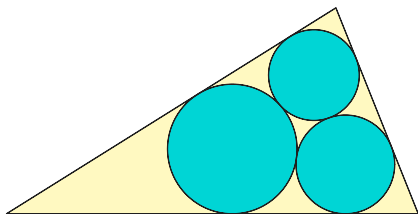
Čtyři roky před svou smrtí, tj. v roce 1803, předložil v [4] následující
geometrický problém (odborně se zabýval i pravděpodobností, mecha-
nikou či algebrou). Přemýšlel, jak z kolmého trojbokého hranolu, který
je například z mramoru, vytesat tři válcové sloupky takovým způsobem,
aby odpad byl co nejmenší. Výška sloupků je přitom stejná jako výška
hranolu, tj. osy sloupků jsou rovnoběžné s bočními hranami hranolu.



Obr. 1

Je zřejmé, že na obr. 1 je znázorněna situace, v níž je odpad zbytečně
objemný. Požadavek na minimální odpad je ekvivalentní s požadavkem
na maximální součet objemů válců. Vzhledem k tomu, že výška válců je
pevně daná, je součet objemů válců závislý pouze na jejich kruhových

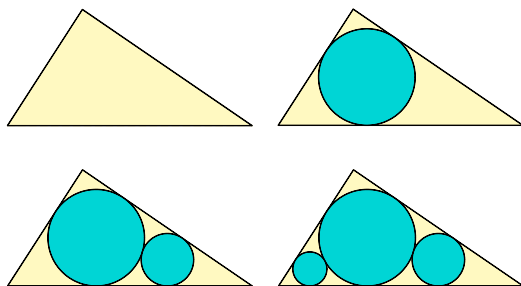
podstavách. Celý problém se tedy redukuje na planimetrickou úlohu: *Jak pro daný trojúhelník nalézt tři kruhy, které náležejí trojúhelníku, nepřekrývají se a součet jejich obsahů je co největší?* Giovanni Francesco Malfatti se domníval, že řešení této otázky, kterou dnes nazýváme *Malfattiho problém* či *Malfattiho mramorový problém*, je následující: sestrojíme tři kruhy, z nichž se každý dotýká zbývajících dvou a současně se dotýká dvou stran daného trojúhelníku (obr. 2). Trojice kruhů těchto vlastností je označována jako tzv. *Malfattiho kruhy*.



Obr. 2

Upozorněme, že Malfattiho problémem se někdy rozumí také nalezení postupu, jak kruhy, které navrhl Malfatti, sestrojít. Konstrukci Malfattiho kruhů představil roku 1826 švýcarský matematik Jakob Steiner (1796–1863) v práci [5] a trvalo několik desítek let, než se jí podařilo plně odůvodnit.

Co kdybychom však kruhové podstavy válců našli jiným způsobem? Sestrojme nejprve kruh jediný, a to takový, který náleží trojúhelníku a má co největší obsah (obr. 3).



Obr. 3

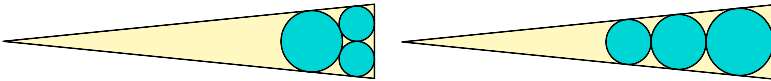
Jedná se samozřejmě o kruh, jehož hraniční kružnicí je kružnice vepsaná trojúhelníku. Dále sestrojme druhý kruh, který také náleží trojúhelníku, nepřekrývá se s prvním kruhem a má opět co největší obsah.

A nakonec sestrojme třetí kruh náležící trojúhelníku s co možná největším obsahem, který se nepřekrývá s žádným ze dvou dosud zkonstruovaných trojúhelníků.

Tento proces, při němž postupně vybíráme v jistém slova smyslu nejlepší prvek (zde kruh s největším obsahem), se nazývá *hladový algoritmus*.

Je zcela přirozené se ptát, zda kruhy sestrojené hladovým algoritmem nepokrývají větší plochu daného trojúhelníku než Malfattiho kruhy, tj. zda Malfattiho přístup je skutečně řešením Malfattiho problému.

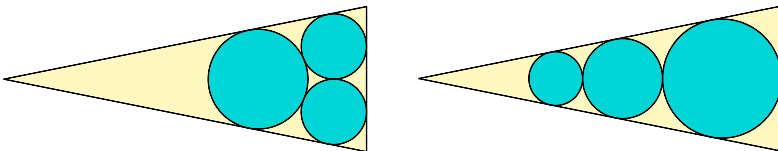
Narýsujme obě trojice kruhů pro týž trojúhelník. Začněme rovnoramenným trojúhelníkem, jehož základna je vzhledem k jeho ramenům relativně krátká (obr. 4).



Obr. 4

Na první pohled je zřejmé, že v tomto případě je hladový algoritmus výhodnější. (Pro uvedený trojúhelník pokrývají Malfattiho kruhy přibližně 36 % jeho plochy, zatímco kruhy sestrojené hladovým algoritmem takřka 55 % jeho plochy.)

Zvětšeme nyní poměr délky základny ku délce ramena rovnoramenného trojúhelníku tak, aby tento poměr byl stále menší než 1. Pokud uvažujeme například trojúhelník na obr. 5, je odpověď stále zřejmá na první pohled. I zde vítězí hladový algoritmus! (Malfattiho kruhy pokrývají přibližně 55 % plochy trojúhelníku, v případě hladového algoritmu takřka 70 %.)

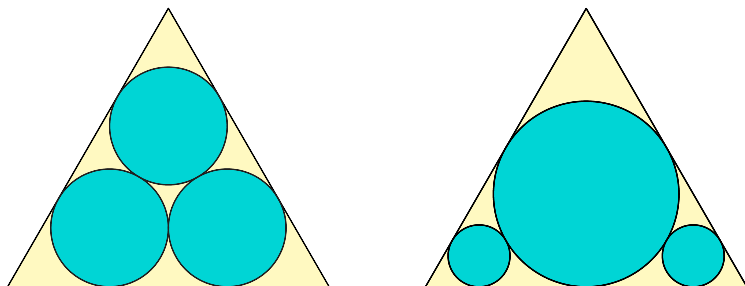


Obr. 5

Zdá se, že čím větší je poměr délky základny ku délce ramena rovnoramenného trojúhelníku, přičemž délka základny je stále menší než délka ramena, tím se obsah plochy trojúhelníku pokryté Malfattiho kruhy přibližuje obsahu plochy pokryté kruhy, které jsou sestrojené hladovým

algoritmem. Jak to tedy dopadne pro rovnostranný trojúhelník, tj. pro případ, v němž je uvažovaný poměr roven 1? Zvítězí nyní konečně Malfattiho kruhy, nebo ne? Nebo snad skončí „souboj“ plichtou?

Podíváme-li se na příslušné obrázky pro rovnostranný trojúhelník, málokdo si troufne se stoprocentní jistotou tvrdit, který postup je výhodnější (obr. 6). V tomto případě je nutné součty obsahů obou trojic kruhů vypočítat a poté porovnat.



Obr. 6

K rozhodnutí o vítězi mohou přispět některé z úloh, které vypočítáte, budete-li řešit níže uvedené sudoku. Konkrétně se jedná o úlohy g) a p). Pokud chcete určit i to, kolik procent plochy trojúhelníku každá z trojic kruhů pokrývá, využijte navíc příklad b). K výsledkům úloh g), p) a b) vás přitom postupně navádí řešení většiny dalších úloh, které sudoku zahrnuje. Vypočítáte-li i zbývající příklady, můžete ho doplnit celé.

Jste-li příliš netrpěliví a chcete-li znát řešení Malfattiho problému ihned (nebo zkrátka jen nejste příznivcem řešení sudoku), úlohy přeskočte a pokračujte v četbě na straně 23.

Sudoku

Řešte následující sudoku, znáte-li hodnoty pouze v jedenácti políčkách a hodnoty v některých dalších políčkách je nutné určit následujícím způsobem.

V jednotlivých úlohách doplňte do věty či souvětí jednu ze tří nabízených možností tak, aby výsledné tvrzení bylo pravdivým výrokem. Poté se podívejte, jaké přirozené číslo n , $1 \leq n \leq 9$, je napsáno v rámečku u Vámi vybrané možnosti. Toto číslo vepište do příslušného políčka sudoku (hodnota v políčku označeném písmenem a je rovna číslu, které je v rámečku u správné odpovědi v úloze a apod.).

Součástí sudoku jsou tři obrázky. U každé úlohy je uvedeno číslo obrázku, k němuž se výpočet vztahuje. Trojúhelníky ABC na obr. 7 a 8 jsou rovnostranné a délka jejich stran je rovna jednotce. Na obr. 7 a 9 jsou Malfattiho kruhy, na obr. 8 jsou kruhy sestavené hladovým algoritmem.

Při řešení používejte pouze psací potřeby a papír. Nepoužívejte tedy – kromě kalkulačky apod. – ani pravítko.

Pod zadáním poslední úlohy je uvedeno několik nápověd pro případ, že byste si s některou úlohou neparadili.

Jste-li učitelem matematiky a chcete-li dát sudoku luštit svým studentům, je možné si pro výuku vhodně upravené sudoku (s odstraněným stránkováním; s číslování obrázků od 1 apod.) stáhnout na webové stránce [6].

		a	2	b				
c	d	5			e			
f							g	h
i	j	k					l	
5		i			1		m	
						n	5	
9	7							6
		o		9	p	8		q

a) (obr. 7). Délka libovolné výšky rovnostranného trojúhelníku ABC je

1 $\frac{1}{2}$,
 9 $\frac{\sqrt{3}}{2}$,
 5 $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

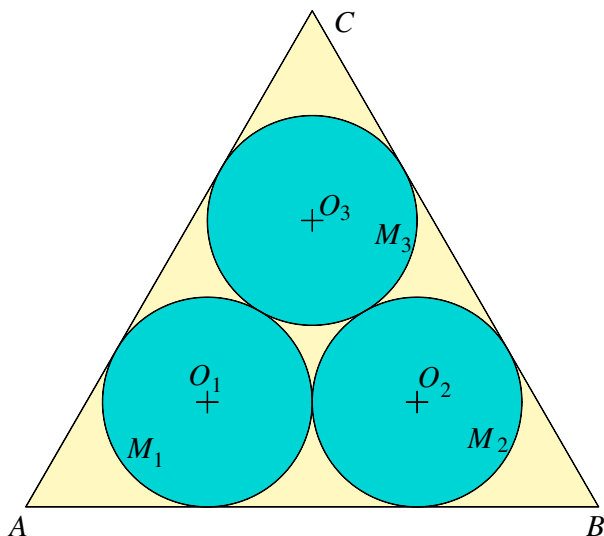
b) (obr. 7). Obsah rovnostranného trojúhelníku ABC je

4 $\frac{\sqrt{3}}{4}$,
 5 $\frac{\sqrt{3}}{2}$,
 7 $\frac{1}{4}$.

c) (obr. 7). Je-li rovnostranný trojúhelník ABC umístěn v souřadnicovém systému tak, že $A[0, 0]$, $B[1, 0]$ a y -ová souřadnice bodu C je

kladná, potom má ťžišť trojúhelníku ABC souřadnice

- 2 $\left[\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right],$
 3 $\left[\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{4} \right],$
 4 $\left[\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6} \right].$



Obr. 7

d) (obr. 7). Je-li rovnostranný trojúhelník ABC umístěn v souřadnicovém systému tak, že $A[0, 0]$, $B[1, 0]$ a y -ová souřadnice bodu C je kladná, potom x -ová souřadnice středu O_1 kruhu M_1 je

- 1 $\frac{3 - \sqrt{3}}{4},$
 6 $\frac{2 - \sqrt{2}}{3},$
 9 $\frac{3 + \sqrt{3}}{4}.$

e) (obr. 7). Poloměr kruhu M_1 je

- 2 $\frac{\sqrt{2} - 3}{4},$
 3 $\frac{\sqrt{3} - 2}{4},$
 7 $\frac{\sqrt{3} - 1}{4}.$

f) (obr. 7). Obsah kruhu M_1 je

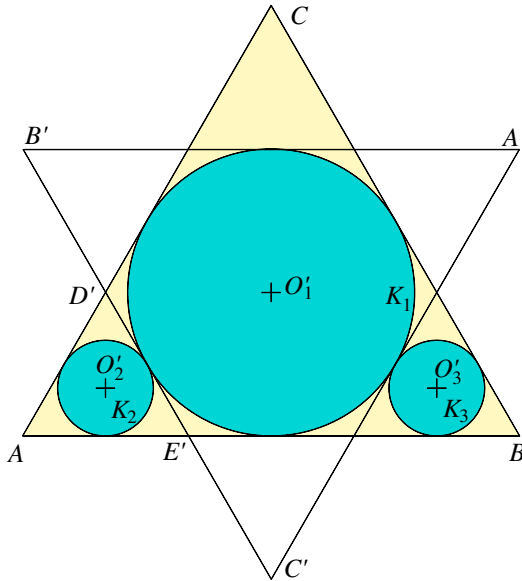
- 1 $\pi \cdot \frac{11 - 6 \cdot \sqrt{2}}{16},$
 6 $\pi \cdot \frac{2 - \sqrt{3}}{8},$
 2 $\pi \cdot \frac{4 - \sqrt{3}}{16}.$

g) (obr. 7). Součet obsahů kruhů M_1, M_2, M_3 je

7 $3\pi \cdot \frac{11 - 6 \cdot \sqrt{2}}{16},$
 8 $3\pi \cdot \frac{2 - \sqrt{3}}{8},$
 2 $3\pi \cdot \frac{4 - \sqrt{3}}{16}.$

h) (obr. 8). Je-li rovnostranný trojúhelník ABC umístěn v souřadnicovém systému tak, že $A[0, 0], B[1, 0]$ a y -ová souřadnice bodu C je kladná, potom x -ová souřadnice středu O'_1 kruhu K_1 je

4 $\frac{1}{2},$
 1 $\frac{2}{3},$
 9 $\frac{1}{3}.$



Obr. 8

i) (obr. 8). Poloměr kruhu K_1 je

3 $\frac{\sqrt{3}}{6},$
 2 $\frac{\sqrt{2}}{8},$
 8 $\frac{\sqrt{3}}{9}.$

j) (obr. 8). Obsah kruhu K_1 je

2 $\frac{\pi}{27},$
 4 $\frac{\pi}{12},$
 7 $\frac{3\pi}{64}.$

k) (obr. 8). Je-li trojúhelník $A'B'C'$ obrazem rovnostranného trojúhelníku ABC ve středové souměrnosti se středem O_1 a jsou-li body D' , E' průsečíky úsečky $B'C'$ po řadě se stranami AC , AB trojúhelníku ABC , potom je trojúhelník $AE'D'$ obrazem trojúhelníku ABC ve stejnolehlosti se středem A a koeficientem

$$\boxed{2} \quad 1, \quad \boxed{7} \quad \frac{1}{2}, \quad \boxed{6} \quad \frac{1}{3}.$$

l) (obr. 8). Je-li rovnostranný trojúhelník ABC umístěn v souřadnicovém systému tak, že $A[0, 0]$, $B[1, 0]$ a y -ová souřadnice bodu C je kladná, potom x -ová souřadnice středu O_2' kruhu K_2 je

$$\boxed{9} \quad \frac{\sqrt{2}}{3}, \quad \boxed{8} \quad \frac{1}{6}, \quad \boxed{2} \quad \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

m) (obr. 8). Poloměr kruhu K_2 je

$$\boxed{3} \quad \frac{\sqrt{3}}{18}, \quad \boxed{4} \quad \frac{\sqrt{2}}{6}, \quad \boxed{9} \quad \frac{\sqrt{2}}{9}.$$

n) (obr. 8). Vzdálenost $|O_1'O_2'|$ středů O_1' , O_2' kruhů K_1 , K_2 je

$$\boxed{2} \quad \frac{3\sqrt{3}}{8}, \quad \boxed{7} \quad \frac{2\sqrt{3}}{6}, \quad \boxed{3} \quad \frac{2\sqrt{3}}{9}.$$

o) (obr. 8). Obsah kruhu K_2 je

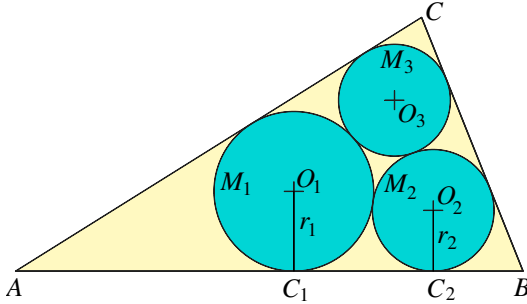
$$\boxed{7} \quad \frac{4\pi}{27}, \quad \boxed{1} \quad \frac{\pi}{18}, \quad \boxed{4} \quad \frac{\pi}{108}.$$

p) (obr. 8). Součet obsahů kruhů K_1 , K_2 , K_3 je

$$\boxed{7} \quad \frac{22\pi}{64}, \quad \boxed{6} \quad \frac{11\pi}{108}, \quad \boxed{2} \quad \frac{11\pi}{64}.$$

q) (obr. 9). Označíme-li r_1 , resp. r_2 poloměr kruhu M_1 , resp. M_2 a dále označíme-li C_1 , resp. C_2 bod dotyku kruhu M_1 , resp. M_2 a strany AB trojúhelníku ABC , potom délka $|C_1C_2|$ úsečky C_1C_2 je

$$\boxed{1} \quad \sqrt{r_1 r_2}, \quad \boxed{2} \quad 2\sqrt{r_1 r_2}, \quad \boxed{3} \quad 3\sqrt{r_1 + r_2}.$$



Obr. 9

Nápovědy

Na bod O_1 na obr. 7 lze nahlížet jako na střed kružnice vepsané trojúhelníku $AS_{AB}C$, kde S_{AB} značí střed strany AB trojúhelníku ABC .

Koeficient stejnolehlosti z úlohy k) lze využít k řešení jiných příkladů.

Vzdálenost bodů C_1, C_2 na obr. 9 je rovna délce odvěsny PO_2 trojúhelníku PO_2O_1 , kde P značí patu kolmice vedené bodem O_2 na úsečku O_1C_1 .

Řešení sudoku

Správné řešení úlohy g) je hodnota u symbolu [8]. Součet obsahů Malfattiho kruhů sestrojených pro rovnostranný trojúhelník, jehož strana má délku rovnou jednotce, je totiž $3\pi \cdot \frac{2-\sqrt{3}}{8}$, což je přibližně rovno 0,31567.

Správné řešení úlohy p) je uvedeno u symbolu [6], tj. součet obsahů tří kruhů sestrojených hladovým algoritmem je pro tentýž rovnostranný trojúhelník roven $\frac{11\pi}{108}$. Přibližná hodnota tohoto čísla je 0,31998.

Součet obsahů kruhů sestrojených hladovým algoritmem je tedy v porovnání se součtem obsahů Malfattiho kruhů větší i pro rovnostranný trojúhelník! (Pokud správné výsledky úloh g) a p) podělíme obsahem rovnostranného trojúhelníku, tj. správným výsledkem příkladu b), kterým je hodnota $\frac{\sqrt{3}}{4}$ u symbolu [4], zjistíme, že Malfattiho kruhy pokrývají přibližně 72,9 % plochy trojúhelníku, zatímco u kruhů postupně nalezených hladovým algoritmem je to zhruba 73,9 %.)

Ke skutečnosti, že pro rovnostranný trojúhelník je výhodnější hladový algoritmus, dospěli autoři v práci [3] z roku 1930. O třicet sedm let později bylo v článku [2] dokázáno, že hladový algoritmus je výhodnější než Malfattiho přístup pro libovolný trojúhelník. Dvacet sedm let

poté, tedy v roce 1994, se podařilo v textu [7] ověřit, že při hledání trojice kruhů s maximálním součtem obsahů je pro libovolný trojúhelník vždy ze všech metod nejvýhodnější hladový algoritmus. (Více o historii Malfattioho problému viz článek [1].)

\bar{z} _b	L	8	$\bar{9}$ _d	6	$\bar{\epsilon}$	$\bar{7}$ _o	S	I
9	$\bar{7}$	I	8	\bar{z}	S	$\bar{\epsilon}$	L	6
6	S	$\bar{\epsilon}$ _u	$\bar{7}$	I	L	8	9	\bar{z}
L	$\bar{\epsilon}$ _w	$\bar{7}$	I	9	6	\bar{z}	$\bar{8}$ _i	S
S	I	6	\bar{z}	L	8	$\bar{9}$ _r	$\bar{7}$ _f	$\bar{\epsilon}$ _!
8	\bar{z}	9	$\bar{\epsilon}$	S	$\bar{7}$	I	6	L
$\bar{7}$ _q	$\bar{8}$ _s	S	6	$\bar{\epsilon}$	I	L	\bar{z}	$\bar{9}$ _j
$\bar{\epsilon}$	6	\bar{z}	\bar{L} _v	8	9	S	\bar{I} _p	$\bar{7}$ _c
I	9	L	S	$\bar{7}$ _q	\bar{z}	$\bar{6}$ _v	$\bar{\epsilon}$	8

Literatura

- [1] Andreatta, M., Bezdek, A., Boroński, J. P.: The problem of Malfatti: Two centuries of debate. *The Mathematical Intelligencer*, roč. 33 (2011), s. 72–76.
- [2] Goldberg, M.: On the original Malfatti problem. *Mathematics Magazine*, roč. 40 (1967), č. 5, s. 241–247.
- [3] Lob, H., Richmond, H. W.: On the solutions of Malfatti's problem for a triangle. *Proceedings of the London Mathematical Society*, roč. 30 (1930), č. 1, s. 287–304.
- [4] Malfatti, G.: Memoria sopra un problema stereotomico. *Memorie di Matematica e di Fisica della Società Italiana delle Scienze*, roč. 10 (1803), s. 235–244.
- [5] Steiner, J.: Einige geometrische Betrachtungen. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, roč. 1 (1826), s. 161–184, s. 252–288.
- [6] Škorpilová, M.: *Webová stránka věnovaná výuce*.
<https://www.karlin.mff.cuni.cz/~stepanov/vyuka.html>
- [7] Zalgaller, V. A., Los, G. A.: The solution of Malfatti's problem. *Journal of Mathematical Sciences*, roč. 72 (1994), č. 4, s. 3163–3177.

Přirozená čísla ve zlomcích podruhé

José Marcial Nájares Romero, ZŠ Gutova, Praha 10

Abstrakt. Ukážeme, jak neotřelými způsoby generovat zlomky s hodnotou $1/k$, kde k je přirozené číslo, přičemž v čitateli bude součet prvních n přirozených čísel a ve jmenovateli bude součet n členů jisté aritmetické posloupnosti. Identitu dokážeme algebraicky i geometricky.

Tato práce navazuje na sadu nedávných článků z Rozhledů. Nejprve V. Čerňanová [1] představila generování zlomků tvaru $1/(m^2 - 1)$, kde m je přirozené číslo větší než jedna, pomocí lichých čísel, poté P. Tlustý [2] interpretoval získané identity geometricky, nakonec autor tohoto článku v [3] generoval zlomky ve tvaru $1/(m^2 - 1)$ pomocí přirozených čísel a získané vztahy vysvětloval i geometricky pomocí trojúhelníkových čísel.

Zde se budeme věnovat generování zlomků tvaru $1/k$, přičemž pro $k = 2$ a $k = 3$ vyrobíme identity speciálním způsobem (kapitoly 1, 2) a pro $k \geq 3$ odvodíme i vzorec univerzální (kapitola 3).

K úpravám výrazů budeme používat vzorec pro součet prvních n členů libovolné aritmetické posloupnosti a_1, a_2, \dots, a_n :

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}.$$

1. Generování 1/2

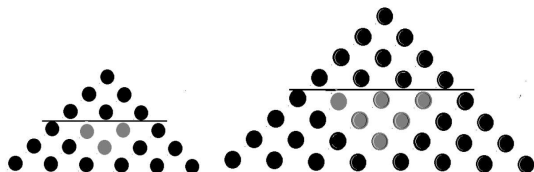
V první části nejdříve popíšeme, jak generovat $1/2$ dvěma způsoby. Tyto postupy budou odlišné od ostatních případů pro $k \geq 3$, proto je uvádíme zvlášť. Vzorce vypočítáme z obrázků, poté popíšeme slovně, napíšeme vzorcem a dokážeme algebraicky.

První způsob

Pozorujme trojúhelníková čísla ¹⁾ na obr. 1. Vidíme, že pod čarou jsou dva černé trojúhelníky, které jsou stejné jako nad čarou. Když si tedy odmyslíme šedé puntíky, pak počet černých puntíků pod čarou je dvojnásobný oproti počtu nad čarou. Zkusme to zformulovat slovně.

¹⁾ n -té trojúhelníkové číslo je $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$. Důvod je jasný, lze je zapsat pomocí puntíků do trojúhelníku. Viz obrázky v tomto článku.

Když v čitateli sečteme prvních n přirozených čísel a ve jmenovateli bude rozdíl součtu bezprostředně následujících n čísel a součtu prvních $n - 1$ přirozených čísel, pak se tento zlomek rovná $1/2$.



Obr. 1: Ilustrace identity z věty 1 pro $n = 3$ a $n = 4$

Zapsáno formálně:

Věta 1. *Pro každé přirozené číslo n platí*

$$\frac{1 + 2 + 3 + \dots + n}{((n + 1) + (n + 2) + \dots + 2n) - (1 + 2 + \dots + (n - 1))} = \frac{1}{2}.$$

Důkaz. Použitím vzorce pro součet aritmetické posloupnosti máme

$$\begin{aligned} & \frac{1 + 2 + 3 + \dots + n}{((n + 1) + (n + 2) + \dots + 2n) - (1 + 2 + \dots + (n - 1))} = \\ &= \frac{\frac{(n+1)n}{2}}{\frac{(3n+1)n}{2} - \frac{n(n-1)}{2}} = \frac{n + 1}{3n + 1 - n + 1} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Druhý způsob

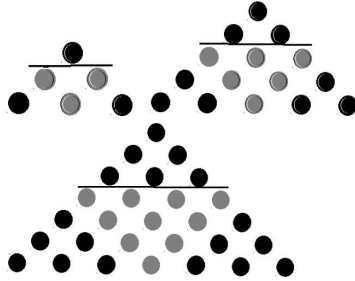
Popišme ještě druhý způsob generování $1/2$. Tentokrát na obr. 2 barvíme trojúhelníková čísla trochu jiným způsobem, šedých je větší podíl než v předešlém případě. Opět platí, že počet černých puntíků nad a pod čarou je v poměru $1 : 2$.

Zkusme znovu slovně zformulovat naše pozorování. V čitateli budeme opět sčítat prvních n přirozených čísel, ve jmenovateli tentokrát bude rozdíl součtu bezprostředně následujících $n + 1$ přirozených čísel a součtu prvních $n + 1$ přirozených čísel. Pak zlomek bude roven $1/2$.

Zapsáno matematicky:

Věta 2. *Pro každé přirozené číslo n platí*

$$\frac{1 + 2 + \dots + n}{((n + 1) + (n + 2) + \dots + (2n + 1)) - (1 + 2 + \dots + n + (n + 1))} = \frac{1}{2}.$$



Obr. 2: Ilustrace identity z věty 2 pro $n = 1, 2, 3$

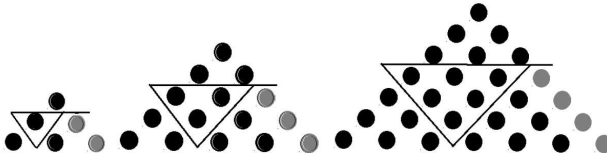
Důkaz. Opět stačí použít součet aritmetické posloupnosti.

$$\frac{1 + 2 + \dots + n}{((n + 1) + (n + 2) + \dots + (2n + 1)) - (1 + 2 + \dots + n + (n + 1))} =$$

$$= \frac{\frac{(n+1)n}{2}}{\frac{(3n+2)(n+1)}{2} - \frac{(n+2)(n+1)}{2}} = \frac{n}{3n + 2 - n - 2} = \frac{1}{2}.$$

2. Generování 1/3

Generování 1/3 jsme se věnovali i v článku [3]. Pojdme ukázat ještě další možný postup. Na obr. 3 jsou opět trojúhelníková čísla, tentokrát barvíme puntíky vpravo pod čarou šedě. Počet černých puntíků pod čarou je trojnásobný oproti počtu nad čarou. Odvodíme z toho následující tvrzení. Abychom generovali 1/3, budeme sčítat v čitateli prvních n přirozených čísel a ve jmenovateli tentokrát budeme sčítat bezprostředně $n + 1$ následujících přirozených čísel a od tohoto součtu odečteme $n + 1$, tedy od každého čísla odečteme 1.



Obr. 3: Ilustrace identity z věty 3 pro $n = 1, 2, 3$

Vše, co bylo dříve řečeno, shrneme do následující věty.

Věta 3. Pro každé přirozené číslo n platí

$$\frac{1 + 2 + \dots + n}{(n + 1) + (n + 2) + \dots + (2n + 1) - (n + 1)} = \frac{1}{3}.$$

Důkaz.

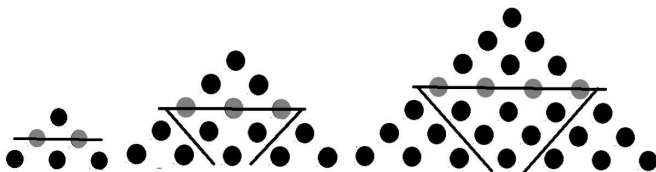
$$\begin{aligned} \frac{1 + 2 + \dots + n}{(n + 1) + (n + 2) + \dots + (2n + 1) - (n + 1)} &= \\ &= \frac{\frac{(n+1)n}{2}}{\frac{(3n+2)(n+1)}{2} - (n + 1)} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Další způsob generování $1/3$ uvidíme v další kapitole.

3. Generování zlomků $1/k$

Obecný případ generování zlomku $1/k$, kde k je přirozené číslo větší nebo rovno 3, odvodíme z trojúhelníkových čísel na obr. 4, 5 a 6. První z obrázků ilustruje, jak generovat $1/3$ (stejný způsob už byl prezentován v článku [3]), druhý, jak vyrábět $1/4$, a třetí, jak získat $1/5$.

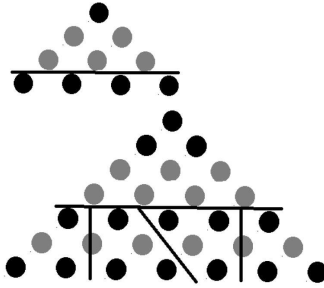
Slovy, v čitateli sečteme n přirozených čísel, poté vynecháme $k - 2$ čísel a ve jmenovateli pak sčítáme n členů aritmetické posloupnosti s diferencí $k - 2$. Tedy v případě $1/3$ vynecháme jedno číslo a ve jmenovateli sčítáme n následujících přirozených čísel, viz obr. 4. V případě $1/4$ vynecháme 2 čísla a ve jmenovateli sčítáme n členů aritmetické posloupnosti s diferencí 2, viz obr. 5. V případě $1/5$ vynecháme 3 čísla a ve jmenovateli sčítáme n členů aritmetické posloupnosti s diferencí 3, viz obr. 6.



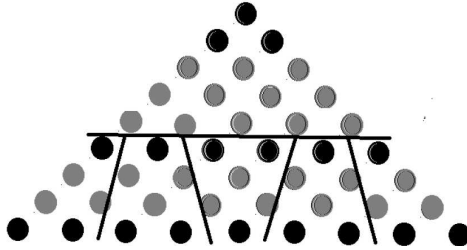
Obr. 4: Ilustrace identity (1) pro $n = 1, 2, 3$

Věta 4. Pro každé přirozené číslo $k \geq 3$ platí

$$\frac{1 + 2 + \dots + n}{(n + 1 + (k - 2)) + (n + 1 + 2(k - 2)) + \dots + (n + 1 + n(k - 2))} = \frac{1}{k}.$$



Obr. 5: Ilustrace identity (2) pro $n = 1, 2$



Obr. 6: Ilustrace identity (3) pro $n = 2$

Důkaz.

$$\frac{1 + 2 + \dots + n}{(n + k - 1) + (n + 2k - 3) + \dots + (n + (k - 2)n + 1)} = \frac{\frac{(n+1)n}{2}}{\frac{(kn+k)n}{2}} = \frac{1}{k}.$$

Po dosazení $k = 3$ do věty 4 máme vztah

$$\frac{1 + 2 + \dots + n}{(n + 2) + (n + 3) + \dots + (n + n + 1)} = \frac{1}{3}. \quad (1)$$

Po dosazení $k = 4$ do věty 4 máme vztah

$$\frac{1 + 2 + \dots + n}{(n + 3) + (n + 5) + \dots + (n + 2n + 1)} = \frac{1}{4}. \quad (2)$$

Po dosazení $k = 5$ do věty 4 máme vztah

$$\frac{1 + 2 + \dots + n}{(n + 4) + (n + 7) + \dots + (n + 3n + 1)} = \frac{1}{5}. \quad (3)$$

4. Otázky pro čtenáře

Pokuste se vymyslet další analogické identity pro všechny zlomky tvaru $1/k$. A pošlete nám je do redakce, rádi se podíváme, jaké jste objevili.

Můžete také zkusit dokázat další zajímavý vztah, který platí pro libovolnou m -tici po sobě jdoucích přirozených čísel, kde $m \geq 3$, a říká, že když v čitateli sečteme první a poslední člen dané m -tice a ve jmenovateli sečteme všechny členy mezi prvním a posledním, dostaneme zlomek $2/(m-2)$.

Příklad.

Pro $m = 3$ a trojici $(1, 2, 3)$ dostaneme $\frac{1+3}{2} = 2$.

Pro $m = 4$ a čtveřici $(3, 4, 5, 6)$ máme $\frac{3+6}{4+5} = 1$.

Pro $m = 5$ a pěťici $(10, 11, 12, 13, 14)$ vychází $\frac{10+14}{11+12+13} = \frac{2}{3}$.

Vztah platí nejen pro přirozená čísla, ale pro aritmetické posloupnosti obecně.

Věta 5. *Nechť (a_n) je libovolná aritmetická posloupnost s kladnými členy. Nechť m je přirozené číslo, $m \geq 3$, a k celé nezáporné číslo. Pak platí*

$$\frac{a_{k+1} + a_{k+m}}{a_{k+2} + a_{k+3} + \cdots + a_{k+m-1}} = \frac{2}{m-2}.$$

Poděkování

Rád bych poděkoval paní šéfredaktořce Lubomíře Dvořákové za pomoc se strukturou a jazykovou stránkou článku.

Literatura

- [1] Čerňanová, V.: Nepárne čísla v zlomkoch. *Rozhledy matematicko-fyzikální*, roč. 98 (2023), č. 2, s. 1–6.
- [2] Tlustý, P.: Lichá čísla ve zlomcích ještě jednou. *Rozhledy matematicko-fyzikální*, roč. 98 (2023), č. 4, s. 39–43.
- [3] Nájares Romero, J. M.: Přirozená čísla ve zlomcích. *Rozhledy matematicko-fyzikální*, roč. 99 (2024), č. 3, s. 34–38.

Trik s Fibonacciho čísly

V tomto čísle jsme představili Wythoffovu hru a ukázalo se, že vyhrávající a prohrávající pozice úzce souvisejí s Fibonacciho čísly. Pojďme si ukázat „kouzlo“, které je také založeno na vlastnostech Fibonacciho čísel a můžete jím uvést v úžas své kamarády.

- Přípravte si kartičku s deseti sloupečky.
- Požádejte kamaráda, ať napíše do prvních dvou sloupců dvě čísla mezi 1 a 20.
- Do dalších sloupců ať kamarád vždy napíše součet předchozích dvou.
- Na závěr ať kamarád spočítá součet všech čísel na kartičce.
- Udivte kamaráda tím, že výsledek oznámíte okamžitě, bude totiž roven 11násobku čísla v 7. sloupci (a násobit 11 jde snadno). Taky rovnou oznamte, že podíl 10. a 9. řádku je 1,6 (s přesností na jedno desetinné místo).

Úloha zní: *Dokažte, že trik funguje. To jest, že vaše odpověď bude vždy správná bez ohledu na to, jaká čísla váš kamarád vybral.*

Příklad 1. Předpokládejme, že kamarád vybere čísla 7 a 12. Na kartičce pak bude napsáno:

7	12	19	31	50	81	131	212	343	555
---	----	----	----	----	----	-----	-----	-----	-----

Součet je $1441 = 11 \cdot 131$ a podíl $555/343 \doteq 1,6$.

Minule jsme zadávali úlohy související s kombinačními čísly a Pascalovým trojúhelníkem.

- *Dokažte, že v n -tém řádku Pascalova trojúhelníku je počet lichých čísel roven $2^{s(n)}$, kde $s(n)$ je součet číslic v binárním zápisu čísla n .*

Již minule jsme uváděli větu z knihy [1], na které je určování parity kombinačních čísel založeno.

Věta 1. *Pokud n je sudé a k je liché číslo, pak $\binom{n}{k}$ je sudé. Jinak platí¹⁾*

$$\binom{n}{k} \equiv \binom{\lfloor n/2 \rfloor}{\lfloor k/2 \rfloor} \pmod{2}.$$

Napovídali jsme, že se parita dobře počítá, když uvažujeme binární zápis čísel. Připomeňme, že binární zápis přirozeného čísla n je posloupnost $(a_d a_{d-1} \dots a_1 a_0)$, kde číslice $a_0, a_1, \dots, a_{d-1}, a_d \in \{0, 1\}$, $a_d \neq 0$

$$n = a_d 2^d + a_{d-1} 2^{d-1} + \dots + a_1 2 + a_0.$$

V binárním zápisu snadno nahlédneme, že platí pravidla:

1. Číslo n je sudé, právě když $a_0 = 0$.
2. $\lfloor n/2 \rfloor$ má binární zápis $(a_d a_{d-1} \dots a_1)$, tj. vypustí se poslední číslice ze zápisu n .

Příklad 2. Opakovaným využíváním věty 1 určíme paritu $\binom{70}{38}$:

$$\binom{70}{38} \equiv \binom{35}{19} \equiv \binom{17}{9} \equiv \binom{8}{4} \equiv \binom{4}{2} \equiv \binom{2}{1} \equiv 0 \pmod{2},$$

tedy $\binom{70}{38}$ je sudé číslo. Využijme v příkladu binární zápisy čísel (doplňené nulami na stejnou délku) a pravidla 1. a 2.

$$\begin{pmatrix} 1000110 \\ 0100110 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 100011 \\ 010011 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 10001 \\ 01001 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1000 \\ 0100 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 100 \\ 010 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 10 \\ 01 \end{pmatrix} \equiv 0,$$

kde jsme využili, že $\binom{\text{sudé}}{\text{liché}}$ je sudé číslo.

Z příkladu můžeme odvodit obecné pravidlo. Kombinační číslo $\binom{n}{k}$ je sudé, právě když se v průběhu určování parity podle věty 1 objeví situace $\binom{\text{sudé}}{\text{liché}}$ neboli právě když se v binárním zápisu k objeví nějaká jednička na stejné pozici jako nula v binárním zápisu n .

Uvažujme opět číslo 70 s binárním zápisem (1000110). Pak $\binom{n}{k}$ je liché, právě když má k binární zápis (doplňený eventuálně nulami na délku zápisu n) $(x000yz0)$, kde $x, y, z \in \{0, 1\}$. Takových čísel je $2^3 = 8$.

Odtud již plyne dokazované tvrzení. Když zapíšeme číslo řádku n Pascalova trojúhelníku v binárním zápisu, pak $\binom{n}{k}$ je liché, právě když má binární zápis k (doplňený eventuálně nulami na délku zápisu n) nulu

¹⁾Dolní celá část reálného čísla x se značí $\lfloor x \rfloor$ a je to největší celé číslo $\leq x$.

všude tam, kde byla nula v binárním zápisu n . Abychom dostali všechna lichá čísla $\binom{n}{k}$, budeme volit mezi nulou a jedničkou v binárním zápisu k na pozicích, kde byla jednička v binárním zápisu n . Protože počet jedniček v zápisu n je $s(n)$, máme $2^{s(n)}$ různých voleb a dostaneme opravdu $2^{s(n)}$ lichých čísel v n -tém řádku Pascalova trojúhelníku.

Připomeňme další úlohy z minula. Pro libovolné přirozené číslo n označme jako $e(n)$ největší přirozené číslo takové, že $2^{e(n)}$ dělí n . Tedy pro $n = 2^r \cdot \ell$, kde ℓ je liché číslo, je $e(n) = r$. Například $112 = 2^4 \cdot 7$, tudíž $e(112) = 4$.

- Necht' $n \leq 2^j$. Dokažte, že $e(n!) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + \lfloor \frac{n}{2^2} \rfloor + \lfloor \frac{n}{2^4} \rfloor + \dots + \lfloor \frac{n}{2^j} \rfloor$.
- Najděte jednoduchý vztah mezi n , $s(n)$ a $e(n!)$.
- Vyjádřete $e\left(\binom{n}{k}\right)$ pomocí $s(n)$, $s(k)$ a $s(n-k)$.

Označme

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n = 2^m \cdot \ell, \quad \text{kde } \ell \text{ je liché.}$$

Pak každý násobek dvou $\leq n$ přispívá faktorem 2 do mocniny 2^m a takových násobků je $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Dále každý násobek čtyř $\leq n$ přispívá nejen faktorem 2, ale dokonce $2^2 = 4$, a takových násobků je $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$. Poté každý násobek osmi $\leq n$ přispěje opět dodatečným faktorem 2 atd. Proto

$$e(n!) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{2^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{2^4} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{n}{2^j} \right\rfloor.$$

K nalezení vztahu mezi n , $s(n)$ a $e(n!)$ využijeme právě odvozený vzorec pro $e(n!)$. Pokud n má binární zápis

$$n = a_d 2^d + a_{d-1} 2^{d-1} + \dots + a_2 2^2 + a_1 2 + a_0,$$

pak

$$e(n!) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{2^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{2^4} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{n}{2^d} \right\rfloor.$$

Snadno si rozmyslíme, že platí

$$\begin{aligned} \lfloor n/2 \rfloor &= a_d 2^{d-1} + a_{d-1} 2^{d-2} + \dots + a_2 2 + a_1 \\ \lfloor n/4 \rfloor &= a_d 2^{d-2} + a_{d-1} 2^{d-3} + \dots + a_2 \\ &\vdots \\ \lfloor n/2^{d-1} \rfloor &= a_d 2 + a_{d-1} \\ \lfloor n/2^d \rfloor &= a_d. \end{aligned}$$

MATEMATICKÉ OŘÍŠKY

Vysčítáním mocnin dvou postupně u koeficientů a_d, a_{d-1}, \dots, a_1 dostaneme

$$\begin{aligned} e(n!) &= \\ &= a_d(1+2+\dots+2^{d-1}) + a_{d-1}(1+2+\dots+2^{d-2}) + \dots + a_2(1+2) + a_1 = \\ &= a_d(2^d - 1) + a_{d-1}(2^{d-1} - 1) + \dots + a_2(2^2 - 1) + a_1(2 - 1) + a_0 - a_0 = \\ &= a_d 2^d + a_{d-1} 2^{d-1} + \dots + a_1 2 + a_0 - (a_d + a_{d-1} + \dots + a_1 + a_0) = \\ &= n - s(n). \end{aligned}$$

K vyřešení posledního úkolu si připomeňme definici kombinačního čísla

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Odtud plyne, že

$$\begin{aligned} e\left(\binom{n}{k}\right) &= e(n!) - e(k!) - e((n-k)!) = \\ &= n - s(n) - k + s(k) - (n-k) + s(n-k) = \\ &= s(k) + s(n-k) - s(n). \end{aligned}$$

Ilustrujme ještě výsledky na konkrétním příkladu. Např. $\binom{14}{4} = 1001$. Číslo 14 má binární zápis (1110), 4 má binární zápis (100) a 10 má binární zápis (1010), odtud

$$s(4) + s(10) - s(14) = 1 + 2 - 3 = 0 = e(1001).$$

Literatura

- [1] Aigner, M., Ziegler, G.: Proofs from THE BOOK. Springer-Verlag, Berlin, 2009.

Rozhledy matematicko-fyzikální jako svědkové šťastných náhod i systematického bádání

Ivo Kraus, ČVUT, Praha

Téměř do konce devatenáctého století převládal názor, že nejdůležitější fyzikální teorie jsou v podstatě hotové a struktura světa jasná. Příroda se jevila složená ze dvou forem hmoty; z nedělitelných atomů, vytvářejících všechny možné látky, mikroskopické i kosmické objekty, a ze zvláštního neviditelného a nevážitelného prostředí nazývaného éter, v němž probíhají elektromagnetické jevy. Stačilo však několik *šťastných náhod* v teorii i experimentu a zdánlivě nedotknutelné jistoty klasické fyziky přestaly platit. Existence éteru byla popřena, a když fyzikové poznali, že atom není nedělitelný, vstoupili do světa řízeného zcela jinými zákony. Krize ve fyzice, jak bývá nazýváno období vývoje této exaktní vědy na konci 19. století, měla zcela standardní řešení; pro výklad jevů v mikrosvětě byla zvolena nová východiska, především teorie relativity a kvantová hypotéza.

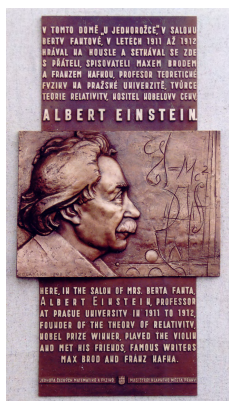
V roce 1889 George Francis FitzGerald uveřejnil v časopise *Science* tezi, že všechna tělesa se ve směru svého pohybu zkracují. Hendrik Antoon Lorentz využil tento závěr, k němuž několik let po FitzGeraldovi dospěl nezávisle také sám, pro objasnění experimentu, který v letech 1881 a 1887 připravili Albert Abraham Michelson a Edward Williams Morley. (Z měření rychlosti světla v různých směrech a v různých fázích pohybu Země na oběžné dráze kolem Slunce vyplynulo jednoznačně, že rychlost světla je konstantní.) Počátkem dvacátého století se tzv. Lorentzova–FitzGeraldova kontrakce délek stala důležitou součástí Einsteinovy speciální teorie relativity.

Vznik kvantové teorie má na svém počátku neúspěšné pokusy vybudovat teorii záření absolutně černého tělesa pomocí klasické fyziky (elektromagnetické teorie). Třebaže se odvozením zákona rozdělení ve spektru černého tělesa zabývala řada vynikajících fyziků druhé poloviny 19. století jako byl Gustav Robert Kirchhoff, Ludwig Boltzmann, Jožef Stefan, Wilhelm Wien, John William Strutt – 3. baron Rayleigh a James Jeans, jejich výsledky měly jen omezenou platnost. Správné univerzální řešení našel až Max Planck, když předpokládal, že látka (hmotné oscilátory)

vyzařuje energii po kvantech, která jsou úměrná frekvenci. Univerzální platnost Planckova vztahu jako první experimentálně potvrdil Heinrich Rubens.

O významu Planckovy kvantové hypotézy byl hned po jejím zveřejnění přesvědčen Albert Einstein. Na jejím základě objasnil fotoefekt, Stokesův zákon (vlnová délka luminiscenční emise při fotoluminiscenci je větší nebo rovna vlnové délce excitačního světla), fotoionizaci (vznik iontů absorpcí ultrafialového, rentgenového či gama záření) a.j.

Rok 1905, kdy Albert Einstein uveřejnil svou speciální teorii relativity a ukázal na možnosti využití kvantové teorie, je považován za počátek nové epochy vývoje fyziky a postupného utváření nového obrazu světa.



Pamětní deska na domě čp. 551 v Praze na Staroměstském náměstí

Od konce devatenáctého století se *klasická* fyzika změnila na *moderní*. Připomeňme si její úspěchy alespoň v názvech největších objevů, které byly známé ještě dříve, než v polovině dvacátých let vyšlo první číslo *Rozhledů*: rentgenové paprsky (1895), přirozená radioaktivita (1896), elektron (1897), polonium a radium (1898), záření alfa, beta gama (1899), Planckův vyzařovací zákon (1900), podstata radioaktivity (1903), statický model atomu (1904), podstata diamagnetismu a paramagnetismu (1905), kvantově mechanická teorie fotoefektu (1905), princip relativity a princip konstantní rychlosti světla (1905), vztah $E = mc^2$ mezi energií soustavy a její hmotností (1905), teorie Brownova pohybu (1905–1906), magnetické domény (1907), nízkoteplotní supravodivost (1911), klasický planetární model atomu (1911), difrakce rentgenového záření na krystalech (1912), kosmické záření (1912), kvantově mechanický planetární mo-

del atomu (1913), obecná teorie relativity (1916), první umělá přeměna prvků (1919), Comptonův jev (1923), vlnově-korpuskulární dualismus (1923), vylučovací princip (1924), princip magnetronu (1924).

„V každém národě je vždycky zapotřebí miliónů lidí, aby povstal génius, vždycky musí uplynout ve světě milióny únavných hodin, nežli udeří opravdu historická, hvězdná hodina lidstva.“ (Stefan Zweig, *Hvězdné hodiny lidstva*) V dějinách fyziky je takovou hvězdnou hodinou uplynulé století. Tři objevy založené na kvantové teorii – štěpná jaderná reakce (1938), tranzistorový jev (1947), zesilování světla stimulovanou emisí záření (1954) – vedly ve svých důsledcích k rozsáhlým sociálním změnám a v mnohém předurčily rozvoj nejen vyspělých zemí, ale prakticky celého světa. Běžnou součástí našeho povědomí se staly pojmy televize, tranzistor, laser, tomografie, hologram, jaderný reaktor, urychlovač částic, ale i černá díra nebo rozpínající se vesmír. Čtenáři *Rozhledů* měli o tom informace vždy z *první ruky* od českých fyziků.

Zvolit nejvýznamnější události určitého období je do jisté míry subjektivní. Nemůže to být proto jiné ani v přehledu objevů, které jsou datovány mezi letopočty 1925 až 2024.

1925

Spin elektronu

Spolupráce nizozemských fyziků Samuela Goudsmita s Georgem Uhlenbeckem při interpretaci výsledků spektroskopických měření vedla ke koncepci spinu elektronu. Navrhli uvažovat elektron jako rotující vlček (hračka, založená na principu setrvačnicku a gyroskopického efektu) s vlastním mechanickým a magnetickým momentem.

1925–1926

Kvantová mechanika

Počátkem dvacátých let 20. století bylo zřejmé, že do té doby nesystematicky aplikovaná pravidla kvantování, přidávaná ke klasické mechanice pro vysvětlení některých mikroskopických jevů, budou vyžadovat vytvoření nové konzistentní fyzikální teorie. Moderní kvantová mechanika má vlastní matematický aparát odlišný od klasické fyziky. Klasická fyzika se podle principu korespondence, formulovaného poprvé Nielsem Bohrem v roce 1923, považuje za aproximaci kvantové fyziky pro velké objekty.

Augerův jev

Energie E uvolněná při přechodu elektronu z vnější hladiny atomu do prázdného kvantového stavu ve vnitřní hladině se vyzáří jako foton, nebo

ji může převzít některý elektron z vnější energetické hladiny (pokud je ovšem jeho vazbová energie menší než E). Takovéto elektrony uvolněné z atomu jsou označovány Augerovy. Jev dostal jméno po francouzském fyzikovi Pierru Augerovi, i když jej už v roce 1923 popsala rakouská fyzička Lise Meitnerová.

Maticová kvantová mechanika

Werner Heisenberg vytvořil koncepci kvantové mechaniky, která neobsahovala neměřitelné nebo přímo nepozorovatelné charakteristiky elektronů v atomech, jako je např. jejich poloha, rychlost nebo trajektorie. Přímo pozorovatelnou veličinou je naproti tomu frekvence vyzařovaných spektrálních čar. Heisenberg chtěl matematicky popsat atom jako oscilátor, který je schopen vysílat záření pozorované frekvence. Aparát, pomocí něhož se mu podařilo experimentálně určené spektrální čáry vypočítat, byl vlastně maticový počet. Heisenbergovu teorii dále propracovali Max Born a Pascual Jordan.

Vlnová kvantová mechanika

V matematickém formalismu vlnové kvantové mechaniky jsou klasické fyzikální veličiny nahrazovány lineárními operátory, stav fyzikálního systému se popisuje vlnovou funkcí, jejíž časová závislost je určena Schrödingerovou rovnicí. Měřitelnými hodnotami fyzikálních veličin jsou vlastní hodnoty příslušných lineárních operátorů. Schrödinger dokázal, že vlnová kvantová mechanika a Heisenbergova maticová kvantová mechanika jsou ekvivalentní, obě vyjadřují totéž (pouze jinou formou) a vedou ke stejným výsledkům.



Rakouská bankovka s portrétem Erwina Schrödingera (1983) a průčelím hlavní budovy Vídeňské univerzity

Bornova pravděpodobnostní interpretace vlnové funkce

Druhá mocnina absolutní hodnoty vlnové funkce udává hustotu pravděpodobnosti, že částici najdeme v daném bodě o určitých souřadnicích.

Kvantová statistika

Paul Dirac a Enrico Fermi nezávisle na sobě popsali statistické chování částic s poločíselným spinem (fermionů) podřízených zákonům kvantové mechaniky.

1927

Heisenbergovy relace neurčitosti

Každým měřením je měřený systém ovlivněn. Např. polohu a hybnost (rychlost) mikroskopické částice není možné měřit současně s libovolnou přesností. Mezi neurčitostmi Δx souřadnice a neurčitostí Δp_x hybnosti platí nerovnost $\Delta x \cdot \Delta p_x \geq h$ (Planckova konstanta). Podobnou relací je vázána i dvojice energie E a čas t : $\Delta E \cdot \Delta t \geq h$ vztahující se k přesnosti určení energie a času, po který příslušný energetický stav trvá. V jistých mezích tedy řídí procesy ve vesmíru náhoda. Článek o tom Heisenberg napsal na jaře 1927 do časopisu *Zeitschrift für Physik*.

Komplementarita

Relace neurčitosti úzce souvisejí s komplementaritou. Podle Nielse Bohra aspekt částicový a vlnový jsou komplementární, to znamená, že se na jedné straně vzájemně vylučují, na straně druhé tvoří jeden celek. Komplementarita je charakteristická vlastnost kvantové mechaniky. V mikrosvětě je totiž projev elementárních útvarů, např. elementárních částic, závislý na způsobu jejich zkoumání. Útvar se jednou jeví jako částice, podruhé jako vlna. Bohrov systém (princip) komplementarity a Bornova pravděpodobnostní interpretace tvoří základ tzv. kodaňské školy kvantové mechaniky.

Difrakce elektronů na krystalech

Dualismus vlna-částice (vlnovou povahu elektronu) potvrdili objevem difrakce elektronů na krystalech američtí fyzikové Lester Germer a Clinton Davisson a nezávisle na nich také britský fyzik George Paget Thomson.

1928

Antičástice

Na základě své kvantově relativistické teorie elektronu (řešením tzv. Diracovy rovnice) předpověděl Paul Dirac existenci pozitronu a dalších antičástic.

Tunelový jev

Americký fyzik ukrajinského původu George Gamow pomocí vlnové mechaniky dokázal, že částice může s určitou pravděpodobností projít (protunelovat se) potenciálovou bariérou, která je vyšší než energie částice.

Ramanův rozptyl světla

Indický fyzik Chandrasekhara Venkata Raman zjistil, že při průchodu světla látkou dochází ke změně jeho vlnové délky. Příčinou je interakce fotonů s částicemi (atomy, molekulami). Přejde-li částice do vzbuze-ného stavu, bude mít rozptýlený foton nižší energii než foton dopada-ající, přejde-li ze vzbuze-ného stavu do stavu základního, energie fotonu vzroste. Podle hodnot změny energie lze usuzovat na některé vlastnosti látky. Teorii Ramanova rozptylu vypracoval a v roce 1934 publikoval brněnský rodák Georg Placzek.

1929

Rozpínání vesmíru

Americký astronom Edwin Hubble při studiu spekter světla vyslaného vzdálenými galaxiemi zjistil, že spektrální čáry jsou posunuty k červenému konci spektra tím více, čím je galaxie od nás dál. Jinými slovy: Mezi rychlostí, s níž se galaxie vzdalují, a jejich vzdáleností, je přímá úměrnost.

1930

Neutrino

Aby mohl Wolfgang Pauli vysvětlit energetickou bilanci radioaktivního rozpadu beta, postuloval existenci částice s nulovým nábojem a velmi malou klidovou hmotností. (Vyslovil předpoklad, že s elektronem je vždy vyzářeno i neutrino, a to tak, že součet energií neutrina a elektronu je konstantní.) Experimentálně existenci neutrina potvrdili v roce 1956 američtí fyzikové Clyde Cowan Jr. a Frederick Reines.

Antiferomagnetismus

Francouzský fyzik Louis Néel vyslovil domněnku o existenci magnetického chování zvaného antiferomagnetismus v protikladu k feromagnetismu. Tento jev mizí pod určitou teplotou zvanou Néelova teplota.

Vynález cyklotronu

Ernest Orlando Lawrence zkonstruoval zařízení k urychlování těžkých nabitých částic pomocí vysokofrekvenčního elektrického pole. První funkční prototyp cyklotronu měl průměr cca 10 cm a výstupní energii 80 keV.

1930–1931**Pásová struktura pevných látek**

Ke vzniku pásového modelu elektronové struktury pevných látek přispěli zejména fyzikové Felix Bloch, Léon Brillouin, Frederic Seitz, Eugene Wigner, Ralph Kronig a William Penney.

1932**Složení atomového jádra z protonů a neutronů**

Tuto hypotézu vyslovili nezávisle na sobě Werner Heisenberg a sovětský fyzikové Dmitrij Dmitrijevič Ivaněnko a Igor Jevgeněvič Tamm.

Pozitron

Americký fyzik švédského původu Carl David Anderson identifikoval v kosmickém záření pozitron (antičástici elektronu, kterou už dříve předpověděl Paul Dirac).

Neutron

Při ostřelování jader berylia částicemi alfa objevil James Chadwick částici, která neměla elektrický náboj.

1933**Meissnerův–Ochsenfeldův jev**

Němečtí fyzikové Walther Meissner a Robert Ochsenfeld zjistili, že uvnitř supravodivého vzorku je indukce vnějšího magnetického pole nulová, supravodič (supravodič I. druhu) se chová jako ideální diamagnetická látka.

Anihilace částic

Britský fyzik Patrick Blackett, německý fyzik Otto Kremperer a další pozorovali přeměnu kvant záření gama v blízkosti atomového jádra na elektron a pozitron. Při opačném procesu může dojít k anihilaci obou částic, přesněji řečeno k jejich přeměně v částice o nulové klidové hmotnosti (nejčastěji dva fotony o energii 0,511 MeV), které se pohybují v navzájem opačných směrech. Energie původních částic se uvolní ve formě záření o energii vyjádřené rovnicí $E = mc^2$.

1934**Umělá radioaktivita**

Frédéric Joliot a Irène Joliotová-Curieová zjistili, že při ostřelování hliníku částicemi alfa se hliník mění na nestabilní izotop fosforu a ten dále na stabilní křemík.

Teorie rozpadu beta

Enrico Fermi uveřejnil teorii rozpadu β , pomocí níž se podařilo vysvětlit, jakým způsobem atomové jádro uvolňuje elektrony a jakou úlohu při tom mají neutrína. Ve své teorii zavedl pojem slabá interakce.

Štěpení atomových jader neutrony

Enrico Fermi zjistil, že přeměnu jader těžkých prvků lze uskutečnit ostřelováním neutrony a že pro vyvolání jaderné reakce jsou zvláště vhodné ty neutrony, které prošly blokem parafinu.

Čerenkovovo záření

Záření, které objevili ruští fyzici Sergej Ivanovič Vavilov a Pavel Alexejevič Čerenkov, vzniká při pohybu nabitě částice prostředím, je-li rychlost šíření světla v tomto prostředí menší než rychlost částice. Přesnou teorii tohoto jevu vypracovali roku 1937 Čerenkovovi kolegové Ilja Michajlovič Frank a Igor Jevgeněvič Tamm.

1935

Silná jaderná interakce, objev mezonu

Protože přitažlivá gravitační síla protonů je proti jejich odpudivé elektrostatické síle zanedbatelná, musí udržení kladně nabitých protonů v malém objemu jádra zajistit nová síla. Japonský fyzik Hideki Yukawa popsal krátkodosahové přitažlivé síly mezi protony a neutrony (vytvořil první teorii silné interakce) pomocí další částice, jejíž hmotnost leží mezi hmotnostmi elektronu (je cca 200krát větší) a protonu; pojmenoval ji proto mezon. (Název vychází z řeckého mesos = střední.) Když byla v roce 1947 tato částice skutečně objevena, dostala název π -mezon (pion).

1936

Difrakce neutronů

První experimenty s difrakcí neutronů provedli v Pupinově laboratoři Kolumbijské univerzity (USA) fyzikové Dana P. Mitchell s Philipem N. Powersem a ve stejné době v Paříži také Hans von Halban s Pierrem Preiswerkem. Neutrony emitované zdrojem Ra-Be a následně zpomalené vrstvou parafinu se při interakci s atomy monokrystalu MgO rozptylovaly podobně jako rentgenové záření. Praktický význam však metody neutronové difrakce začaly mít teprve po výstavbě výzkumných jaderných reaktorů, které umožnily získat dostatečně intenzivní svazky neutronů.

Objev mionu v kosmickém záření

Carl David Anderson identifikoval se svým diplomantem Sethem Neddermeyerem subatomární částici 207krát hmotnější než elektron. Zpočátku

se domnívali, že jde o částici, kterou postuloval Hideki Jukawa. Dnes je zařazena mezi nabitě leptony s názvem *mion*.

1938

Kapkový model atomového jádra

Bohrův kapkový model vychází z analogií mezi kapkou kapaliny a atomovým jádrem. Jádro je chápáno jako kapka nestlačitelné nukleonové kapaliny, ve které se projevují objemové i povrchové síly. Model je vhodný pro názorné představy průběhu jaderných reakcí, např. štěpení a syntézy. Jeho nedostatky jsou důsledkem nedokonalosti analogie mezi klasickou kapkou kapaliny a nerespektování zákonitostí kvantové mechaniky.

Štěpení uranu

Pokusy, které provedli němečtí radiochemikové Otto Hahn a Fritz Strassmann a teoreticky objasnila rakouská fyzička Lise Meitnerová se svým synovcem Otto Robertem Frischem, bylo prokázáno, že neutron zpomalený průchodem vrstvou vody nebo parafinu může rozštěpit těžké jádro uranu 235 na dvě přibližně stejně těžká jádra (např. Ba a Kr) a 2 až 3 neutrony.

Hahn se Strassmannem publikovali své výsledky začátkem ledna 1939 v článku „Über den Nachweis und das Verhalten der bei der Bestrahlung des Urans mittels Neutronen entstehenden Erdalkalimetalle“ v časopise *Naturwissenschaften* 27 (1939), 11. Meitnerová s Frischem svou interpretaci pokusů „Disintegration of Uranium by Neutrons: A New Type of Nuclear Reaction“ zaslali do *Nature*, kde vyšla 11. února 1939.

Využití stimulované emise

Sovětský fyzik Valentin Alexandrovič Fabrikant navrhl způsob využití stimulované emise k zesílení krátkých vlnových délek světla.

Energie hvězd

Americký fyzik německého původu Hans Bethe a nezávisle na něm německý fyzik Carl Friedrich Weizsäcker popsali mechanismus reakcí, které dodávají hvězdám energii.

1939

Černá díra

Američan německého původu Julius Robert Oppenheimer spolu s americkým fyzikem Hartlandem Snyderem předpověděli, že hroučící se velmi hmotná hvězda vytvoří černou díru.

1940

Spontánní štěpení uranu

V časopise *Physical Review* vyšlo krátké sdělení „Spontaneous Fission of Uranium“, jehož autory byli sovětsí fyzikové Georgij Nikolajevič Fljorov a Konstantin Antonovič Petržak.

1941

Makroskopická teorie supratekutosti helia

Sovětský fyzik Pjotr Leonidovič Kapica roku 1937 zjistil, že kapalné helium je při teplotách pod 2,17 K supratekuté (má nulovou viskozitu). Makroskopickou teorii supratekutosti helia vypracoval v roce 1941 sovětský fyzik Lev Davidovič Landau.

1942

První kontrolovaná řetězová jaderná reakce

Pod vedením Enrica Fermiho byla 2. prosince 1942 v suterénu jedné z tribun chicagského univerzitního stadionu spuštěna první řízená samovolná řetězová jaderná reakce. Třicetiminutový experiment měl celkem 50 svědků.



Jaderný reaktor Chicago Pile-1 (CP-1); Gary Sheehan, Birth of Atomic Age, Chicago Historical Society

1944

Autofázový princip

Sovětský fyzik Vladimír Josifovič Veksler a nezávisle na něm také Američan Edwin Mattison McMillan formulovali princip umožňující konstrukci výkonných urychlovačů. Fázová stabilita urychlovaných nabitých částic byla dosahována odpovídajícím růstem magnetického pole nebo změnou frekvence elektrického pole v urychlujících úsecích urychlovače.

1945

Neřízené řetězové jaderné reakce

Na vojenské střelnici u Alamogorda v Novém Mexiku v USA byl pro-

veden pokusný výbuch první atomové pumy (16. 7.), další měsíc (6. 8.) svrhli Američané atomovou pumu s uranovou náloží na Hirošimu a (9. 8.) pumu s plutoniou náloží na japonský přístav Nagasaki.

1946

Radiouhlíkové datování

Americký fyzikální chemik Willard Frank Libby zavedl metodu radiometrického datování (určování stáří látek obsahujících uhlík, především organických materiálů).

Jaderná magnetická rezonance

Metoda, jejíž objev je připisován americkým fyzikům Edwardu M. Purcellovi a Felixu Blochovi, využívá skutečnosti, že protony i neutrony, a tedy i celé atomové jádro, lze charakterizovat magnetickým momentem. (Jako magnetické dipóly se však jeví pouze jádra s lichým nukleonovým číslem.) Jde o absorpci vysokofrekvenčního elektromagnetického pole, která je spojena se změnami orientace jaderných magnetických momentů ve vnějším homogenním magnetickém poli. Metoda dovoluje zkoumat s velkou přesností některé vlastnosti atomových jader a kondenzovaných látek.

Synchrotronové záření

Toto elektromagnetické záření vzniká při pohybu relativistických nabitých částic po zakřivené dráze. Je vyzářováno ve směru pohybu částice podél tečny k její dráze a pokrývá velkou část elektromagnetického spektra. Podrobnou teorii synchrotronového záření podal v roce 1946 americký fyzik polského původu Julian Schwinger.

Objev pionu

Při výzkumu kosmického záření ve velkých nadmořských výškách objevil britský fyzik Cecil Frank Powell elementární částici pion (π -meson), jejíž existenci už v roce 1935 předpověděl Hideki Yukawa.

1947

Princip holografie

Holografie je trojrozměrná rekonstrukce obrazu založená na interferenci a difrakci koherentního světla. Princip holografie objevil britský fyzik maďarského původu Dénes Gábor. První hologram byl vytvořen roku 1962 (tj. až po objevu laseru) v USA.

Tranzistorový jev

V Bellových laboratořích (New Jersey, USA) objevili Američané William

B. Shockley, John Bardeen a Walter H. Brattain tranzistorový jev. Po zvládnutí výroby příměsových polovodičů se tranzistor stal základem elektronických obvodů používaných prakticky ve všech běžných elektronických přístrojích. Název této součástky (agl. *transistor* = *transfer resistor*) vyjadřuje její vlastnost, že odpor řízeného obvodu se mění proudem obvodu řídicího.

Teorie ferimagnetismu

Francouzský fyzik Louis Néel vypracoval fenomenologickou teorii ferimagnetismu.

1949

Feynmanovy diagramy

Tato fyzikální grafická metoda byla vytvořena americkým fyzikem Richardem Feynmanem k popisu mechanismu interakcí elementárních částic. Každá linie diagramu představuje částici a každý vrchol interakci. Poprvé byla Feynmanova technika použita při popisu interakcí elektronů, pozitronů a fotonů, později se stala univerzálním teoretickým nástrojem kvantové fyziky, resp. kvantové elektrodynamiky.

1950

Izotopický jev

Americký fyzik Emanuel Maxwell experimentálně zjistil závislost kritické teploty supravodiče na izotopickém složení jeho atomů.

1952

Bublínková komora

Autorem zařízení k detekci rychlých nabitých částic byl americký fyzik Donald A. Glaser. Při průchodu částice přehřátou kapalinou se podél její trajektorie uvolňují bublinky páry. Tím je dráha částic zviditelněna. Americký fyzik Luis Walter Alvarez pomocí tohoto částicového detektoru objevil značné množství velmi krátce žijících částic, tzv. rezonancí.

Princip maseru

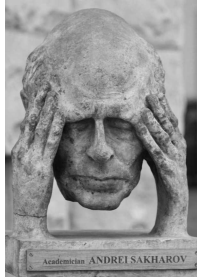
Sovětský fyzikové Nikolaj Basov a Alexander Prochorov popsali princip maseru (Microwave Amplifikation by Stimulated Emission of Radiation), tj. zesilování mikrovln pomocí stimulované emise záření.

1952–1953

Neřízená termonukleární reakce

Základním problémem při syntéze dvou jader je jejich vzájemné odpuzo-

vání vyvolané kladným nábojem. Na překonání této coulombovské bariéry lze využít např. energii z chaotického tepelného pohybu. První termojaderná syntéza lehkých jader na jádra těžší byla uskutečněna Američany roku 1952 na tichomořském atolu Eniwetok. Za vynálezce vodíkové bomby je považován americký fyzik a chemik maďarského původu Edward Teller. Sovětský svaz provedl zkoušku vlastní vodíkové pumy v roce 1953; rozhodující zásluhu na tom měl Andrej Dmitrijevič Sacharov.



P. J. Šapiro: Busta „duchovního otce“ sovětské vodíkové bomby a laureáta Nobelovy ceny za mír Andreje Dmitrijeviče Sacharova

1953

První funkční maser

Američan Charles H. Townes se svými studenty zkonstruoval první funkční maser.

Slupkový model atomového jádra

Model vypracovaný německou fyzičkou Marií Goeppertovou–Mayerovou a německým jaderným fyzikem Johannesem Hansem Danielem Jensenem vychází z analogie mezi vlastnostmi elektronového obalu atomu a pozorovanými vlastnostmi atomového jádra. Podle tohoto modelu obsazují jednotlivé nukleony diskrétní hladiny (slupky) obdobně jako elektrony v atomovém obalu. Na návrhu slupkového modelu jádra ve stejné době pracovali také německý fyzik Otto Haxel a rakouský jaderný fyzik Hans Suess.

1954

Teorie supravodičů II. typu

Teorii chování supravodičů II. typu (supravodiče, u nichž není Meissnerův jev dokonalý) popsal sovětský fyzik Alexej Alexejevič Abrikosov. Ve své práci navázal na teorii Vitalije Lazareviče Gingsburga a Lva Davidoviče Landaua z roku 1950.

1955

Objev antiprotonu

Antiproton má záporný náboj, a proto odpuzuje elektron a přitahuje pozitron s kladným nábojem. Absolutní většina antiprotonů v běžném látkovém prostředí během 100 nanosekund anihiluje. Jako první je vytvořili a detekovali italský fyzik Emilio Gino Segrè a americký fyzik Owen Chamberlain.

Důkaz vnitřní struktury nukleonů

Robert Hofstadter pomocí rozptylu elektronů na atomových jádrech dokázal, že nukleony (protony a neutrony) mají vnitřní strukturu, a nelze je tedy považovat za bodové částice.

1956

Zobecněný model atomového jádra

Tento zatím nejdokonalejší model atomového jádra, který navrhli společně Aage Niels Bohr, Ben Roy Mottelson a Leo James Raiwater, sjednocuje model kapkový se slupkovým. Centrální část jádra je obdobou jaderné kapky, v jejímž poli se pohybují vnější nukleony.

Objev antineutronu

Elementární částici *antineutron* objevil v Lawrenceově Národní laboratoři v Berkeley Američan Bruce Cork.

Experimentální důkaz neutrina

Frederick Reines s Clydem Lorainem Cowanem Jr. na jaderném reaktoru v Jižní Karolině (Savannah River Site) experimentálně potvrdili existenci neutrina, které v roce 1930 předpověděl Wolfgang Pauli.

1957

Konstrukce a teorie laseru

Američan Charles H. Townes a jeho švagr, Američan lotyšského původu Arthur L. Schawlow, navrhli konstrukci laseru (Light Amplifikation by Stimulated Emission of Radiation – zesilování světla stimulovanou emisí záření). Téhož roku vypracovali N. Basov a A. Prochorov teorii laseru.

Mikroskopická teorie supravodivosti

Američané John Bardeen, Leon Cooper a John Schrieffer vypracovali mikroskopickou teorii supravodivosti. Podle této *BCS-teorie* je podstatou supravodivosti taková interakce volných elektronů a fononů (kmitů krystalové mřížky), která vede ke vzniku vázaných dvojic elektronů, tzv. Cooperových párů.

Porušení zákona zachování parity

Američané čínského původu, experimentální fyzička Chien-Shiung Wu a teoretici Chen-Ning Yang a Tsung-Dao Lee ukázali, že u tzv. slabých interakcí se parita nezachovává, tj. zákon parity v přírodě obecně neplatí.

1958**Integrovaný obvod**

Američané Jack Kilby a Robert Noyce zhotovili první germaniové a křemíkové integrované obvody.

Tunelový jev v polovodičích a supravodičích

Japonský fyzik Leo Esaki objevil tunelový efekt u polovodičů; tím byl tento typický jev kvantové mechaniky demonstrován na makroskopické úrovni. U supravodičů tunelový jev pozoroval norský fyzik Ivar Giaever a teoreticky objasnil britský fyzik Brian Josephson.

Mössbauerův jev

Jestliže volný nepohyblivý atom ze svého jádra emituje foton (kvantum záření gama), budou (v důsledku zpětného odrazu jádra a splnění zákona zachování hybnosti) hybnosti jádra a fotonu opačné. Vlnová délka emitovaného záření závisí v tomto případě na velikosti zpětného rázu. Je-li foton vyzářen jádrem atomu vázaného v krystalové mřížce, může být energie zpětného rázu jádra předána celému krystalu; vlnová délka emitovaného záření gama potom zpětným rázem jádra není ovlivněna. Tento jev, objevený německým fyzikem Rudolfem Mössbauerem, je základem tzv. Mössbauerovy spektroskopie.

1960**Rubínový laser**

Americký fyzik Theodore H. Mainmann zkonstruoval první funkční pevnolátkový tříhladinový rubínový laser.

1962**Objev dvou typů neutrin**

Americký fyzik Leon Max Lederman (*1922) experimentálně potvrdil existenci dvou odlišných typů neutrin (elektronového a mionového).

1963**Heterogenní polovodičové struktury**

Sovětský fyzik Žores Ivanovič Alfjorov a nezávisle na něm také americký fyzik Herbert Kroemer navrhli koncept heterogenních polovodičových

struktur, který později umožnil jejich využití ve vysokorychlostní elektronice a optoelektronice.

1964

Kvarky a antikvarky

Existence velkého počtu hadronů (částic, které mezi sebou interagují velkými silami) přivedla v roce 1964 americké fyziky Murraye Gell-Manna a Georga Zweiga k domněnce, že tyto částice musí být složeny z menšího množství základních stavebních elementů – kvarků a jim příslušajících antikvarků.

1965

Reliktní záření

Reliktní záření (pozůstatek raného období vývoje vesmíru), které náhodou objevili Američané Arno Penzias a Robert Wilson, bylo už v roce 1946 předpovězeno kosmologickou teorií Velkého třesku amerického fyzika ruského původu Georga Gamowa.

1967

Teorie elektroslabé interakce

Američan Steven Weinberg a Pakistánec Abdus Salam vypracovali sjednocenou teorii slabých a elektromagnetických interakcí mezi elementárními částicemi.

Objev pulsaru

V srpnu 1967 objevila britská astronomka Jocelyn Bellová (*1943) v souhvězdí Lišky v Mléčné dráze rádiový zdroj, který vysílal své signály s mimořádně přesnou periodou. Od roku 1968 jsou pulzující hvězdy nazývány pulsary. Pulsar je neutronová hvězda, jejíž magnetická a rotační osa nemají shodný směr, a proto při rotaci vytváří majákovým efektem iluzi pravidelných záblesků (pulzů), zpravidla rádiových.

1970

Strunové teorie

Japonský fyzik Yoichiro Nambu, americký fyzik Leonard Susskind a dánský fyzik Holger Bech Nielsen navrhli představu fyzikální struny. Podle této teorie základními stavebními kameny nejsou objekty bodové (částice), ale jednorozměrné (mající délku). Chovají se jako nekonečné tenké kmitající struny, a to buď otevřené, tj. se dvěma konci, nebo uzavřené do smyčky. Dvě struny se mohou spojit do jedné, a naopak jedna struna se může rozdělit na dvě. To, co byla dříve částice, je nyní vlna na struně.

Veškeré interakce částic (vznik a pohlcení) se redukuje na spojování strun a jejich dělení.

Velký třesk

Britský matematický fyzik Roger Penrose společně s britským teoretikem Stephenem Hawkingem rozpracovali teorii G. Gamowa, podle níž vesmír vznikl z počáteční singularity (prostoru s nulovým objemem a nekonečnou hustotou i zakřivením) nesmírnou explozí, která má název Big Bang – Velký třesk. Tuto hypotézu podporují tři objektivně zjištěné skutečnosti: rozpínání vesmíru, objev reliktního záření a relativně velká koncentrace helia.

1974

Objev částice J/ψ

Tento nový druh elementární částice (J/ψ -meson) objevili nezávisle na sobě ve stejné době Burton Richter a Samuel Chao Chung Ting.

1975

Hawkingův efekt

Roger Penrose na základě Einsteinovy obecné teorie relativity dospěl k závěru, že pokud velmi hmotná hvězda zkolabuje svou gravitací, vznikne singularita – černá díra (objekt s nulovou velikostí, nepředstavitelnou hustotou a gravitační silou), z níž není úniku. To ovšem platí, jen pokud neuvažujeme kvantové jevy, jako je tunelování. Hawking doplnil Penrosovu teorii o tzv. kvantové vypařování černých děr (Hawkingův efekt): protože černá díra nemůže kumulovat energii donekonečna, musí z ní vycházet tepelné záření (Hawkingovo záření), což za určitých podmínek povede až k jejímu zániku.

1980

Kvantový Hallův jev

Kvantový Hallův jev je typický pro dvojrozměrné elektronové systémy, které mají vlastnosti kovové destičky o tloušťce srovnatelné s atomovými rozměry, zhruba 10 nm. Když u takové struktury Klaus von Klitzling v roce 1980 při nízkých teplotách a v silných magnetických polích měřil Hallův odpor, zjistil, že se v závislosti na magnetickém poli nemění lineárně, ale nabývá pouze diskretních, velmi přesně definovaných hodnot $R_H = h/n \cdot e^2 = R_K/n$, kde h je Planckova konstanta, e náboj elektronu, n celé číslo a $R_K = h/e^2$ Klitzingova konstanta. Tento jev je doprovázen poklesem napětí ve směru proudu; podélný odpor klesne o několik řádů, dvojrozměrný elektronový systém se chová jako ideální vodič.

1982

Zlomkový kvantový Hallův jev

Němec Horst L. Störmer, Číňan Daniel Tsui a Američan Robert B. Laughlin objevili zlomkový kvantový Hallův jev, kdy R_H nabývá diskrétních hodnot i v případech, kdy n je jednoduchý zlomek.

1983

Objev bosonů W^+ , W^- a Z^0 , které odpovídají za slabou (výměnnou) interakci v atomovém jádru a v reakcích elementárních částic.

1985

Fullereny

Protože uhlíkové atomy v obřích molekulách fullerenu jsou prostorově svinuty do tvaru koule nebo elipsoidu, mají fullereny mimořádnou odolnost vůči vnějším vlivům. Dosud nejstabilnější fullerén obsahuje 60 uhlíkových atomů. Čistá krystalická forma fullerenu, tvrdší než diamant, dostala název fullerit. Jestliže do volného prostoru krystalové struktury fulleritu začleníme např. atomy alkalických kovů, kyslík, helium apod., dostaneme fulleridy. Fulleren objevili tři chemici: Američané Robert Curl a Richard Smalley a Brit Harold Kroto.

1986

Vysokoteplotní supravodivost

Počátkem roku 1986 Němec Johannes George Bednorz a Švýcar Karl Alexander Müller zjistili, že sloučenina La-Ba-Cu-O má kritickou teplotu $T_C = 35$ K. Cílem je syntetizovat materiály, které by byly dlouhodobě supravodivé za pokojových teplot. Mechanismus vysokoteplotní supravodivosti není dosud uspokojivě vysvětlen.

1995

Objev top kvarku

Tato elementární částice, se od ostatních kvarků výrazně liší svou hmotností. Objevena byla ve Fermiho laboratoři v Chicagu.

2004

Grafén a grafan

Fyzikové ruského původu Andrej Konstantinovič Geim a Konstantin Sergejevič Novoselov objevili způsob přípravy dvojrozměrné alotropické modifikace uhlíku – grafénu. Jsou-li k uhlíkovým atomům v hexagonální síťce střídavě připojeny atomy vodíku (jeden zdola, sousední shora), vzniká rovinná struktura nazývaná grafan.

2012

Objev Higgsova bosonu

Tato elementární částice byla v roce 1964 předpovězena britským teoretickým fyzikem Peterem Higsem.

2015

Objev gravitačních vln

První přímé pozorování změny gravitačního pole vznikající pohybem hmotných těles s proměnným zrychlením a šířící se prostorem rychlostí světla bylo uskutečněno 14. 9. 2015.

2019–2024

V roce 2019 uveřejnil tým z Fyzikálního ústavu AV ČR v Praze a Gutenbergovy univerzity v Mohuči první ze série článků, v nichž teoreticky identifikoval nekonvenční magnetické materiály. O dva roky později byl nový typ magnetu nazván altermagnet.

Altermagnety si lze představit jako magnetické uspořádání v krystalové mřížce, kde se střídají nejen směry magnetických momentů sousedních atomů, ale také prostorová orientace atomů. Nicméně vnitřní magnetická pole modulují elektrický proud obdobně jako u feromagnetů. Tato kombinace vlastností je potenciálně velmi atraktivní pro aplikace v spintronice a nanoelektronice.

Experimentálně byl altermagnetismus jako třetí fundamentální typ magnetismu potvrzen mezinárodním týmem koordinovaným Tomášem Jungwirthem z Fyzikálního ústavu AV ČR (*Nature*, 14. února 2024).

Za sto let, během nichž vycházejí *Rozhledy*, došlo nejen ke grandióznímu rozvoji nejrůznějších technických oborů, ale nové fyzikální metody umožnily rozmach chemie, biologie, lékařské diagnostiky a terapie.

Ve stylu našeho života nastaly zásadní změny. Bohužel nejenom k lepšímu. Vědeckotechnický pokrok se podobá římskému bohu Janusovi, symbolu přeměny z jednoho stavu do druhého. Je jednotou protikladů – chvályhodných činů i neopatrného a neprozíravého využívání přírodních sil a civilizačních vymožeností.



Románská busta Janus, Vatikánská muzea

Věda vs. konspirace: K čemu vlastně důkazy?

Leontýna Štégrová, Jan Šlégr

Přírodovědecká fakulta Univerzity Hradec Králové

Abstrakt. Zejména s rozmachem sociálních sítí se na Internetu stále častěji setkáváme s různými konspiračními teoriemi. V tomto seriálu si ukážeme, že i když diskuse s jejich zastánci je naprosto zbytečná, může kritický rozbor jejich „argumentů“ posloužit jako užitečné cvičení v kritickém myšlení a jako ukázka toho, jak funguje vědecká metoda. V prvním díle našeho seriálu se podíváme na teorii ploché Země.

Úvod

Konspirační teorie je přesvědčení, že určité události nebo situace jsou výsledkem tajného spiknutí mocných skupin, které pravdu úmyslně skrývají před veřejností. Všechny tyto teorie mají společný základ v tvrzení, že běžně uznávaná vysvětlení chování světa kolem nás jsou nepravdivá nebo manipulovaná („mainstream nám lže!“), a údajně existuje skrytá pravda známá jen vyvoleným. Typickými znaky jsou nedůvěra vůči autoritám, odmítání vědeckých důkazů, hledání souvislostí tam, kde nejsou, a přesvědčení o záměrné manipulaci ze strany mocných skupin. Z psychologického pohledu jsou tyto teorie přitažlivé proto, že poskytují jednoduchá vysvětlení komplikovaných nebo chaotických událostí, pomáhají lidem cítit se výjimečně (znají „skutečnou pravdu“) a snižují pocit nejistoty a bezmoci v nepřehledném světě.

Konspirační teorie si můžeme představit jako cheaty v počítačových hrách: Buď hraje bez cheatů, což může být náročné a vyžaduje to čas i úsilí (v reálném světě to znamená třeba pečlivě studovat přírodní vědy), nebo použijeme cheat, zkratku – například video, které během několika minut nabízí jednoduché vysvětlení složitého problému. Díky takovým zkratkám se pak lidé snadno stanou „odborníky na všechno“ – na očkování, přistání na Měsíci, chemtrails nebo plochou Zemí – aniž by měli hlubší znalosti. Typickým znakem zastánců konspiračních teorií bývá používání frází jako „Nebuď ovce!“, „Použij mozek!“ nebo „Vystup z řady!“, přestože sami často spoléhají na neověřené informace ze sociálních sítí nebo internetových videí, které přebírají bez kritického ověření.

Teorie ploché Země

Přesvědčení o tom, že je Země plochá, můžeme najít pouze u nejstarších civilizací. Myšlenka Země jako koule se objevuje už ve starověkém Řecku: Aristotelés ve svých dílech popsál důkazy kulatosti Země, například že karavany cestující na jih vidí jižní souhvězdí stoupající nad obzor nebo že stín Země na Měsíci během zatmění Měsíce je kulatý. Teorie ploché Země v moderním smyslu se pak objevuje až v 19. století. Samuel Rowbotham v roce 1849 zveřejnil výsledky svých pokusů, kdy měřil zakřivení vodní hladiny v dlouhých vodních kanálech, přičemž mu vyšlo, že je Země plochá. V roce 1885 vydal William Carpenter své stěžejní dílo *100 Proofs That The Earth Is Not A Globe* [1]. Je však třeba poznamenat, že velká část „důkazů“ v těchto knihách si je velmi podobná a často představuje ukázkový příklad argumentačního faulu známého jako zahlcení informacemi (angl. proof by verbosity nebo Gish gallop). Tato taktika spočívá v zaplavování oponenta množstvím tvrzení, která mohou být i zcela nepravdivá. Většinu těchto „důkazů“ lze navíc snadno vyvrátit pomocí základních znalostí fyziky na úrovni prvního ročníku střední školy [2], [3].

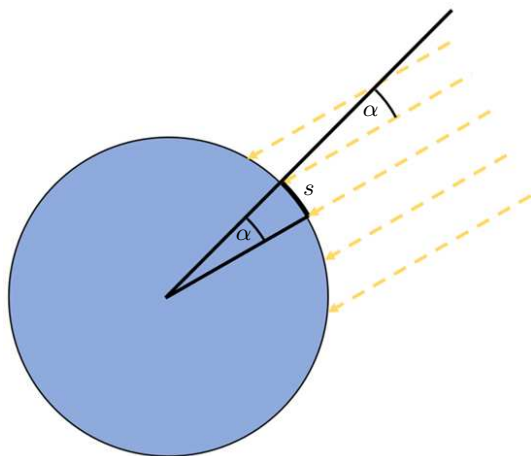
Ani tato skutečnost však neodrazuje některé internetové „osobnosti“, jako jsou Dominik Mrvík nebo Michal Shark, od vytváření fantastických vysvětlení a konstrukcí, když se snaží objasnit jevy, které na kulaté Zemi fungují přirozeně, avšak na ploché Zemi vyžadují zavádění celé řady komplikovaných předpokladů a hypotéz, aby se dospělo ke stejnému výsledku. Člověka by skoro napadlo, jestli by je nepřesvědčil nějaký jednoduchý experiment, který by například prokázal, že Země rotuje (jako je třeba Foucaultovo kyvadlo) nebo ze kterého by vyplývalo, že je Země kulatá.

Eratoshénovo měření

Eratosthenés z Kyrény byl řecký matematik, geograf a astronom, který žil ve 3. století př. n. l., a také hlavní knihovník Alexandrijské knihovny. Proslavil se tím, že jako první určil obvod Země s překvapivou přesností, a to pouze pomocí jednoduchých nástrojů a geometrických úvah.

Všiml si, že v městě Syene (dnešní Asuán v Egyptě) během letního slunovratu Slunce svítí přímo nad hlavou, takže předměty nevrhají žádný stín. V tu samou dobu v Alexandrii, která leží severně od Syene, však předměty stín vrhají. Tato rozdílná pozorování ho vedla k závěru, že

Země musí být zakřivená. Eratosthenés tedy během letního slunovratu v Alexandrii změřil úhel mezi stínem a svislicí a zjistil, že je přibližně $7,2^\circ$, což odpovídá jedné padesátině kruhu (360°). Z podobnosti trojúhelníků (obr. 1) pak odvodil, že vzdálenost mezi Syena a Alexandrií představuje jednu padesátinu obvodu Země. Věděl také, že vzdálenost mezi těmito dvěma městy je přibližně $s = 5\,000$ stadií (řecká jednotka délky). Tuto vzdálenost vynásobil 50 (protože $7,2^\circ$ je jedna padesátina z 360°), čímž dospěl k odhadu obvodu Země $250\,000$ stadií.



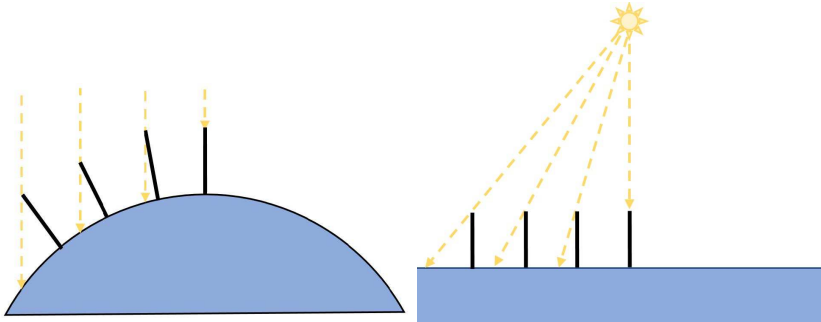
Obr. 1: Eratosthénovo měření poloměru Země

Tímto způsobem Eratosthenés dokázal s využitím jednoduchých pozorování a základní geometrie odhadnout obvod Země. Jeho práce je důkazem toho, jak mohou pečlivá pozorování vést k velkým objevům ve vědě. Dnes sice nevíme, kolik přesně jedno stadium měřilo, ale pokud přijmeme předpoklad, že to bylo 160 metrů, vyjde obvod Země s odchylkou menší než jedno procento!¹⁾

Je důležité si uvědomit, že délka stínu se na různých místech liší i v modelu ploché Země. Podle teorie ploché Země totiž Slunce není příliš vzdálené – obvykle se uvádí, že je několik tisíc mil daleko, což odpovídá přibližně 1 600 až 5 000 km. Klíčové však je, že délka stínu závisí na místě

¹⁾ Což je dost možná obyčejné štěstí, protože jak uvádíme výše, Eratosthenés vzdálenost měst pouze odhadl, navíc Syena a Alexandrie neleží na stejném poledníku a Syena navíc neleží přesně na obratníku raka.

pozorování (viz obr. 2). Na kulaté Zemi se délka stínu mění proto, že téměř paralelní paprsky z velmi vzdáleného Slunce dopadají na zakřivený povrch (obr. 2a).



Obr. 2a: Délka stínu na kulaté Zemi

Obr. 2b: Délka stínu na ploché Zemi

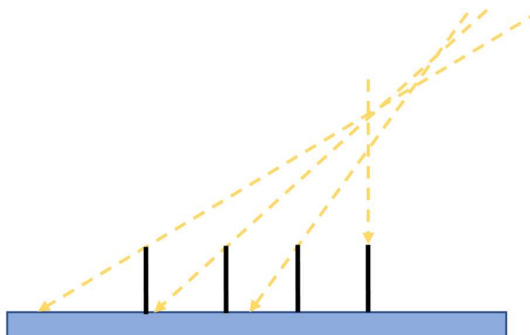
Délka stínu je funkcí zenitového úhlu α , který je roven rozdílu mezi zeměpisnou šířkou pozorovacího místa a zeměpisnou šířkou subsolárního bodu (místa na Zemi, kde je Slunce přímo v nadhlavníku (obr. 1)). Tento úhel je úměrný rozdílu zeměpisných šířek, ale délka stínu závisí na tangente tohoto úhlu

$$\text{Délka stínu} = \text{výška objektu} \times \text{tg } \alpha.$$

Funkce tangens není lineární, což znamená, že délka stínu nezávisí lineárně na rozdílu zeměpisných šířek ani na vzdálenosti mezi dvěma místy. Zakřivení Země způsobuje, že malé změny v zeměpisné šířce vedou k nelineárním změnám v zenitovém úhlu a tím i v délce stínu.

Na ploché Zemi však délka stínu závisí přímo úměrně na vzdálenosti obou míst, která je na ploché Zemi z principu horizontální (obr. 2b). Délka stínu by rostla lineárně s vzdáleností od bodu přímo pod Sluncem, protože úhel dopadu slunečních paprsků by se měnil přímo úměrně s touto vzdáleností.

Navíc, kdybychom přijali teorii ploché Země, určení vzdálenosti Slunce by nebylo možné, pokud bychom k výpočtu použili data z více než dvou míst – dvě polopřímky směrem ke Slunci by se protnuly v jednom bodě, ale tři a více už ne (obr. 3). Proto zastánci teorie ploché Země vždy měří jen ze dvou míst (a proto jim také může vyjít cokoliv od 1 600 km do 5 000 km).

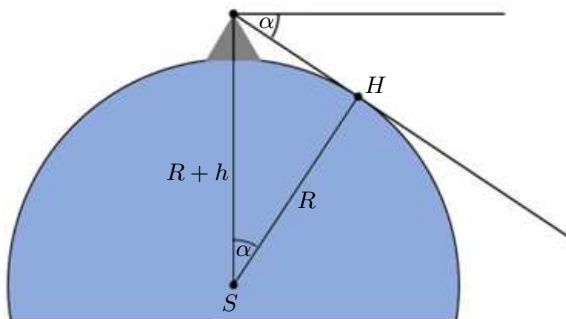


Obr. 3: Výsledek hypotetického měření vzdálenosti Slunce od ploché Země

Al-Bírúního měření obvodu Země

Abú Rajhán Al-Bírúní (973–1048) byl perský vědec, který žil na území dnešního Uzbekistánu. Zabýval se matematikou, astronomií, geografii a historií, přičemž proslul svou mimořádnou schopností spojovat teoretické poznatky s praktickými experimenty. Byl jedním z nejvýznamnějších učenců islámského zlatého věku a patřil k prvním, kdo zavedli vědecké metody měření ve fyzice a geografii.

Al-Bírúního metoda měření obvodu Země spočívala v pozorování horizontu z vrcholu hory poblíž pevnosti Nandana (dnešní Pákistán). Nejprve pomocí jednoduché trigonometrie určil výšku h této hory: změřil úhel, pod kterým vidí vrchol hory ze dvou vzdálených míst, jejichž vzdálenost znal. Poté z vrcholu téže hory změřil úhel α mezi horizontem a vodorovnou rovinou pomocí astrolábu. Pomocí trigonometrických výpočtů následně určil poloměr Země, a tím i její obvod.



Obr. 4: Al-Bírúního měření obvodu Země

Al-Bírúní dosáhl velmi přesných výsledků – jeho hodnota obvodu Země (přibližně 40 000 km) byla překvapivě blízka dnešním měřením (skutečný obvod je cca 40 075 km). Tento experiment je dodnes považován za vynikající příklad precizního uplatnění geometrie v přírodních vědách.

Další experimenty v teorii ploché Země

Přestože sami zastánci těchto teorií tvrdí, že své závěry zakládají na experimentování (když se podíváte na obzor, přece není zakřivený!), obvykle pouze opakují informace, které se někde dočetli a zapadají do jejich systému hodnot, takže je přijímají nekriticky. Pokud se rozhodnou svá tvrzení ověřit experimentálně, obvykle to pro ně nedopadne dobře. Je znám případ, kdy si zastánci teorie ploché Země koupili nesmírně drahý laserový gyroskop, aby jednou provždy dokázali, že Země nerotuje. K jejich překvapení přístroj ukázal úhlovou rychlost rotace patnáct stupňů za hodinu, kterou předpovídá „mainstreamová věda“ [4].

Zajímavá je i argumentace ohledně Foucaultova kyvadla, které rovněž jednoznačně dokazuje rotaci Země. Protože je Země rotující neinerciální soustava, působí v ní zdánlivá Coriolisova síla – když se objekt pohybuje po zakřiveném povrchu rotující planety, jeho dráha se zdánlivě odchyluje – na severní polokouli se odchyluje doprava, na jižní doleva. Tato síla mimo jiné způsobuje, že na severní polokouli se hurikány otáčejí proti směru hodinových ručiček a na jižní polokouli opačně.

Pokud necháme dostatečně dlouho kývat kyvadlo, zjistíme, že se jeho rovina kyvu vlivem Coriolisovy síly stáčí, přičemž pro periodu tohoto stáčení platí

$$T = \frac{23 \text{ h } 56 \text{ min}}{\sin \varphi},$$

kde 23 hodin a 56 minut je doba, za kterou se Země otočí do původní polohy vůči vzdáleným hvězdám (tzv. hvězdný den), a φ je zeměpisná šířka místa, kde je kyvadlo zavěšeno. Na pólech je tedy perioda tohoto stáčení jeden hvězdný den – můžeme si to představit tak, že kyvadlo se volně otáčí a pod ním se otáčí Země. Tento pokus byl mimo jiné proveden na polární výzkumné stanici poblíž jižního pólu [5]. Na rovníku by se rovina nestáčela (perioda vychází nekonečná), protože tam na kyvadlo Coriolisova síla nepůsobí (proto také nikdy žádný hurikán nepřekročil rovník). V teorii ploché Země však rovník nemá žádné výsadní postavení, je to myšlená kružnice na ploché mapě. Proč by tedy měl mít rovník vliv na to, na kterou stranu se bude rovina kyvu Foucaultova kyvadla stáčet?

Podle zastánců teorie ploché Země jsou proto veškerá Foucaultova kyvadla v muzeích, na hvězdárnách a v science centrech podvržená – obsahují totiž magnetické cívký (což je v některých případech pravda), které uměle stáčejí rovinu kyvu tak, aby byla v souladu s tím, co předpovídá „teorie rotující Země“ (což pravda není). Cívký jsou někdy používány z důvodu kompenzace ztrát, pokud se má kyvadlo kývat po celou otevírací dobu instituce. I kdyby snad cívký stáčení roviny kyvu pomáhaly, rozhodně to nevysvětluje, proč Foucaultovo kyvadlo fungovalo Foucaultovi v roce 1851, Flammarionovi v roce 1902 a také autorům tohoto článku v roce 2019, přestože nikdo z nich magnetické cívký nepoužíval.

To všechno jsou ale zcela zbytečné úvahy, protože teorie ploché Země nedokáže vysvětlit ani takové věci, jako kde je Slunce, když zrovna nesvíí. Pokud totiž obíhá nad plochou Zemí, musí fungovat trochu jako lampička – svítit pouze v omezeném kuželi, pod kterým je zrovna den. To je další typický znak konspiračních teorií – jejich zastánci naprosto přesně vědí „co to není“ (Země není kulatá), ale buď odpověď na otázku „co to tedy je“ vůbec nemají, protože je nezajímá, nebo vytvářejí velmi náročné myšlenkové konstrukce, které však nepřezijí první setkání s Ockhamovou břitvou²⁾.

Závěr

Když dr. Grygar v roce 2009 prohlásil, že by ho nikdy nenapadlo, že se setká s člověkem, který by zpochybňoval přistání na Měsíci [6], nejspíš nepočítal s tím, že o pár let později bude diskutovat s oponentem, který popírá kulatost Země [7]. Od té doby získává teorie ploché Země čím dál větší popularitu, zejména na sociálních sítích (i když jisté pochybnosti o kulatosti Země někdy vyjadřují i vysocí státní úředníci [8]). Silnějším povahám autoři doporučují trojici videí [9], kde se zastánci této teorie diskutuje profesionální debatér Tim Kožuchov, kosmický inženýr Jan Lukačevič a kosmonaut Vladimír Remek (který s nimi popravdě řečeno moc nediskutoval, protože správně usoudil, že to nemá cenu).

Jakákoliv diskuse se zastánci ploché Země je totiž nemožná. Psychologové Everett, Faber a Crockett ukázali, že zastánci konspiračních teorií nezakládají své názory na racionálním posouzení objektivních faktů. V jejich konání hrají roli názory běžné v jejich sociální skupině, a pokud

²⁾Ockhamova břitva je nesmírně užitečný logický princip formulovaný již ve 14. století Williamem z Ockhamu. Jedna z možných formulací zní „Pokud pro nějaký jev existuje vícero vysvětlení, je lépe upřednostňovat to nejméně komplikované.“ Samozřejmě i z tohoto pravidla existují výjimky, ale v mechanice obvykle ne.

jsou vystaveni faktům, která nezapadají do jejich světového názoru, reagují často velmi emotivně, až agresivně [10].

Přesto však mají tyto teorie své místo např. ve výuce přírodních věd: Ukazují důležitost kritického hodnocení argumentů a zejména důležitost experimentu v hodnocení toho, co je např. z hlediska fyziky možné a co ne.

Literatura

- [1] Carpenter, W.: *One Hundred Proofs that the Earth is not a Globe*. Author, Baltimore, 1885.
- [2] Šlégr, J.: Teorie ploché Země ve výuce fyziky. In: *Veletrh nápadů učitelů fyziky 24 – Sborník příspěvků z mezinárodní konference* Univerzita Hradec Králové, Hradec Králové, 2019.
- [3] Břízová, L., Gerbec, K., Šauer, J., Šlégr, J.: Flat Earth theory: an exercise in critical thinking. *Physics Education*, roč. 53 (2018), č. 4, 045014.
- [4] Whalen, A.: *Flat Earthers Disprove Themselves in 'Behind the Curve'*. Newsweek, 25. 2. 2019, <https://www.newsweek.com/behind-curve-netflix-ending-light-experiment-mark-sargent-documentary-movie-1343362>.
- [5] Bird, J., Town, M., Baker, R. A.: South Pole Foucault Pendulum. South Pole Station, zima 2001, <https://www.southpolestation.com/trivia/00s/southpolefoucault.html>.
- [6] Jakubcová, H.: *Jiří Grygar: Pochybovat o přistání na Měsíci je drzost*. Třebíčský deník, 9. 11. 2009, https://trebicky.denik.cz/zpravy_region/jiri-grygar-pochybovat-o-pristani-na-20091109.html.
- [7] Politika 24: *Bizarní diskuse: Je planeta Země placatá?! Vědec Grygar vs. konspirátor Bača!*. YouTube, Dostupné z: https://www.youtube.com/watch?v=qTSpe_S050A.
- [8] *Slovenská ministryně kultury zpochybňuje kulatost Země, její úřad chce dávat prostor i teoriím o placaté Zemi*. iDNES.cz, 30. 4. 2024, https://www.idnes.cz/zpravy/zahranicni/slovensko-ministryne-kultury-martina-simkovicova-lukas-machala-zemekoule.A240430_160752_zahranicni_dtt.
- [9] <https://www.youtube.com/@czechExperiment/videos>
- [10] Everett, J. A. C., Faber, N. S., Crockett, M.: Preferences and beliefs in ingroup favoritism. *Frontiers in behavioral neuroscience*, roč. 9 (2015), 126656.

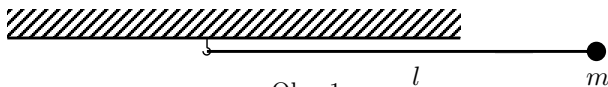
O jedné fyzikální úloze

Miroslav Randa – Pavel Kratochvíl

Západočeská univerzita v Plzni

Před časem jsme narazili na fyzikální úlohu, v níž kmitavý pohyb matematického kyvadla byl změněn tím, že pod bodem závěsu byla umístěna překážka, která způsobila změnu délky kyvadla. Už si nepamätujeme, kde jsme na úlohu narazili, dovolíme si však čtenářům Rozhledů matematicko-fyzikálních (zejména řešitelům fyzikální olympiády) nabídnout modifikovanou úlohu k zamyšlení a samostatnému řešení. Protože považujeme za vhodné, aby si čtenář mohl své řešení okamžitě zkontrolovat (bez nutnosti čekat na další číslo Rozhledů), uvádíme úlohu s výsledky a pro netrpělivé čtenáře i s podrobným řešením.

Zadání úlohy: Na niti délky l je zavěšeno malé těleso s hmotností m . Závaží je vychýleno z rovnovážné polohy tak, že vlákno je napnuté a má vodorovný směr (obr. 1).



Svisle pod bodem závěsu zatlučeme hřebík.

- a) V jaké nejmenší vzdálenosti x od bodu závěsu musíme hřebík zatlouci, aby po puštění tělesa a zachycení vlákna o hřebík těleso vykonalo celou otočku kolem hřebíku ve svislé rovině? Výsledek: $0,6 l$

Pozn.: Při prvním pohledu se zdá, že řešení je triviální a že ze zákona zachování energie vyplývá, že $x = 0,5 l$. Řešitel však nesmí zapomenout na to, že v horním bodě kružnice nemá těleso nulovou rychlost ani nulovou kinetickou energii.

- b) Určete, do jaké největší výšky H (měřené od nejnižší polohy) těleso vystoupí, bude-li hřebík zatlučen ve vzdálenosti $x = l/2$ pod bodem závěsu. Výsledek: $\frac{25}{27} l$
- c) Jakou silou F je napínáno vlákno v nejvyšší poloze, bude-li hřebík zatlučen ve vzdálenosti $x = \frac{3l}{4}$ pod bodem závěsu? Výsledek: $3mg$

- d) Zakreslete graf závislosti velikosti síly F napínající vlákno na vzdálenosti x mezi bodem závěsu a hřebíkem, resp. graf závislosti $\frac{F}{mg}$ na $\frac{x}{l}$.

Řešení úlohy: a) V nejvyšším bodě kružnice, po níž se pohybuje těleso, na něj působí (v neinerciální soustavě spojené s tělesem) tíhová síla, síla vlákna a odstředivá síla, jejíž velikost je rovna součtu velikostí tíhové síly a síly vlákna. Protože odstředivá síla závisí na kvadrátu rychlosti, bude nejmenší možná rychlost tělesa v v nejvyšším bodě odpovídat nejmenší odstředivé síle, tedy síle, při níž bude síla vlákna nulová. Bude tedy platit

$$m \cdot \frac{v^2}{r} = mg,$$

kde $r = l - x$. Zároveň podle zákona zachování energie

$$mgl = mg \cdot 2r + \frac{1}{2}mv^2.$$

Jestliže v obou vztazích zkrátíme hmotností m a z první rovnice dosadíme do druhé

$$v^2 = g(l - x),$$

dostaneme

$$gl = 2g(l - x) + \frac{1}{2}g(l - x),$$

a po úpravě

$$x = \frac{3}{5}l.$$

b) Najdeme nejdříve bod, v němž přestane být vlákno napnuté. Pro tento bod (znázorněný na obrázku) platí, že v radiálním směru je výslednice sil nulová. Odstředivá síla má proto velikost rovnou velikosti složky tíhové síly, tedy

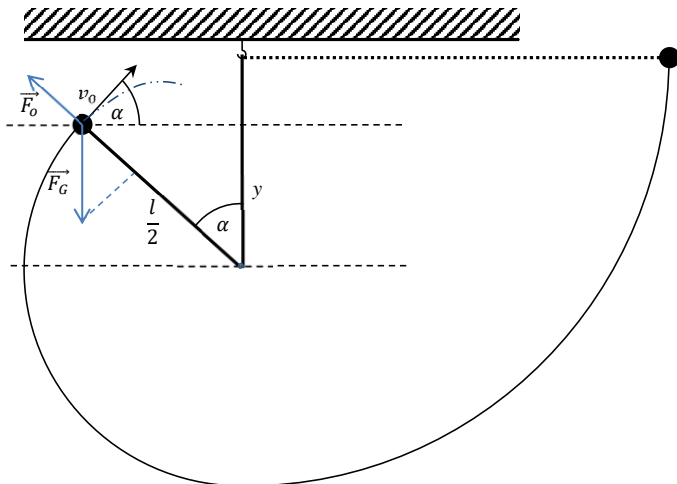
$$F_o = F_G \cos \alpha.$$

Po dosazení

$$m \cdot \frac{v_o^2}{r} = mg \cos \alpha.$$

kde $r = l/2$. Také zde využijeme zákon zachování energie:

$$mgl = mg \left(\frac{l}{2} + y \right) + \frac{1}{2}mv_o^2.$$



Obr. 2

Z první rovnice vyjádříme kvadrát rychlosti

$$v_0^2 = g \cdot \frac{l}{2} \cdot \cos \alpha$$

a dosadíme do zákona zachování energie. Po dosazení $y = \frac{l}{2} \cos \alpha$ (viz obr. 2) a po malé úpravě získáme vztah

$$g \cdot \frac{l}{2} = g \cdot \frac{l}{2} \cdot \cos \alpha + \frac{1}{2} g \cdot \frac{l}{2} \cos \alpha$$

a po další úpravě $\cos \alpha = \frac{2}{3}$ (tedy $\alpha = 48^\circ$).

Vyjádříme výšku y a rychlost v_0 – obojí se nám bude hodit. Platí

$$y = \frac{l}{2} \cos \alpha = \frac{l}{3},$$

$$v_0^2 = g \cdot \frac{l}{2} \cos \alpha = \frac{gl}{3}.$$

Poté, co již není vlákno napnuté, pohybuje se těleso vrhem šikmým vzhůru. Určíme jeho maximální výšku ze známého vztahu

$$H = \frac{v_0^2 \cdot \sin^2 \alpha}{2g}.$$

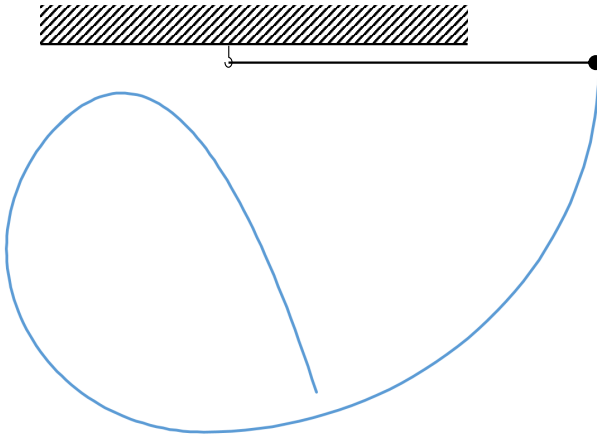
Po úpravách a s použitím vztahu $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$

$$H = \frac{\frac{gl}{3} \cdot (1 - \frac{4}{9})}{2g} = \frac{5}{54} l.$$

Těleso vystoupí do maximální výšky

$$H_{\max} = \frac{l}{2} + \frac{l}{3} + H = \frac{25}{27} l.$$

Můžeme si ještě znázornit celou trajektorii tělesa:



Obr. 3

c) Sílu F napnutí vlákna při poloze hřebíku ve vzdálenosti $x = \frac{3}{4}l$ pod bodem závěsu určíme známým postupem. Napíšeme rovnice pro síly a pro energii:

$$m \cdot \frac{v^2}{r} = F_G + F,$$

kde tentokrát $r = l - x = l/4$, a

$$mgl = mg \cdot 2r + \frac{1}{2}mv^2,$$

neboli po dosazení za r

$$mgl = mg \cdot \frac{l}{2} + \frac{1}{2}mv^2.$$

FYZIKA

Odtud

$$gl = v^2$$

a po úpravě dostaneme

$$F = m \cdot \frac{v^2}{l/4} - mg = \frac{4}{l} \cdot mgl - mg = 3mg.$$

d) Nejprve si vyjádříme sílu F napnutí vlákna při poloze hřebíku ve vzdálenosti $x > \frac{3}{5}l$ pod bodem závěsu.

$$\begin{aligned} m \cdot \frac{v^2}{l-x} &= F_G + F, \\ mgl &= mg \cdot 2(l-x) + \frac{1}{2}mv^2. \end{aligned}$$

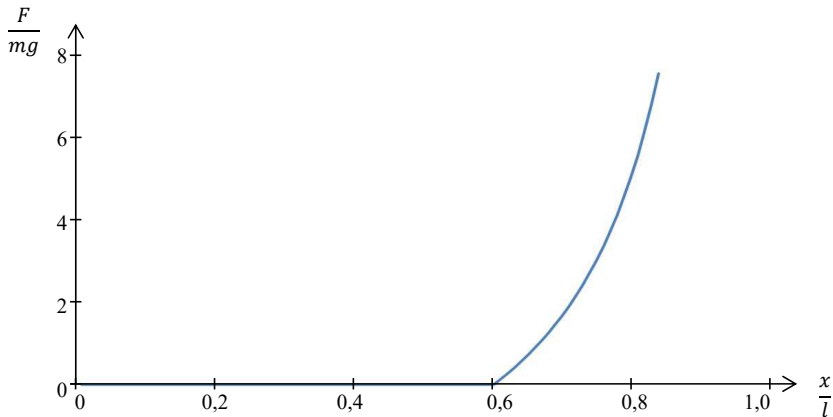
Odtud

$$2g(2x-l) = v^2.$$

Po obvyklé úpravě

$$F = m \cdot \frac{v^2}{l-x} - mg = \frac{1}{l-x} \cdot 2mg(2x-l) - mg = mg \cdot \frac{5x-3l}{l-x}.$$

Jak již víme z a), pro $x \leq \frac{3}{5}l$ je $F = 0$.



Obr. 4

Přesnost ano, ale až v pravý okamžik
aneb
kterak účelně zhřešiti ve fyzice

Jan Obdržálek, MFF UK, Praha

M o t t o

Mateřská škola, paní učitelka U ukazuje dětem D obrázky.

U: Tak, děti. Copak je tohle?

D: Kočka! Kočička!

U: Nene. Musíte se naučit vyjadřovat přesně. No uvažte: Mňouká to? Běhá to? Je to chlupaté? Ne. Tohle není kočka, ale je to *obrázek* kočky. A tohle?

D: Myš! Myšička!

U: No tak...

Pepíček: Prosím, to je obrázek myši.

U: Výborně! A co je tohle?

D: Obrázek kočky honí obrázek myši!

Je-li ve škole cílem **pochopení** základních principů (např. ve výuce fyziky), což takhle příležitostně vědomě „zhřešit“ přechodným **potlačením přesnosti** (korektnosti atd.), usnadní-li to pochopení? Vystihl to prof. Martin Černožorský, sám dokonale zběhlý v precizních i elegantních formulacích, skvělým sloganem:

Přesnost ano, ale až v pravý okamžik!

Jak si to máme přebrat? Máme snad my, štuďáci, mluvit, „jak nám zobák narost“? Mají se snad učitelé vyjadřovat nepřesně s vědomím, že se to žáci špatně naučí, jak varovali někteří didaktici? Ano, měli jistě pravdu, ale jen pro ty studenty, kteří se nesnaží látku pochopit, ale navrčí se *nazpaměť*, co pančelka napsala na tabuli a v knize je tištěno tučně. O tyhle šprty ale nikdo nestojí; jejich znalosti nepřežijí ani prázdniny po zkoušce.

Pochopit něco znamená najít ve své mysli vhodný model či princip mnou dávno přijatý a chápaný, jakési „kopyto“, na které lze narazit nový pojem, ono „něco“ mající být pochopeno. Protože s tím kopytem už dávno zacházet umíte, budete stejně jednat i s tím novým pojmem,

a ejhle – „rozumíte mu“. A právě pro to hledání kopyta¹⁾ a k jeho nalezení nám často pomůže představa přiblížená běžným jazykem, slovem prostým, *z úst jak lidu roste*, jak trefně řekl klasik²⁾. Taková formulace je sice formálně nepřesná, ale o to srozumitelnější a jasnější.

Tajemství spočívá v tom, že jazyk je **vrstevnatý** – tohle slovíčko si pamatujte jako obranu, až vám někdo bude vyčítat nepřesnost ve vyjadřování.³⁾ Znamená fakticky existenci různých vrstev potřebného pochopení a jim odpovídající různé „slovníky“. Na tutéž otázku „Jak to, že to autíčko jede?“ odpovíte jinak malému bráchovi: „Je na elektřinu⁴⁾“, tedy nikoli na klíček, jinak staršímu bráchovi elektrikáři „Má baterku“, tedy nikoli trakci, jinak mamince „Já ho včera opravil“, tedy nikoli „Táta ho opravil“.

Vtip je v tom, že často postačí spíš **prostý náznak** k té první, uchopující představě („nalezení kopyta“). Porovnejte pravdivé tvrzení „Páka jakožto tuhé těleso je v rovnováze právě tehdy, když virtuální práce aktivních sil na ni působících při libovolných vratných virtuálních posunutích je rovna nule.“ s povzdechem „Dělej co dělej, práci na páce neušetříš.“. Druhý výrok vám asi uvízne v paměti spíš, i když je jeho první půlka redundantní a druhá naopak neúplná; měla by obsahovat ještě „... ani neztratíš“.

Není na tom lépe ani konkrétnější, ale taky ne moc přehledná formulace: „Působí-li na jedno rameno délky L rovné páky na konci kolmo síla o velikosti F , pak k udržení rovnováhy je potřeba, aby na druhém ramenu délky $L' = x \cdot L$ na konci působící kolmá síla měla velikost $F' = F/x$.“

Opět se asi lépe pamatuje na melodii „Ó hřebíčku zahradnický“ zveršovaná formulace v č. 9 zpěvníku [1], nota bene prezentovaná jen se zcela konkrétní číselnou hodnotou:

¹⁾Nedělejte si o našem mozku zbytečné iluze. Těch kopyt máme v hlavě nemnoho a většinou vznikly někde v předškolním věku. Třeba dvojice příčina – důsledek (hodí se později při filosofii) nebo nevratnost rozlitého mléka (entropie samovolně roste, ale pokles vyžaduje obvykle vynaložení značné práce a vy se přitom dohřejete). S věkem a výchovou jich pravda pár přibude (magnet přitahuje, i když to není vidět), ale tak kór moc taky ne (elementární částice téhož druhu jsou vzájemně nerozlišitelné, stejně jako jednotlivé koruny na vašem bankovním kontě, viz píseň č. 18 zpěvníku [1]).

²⁾Tato formulace znamená, že si autor článku ne a ne vzpomenout na Nerudu.

³⁾Zde se uplatní dvě manažéřská moudra, když uděláte chybu: a) nepopírejte ji (zbytečně byste naštvál), ale naopak prezentujte ji jako *přednost*, nikoli jako nedostatek; b) vždycky obhájíte snadněji cokoli, co umíte pojmenovat, nejlépe také anglicky (layering), neřkuli latinsky, kdyby to i vymyšlené mělo být (stratificatiō, -ōnis).

⁴⁾Terminologa uvede do rozpaků, má-li formulovat „jednoduchou“ elektřinu. Bráchu ne, ten vám rozumí.

*Třikrát delší pákou novou / třikrát větší dráhu máš,
zato silou třetinovou / stejnou práci vykonáš!*

a dáváte-li kondice zavlíému **nematematikovi**, je moudřejší se zeptat, jaká by byla síla potřebná na *desetkrát* delší páce, než chtít totéž po něm obecně, „s těmi vašimi x a y “. Vy totiž víte, že odpoví-li „desetkrát slabší“, tak to pochopil správně, i bez obecné formulace typu „na x -krát delší páku $L' = L \cdot x$ stačí x -krát slabší síla $F' = F/x$ “. (V písničce byl zlomek oproti násobku fixován účinným rýmem a rytmem: *pákou novou / třetinovou.*)

Dále, naprostá většina současných středoškoláků nebude dále fyziku rozvíjet, stačí jim tedy **jednodušší formulace** např. Archimedova zákona s tělesem *ponořeným* do kapaliny (třeba na melodii Když se ten Tálínskej rybník nahání, viz č. 27 sborníku [1]). Formulace potřebná pro precizní rozbor a začínající dejme tomu „Číselná velikost hydrostatického vztlaku působícího na těleso obklopené tekutinou. . .“ bude možná to pravé v normě ISO na fyzikální veličiny nebo v encyklopedii, ale nikoli ve středoškolské učebnici.

Jsou i zhrěšení rafinovanější. **Rozdíl mezi gravitační a tíhovou silou** vysvětlíte stručně a jasně výkladem obrázku, kde gravitační síla směřuje, jak řeknete, od tělesa *někam ke středu Země* a nezávisí na otáčení Země, zatímco tíhová síla zahrnuje vedle gravitační i odstředivou sílu danou měřením na otáčející se Zemi, a odstředivá síla je *kolmá k ose* otáčení Země; všude mimo rovníku (a pólů, kde je odstředivá síla nulová) mají tedy obě síly trošinku různé směry. Jasně?

Chyba. Žádný „**střed Země**“ totiž neexistuje, a nahradit ho dobře definovaným „středem hmotnosti“ či těžištěm by bylo naopak zavádějící a nepravdivé. Geodeti vám potvrdí, že při přesném měření se dvě blízké těžnice (směry volně visící olovnice) v žádném „středu Země“ neprotínají a jsou nejspíš mimoběžné, tedy se neprotínají vůbec. A naopak z jejich odchylky můžeme mapovat nehomogenity zemské kůry v měřené oblasti a usuzovat třeba na výskyt rudy těžkého kovu.

Rada alibistická: máte-li výčitky svědomí nebo strach, jestli vám ta nepřesnost projde (např. já zde před recenzenty), pak u ní užíjte nápadně vágní výraz: **někam** ke středu Země apod. Pak se můžete hájit, že čtenář byl varován, aby vás nebral moc vážně.

A když jsme u toho, tak je velký **jazykový rozdíl** mezi **významově blízkou** tíží (*jev*) a tíhovou silou (*veličina*, tedy vlastnost jevu, tělesa či látky popsateľná číslem a referencí, např. fyzikálním rozmě-

rem). Podobně gravitace je *jev* a gravitační síla je *veličina*. Dále, každá veličina (hmotnost, délka) má podle normy svou *značku* (m , l), nikoli *symbol* podle angličtiny. A ještě dále, různé pojmy jsou také *jednotka* (kg, m) a *rozměr* (M, L), jak vám vysvětlí terminolog, ale podle běžné jednotky km/hod určíte méně obvyklý rozměr L/T jednoznačně. Jako učitel bych sice tyto pojmy a jejich termíny sám rozlišoval a co možná správně používal, ale studentům bych **toleroval hříchy v jejich záměně**. Bazírování na jejich rozdílu a klasifikaci podle chybného užití bych ponechal zamindrákovaným vyučujícím ukájejícím se šikanou jim podřízených studentů/tek.

Hřeší se i jinde: v **kalorimetrii**, při definici tepelné vodivosti a při rozboru přenosu tepla konvekcí, kondukcí a zářením se rádo do řeči vmísí snadno představitelné **teplo** ze staré, překonané fluidové teorie. Stačí však omluva na sám konec, že přesně řečeno šlo o přenos *vnitřní energie* dU jistým způsobem, zvaným *přenos tepla* dQ , a protože při nepřítomnosti *práce* dW a *chemické práce* dW_{ch} platí

$$dU = dQ + dW + dW_{ch} = dQ,$$

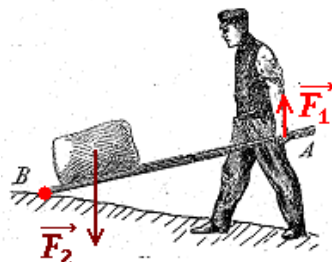
je možné a názornější nazývat takto přenesenou energii prostě teplem.

Dovětek: Autor doznává, že sám zhřešil v nadpisu tohoto článku. Pro pozlátko přitažlivosti kombinoval archaismus „kterak“, hyperkorektnost „zhřešiti“ a zejména obecnou obscénnost slova „hřešení“, aby tak přilákal čtenáře – byť tento po přečtení zjistí, že jeho hříšné očekávání naplněno nebylo. To už ale patří zcela obecně k úspěšné politice populistické.

Literatura

[1] Obdržálek, J.: *Písně lidu fyzikálního*. Prometheus, Praha, 2023.

Zvuk téhož: viz <http://PisFyz.gilhad.cz>.



Matematika pro život 2025

Lubomíra Dvořáková a Jan Vybíral (organizátoři akce)

Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská ve spolupráci s Pedagogickou fakultou Univerzity Karlovy pořádala 10. ledna 2025 již posedmé jednodenní akci s názvem Matematika pro život. Na program kurzu byly ukázky aplikací matematiky v biologii, částicové fyzice, finančnictví a umělé inteligenci. Účastníci z řad středoškolských profesorů matematiky dorazili opět v hojném počtu, se zájmem naslouchali přednáškám a po každé z nich následovala živá diskuze. Posluchárna byla plná celý den.

Zazněly tyto přednášky:

- doc. RNDr. Jana Bielčíková, Ph.D., vedoucí vědecký pracovník, ÚJF AV ČR a FJFI ČVUT v Praze: *Tomografie kvarkového-gluonového plazmatu.*
- doc. Mgr. Pavel Drozd, Ph.D., katedra biologie a ekologie, PřF Ostravská univerzita: *Matematika pro biology: co počítáme a čemu věříme?.*
- Ing. Martina Litschmannová, Ph.D., katedra aplikované matematiky, FEI VŠB-Technická univerzita Ostrava: *Pravděpodobnost kolem nás.*
- Ing. Aleš Michl, Ph.D., guvernér České národní banky: *Proč jsem napsal knihu Matematické hádanky.*
- doc. Ing. Roman Mouček, Ph.D., katedra informatiky a výpočetní techniky, FAV ZČU, Plzeň Chat GPT v akci: *Principy fungování a praktické využití při řešení matematických úloh.*
- doc. RNDr. Tomáš Vejchodský, Ph.D., Matematický ústav AV ČR: *Archimédův výpočet čísla π .*
- doc. Mgr. Petr Vodstrčil, Ph.D., Fakulta elektrotechniky a informatiky VŠB TU Ostrava: *Jak řešit extrémální úlohy bez derivací.*
- prof RNDr. Naďa Vondrová, Ph.D., vedoucí katedry matematiky a didaktiky matematiky, PedF UK, Praha: *Tři výzvy a příležitosti ve výuce matematiky aneb co nás čeká v roce 2025.*

ZPRÁVY

Byly pořízeny kvalitní záznamy přednášek, které jsou k dispozici na YouTube kanálu:

<https://www.youtube.com/@matematikaprozivot4615>

Více informací je k dispozici na stránce akce:

<https://fjfi.cvut.cz/cz/107-cz/media/vzdelavaci-akce-verejnost/7191-matematika-pro-zivot-2>

Foto z akce Matematika pro život 2025:



Vydává Jednota českých matematiků a fyziků
tel.: 222 090 708-9, e-mail: jcmf@math.cas.cz
za podpory MFF UK Praha a FJFI ČVUT Praha



Vycházejí 4 čísla v kalendářním roce

Obálku navrhl Bohuslav Šír

Sazbu programem \TeX připravil RNDr. Miloslav Závodný

Adresa redakce: MFF UK, V Holešovičkách 2, 182 00 Praha 8–Troja
e-mail: rozhledy@jcmf.cz

Internetové stránky časopisu: <https://rozhledy.jcmf.cz/>

Vytiskla Tiskárna Matula, Olomoucká 27, 618 00 Brno

Distribuci pro předplatitele provádí v zastoupení vydavatele
MediaCall, s. r. o.

Vídeňská 546/55, 639 00 Brno

tel.: +420 532 165 165, e-mail: export@mediacall.cz

web: www.zahranicnitisk.com

ISSN 0035-9343

MK ČR E4691

© Jednota českých matematiků a fyziků, Praha 2025

Redakční rada

Vedoucí redaktorka:

doc. Ing. Lubomíra Dvořáková, Ph.D., FJFI ČVUT Praha

Redaktorka pro matematiku:

doc. Ing. Lubomíra Dvořáková, Ph.D., FJFI ČVUT Praha

Redaktor pro fyziku:

RNDr. Věra Krajčová, Ph.D., FJFI ČVUT Praha

Členové redakční rady:

prof. RNDr. Vlastimil Dlab, DrSc., F.R.S.C., Praha

doc. RNDr. Zdeněk Drozd, Ph.D., MFF UK Praha

RNDr. Petr Hanuš, FSv ČVUT Praha

doc. RNDr. Jaroslav Hora, CSc., FPE ZČU Plzeň

prof. RNDr. Ivo Kraus, DrSc., FJFI ČVUT Praha

doc. RNDr. Jan Kříž, Ph.D., PřF UHK Hradec Králové

prof. RNDr. Miroslav Lávička, Ph.D., FAV ZČU Plzeň

RNDr. Pavel Pokorný, Ph.D., VŠCHT Praha

RNDr. Miroslav Randa, Ph.D., PdF ZČU Plzeň

RNDr. Filip Studnička, Ph.D., PřF UHK Hradec Králové

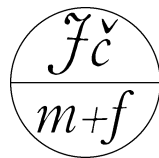
doc. RNDr. Jan Šlégr, Ph.D., PřF UHK Hradec Králové

prof. RNDr. Pavel Tlustý, CSc., PedF JU České Budějovice

doc. RNDr. Pavel Töpfer, CSc., MFF UK Praha

RNDr. Vladimír Wagner, CSc., ÚJF AV ČR Řež

ROZHLEDY matematicko-fyzikální Ročník 100 (2025), číslo 1



OBSAH

E. Dvořáková: 100. výročí	1
E. Dvořáková, M. Svobodová a kol.: Wythoffova hra aneb zraněná dáma	2
M. Škorpilová: Válcové sloupy tesané z hranolu	15
J. M. Nájares Romero: Přirozená čísla ve zlomcích podruhé	25
Matematické oříšky: Trik s Fibonacciho čísly	31
I. Kraus: Rozhledy matematicko-fyzikální jako svědkové šťastných náhod i systematického bádání	35
L. Šlégrová, J. Šlégr: Věda vs. konspirace: K čemu vlastně důkazy?	54
M. Randa, P. Kratochvíl: O jedné fyzikální úloze	62
J. Obdržálek: Přesnost ano, ale až v pravý okamžik aneb kterak účelně zhřešiti ve fyzice	67
E. Dvořáková, J. Vybíral: Matematika pro život 2025	70

Pokyny pro autory

Příspěvky dodávejte na adresu redakce v elektronické podobě. Nejlépe napsané ve formátu \LaTeX , přijatelný je i formát \PlainTeX , je akceptovatelný i text připravený editorem Word či podobným.

Pokud jde o obrázky, je žádoucí, aby byly připraveny v reprodukovatelné podobě. Každý obrázek nechte v samostatném souboru, nejlépe ve formátu pdf nebo eps. Přípustná je též bitmapa v dostatečném rozlišení.

Ke každému zasílanému příspěvku (ne u soutěží, zpráv a recenzí) přiložte krátkou anotaci v českém jazyce. Dále je žádoucí, aby u každého příspěvku byla uvedena literatura, na kterou je v textu odkazováno.