

ROZ HLEDY

MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ

ČASOPIS PRO ZÁJEMCE O MATEMATIKU, FYZIKU A INFORMATIKU

ROČNÍK 100 (2025) • ČÍSLO 2

Nekonečné součiny, pětiúhelník, zlatý řez a číslo π

Luděk Spíchal, Česká lesnická akademie, Trutnov

Na přelomu 16. a 17. stol. postupně vyvrcholilo úsilí vytěžit Archimédovu mnohoúhelníkovou metodu při aproximaci čísla π . Do tohoto úsilí zajímavým způsobem zasáhl rovněž francouzský právník a matematik François Viète (1540–1630), který v roce 1593 objevil nekonečný součin¹⁾, který bychom mohli moderním způsobem zapsat např. ve tvaru

$$\pi = 2 \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2 + \sqrt{2}}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}} \cdot \dots, \quad (1)$$

když pracoval s mnohoúhelníkem, který měl 393 216 ($=6 \cdot 2^{16}$) stran a podařilo se mu správně vypočítat 9 desetinných pozic čísla π . Formule, kterou získal, je ve skutečnosti pro aproximaci poměrně komplikovaná, současně jí určitě ovšem nelze upřít jistou matematickou eleganci.

Přes výše uvedený výsledek, který je v současnosti považován za jednu z prvních známých formulí obsahujících nekonečný součin, se Viète sám nekonečnými součiny nijak zásadně nezabýval. Pro moderní matematiku byly a stále zůstávají důležité jeho inovace v oblasti algebry a dále také práce v oblasti metod řešení algebraických rovnic (např. Vièetovy vzorce), které ovlivnily řadu pozdějších matematiků, jako byl např. John Wallis (1616–1703).

Wallisova práce týkající se nekonečných součinů obsažená v knize *Arithmetica Infinitorum* z roku 1656, využila některé myšlenky obsažené

¹⁾Nekonečný součin označuje součin nekonečného počtu činitelů. Obecně má tvar

$$\prod_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots,$$

kde a_k jsou jednotlivé činitele. Aby měl nekonečný součin smysl, musí posloupnost jeho částečných součinů

$$\prod_{k=1}^n a_k = a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n,$$

mít konečnou limitu, tj. musí konvergovat pro $n \rightarrow \infty$.

již ve Viětových algebraických reformách. V knize je uveden následující nekonečný součin²⁾

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{7} \cdot \dots, \quad (2)$$

který Wallis objevil, když použil poměrně složitý postup výpočtu plochy poloviny kruhu, kdy již mohl využít infinitezimální počet jako převratnou novinku v matematice [5].

Ačkoliv je příkladů nekonečných součinů aproximujících číslo π výrazně méně než známých nekonečných řad pro aproximaci π , můžeme na tomto místě ještě připomenout výsledek, který získal švýcarský matematik Leonard Euler (1707–1783)

$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{2^2}{2^2 - 1} \cdot \frac{3^2}{3^2 - 1} \cdot \frac{5^2}{5^2 - 1} \cdot \frac{7^2}{7^2 - 1} \cdot \frac{11^2}{11^2 - 1} \cdot \dots, \quad (3)$$

neobvyklý tím, že obsahuje pouze mocniny prvočísel [2]. Euler k výsledku dospěl v roce 1735, když se zabýval tzv. basilejským problémem, který spočíval v určení součtu nekonečné řady³⁾

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots$$

Ve svých úvahách se zaměřil na funkci (dnes nazývanou Riemannova zeta funkce)⁴⁾

$$\zeta(x) = \frac{1}{1^x} + \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} + \frac{1}{4^x} + \dots + \frac{1}{n^x} + \dots \quad (4)$$

kde si uvědomil, že podle základní věty aritmetiky lze každé složené číslo jednoznačně zapsat ve tvaru prvočíselného rozkladu. Poté, co totéž udělal s každým jmenovatelem funkce (4), získal po dalších úpravách rovnost

²⁾Z dalších matematických konstant můžeme zmínit nekonečný součin pro Eulerovo číslo e , který vykazuje překvapivé souvislosti se vzorcem (2) pro $\pi/2$

$$e/2 = \left(\frac{2}{1}\right)^{1/2} \left(\frac{2}{3} \frac{4}{3}\right)^{1/4} \left(\frac{4}{5} \frac{6}{5} \frac{8}{7} \frac{8}{7}\right)^{1/8} \dots$$

³⁾Problém popsal v roce 1650 italský matematik Pietro Mengoli (1626–1686). Do širší pozornosti evropských matematiků později problém posunul basilejský profesor matematiky Jacob Bernoulli (1654–1705), který se sám neúspěšně pokoušel problém vyřešit.

⁴⁾Zeta funkce je důležitým pojmem v oblasti teorie čísel. Tvoří jádro tzv. Riemannovy hypotézy, která patří k nejdůležitějším nevyřešeným problémům současné matematiky.

$$\frac{1}{1^x} + \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} + \dots = \left(1 + \frac{1}{2^x} + \frac{1}{4^x} + \frac{1}{8^x} + \dots\right) \left(1 + \frac{1}{3^x} + \frac{1}{9^x} + \frac{1}{27^x} + \dots\right) \\ \left(1 + \frac{1}{5^x} + \frac{1}{25^x} + \frac{1}{125^x} + \dots\right) \dots \left(1 + \frac{1}{p^x} + \frac{1}{(p^2)^x} + \frac{1}{(p^3)^x} + \dots\right) \dots,$$

$x \in \mathbb{N}$, $x \geq 2$, kde na levé straně je nekonečná řada a na straně pravé nekonečný součin. Činitelé nekonečného součinu představují pro $x > 1$ nekonečné geometrické řady, tedy

$$\zeta(x) = \left(1 + \frac{1}{2^x} + \frac{1}{4^x} + \frac{1}{8^x} + \dots\right) \left(1 + \frac{1}{3^x} + \frac{1}{9^x} + \frac{1}{27^x} + \dots\right) \\ \left(1 + \frac{1}{5^x} + \frac{1}{25^x} + \frac{1}{125^x} + \dots\right) \dots \left(1 + \frac{1}{p^x} + \frac{1}{(p^2)^x} + \frac{1}{(p^3)^x} + \dots\right) \dots = \\ = \frac{2^x}{2^x - 1} \cdot \frac{3^x}{3^x - 1} \cdot \frac{5^x}{5^x - 1} \cdot \dots \cdot \frac{p^x}{p^x - 1} \cdot \dots = \prod_{p \text{ je prvočíslo}} \frac{p^x}{p^x - 1}.$$

Pro volbu $x = 2$ Euler dokázal rovnost (3), když se mu podařilo spojit nekonečnou řadu ve funkci (4) s nekonečnou řadou pro funkci sinus.

V článku si nejprve osvětlíme postup, kterým Viète dospěl k nekonečnému součinu (1). Následně na příkladu dělení pětiúhelníku odvodíme nekonečný součin pro aproximaci čísla π obsahující tzv. zlatý řez. Ukážeme rovněž, že podobně jako v článku [3] můžeme číslo π aproximovat pomocí zlatého řezu a vnořených odmocnin. V závěru pak v návaznosti na článek [4] ještě doplníme možnost aproximovat hodnotu čísla π v pětiúhelníku použitím rozvoje funkce arkus tangens do nekonečné řady.

1. Viětův vzorec pro aproximaci čísla π

Uvažujme pravidelný n -úhelník vepsaný kružnici o poloměru r , kde $|\angle ASB| = 2\alpha$ (obr. 1). Pro jeho obsah platí

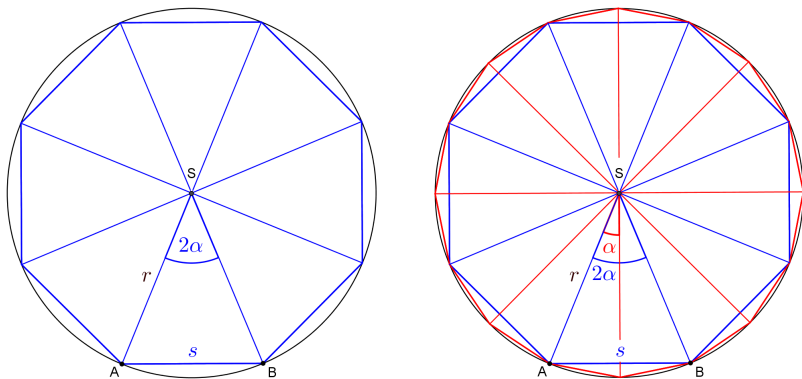
$$S_n = nr^2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} nr^2 \sin 2\alpha.$$

Pokud nyní zdvojnásobíme počet stran n -úhelníku, pak bude úhel 2α poloviční, tedy

$$S_{2n} = 2nr^2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = nr^2 \sin \alpha,$$

a pro poměr obsahů takových n -úhelníků platí

$$\frac{S_n}{S_{2n}} = \cos \alpha.$$



Obr. 1: Pravidelný n a $2n$ -úhelník

Postupným opakováním zdvojnásobování počtu stran n -úhelníku získáme posloupnost poměrů $\cos \alpha, \cos \frac{\alpha}{2}, \cos \frac{\alpha}{4}, \dots$, kde po k děleních platí

$$\frac{S_n}{S_{2n}} \cdot \frac{S_{2n}}{S_{4n}} \cdot \dots \cdot \frac{S_{2^{k-1}n}}{S_{2^k n}} = \frac{S_n}{S_{2^k n}} = \cos \alpha \cdot \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{4} \cdot \dots \cdot \cos \frac{\alpha}{2^{k-1}}. \quad (5)$$

Pro obsah k -tého obrazce vepsaného kružnici o poloměru r současně platí, že jeho limitou je obsah kruhu, tj.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S_{2^k n} = \pi r^2.$$

Pokud nyní dosadíme do rovnosti (5) za $S_n, S_{2^k n}$ a dále zjednodušíme, pak dostáváme

$$\pi = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{n \sin \alpha}{\cos \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{4} \cdot \dots \cdot \cos \frac{\alpha}{2^{k-1}}}. \quad (6)$$

Viète zvolil jako výchozí n -úhelník čtverec, kde $n = 4$ a $\alpha = 45^\circ$, tj. $\sin \alpha = \cos \alpha = \sqrt{2}/2$ a dále

$$\begin{aligned} \cos \frac{\alpha}{2} &= \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}} = \frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{2}}, \\ \cos \frac{\alpha}{4} &= \sqrt{\frac{1 + \cos(\alpha/2)}{2}} = \frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Po dosazení do vzorce (6) a úpravách získáme nekonečný součin, jehož zápis jsme uvedli v úvodu.

Viětův vzorec můžeme odvodit rovněž přímo využitím určitých vlastností goniometrických funkcí sinus a kosinus. Podle vzorce pro sinus dvojnásobného úhlu platí, že

$$\begin{aligned}\sin \alpha &= 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = \\ &= 4 \sin \frac{\alpha}{4} \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{4} = \\ &= 8 \sin \frac{\alpha}{8} \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{4} \cos \frac{\alpha}{8} = \\ &\vdots\end{aligned}$$

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ indukci dostáváme

$$\sin \alpha = 2^n \sin \frac{\alpha}{2^n} \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{4} \cos \frac{\alpha}{8} \cdot \dots \cdot \cos \frac{\alpha}{2^n} = 2^n \sin \frac{\alpha}{2^n} \prod_{k=1}^n \cos \frac{\alpha}{2^k}.$$

Pro $n \rightarrow \infty$ je

$$\sin \alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \sin \frac{\alpha}{2^n} \prod_{k=1}^n \cos \frac{\alpha}{2^k} = \alpha \prod_{k=1}^{\infty} \cos \frac{\alpha}{2^k}, \quad (7)$$

neboť

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \sin \frac{\alpha}{2^n} = \alpha.$$

Pokud dále dosadíme za $\alpha = \pi/2$, pak

$$\sin \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \prod_{n=1}^{\infty} \cos \frac{\pi}{2^{n+1}},$$

kde po úpravě a zjednodušení dostáváme

$$\pi = \frac{2}{\prod_{n=1}^{\infty} \cos \frac{\pi}{2^{n+1}}}. \quad (8)$$

Je zřejmé, že vzorec (7) představuje návod, jak formulovat nekonečné součiny analogické Viětovu vzorci.

2. Pětiúhelník a zlatý řez

Zlatý řez je číslo, které označuje poměr, kdy se úsečka dělí do dvou částí takovým způsobem, že poměr délky celé úsečky vůči délce její větší části se rovná poměru délky větší části k délce té menší [1]. Číselnou hodnotu zlatého řezu získáme z řešení rovnice

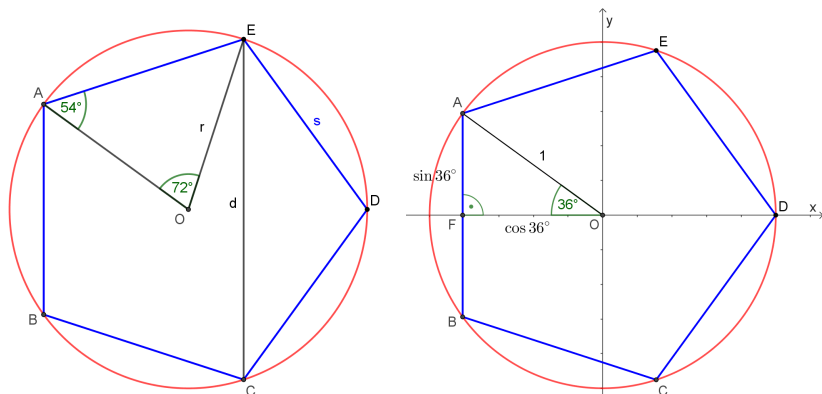
$$\frac{x+y}{x} = \frac{x}{y},$$

kde x, y ($x > y$) jsou části úsečky o délce $x + y$. Pokud dále položíme $y = 1$, pak po zjednodušení dostáváme rovnici

$$x^2 - x - 1 = 0,$$

pro jejíž kořeny platí $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Zlatým řezem φ je kladný kořen

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$



Obr. 2: Pětiúhelník a zlatý řez

Zlatý řez je v geometrii neoddělitelně spjatý s pětiúhelníkem, neboť tvoří poměr délky úhlopříčky k délce strany pětiúhelníku (obr. 2 vlevo). Bez újmy na obecnosti budeme dále uvažovat pětiúhelník vepsaný kružnici o poloměru $r = 1$ (jednotková kružnice).

Na obr. 2 (vpravo) je do jednotkové kružnice vepsán pětiúhelník, kde vzdálenost $|OF| = \cos 36^\circ$. Ukažme, že $\cos 36^\circ = (1 + \sqrt{5})/4 = \varphi/2$. Pokud označíme $x = 18^\circ$, pak $2x = 90^\circ - 3x$ a dále

$$\sin 2x = \sin(90^\circ - 3x). \quad (9)$$

Vzhledem ke skutečnosti, že $\sin(90^\circ - 3x) = \cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$, lze rovnici (9) zapsat ve tvaru $2 \sin x \cos x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$, a dále po úpravách a zjednodušení

$$4 \sin^2 x + 2 \sin x - 1 = 0,$$

kde

$$\sin x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}.$$

Pokud shrneme výše uvedené, pak platí

$$\sin 18^\circ = \cos 72^\circ = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} = \frac{1}{2\varphi}, \quad (10)$$

$$\cos 18^\circ = \sin 72^\circ = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{2}} = \frac{1}{2} \sqrt{2 + \varphi}. \quad (11)$$

Podle vzorců pro sinus a kosinus dvojnásobného úhlu dále platí

$$\sin 36^\circ = 2 \sin 18^\circ \cos 18^\circ = \frac{1}{2\varphi} \sqrt{2 + \varphi}, \quad (12)$$

$$\cos 36^\circ = \cos^2 18^\circ - \sin^2 18^\circ = \frac{\varphi}{2}. \quad (13)$$

Na obr. 3 je naznačena konstrukce pětiúhelníku vepsaného jednotkové kružnici pomocí zlatého řezu. Z bodu $A[1/2, 0]$ opíšeme kruhový oblouk o poloměru $|AB| = \sqrt{5}/2$, který protíná osu x ve zlatém řezu φ . Kolmice k ose x procházející bodem $\varphi/2$ protíná kružnici v úsečce EI tvořící stranu vepsaného pětiúhelníku $EFGHI$.

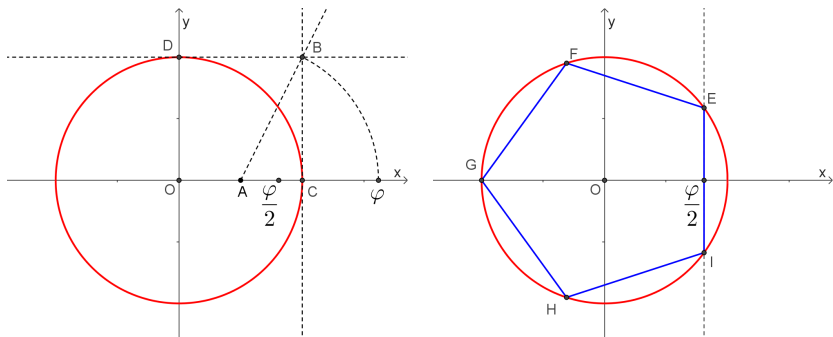
3. Číslo π a pětiúhelník

Využitím postupu, který objevil F. Viète, bychom v případě pravidelného pětiúhelníku jako výchozího tvaru celkem snadno získali nekonečný součin

$$\pi = \frac{5}{\varphi} \cdot \frac{2}{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \varphi}}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \varphi}}}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \varphi}}}}} \cdot \dots, \quad (14)$$

neboť $n = 5$ a $\alpha = 36^\circ$.

Obdobně bychom ke stejnému výsledku dospěli v případě, že bychom nahradili přibližování obsahu n -úhelníku obsahu opsaného kruhu za přibližování obvodu n -úhelníku obvodu opsané kružnice.



Obr. 3: Konstrukce pětiúhelníku v jednotkové kružnici pomocí zlatého řezu

V úvodu jsme uvedli, že Viète použitím nekonečného součinu (1) dokázal správně určit devět desetinných pozic čísla π . Poté co jsme našli nekonečný součin (14), se celkem přirozeně nabízí otázka, kolik činitelů nekonečného součinu musíme minimálně použít, abychom získali stejný počet desetinných pozic jako Viète. Pokud označíme číslem k počet činitelů konečného součinu

$$\pi = \frac{5}{\varphi} \cdot \underbrace{\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\varphi}}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\varphi}}}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\varphi}}}}}}_{k \text{ činitelů}} \cdot \dots,$$

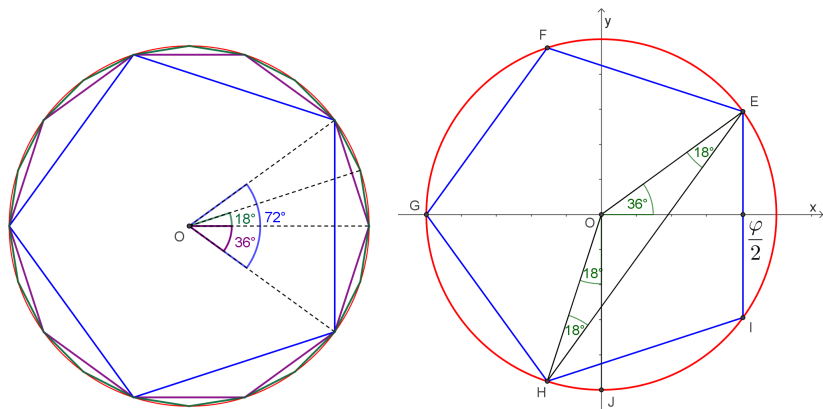
pak si lze ověřit, že $k = 15$.

V článku [3] je vzorec (1) zapsán pomocí vnořených druhých odmocnin a obsahuje pouze jeden součin

$$\pi = \lim_{k \rightarrow \infty} 2^k \underbrace{\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}}}}}_{k \text{ druhých odmocnin}}$$

Ukažme nyní odvození obdobného vzorce opět pro pětiúhelník, kdy v jednotlivých iteracích budeme opakovaně půlit úhel (obr. 4 vlevo), přičemž nás bude zajímat délka svislé odvěsny, která odpovídá sinu příslušného úhlu.

Pro výpočet délky odvěsny použijeme vzorce pro sinus a kosinus polovičního úhlu $\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$, $\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$.


Obr. 4: Aproximace čísla π v pětiúhelníku

Podle (13) je $\cos 36^\circ = \cos(\pi/5) = \varphi/2$ a dále postupně

$$\begin{aligned} \sin \frac{\pi}{10} &= \frac{1}{2} \sqrt{2 - \varphi}, & \cos \frac{\pi}{10} &= \frac{1}{2} \sqrt{2 + \varphi}, \\ \sin \frac{\pi}{20} &= \frac{1}{2} \sqrt{2 - \sqrt{2 + \varphi}}, & \cos \frac{\pi}{20} &= \frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{2 + \varphi}}, \\ \sin \frac{\pi}{40} &= \frac{1}{2} \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \varphi}}}, & \cos \frac{\pi}{40} &= \frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \varphi}}}, \\ \sin \frac{\pi}{80} &= \frac{1}{2} \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \varphi}}}}, & \cos \frac{\pi}{80} &= \frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \varphi}}}}, \\ & & & \vdots \\ \sin \frac{\pi}{5 \cdot 2^k} &= \frac{1}{2} \sqrt{2 - \underbrace{\sqrt{2 + \dots + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \varphi}}}}_{k \text{ druhých odmocnin}}}. \end{aligned}$$

Aproximaci čísla π získáme jako limitu (tab. 1)

$$\pi = \lim_{k \rightarrow \infty} 5 \cdot 2^{k-1} \sqrt{2 - \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \varphi}}}}}_{k \text{ druhých odmocnin}}}. \quad (15)$$

Závěr

Pokud bychom se ještě vrátili na úplný začátek článku a dovyprávnili příběh Archimédovy metody aproximace čísla π , pak téhož roku jako

F. Viète se nizozemský geometr Adriaan van Roomen (1561–1615) dopracoval k mnohoúhelníku s 2^{30} stranami a vypočítal π s přesností na 15 desetinných pozic. Ludolph van Ceulen (1540–1610) dokázal v roce 1596 pomocí mnohoúhelníku o 2^{62} stranách správně vypočítat nejprve 20 a později dokonce 35 desetinných míst. Nejlepšího výsledku aproximace π využívající mnohoúhelníkovou metodu pravděpodobně dosáhl v roce 1630 rakouský astronom Christoph Grienberger (1561–1636), kterému se podařilo správně spočítat 38 desetinných pozic použitím mnohoúhelníku o 10^{40} stranách [5].

k	Aproximace π	k	Aproximace π
1	3 ,09016 99438	6	3,14154 21879
2	3,12868 93008	7	3,14158 00371
3	3,13836 38291	8	3,14158 94995
4	3,14078 52607	9	3,14159 18650
5	3,14139 07937	10	3,14159 24564

Tabuľka 1: Aproximace čísla π (správné pozice tučně) podle rovnice (15)

V průběhu 17. století díky práci Isaaca Newtona (1642–1727) a Gottfrieda Wilhelma Leibnize (1646–1716) postupně nahradil již poněkud těžkopádnou a výpočetně značně zdlouhavou Archimédovu metodu nastupující infinitezimální počet, a to zejména ve spojení se studiem nekonečných řad vhodných funkcí. Velký pokrok představoval objev a následné využití rozvoje funkce arkus tangens⁵⁾

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{2k-1}. \quad (16)$$

⁵⁾ Funkce arkus tangens je inverzní k funkci tangens, jejíž definiční obor je omezen na interval $(-\pi/2; \pi/2)$. Arkus tangens zapisujeme v matematických výrazech ve tvaru arctg nebo tg^{-1} . Platí, že tangens daného úhlu udává číslo, jehož arkus tangens je opět daný úhel, např.

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3} \rightarrow \operatorname{arctg}(\sqrt{3}) = \operatorname{tg}^{-1}(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}.$$

Řada byla nezávisle objevena skotským matematikem Jamesem Gregorem (1638–1675) a G. W. Leibnizem.

V roce 1706 anglický matematik John Machin (1680–1751) objevil vzorec

$$\frac{\pi}{4} = 4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{293},$$

pomocí kterého v kombinaci s řadou (16) dokázal určit 100 desetinných pozic čísla π . Různé Machinovy vzorce pak ještě dlouho hrály důležitou roli při aproximacích čísla π .

Podrobný postup aproximace využívající řadu (16) je uveden v článku [4], zde zmíníme základní principy týkající se aproximace čísla π v pětiúhelníku. Na obr. 4 (vpravo) je do pětiúhelníku umístěn trojúhelník HEO s vyznačenými vnitřními úhly, kde $90^\circ = 36^\circ + 3 \cdot 18^\circ$, resp. $\pi/2 = \pi/5 + 3\pi/10$, nebo také $\pi/4 = \pi/10 + 3\pi/20$.

Využitím rovností (10), (11) dostáváme

$$\operatorname{tg}(\pi/10) = \frac{\sin(\pi/10)}{\cos(\pi/10)} = \frac{1}{\varphi\sqrt{2+\varphi}}, \quad (17)$$

a dále

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(3\pi/20) &= \operatorname{tg}(\pi/4 - \pi/10) = \frac{\operatorname{tg}(\pi/4) - \operatorname{tg}(\pi/10)}{1 + \operatorname{tg}(\pi/4) \operatorname{tg}(\pi/10)} = \\ &= \frac{1 - \frac{1}{\varphi\sqrt{2+\varphi}}}{1 + \frac{1}{\varphi\sqrt{2+\varphi}}} = \frac{\varphi\sqrt{2+\varphi} - 1}{\varphi\sqrt{2+\varphi} + 1}. \end{aligned}$$

Použitím funkce arkus tangens pro úhly $\pi/10$, $3\pi/20$ dostáváme

$$\frac{\pi}{10} = \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{\varphi\sqrt{2+\varphi}} \right), \quad \frac{3\pi}{20} = \operatorname{arctg} \left(\frac{\varphi\sqrt{2+\varphi} - 1}{\varphi\sqrt{2+\varphi} + 1} \right),$$

a dále

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{\varphi\sqrt{2+\varphi}} \right) + \operatorname{arctg} \left(\frac{\varphi\sqrt{2+\varphi} - 1}{\varphi\sqrt{2+\varphi} + 1} \right). \quad (18)$$

V této chvíli se vrátíme k rozvoji funkce arkus tangens do nekonečné řady (16), odkud po dosazení

$$x = \frac{1}{\varphi\sqrt{2+\varphi}}, \quad \text{resp. } x = \frac{\varphi\sqrt{2+\varphi} - 1}{\varphi\sqrt{2+\varphi} + 1}$$

postupně dostáváme

$$\begin{aligned}
 & \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\varphi\sqrt{2+\varphi}}\right) = \\
 &= \frac{1}{\varphi\sqrt{2+\varphi}} - \frac{1}{3\varphi^3\sqrt{(2+\varphi)^3}} + \frac{1}{5\varphi^5\sqrt{(2+\varphi)^5}} - \dots = \\
 &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} \left(\frac{1}{\varphi\sqrt{2+\varphi}}\right)^{2k-1}, \\
 & \operatorname{arctg}\left(\frac{\varphi\sqrt{2+\varphi}-1}{\varphi\sqrt{2+\varphi}+1}\right) = \\
 &= \frac{\varphi\sqrt{2+\varphi}-1}{\varphi\sqrt{2+\varphi}+1} - \frac{1}{3}\left(\frac{\varphi\sqrt{2+\varphi}-1}{\varphi\sqrt{2+\varphi}+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{\varphi\sqrt{2+\varphi}-1}{\varphi\sqrt{2+\varphi}+1}\right)^5 - \dots = \\
 &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} \left(\frac{\varphi\sqrt{2+\varphi}-1}{\varphi\sqrt{2+\varphi}+1}\right)^{2k-1}.
 \end{aligned}$$

a dále po dosazení do rovnice (18)

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} \left(\frac{1}{\varphi\sqrt{2+\varphi}}\right)^{2k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} \left(\frac{\varphi\sqrt{2+\varphi}-1}{\varphi\sqrt{2+\varphi}+1}\right)^{2k-1}. \quad (19)$$

V níže uvedené tabulce jsou uvedené správné desetinné pozice čísla π pro vybrané hodnoty k vypočtené podle rovnice (19).

$k_{\max}$	Správné desetinné číslice čísla π
5	3,141
10	3,14159 2
15	3,14159 2653
20	3,14159 26535 897
25	3,14159 26535 89793

Tabulka 2: Výpočet hodnoty čísla π podle rovnice (19)

Literatura

- [1] Bellos, A.: *Alexova dobrodružství v zemi čísel*. Dokořán, Praha, 2015.

- [2] Navarro, J.: *Tajemné π . Lze provést kvadraturu kruhu?* Dokořán, Praha, 2018.
- [3] Servi, L. D.: Nested square roots of 2. *Amer. Math. Monthly*, roč. 110 (2003), č. 4, s. 326–330.
- [4] Spíchal, L.: Aproximace čísla π pomocí zlatého řezu a kovových průměrů. *Rozhledy matematicko-fyzikální*, roč. 98 (2023), č. 4, s. 20–30.
- [5] Stewart, I.: *Neuvěřitelná čísla profesora Stewarta*. Argo/Dokořán, Praha, 2019.

Dělitelnost pro konečná zobrazení

Tereza Krejčí, Masarykova univerzita, Brno

Dělitelnost je jedním ze základních kamenů matematiky. V tomto článku budeme hledat odpověď na otázku, kam nás dělitelnost může zavést, když se na ni podíváme v netradičním kontextu.

Abychom dělitelnost mohli definovat, potřebujeme množinu prvků – v klasickém případě $\mathbb{Z}$ – a binární operaci¹⁾ na této množině – tedy násobení.

Definice 1. Necht $a, b \in \mathbb{Z}$. Řekneme, že a dělí b , pokud existuje celé číslo c takové, že

$$b = a \cdot c.$$

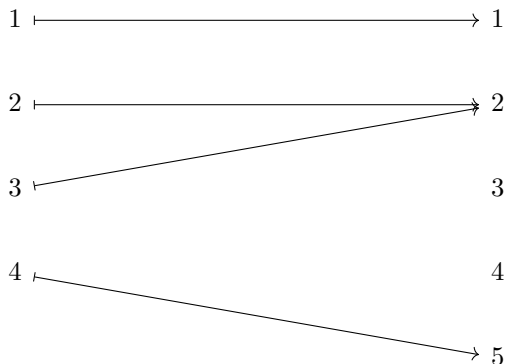
Úplně analogicky lze dělitelnost ale definovat i pro odlišné množiny a operace. My budeme pracovat s množinou konečných zobrazení a operací skládání.

Zobrazením f mezi množinami A a B rozumíme množinu f uspořádaných dvojic (a, b) ; $a \in A, b \in B$ takovou, že pro každé a existuje právě jedno b , kde $(a, b) \in f$. Zobrazení tedy spočívá v přiřazení prvků z množiny obrazů ke vzorům z první množiny. Pokud $(a, b) \in f$, píšeme $f(a) = b$. Toto přiřazení budeme znázorňovat šipkami mezi vzory a obrazy. Složení zobrazení f a g značíme $g \circ f$ a chápeme jím zobrazení dané předpisem $g(f(x))$.

¹⁾ Binární operací rozumíme přiřazení $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, tedy každé dvojici prvků přiřadíme jeden prvek, výsledek.

Aby se nám se zobrazeními lépe pracovalo a protože pro obecná zobrazení by vlastnosti dělitelnosti nebyly jednoznačné, budeme se zabývat pouze zobrazeními mezi konečnými ordinály. Konečným ordinálem $\underline{n}$, kde n je přirozené číslo, rozumíme množinu $\underline{n} = \{1, \dots, n\}$ se standardním uspořádáním.

Zobrazení $f: \underline{4} \rightarrow \underline{5}$ tedy může vypadat třeba takto:



Prvky konečných ordinálů jsou čísla, a tak je intuitivně uspořádáme. Přeházení pořadí prvků ale podstatu zobrazení nijak neovlivní – mohli bychom je klidně uspořádat i jinak a stále by se jednalo o stejné zobrazení.

Abychom tedy dospěli k větší jednoznačnosti, budeme se držet standardního uspořádání a zároveň budeme pracovat pouze se zobrazeními, která *zachovávají pořadí*. To znamená, že pokud pro dva vzory n a m zobrazení f platí $n \leq m$, pak platí i $f(n) \leq f(m)$.²⁾ Intuitivně si můžeme představit, že šipky jsou „rozmotané“ tak, aby se neprotínaly.

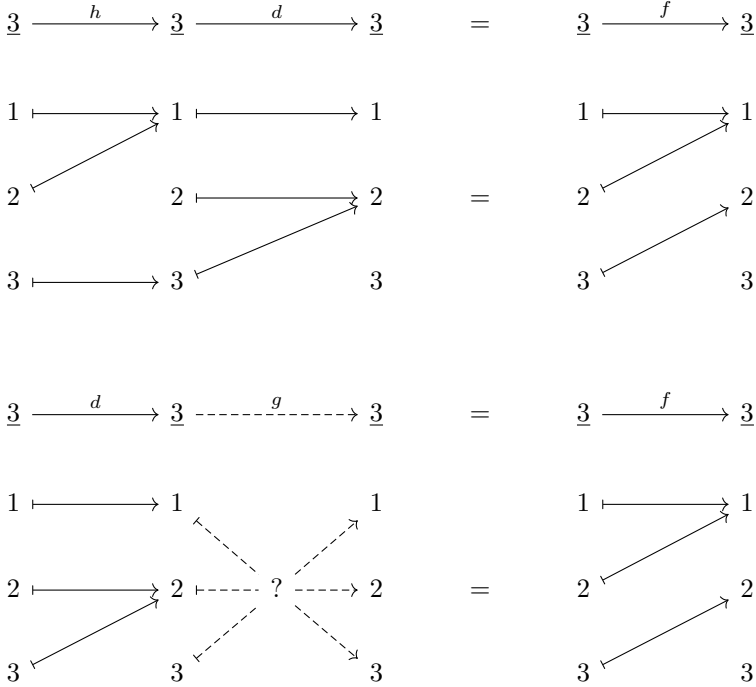
Od této chvíle předpokládejme, že zobrazení, s nimiž pracujeme, zachovávají pořadí, aniž bychom to pokaždé specifikovali. Díky tomu získáme například jednoznačné bijekce³⁾, které jsou mezi konečnými ordinály vždy identitami.

Nyní už se můžeme pustit do definice dělitelnosti pro konečná zobrazení. Je ale potřeba uvědomit si, že operace skládání zobrazení není

²⁾ Také říkáme, že f je neklesající nebo neostře rostoucí zobrazení.

³⁾ Bijekcí (neboli bijektivním zobrazením) rozumíme zobrazení, které je zároveň injektivní i surjektivní. To znamená, že každému prvku z množiny vzorů přiřadí právě jeden obraz a zároveň každý prvek z množiny obrazů má právě jeden vzor.

komutativní, tedy obecně neplatí $h \circ g = g \circ h$. Proto je možné, že zobrazení d dělí zobrazení f „z jedné strany“ (platí $f = d \circ h$ pro nějaké zobrazení h), už ale neexistuje zobrazení g takové, že $f = g \circ d$, jak můžeme vidět na obrázku níže.



Musíme tedy rozlišit *pravou* a *levou* dělitelnost.

Definice 2. Řekneme, že zobrazení $d: \underline{k} \rightarrow \underline{m}$ zprava dělí zobrazení $f: \underline{n} \rightarrow \underline{m}$, pokud existuje zobrazení $h: \underline{n} \rightarrow \underline{k}$ takové, že:

$$d \circ h = f.$$

Definice 3. Řekneme, že zobrazení $d: \underline{n} \rightarrow \underline{l}$ zleva dělí zobrazení $f: \underline{n} \rightarrow \underline{m}$, pokud existuje zobrazení $g: \underline{l} \rightarrow \underline{m}$ takové, že:

$$g \circ d = f.$$

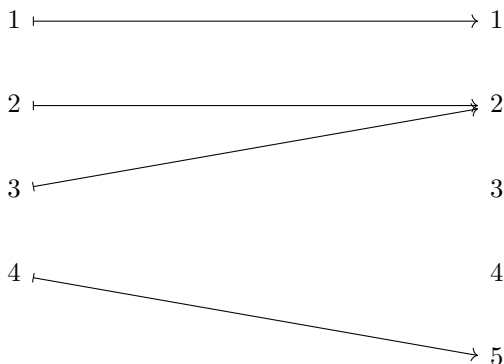
Na obrázku výše tedy zobrazení d zprava dělí zobrazení f , zatímco zleva je nedělí. Využijme tohoto příkladu k několika pozorováním.

V případě pravé dělitelnosti nutně potřebujeme, aby zobrazení d nějaké vzory zobrazilo na prvky 1 a 2 stejně jako zobrazení f . V opačném případě bychom mohli volit libovolné zobrazení h , ale složením těchto dvou zobrazení by nikdy nebylo f . Naopak pokud zobrazení d tuto podmínku splňuje, stačí sestavit h tak, aby každý prvek zobrazilo na prvek, který pak d zobrazí na příslušný obraz.

Nyní se zaměříme na levou dělitelnost a pokusme se vysvětlit, proč zobrazení g symbolicky zaznačené na obrázku nemůže existovat. Aby se složení g po d rovnalo f , musí být 2 zobrazena na 1; a 3 na 2. Toho ale nikdy nedocílíme, ať už g zvolíme jakkoli, protože $d(2) = d(3)$, a tak i jejich výsledný obraz bude stejný.

Abychom tato zjištění mohli popsat formálněji, potřebujeme se nejprve seznámit s termíny *obraz* a *koobraz*⁴⁾.

Obrazem zobrazení (značíme im) rozumíme podmnožinu množiny, do níž zobrazujeme, obsahující právě ty prvky, které mají nějaký vzor. Obraz našeho ukázkového zobrazení je tedy množina $\{1, 2, 5\}$.



Pojem koobraz je o něco komplikovanější a můžeme ho chápat jako duální k obrazu. K jeho definici využijeme relací. Relace mezi množinami A a B je nějaká podmnožina kartézského součinu $A \times B$. Řekneme, že prvek a je v relaci ρ s prvkem b , pokud $(a, b) \in \rho$, a píšeme $a \rho b$.

Relaci ρ na množině A nazýváme relací ekvivalence, pokud je reflexivní ($\forall a \in A: a \rho a$), symetrická ($a \rho b \Rightarrow b \rho a$) a tranzitivní ($a \rho b \wedge b \rho c \Rightarrow a \rho c$).

⁴⁾ Anglicky „image“ a „coimage“, odtud i značení im a coim .

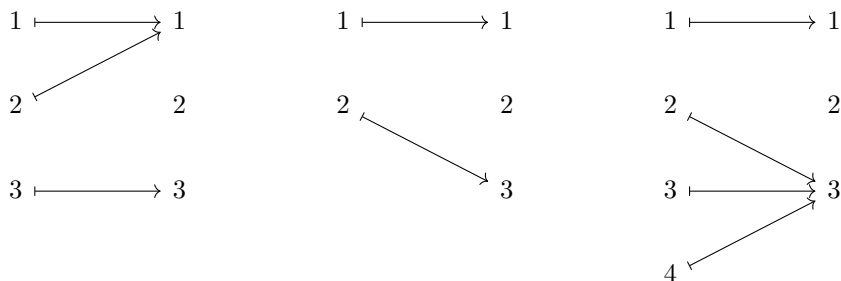
Uvažujme pro každé zobrazení f relaci ekvivalence $\sim_f$, která prvky rozdělí podle jejich obrazu tak, že dva prvky budou v relaci (píšeme $a \sim_f b$), právě když $f(a) = f(b)$. Koobrazem (značíme coim) potom rozumíme „rozdělení“ vzorů podle dané relace. Formálně jde o množinu takzvaných tříd ekvivalence, kdy každá třída sjednocuje prvky, které jsou navzájem v relaci.

Koobrazem tohoto zobrazení tedy bude množina $\{[1], [2] = [3], [4]\}$. Obsahuje tři třídy, které značíme podle jejich reprezentantů – třídu s prvkem 1, třídu s prvky 2 a 3 (které mají stejný obraz) a třídu s prvkem 4. Můžeme si všimnout, že každá třída koobrazu zobrazení odpovídá právě jednomu prvku obrazu a mezi těmito množinami existuje bijekce. Ve spojitosti s předchozími úvahami lze také vidět, že obraz nese informace stěžejní pro pravou dělitelnost zobrazení, zatímco koobraz charakterizuje vlastnosti, které nám pomohou popsat zobrazení z hlediska levé dělitelnosti. Tyto poznatky můžeme formálně shrnout následovně:

Lemma 1. *Nechť f je zobrazení $f: \underline{n} \rightarrow \underline{m}$ a d je zobrazení $d: \underline{k} \rightarrow \underline{m}$. Zobrazení d dělí zprava f právě tehdy, když $\text{im } f \subseteq \text{im } d$.*

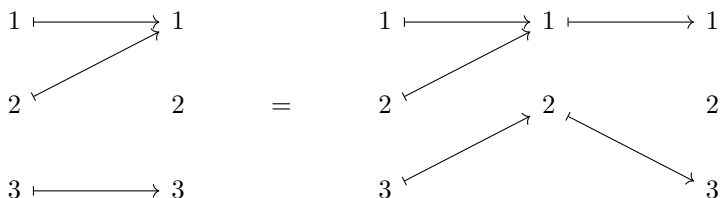
Lemma 2. *Nechť f je zobrazení $f: \underline{n} \rightarrow \underline{m}$ a d je zobrazení $d: \underline{n} \rightarrow \underline{l}$. Zobrazení d dělí zleva f právě tehdy, když $\sim_d \subseteq \sim_f$ ⁵⁾.*

V této souvislosti je zajímavé zamyslet se, jak bychom mohli zobrazení z hlediska dělitelnosti lépe charakterizovat. Zajímá-li nás pouze pravá dělitelnost, všechna následující zobrazení se zprava dělí navzájem, neboť jejich obrazy se rovnají, a jsou tak z pohledu pravé dělitelnosti „stejná“. (Podobně ve standardní teorii čísel můžeme čísla 5 a -5 považovat za stejná, co se týče vlastností dělitelnosti.)

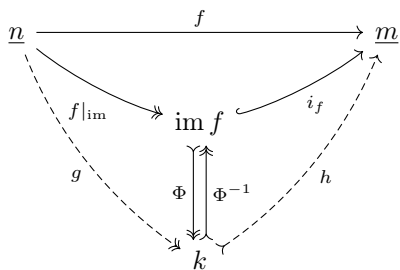


⁵⁾Tento vztah říká, že pokud jsou nějaké dva prvky v relaci podle zobrazení d , musejí být i v relaci podle zobrazení f . Jinými slovy, pokud d nějaké dva prvky „scvakne“, udělá to i f .

Všechna tato zobrazení mají jedno společné – můžeme je napsat jako složení nějakého zobrazení a injektivního zobrazení $\underline{2} \rightarrow \underline{3}$ s obrazem $\{1, 3\}$, například následovně:



Není těžké rozmyslet si, že analogickým způsobem lze každé zobrazení f rozložit na injekci po surjekci přes ordinál $\underline{k}$, kde $k = |\text{im } f| = |\text{coim } f|$, jak znázorňuje následující graf⁶⁾. Pokud všechna zobrazení, s nimiž pracujeme, zachovávají pořadí, existuje navíc daný rozklad jednoznačně.



Tento rozklad je z hlediska dělitelnosti velmi zajímavý, protože každé zobrazení rozdělí na dvě složky – surjektivní g , která nese informaci o koobrazu zobrazení (neboli nám říká, jaké prvky dané zobrazení spojí), a je tedy zásadní z hlediska levé dělitelnosti; a injektivní h , jež nese informaci o obrazu zobrazení a charakterizuje jej z hlediska pravé dělitelnosti.

Z toho také vyplývá, že pracujeme-li například pouze s levou dělitelností, injektivní složka zobrazení v našich úvahách takřka nehraje roli a levou dělitelnost nijak neovlivňuje. Pro jednoduchost tedy v takových případech můžeme úvahy zúžit pouze na surjektivní zobrazení (jejichž injektivní složkou je prostá identita). Analogicky pak pro práci s pravou dělitelností stačí uvažovat pouze injektivní zobrazení, aniž by došlo k újmě na obecnosti.

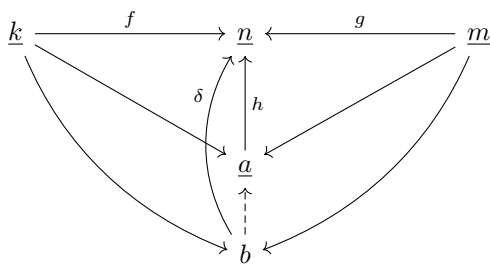
⁶⁾ Značením $f|_{\text{im}}$ rozumíme zobrazení $\underline{n} \rightarrow \text{im } f$ definované předpisem $f|_{\text{im}}(x) = f(x)$ a i_f je inkluze $\text{im } f \rightarrow \underline{m}$, tedy $i_f(x) = x$. Zobrazení Φ je bijekce.

Největší společný dělitel a nejmenší společný násobek

Jelikož dělitelnost pro konečná zobrazení vychází z teorie čísel, nabízí se pokusit se najít analogie i k dalším známým konceptům, jako jsou například největší společní dělitelé. V teorii čísel můžeme největšího společného dělitele kromě zřejmé definice zavést i jako přirozené číslo, které je dělitelné všemi společnými děliteli. Tato definice nám poslouží i v případě zobrazení.

Pravá dělitelnost

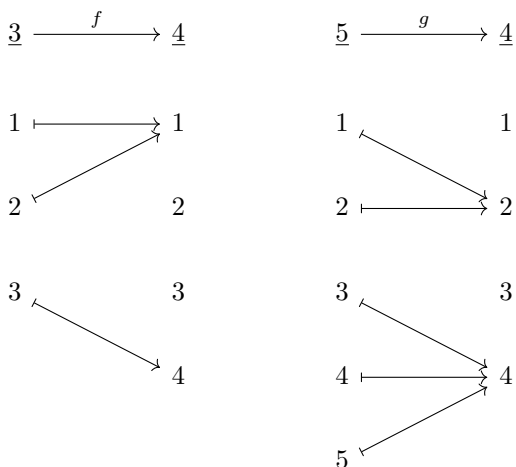
Definice 4. Mějme zobrazení f a g zobrazující na stejný ordinál $\underline{n}$. Pak jejich společným pravým dělitelem je každé zobrazení h , které zprava dělí jak f , tak g . Jejich největším společným pravým dělitelem nazveme každého jejich společného dělitele δ , který je zprava dělitelný všemi jejich společnými pravými děliteli.



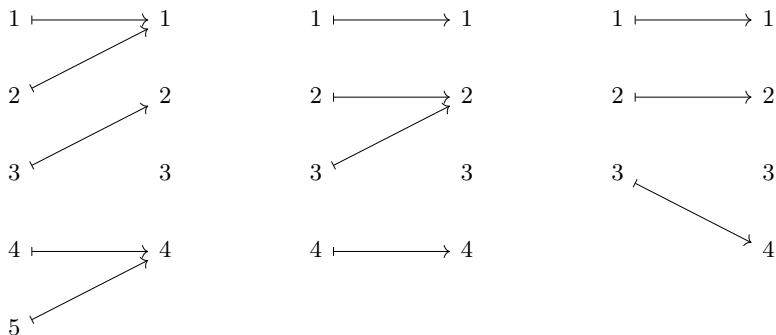
Pokusme se nyní obecně nalézt největšího pravého dělitele dvou zobrazení f a g . Už víme, že pro každého jejich společného pravého dělitele h musí platit $\text{im } f \subseteq \text{im } h$ a $\text{im } g \subseteq \text{im } h$, tedy i $\text{im } f \cup \text{im } g \subseteq \text{im } h$. Také jistě lze vždy zkonstruovat zobrazení δ na ordinál $\underline{n}$ tak, že $\text{im } \delta = \text{im } f \cup \text{im } g$. Podle podmínky dělitelnosti je zobrazení δ dělitelem f i g a zároveň pro každého společného dělitele h dostáváme $\text{im } \delta = \text{im } f \cup \text{im } g \subseteq \text{im } h$, odkud h zprava dělí δ . Našli jsme tedy společného dělitele, jenž je dělitelný všemi společnými děliteli, a tak z definice je δ největší společný pravý dělitel zobrazení f a g .

Můžeme si snadno rozmyslet, že zobrazení δ , která splňují podmínku $\text{im } \delta = \text{im } f \cup \text{im } g$, je nekonečně mnoho, neboť je můžeme sestavit z libovolné množiny k , kde $k \geq |\text{im } f \cup \text{im } g|$. My už ale víme, že všechna tato zobrazení jsou z pohledu pravé dělitelnosti totožná a stačí nám uvažovat pouze jejich společnou injektivní složku. Injektivní největší společný dělitel dvou zobrazení tedy vždy existuje jednoznačně.

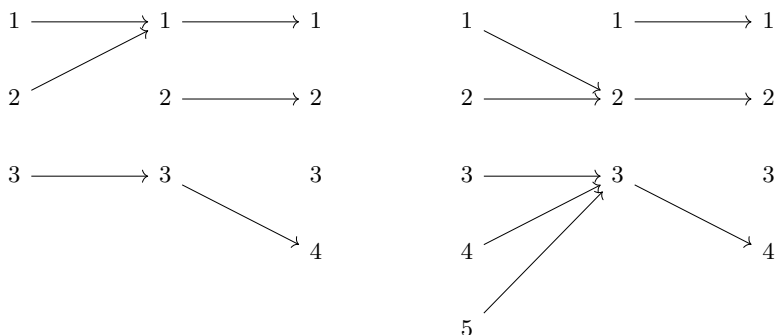
Tyto myšlenky lze ilustrovat na následujícím příkladu dvou zobrazení:



Jejich největším společným pravým dělitelem je každé zobrazení $A \rightarrow \underline{4}$ takové, že jeho obrazem je sjednocení obrazů $\text{im } f$ a $\text{im } g$, tedy $\{1, 4\} \cup \{2, 4\} = \{1, 2, 4\}$. Příklady těchto zobrazení vidíme na obrázku níže.



Jediným injektivním největším společným pravým dělitelem je zobrazení napravo. Můžeme se jednoduše přesvědčit, že skutečně dělí obě zobrazení f i g .



Pokud bychom namísto největšího společného dělitele hledali nejmenší společný pravý násobek, mohli bychom postupovat velmi analogicky, jak je vidět už při srovnání jejich definic.

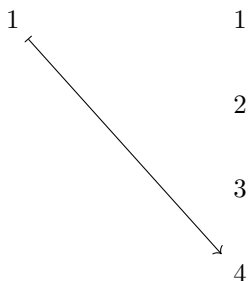
Definice 5. Mějme zobrazení f a g zobrazující na stejný ordinál $\underline{n}$. Pak jejich společným pravým násobkem je každé zobrazení h , které je zprava dělitelné jak f , tak g . Jejich nejmenším společným pravým násobkem nazveme každý jejich společný násobek ν , který zprava dělí všechny jejich společné pravé násobky.

Analogicky budeme pracovat i při jeho hledání, a budeme tedy pohlížet na obrazy zobrazení. Mějme tedy zobrazení f a g z předchozí definice a pokusme se najít jejich nejmenší společný pravý násobek ν .

Tentokrát o každém společném násobku h víme, že f a g zprava dělí h , a tudíž z kritérií dělitelnosti plyne $\text{im } h \subseteq \text{im } f$ a $\text{im } h \subseteq \text{im } g$, odtud $\text{im } h \subseteq \text{im } f \cap \text{im } g$. Jistě můžeme zkonstruovat zobrazení ν na ordinál $\underline{n}$ takové, že $\text{im } \nu = \text{im } f \cap \text{im } g$, a už snadno dokážeme, že takové ν je nejmenším společným pravým násobkem f a g . Stačí tedy ukázat, že také dělí jakýkoli společný pravý násobek. Pro ten platí $\text{im } h \subseteq \text{im } f \cap \text{im } g = \text{im } \nu$, a tedy opravdu ν dělí h .

Jelikož pracujeme s pravou dělitelností, opět můžeme klást podmínku injektivitu a nalézt injektivní nejmenší společný pravý násobek.

V případě zobrazení, se kterými jsme pracovali při hledání největšího společného dělitele, bychom potřebovali nalézt zobrazení ν s obrazem $\text{im } \nu = \text{im } f \cap \text{im } g = \{1, 4\} \cap \{2, 4\} = \{4\}$ a injektivní nejmenší společný pravý násobek ν by tedy vypadal následovně:



Lze upozorovat, že mezi děliteli a násobky zobrazení existuje dualita – mnohé definice, konstrukce i důkazy mají tutéž strukturu, jen pracují s jinými operacemi. Zajímavé je, že podobným způsobem můžeme dualitu nalézt i mezi pravou a levou dělitelností. Vyplyvá z kritérií dělitelnosti, na nichž pak stojí i veškeré úvahy při hledání největších společných dělitelů a nejmenších společných násobků. Nalezený popis konstrukce jednoho ze čtyř objektů nám tak dává návod, jak sestrojit i zbylé tři.

Levá dělitelnost

Abychom mohli z této duality vycházet, potřebujeme pracovat s analogiemi průniku a sjednocení obrazů.

Značením $f \cap g$ budeme rozumět množinu tříd ekvivalence $\sim_{f \cap g}$ definovanou následovně:

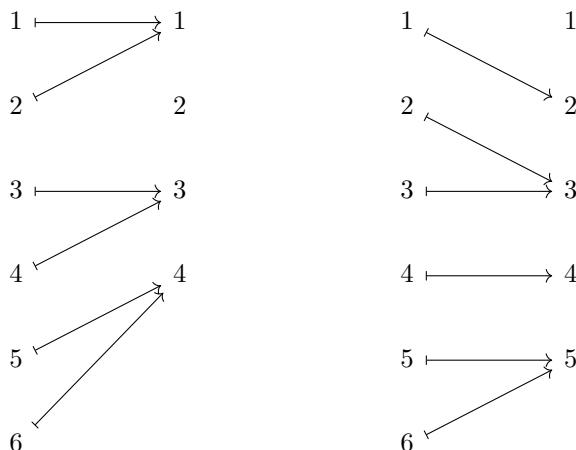
$$a \sim_{f \cap g} b \Leftrightarrow (f(a) = f(b) \wedge g(a) = g(b)).$$

Průnikem koobrazů pro nás tedy bude množina tříd ekvivalence sestavená tak, aby v jedné třídě byly všechny prvky, které mají stejný obraz jak v jednom, tak v druhém zobrazení.

Naopak jejich sjednocením v tomto kontextu rozumíme množinu tříd, které sjednocují prvky spojené alespoň jedním zobrazením a také prvky sjednocené „přes“ další prvky. Sjednocení koobrazů můžeme sestrojit algoritmicky: nejprve budou v relaci prvky a a b , pro něž platí $(f(a) = f(b) \vee g(a) = g(b))$. Dále budeme tvořit její tranzitivní obal tak, aby platilo $a \sim_{f \cup g} b \wedge b \sim_{f \cup g} c \Rightarrow a \sim_{f \cup g} c$.

Jinými slovy pro dvě zobrazení z množiny $\underline{n}$ platí $a \sim_{f \cup g} b$, právě když existují $x_1, x_2, \dots, x_j \in \underline{n}$ tak, že

$$f(a) = f(x_1) \wedge g(x_1) = g(x_2) \wedge f(x_2) = f(x_3) \wedge \dots \wedge g(x_j) = g(b).$$

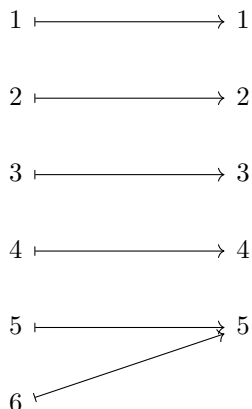


Např. průnikem koobrazů zobrazení na obrázku výše bude množina $\{[1], [2], [3], [4], [5] = [6]\}$ a jejich sjednocením množina $\{[1] = [2] = [3] = [4], [5] = [6]\}$. Na tomto příkladu lze vidět, proč relaci $\sim_{f \cup g}$ nestačí definovat analogicky k průniku jako $a \sim_{f \cup g} b \Leftrightarrow (f(a) = f(b) \vee g(a) = g(b))$. Tato relace by nebyla ekvivalencí, protože není tranzitivní a neplatilo by třeba $1 \sim_{f \cup g} 3$.

Definice největšího společného levého dělitele a nejmenšího společného násobku budou zcela analogické definicím uvedeným u pravé dělitelnosti, až na pořadí ordinálů. I dále můžeme postupovat stejně jako u pravé dělitelnosti. Mějme dvě obecná zobrazení f a g a pokusme se nejprve popsat jejich největšího společného dělitele. Pro každého společného dělitele h podle kritérií dělitelnosti platí $\sim_h \subseteq \sim_f$ a $\sim_h \subseteq \sim_g$, tedy $h(a) = h(b) \Rightarrow (f(a) = f(b) \wedge g(a) = g(b))$ a odtud $\sim_h \subseteq \sim_{f \cap g}$. Obdobně jako v případě pravé dělitelnosti není těžké se přesvědčit, že můžeme snadno zkonstruovat takové zobrazení δ , že $\sim_\delta = \sim_{f \cap g}$, a že toto zobrazení dělí f i g . Porovnáním s $\sim_h$ dostáváme, že δ zleva dělí všechny společné dělitele f a g , a je tak jejich největším společným levým dělitelem. Zjistili jsme, že největším levým dělitelem je zobrazení, pro něž platí $\text{coim } \delta = \text{coim } f \cap g$. Pokud bychom chtěli největšího společného levého dělitele určeného jednoznačně, budeme klást podmínku surjektivitu, neboť pracujeme s levou dělitelností.

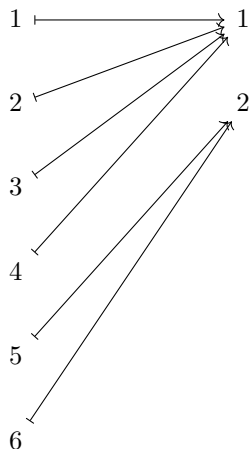
Největšího společného levého dělitele zobrazení výše bychom našli jako zobrazení δ s koobrazem $\text{coim } \delta = \text{coim } f \cap g = \{[1], [2], [3], [4], [5] = [6]\}$.

Ten surjektivní by tedy vypadal následovně:



A nakonec se podívejme na nejmenší společný levý násobek. Analogickými úvahami dospějeme pro každý společný levý násobek h zobrazení f a g k nutné podmínce $\sim_{f \cup g} \subseteq \sim_h$. Když sestrojíme zobrazení ν takové, že $\text{coim } \nu = \text{coim } f \cup g$, našli jsme násobek, který dělí všechny ostatní společné levé násobky, a tedy nejmenší společný levý násobek.

Surjektivní nejmenší společný násobek ν zobrazení z příkladu v této části tedy bude mít koobraz $\text{coim } \nu = \text{coim } f \cup g = \{[1] = [2] = [3] = [4], [5] = [6]\}$, jak vidíme na obrázku níže.



Závěr

Ukázalo se, že dělitelnost je možné smysluplně definovat i na jiných objektech, než jsou čísla.

Dělitelnost pro konečná zobrazení se nám podařilo popsat a díky kritériím dělitelnosti s ní můžeme rozumně pracovat – jak vidíme na příkladu hledání největšího společného dělitele. Na rozdíl od klasické dělitelnosti musíme rozlišovat pravou a levou dělitelnost, které jsou ale v mnohém velmi podobně strukturované. Díky jednoznačnému rozkladu můžeme s oběma dělitelnostmi pracovat zvlášť a zaměřovat se pouze na surjekce či injekce.

Stojí za povšimnutí, že celá práce s dělitelností nevyžaduje definici operace inverzní ke skládání, kterou by se ani pro obecná zobrazení nedalo smysluplně definovat. Také pro zobrazení nezavádíme operaci analogickou ke sčítání, a tak nemůžeme pokračovat ve stopách teorie čísel, například k dělení se zbytkem.

Poděkování

Tento článek vznikl na základě mé práce SOČ [3] vedené Mgr. Dominikem Trnkou, kterému bych chtěla poděkovat za všechny čas a úsilí, které mi při psaní práce věnoval. Poděkování patří také porotě soutěže SOČ za připomínky a cenné rady.

Literatura

- [1] Horák, P.: *Základy matematiky*. Masarykova univerzita, Brno, 2006. Dostupné z: https://is.muni.cz/el/ped/podzim2011/MA2BP_PAL1/Algebra-skripta.pdf
- [2] Růžička, P.: *Divisibility in commutative monoids*. Karlova univerzita, Praha, 2019. Dostupné z: <https://www.karlin.mff.cuni.cz/~ruzicka/algebra191/lecture2-1.pdf>
- [3] Krejčí, T.: *Dělitelnost pro konečná zobrazení*. Práce SOČ, Masarykova univerzita, Brno, 2024.

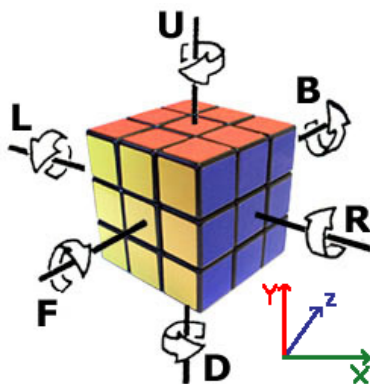
Rubikova kostka, jak ji neznáte

Michal Klouček, Hořické gymnázium, Hořice

Abstrakt. Článek je určený k pohledu na Rubikovu kostku okem matematika a také k přiblížení populárních metod pro její skládání. Při čtení je vhodné mít Rubikovu kostku po ruce nebo využít online simulátor na webu alg.cubing.net [1]. Umět již kostku složit není potřeba.

1. Rubikova kostka z pohledu matematiky

K vysvětlení použiji základní notaci, zde je její stručný popis: pravá strana – R (anglicky right), levá – L (left), horní – U (up), dolní – D (down), přední – F (front), zadní – B (back), viz obr. 1 [3].



Obr. 1: Možné tahy na Rubikově kostce popsané písmeny R , U , L , D , F , B

Tahy se provádí ve směru otáčení hodinových ručiček. Pokud za popisem tahu (za tahem) následuje číslo, určuje, kolikrát má být tah proveden (stále je to však při skládání běžně považováno za jeden tah), a je-li tah zakončen symbolem $'$, je proveden „pozpátku“, tedy proti směru otáčení hodinových ručiček. Uvidíte tedy např. tahy F , $R2$ či D' . Povšimněte si, že $R2' = R2$, to platí pro všechny strany. Nutné je ještě zmínit rotování celé kostky. Nejedná se o tah, jen o přehmátnutí (otočení celou kostkou). Přehmátnutí jsou značená x , y , z podle osy rotace. Jejich směr je shodný s tahy R , U , F v uvedeném pořadí. Méně důležité jsou „slice“

tahy (otočení střední vrstvy): $M = R L' x'$, $E = U D' y'$, $S = F' B z$. Detailnější notaci nebo animaci tahů naleznete na odkazu [1], který velice doporučuji, nebo [2].

Rubikova kostka je uváděna jako učebnicový příklad grupy.

Definice 1. Grupa je algebraická struktura tvořená neprázdnou množinou G a binární operací $\circ$, která splňuje následující podmínky:

- G je uzavřená vzhledem k operaci $\circ$, tj. pro každé $a, b \in G$ je $a \circ b \in G$.
- Operace $\circ$ je asociativní, tj. pro každé $a, b, c \in G$ platí $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$.
- G obsahuje neutrální prvek, tj. existuje $e \in G$ tak, že pro každé $a \in G$ platí $e \circ a = a \circ e = a$.
- Ke každému prvku z množiny G existuje inverzní prvek, tj. pro každé $a \in G$ existuje $b \in G$ tak, že $a \circ b = b \circ a = e$.

Grupu Rubikovy kostky označme $(K, \circ)$.

Množina K je tvořena všemi možnými permutacemi kostiček, které konstrukce kostky umožňuje (jde o tzv. dosažitelné pozice). Lze ukázat, že takových permutací existuje 43 252 003 274 489 856 000.

Operace $\circ$ představuje chronologické provádění tahů. Každý prvek grupy lze tedy chápat jako transformaci kostiček na nové místo nebo jako sekvenci základních tahů, zvanou algoritmus.

Druhý pohled nám říká, že grupa G je generovaná tahy R, U, L, D, F, B , píšeme $G = \langle R, U, L, D, F, B \rangle$, což znamená, že každý její prvek je řetězcem z množiny $\{R, U, L, D, F, B\}$ (symbol $\circ$ se v zápise obvykle vynechává).

Neutrálním prvkem je identická permutace, tu lze získat např. čtyřnásobným opakováním operace, např. R^4 . Inverzního prvku lze dosáhnout pomocí tahů pozpátku, ty se dají generovat pomocí R, U, L, D, F, B , protože platí $R' = R^3$ (analogicky pro ostatní operace). Asociativita tahů je zřejmá.

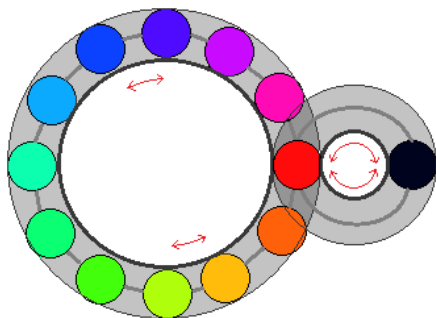
Na pořadí tahů záleží, a proto grupa $(K, \circ)$ není komutativní. Přesvědčte se sami, že například $R U \neq U R$.

Díky vlastnostem grup umožňuje grupa Rubikovy kostky zredukovat tahy potřebné ke složení kostky orientováním nebo permutováním kostiček, složit kostku pomocí inverze atd. Také můžeme grupu Rubikovy kostky rozdělit na jednodušší podgrupy.

2. Metoda Old Pochmann

Jedna z nejdůležitějších technik skládání Rubikovy kostky se nazývá komutátor. Využívá nekomutativní vlastnost grupy a je nástrojem tak mocným, že díky němu je skládající schopen prohodit pouze tři libovolné kostičky na pár tahů (a to nejen na Rubikově kostce). Komutátor je však náročný na pochopení, proto zde ukáži podobný způsob prohazování kostiček, sice náročnější na provedení, zato však snazší na pochopení. Jedná se o metodu skládání, nazývanou *Old Pochmann*.

Než se ale pustíme do skládání Rubikovy kostky, ukážeme si metodu na jednodušším hlavolamu zvaném *maďarské prstence*¹⁾. Mějme jeden prstenec osázen 12 kuličkami, druhý dvěma kuličkami tak, že se protínají v jedné kuličce, viz obr. 2.



Obr. 2: Maďarské prstence v poměru 12 : 2 ve složené pozici, vytvořeno v programu Microsoft Paint

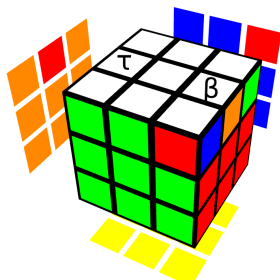
Levý prstenec lze otáčet po 30° , pravý po 180° , přičemž kuličky se pohybují s prstencem. Náhodně rozmístěné kuličky je třeba uspořádat. Zde je postup jednoduchý. Nazvěme „buffer“ pravou pozici pravého prstence a „target“ pozici průniku prstenců. Podle například červené kuličky lze určovat, kam patří kuličky ostatní. Stačí jen opakovat následující: kuličky na bufferu připravit otáčením levého prstence pozici na target a otočit prstenec pravý. Kulička se dostane na své místo a do bufferu se dostane jiná. Kuličky se jedna po druhé dostanou na svou pozici. Objeví-li se na bufferu tmavá kulička, ale prstence nejsou složeny, lze ji stejným způsobem vyměnit za „nesloženou“ kuličku. Tak je možno skládat i Rubikovu kostku.

¹⁾Chcete-li si vyzkoušet maďarské prstence online, naleznete je na odkazu [5].

Nyní přistupme k metodě Old Pochmann. Nechť jsou dány algoritmy

$$T = R U R' U' R' F R^2 U' R' U' R U R' F',$$

viz obr. 3

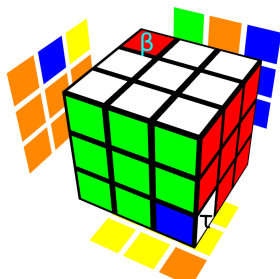


Obr. 3: Provedení algoritmu T na Rubikově kostce s označením bufferu (β) a targetu (τ)

a

$$\psi = R U' R' U' R U R' F' R U R' U' R' F R,$$

viz obr. 4.



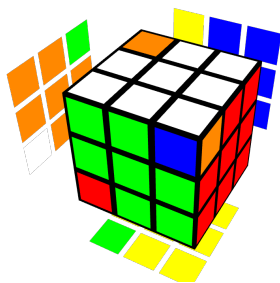
Obr. 4: Provedení algoritmu ψ na Rubikově kostce s označením bufferu (β) a targetu (τ) [1]

Algoritmus T se používá k prohazování hran, ψ k prohazování rohů. Kam kostičky patří, lze určit podle středů. Ty jsou v mechanické Rubikově kostce dokonce spojeny šrouby a nelze je „rozmíchat“. Prozrazují tak, jakou barvu musí mít zbytek stěny ve složené pozici. Pozice bufferu je na obr. 3 a 4 označena písmenem β a pozice targetu písmenem τ . Povšimněte si i dvou prohozených kostiček mimo buffer a target, bez kterých by algoritmus neexistoval. Omezují tahy, kterými lze kostičky

na target přesouvat. U algoritmu T lze používat jen tahy L , D , M , E a jejich násobky a inverze a u algoritmu ψ jen tahy R , F , D a jejich násobky a inverze, aby ostatní kostičky zůstaly zachovány. Tyto tahy se nazývají „set up“ tahy. Od maďarských prstenců se set up tahy liší také tím, že je nutno provádět jejich inverze po provedení T nebo ψ .

Jak prohazování kostiček metodou Old Pochmann funguje, si ukážeme na příkladech.

Příklad 1. Mějme kostku zamíchanou ze složeného stavu algoritmem $U2 R' D R U2' R' D' R$, viz obr. 5.

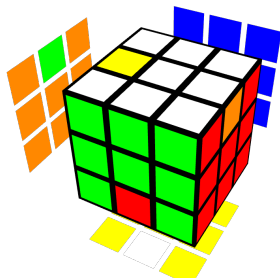


Obr. 5: Zamíchání Rubikovy kostky algoritmem $U2 R' D R U2' R' D' R$ [1]

Kostička na bufferu patří na místo levého dolního předního rohu, na oranžovou stěnu. Tuto kostičku lze se správnou orientací přesunout na target tahy $D2R$, to jsou naše set up tahy. Následuje prohození ψ a set up tahy pozpátku, tedy $\psi R' D2$. Kostička z bufferu by se měla složit, a místo ní by se měla objevit bílo-zeleno-červená kostička patřící na pozici pravého horního předního rohu, na bílou stěnu. Stejným postupem byste měli docílit algoritmem $F \psi F'$ složení celé kostky.

Příklad 2. Mějme kostku zamíchanou algoritmem $U M' U2 M U$, viz obr. 6. Zde hrana na bufferu patří přímo na pozici targetu, proto set up tahy nejsou žádné a stačí provést jen T . Na pozici bufferu se tím dostane žlutozelená kostička, patřící dolů dopředu, přesněji na místo bílé barvy bíločervené hrany. Tu lze na pozici targetu přesunout tahy $D' L2$. Zbývá jen prohození T a navrácení set up tahů $L2D$ a kostka je složená.

Tímto způsobem je možné složit Rubikovu kostku z každé pozice. Zde ukázaná metoda, nazývaná Old Pochmann, byla vynalezena ke skládání Rubikovy kostky poslepu. Existuje také mnoho jiných disciplín, ve kterých se soutěží. Souhrnně se nazývají speedcubing.



Obr. 6: Zamíchání Rubikovy kostky algoritmem $U M' U^2 M U$ [1].

3. Speedcubing

Doposud nejrychleji složil Rubikovu kostku Číňan Xuanyi Geng za 3,05 sekundy. Všechny výsledky je možné nalézt na stránkách [7], známých jako WCA. Na těchto stránkách jsou zapsané veškeré výsledky i osoby, které soutěžily. Uvidíte tam i nejlepší průměry nebo výsledky s jinými hlavolamy a „eventy“, žebříčky osob, zajímavé statistiky, oficiální pravidla, informace o soutěžích a mnoho dalšího. Záznam většiny rekordů můžete nalézt nejen na platformě YouTube.

Po prohlédnutí stránek WCA si asi říkáte, jak je možné skládat tak rychle nebo poslepu? Pro každý typ skládání jsou vytvořeny speciální metody. Pro skládání na rychlost se používá zejména metoda CFOP. Při ní si skládající nejprve rozmyslí prvních pár tahů (cca 10). Během jejich provedení však pátrá po dvojicích hrany a rohu. Jakmile doskládá první krok, pouští se do vysledované dvojice, přitom opět sleduje další nesložené kostičky. Když složí první dvě vrstvy, použije dva ze 78 algoritmů na dokončení poslední vrstvy. Složil-li kostku efektivně, pak mu to zabralo okolo 55 tahů. Pro lepší pochopení naleznete mezi odkazy video vysvětlující, na co se speedcuber soustředí (v angličtině) [8]. Je-li skládající zkušený, pak tahy provádí bezmyšlenkovitě, pouze si spojí to, co vidí, s pohybem ruky. Stává se, že algoritmus není schopen provést pomalu, protože si nepamatuje zápis algoritmu, jen pohyb. Většina speedcuberů zná a aktivně používá 20 až 1 200 algoritmů (odhad, nikoli studie).

Záhadou může být skládání poslepu. Všimněte si, že u představené metody Old Pochmann lze vysledovat pořadí kostiček, které se dostanou na pozici bufferu. Skládající si každou rohovou a hranovou pozici na kostce pojmenoval písmenem anglické abecedy bez *X* a *Y*. Pořadí kostiček si tedy pamatuje jako řadu zhruba dvaceti písmen. Písmena si pamatuje po dvojicích, zakódovaných do slov. Například dvojici písmen

RL si může pamatovat jako RohLík. Slova si pak může uložit do hlavy třeba pomocí příběhu, který si sám vymyslí.

Skládání poslepu funguje tak, že si speedcuber kostky prohlédne, pak si zakryje oči a bez zastávky skládá všechny kostky poslepu. Když speedcubeři skládají desítky kostek poslepu, pravděpodobně si dobře pamatují nějakou velkou budovu. Tu si v hlavě rozdělí na patra a na místnosti. Jednotlivé příběhy, které si pro kostky pamatují, si představují v jednotlivých místnostech – jedná se o „memorování pomocí místností“. Podíváte-li se na nějaké video o skládání více kostek poslepu (opět jedno naleznete mezi odkazy [9]), povšimnete si, že skládající si rovná kostky do bloků, připomínajících nějakou městskou čtvrť.

Jednou z nejobtížnějších disciplín, ač se to na první pohled nemusí tak jevit, je FMC (Fewest Move Count). Jde o skládání Rubikovy kostky s co nejmenším počtem tahů. Soutěžící zde může plně využít vlastností grupy Rubikovy kostky [10]. Právě v této disciplíně se tak může nejvíce uplatnit znalost matematiky.

Literatura

- [1] *[Alg.cubing.net [beta]]*. 2011. Dostupné z: <https://alg.cubing.net/> [cit. 2024-09-02].
- [2] Planeta her: *Jak se skládá Rubikova kostka: návod, který zvládne každý*. Dostupné z: <https://www.planetaher.cz/blog/jak-se-sklada-rubikova-kostka-navod>.
- [3] Fandom: *Rubik's cube notation*. 2004. Dostupné z: <https://rubiks.fandom.com/wiki/Notation> [cit. 2025-01-25].
- [4] Hort, D., Rachůnek, J.: *Algebra I*. Univerzita Palackého, Olomouc, 2005 Dostupné z: <https://kag.upol.cz/data/upload/15/ATA.pdf>.
- [5] *Play Hungarian rings online!* Dostupné z: <https://ruwix.com/online-puzzle-simulators/hungarian-rings/> [cit. 2024-09-02].
- [6] *Ruwix: Rubik's Cube and Twisty Puzzle Wiki*. Dostupné z: <https://ruwix.com>.
- [7] <https://www.worldcubeassociation.org/>.
- [8] *What a Speedcuber sees when solving a Rubik's cube*. Dostupné z: <https://www.youtube.com/watch?v=RIY0CIX0fA> [cit. 2024-09-02].
- [9] Siggins, G.: *62/65 57:47 Multi-Blind World Record – Graham Siggins*. Dostupné z: <https://www.youtube.com/watch?v=GoGVYQqgTgA>.
- [10] Opršal, J.: *Rubikova teorie grup*. Matematický korespondenční seminář, MFF UK, Praha, Dostupné z: <https://prase.cz/library/rubiksgrouptheoryJ0/rubiksgrouptheoryJ0.pdf>.

Towards understanding of Napoleon's theorem: Complex numbers are the key

Vlastimil Dlab, Bzí u Železného Brodu

Abstract. The subject of this article is a generalization—and consequently a better understanding—of a theorem, the authorship of which is often attributed to Napoleon Bonaparte. The article emphasizes the importance of complex numbers when studying the geometry of the plane.

The relationship between the complex numbers and the plane geometry is an interesting topic whose importance does not seem to be adequately emphasized. The concept of complex numbers has an intricate history inextricably tied to solution of algebraic equations. When complex numbers were first introduced they appeared quite mysterious and raised serious questions, even for some prominent mathematicians. However, today a student will be introduced to complex numbers as a natural extension of the real numbers, from the real line to the complex Argand–Gaussian plane equipped with a rectangular coordinate system, as indicated in Fig. 1.

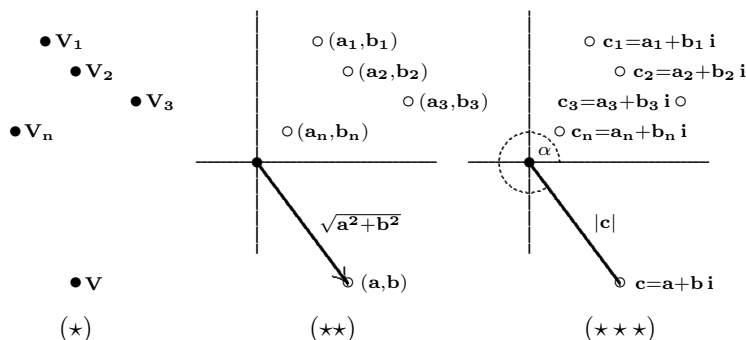


Fig. 1: Bijection between the points of the plane and the complex numbers

The complex plane encourages us to think of complex numbers geometrically. For example, the modulus (the absolute value) of a complex number $c = a + bi$ is equal to $|c| = \sqrt{a^2 + b^2}$ which is the distance of c to the origin 0 and the argument α is the oriented angle well-described

in terms of the polar form in every textbook. The geometrical language helps clarify elementary facts such as the description of multiplication in terms of rotations around the origin. The product of two complex numbers is determined by the sum of their arguments and the product of their moduli.

Introduction

The aim of this article is to generalize and understand better a theorem which is often attributed to Napoleon Bonaparte (1769–1821). The first record of the theorem was as a “Gold Medal” competition question at the university of Dublin in October 1820 (see [5]). The result was proposed as a problem in the magazine “The Ladies’ Diary” in 1825 with solutions in the following year.

The history of how Napoleon’s name is attached to the theorem can be found in [3]). Napoleon was familiar with mathematics, geometry in particular, and knew personally some of the important French mathematicians.

We state the original version of Napoleon’s theorem and illustrate the construction in Fig. 2 (see also [2], pp. 209–210).

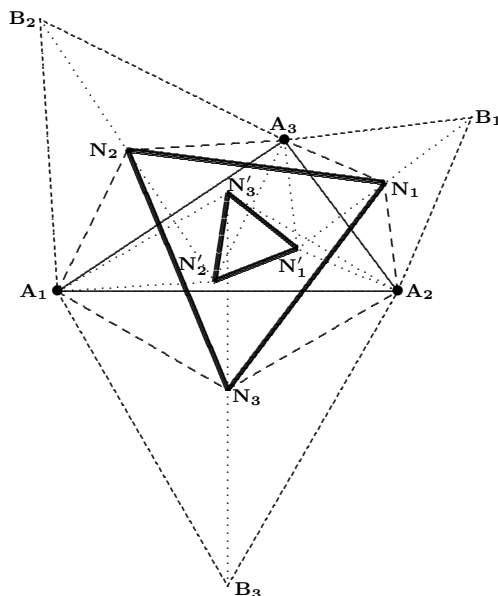


Fig. 2. Napoleon’s triangles

Napoleon's theorem. *The centers of the equilateral triangles erected externally on the sides of any triangle, or internally on the sides of any triangle, are the vertices of an equilateral triangle.*

The statement of this theorem is illustrated in Fig. 2: $A_1A_2A_3$ is the given triangle, $A_1A_2B_3$, $A_2A_3B_1$ and $A_3A_1B_2$ are the equilateral triangles. $N_1N_2N_3$ and $N'_1N'_2N'_3$ are the Napoleon's triangles.

There are many proofs of this theorem, such as [1], the aforementioned [2], and [4]–[10]. In this article we shall show that Napoleon's theorem is a special case of a much more general result which we formulate in the following theorem and illustrate in the first and the second drawings in Fig. 3.

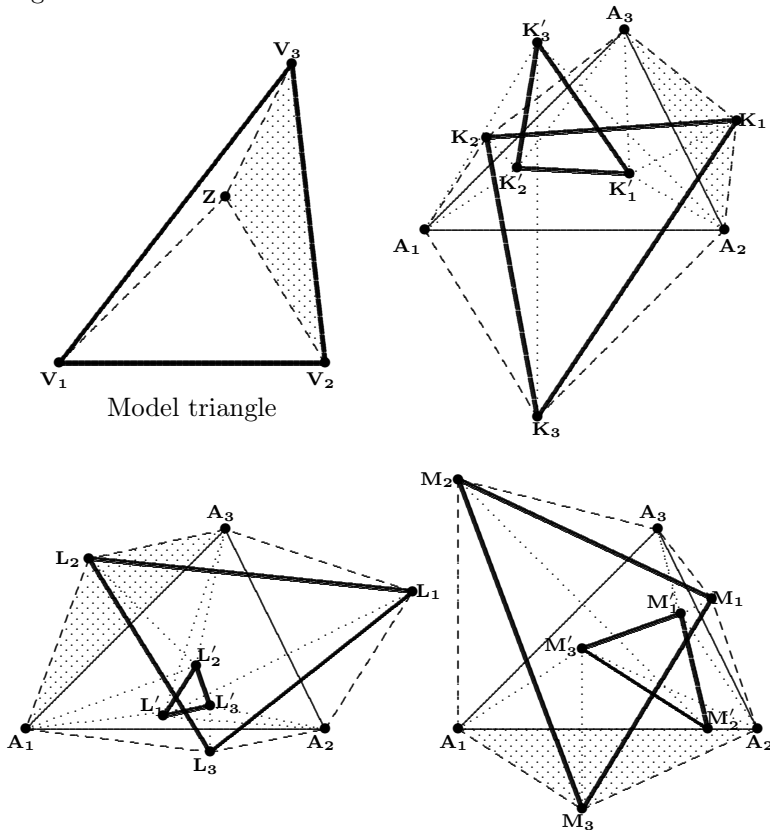


Fig. 3: Model and the six similar triangles

Theorem. *Given two arbitrary triangles $V_1V_2V_3$ and $A_1A_2A_3$ together with a point Z inside the triangle $V_1V_2V_3$,¹⁾ construct the points K_1, K_2, K_3 and K'_1, K'_2, K'_3 so that the following triangles are similar:*

$$A_1A_2K_3 \sim V_2V_1Z, \quad A_2A_3K_1 \sim V_3V_2Z, \quad A_3A_1K_2 \sim V_1V_3Z$$

and

$$A_1A_2K'_3 \sim V_2V_1Z, \quad A_2A_3K'_1 \sim V_3V_2Z, \quad A_3A_1K'_2 \sim V_1V_3Z.$$

Then the triangles $K_1K_2K_3$ and $K'_1K'_2K'_3$ are similar to the triangle $V_1V_2V_3$.

The reader should have no difficulty to check that the following statement follows from the Theorem.

Consequence. *If the triangle $V_1V_2V_3$ is equilateral and the point Z is its center, we get the Napoleon theorem.*

The third and fourth drawings of Fig. 3 illustrate the situations when the triangles V_2V_1Z, V_3V_2Z and V_1V_3Z are drawn on the sides A_1A_2, A_2A_3 and A_3A_1 of the triangle $A_1A_2A_3$ in a different order.

Complex numbers and similarity

To a large degree, the study of triangles is the study of the classes of similar triangles. Rather than study a specific triangle, we consider the sets of all triples of points that are "similar".

We limit ourselves to "oriented" triples of points. This is the way we shall proceed: Triangles ABC and UVW are similar if the side lengths AB, BC and CA are, for certain positive t , t -multiples of the corresponding sides UV, VW and WU . Consequently, the interior angles of triangles ABC and UVW are the same. In this article when we speak of a triple of points we shall always assume that the three points do not lie on the same straight line (otherwise the corresponding triangle would be degenerate). We can thus talk about their orientation, i.e. how their vertices line up on their circumscribed circle. By the positive orientation we shall understand the counterclockwise orientation. The similarity of two triangles will require in this article equal orientation as illustrated in Figs. 4 and 5. We may speak about "direct" similarity: The triangle $C_1C_2C_3$

¹⁾The point Z can be located anywhere (including at the vertices of the triangle $V_1V_2V_3$), but no new interesting situations appear, see [12].

and $C'_1C'_2C'_3$ in Fig. 4 are not directly similar. The easily comparable positions $U_1U_2U_3$ and $V_1V_2V_3$ acquired by simple rotations clarify it all.

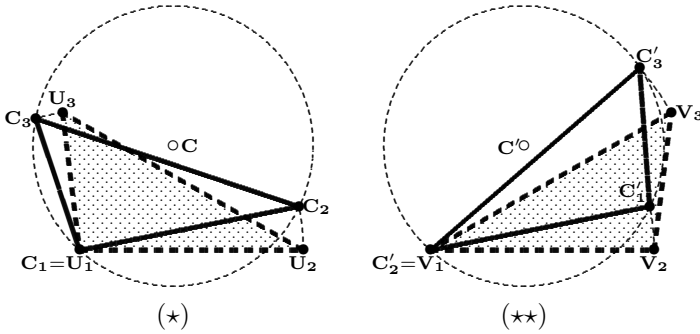


Fig. 4: Orientation of triangles: $C_1C_2C_3 \not\sim C'_1C'_2C'_3$

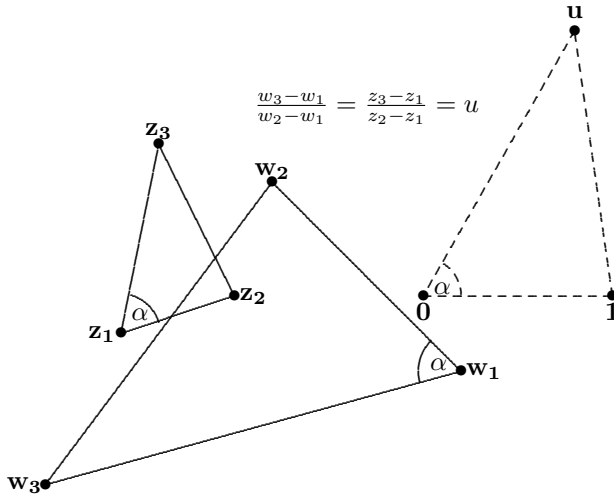


Fig. 5: Triangles $z_1z_2z_3$, $w_1w_2w_3$ and $01u$ are similar

Our modulus operandi will be a complex plane, i.e. its points $U, V, W, X, Y, Z, \dots$ will be identified with the complex numbers $u, v, w, x, y, z, \dots$. The field of complex numbers will be denoted by $\mathbb{C}$.

The initial statement and one of the motivations of our approach is the following lemma. As already indicated, by similarity we mean direct similarity.

Lemma. *Triangles $Z_1Z_2Z_3$, i.e. $z_1z_2z_3$, and $W_1W_2W_3$, i.e. $w_1w_2w_3$, are similar if and only if*

$$\frac{w_3 - w_1}{w_2 - w_1} = \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}. \quad 2)$$

Proof. The proof is quite elementary. Realizing that the modulus $|u|$ of the number

$$u = \frac{w_3 - w_1}{w_2 - w_1} = \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}$$

is the ratio of the sizes of the sides W_1W_3 and W_1W_2 , as well as of the sizes of the sides Z_1Z_3 and Z_1Z_2 , and the argument of u is the angle α between these adjacent sides, Fig. 5 illustrates this situation very clearly.

In fact, Lemma follows from simple calculations using the concepts of translation and rotation of the complex plane. A detailed proof may be presented in the form of the following elucidating statement:

For each ordered triple $z_1z_2z_3$ there exists exactly one triple of the form $01u$ with $z_1z_2z_3 \sim 01u$. Moreover, if $z_1z_2z_3$ is positively oriented, then $\text{Im}(u) > 0$.

Proof. Applying $t(z) = z - z_1$ shows that $z_1z_2z_3 \sim 0z'_2z'_3$ with $z'_2 = z_2 - z_1$ and $z'_3 = z_3 - z_1$. Then applying $r(z) = (z'_2)^{-1}z$ shows that $0z'_2z'_3 \sim 01u$ with $u = (z'_2)^{-1}z'_3$. Thus $z_1z_2z_3 \sim 01u$. In addition, if $z_1z_2z_3$ is positively oriented, then so is $01u$ and then u lies in the upper half-plane. Finally, it follows from these calculations that

$$u = \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}$$

and so $01u$ is the only such triple.

Proof of the main theorem is based on a repeated application of Lemma. Theorem claims that the triangle $K_1K_2K_3$ is similar to the triangle $V_1V_2V_3$. The construction of the vertices K_1, K_2 and K_3 implies that

$$\frac{a_2 - a_1}{k_3 - a_1} = \frac{v_1 - v_2}{z - v_2}, \quad \frac{a_3 - a_2}{k_1 - a_2} = \frac{v_2 - v_3}{z - v_3}$$

and

$$\frac{a_1 - a_3}{k_2 - a_3} = \frac{v_3 - v_1}{z - v_1},$$

²⁾This fact will be exploited and elaborated in a separate publication [13].

and hence

$$k_3 = a_1 + \frac{(a_2 - a_1)(z - v_2)}{v_1 - v_2}, \quad k_1 = a_2 + \frac{(a_3 - a_2)(z - v_3)}{v_2 - v_3}$$

and

$$k_2 = a_3 + \frac{(a_1 - a_3)(z - v_1)}{v_3 - v_1}.$$

From here, $k_3 - k_1$ equals

$$\frac{(a_1 - a_2)(v_1 - v_2)(v_2 - v_3) + (a_2 - a_1)(z - v_2)(v_2 - v_3) - (a_3 - a_2)(z - v_3)(v_1 - v_2)}{(v_1 - v_2)(v_2 - v_3)},$$

and therefore

$$k_3 - k_1 = \frac{a_1(v_1 - z)(v_2 - v_3) + a_2(v_2 - z)(v_3 - v_1) + a_3(v_3 - z)(v_1 - v_2)}{(v_1 - v_2)(v_2 - v_3)}.$$

In a similar manner, one can prove that $k_2 - k_1$ equals

$$\frac{(a_3 - a_2)(v_3 - v_1)(v_2 - v_3) + (a_1 - a_3)(z - v_1)(v_2 - v_3) - (a_3 - a_2)(z - v_3)(v_3 - v_1)}{(v_2 - v_3)(v_3 - v_1)},$$

and therefore

$$k_2 - k_1 = \frac{a_1(v_1 - z)(v_2 - v_3) + a_2(v_2 - z)(v_3 - v_1) + a_3(v_3 - z)(v_1 - v_2)}{(v_2 - v_3)(v_1 - v_3)}.$$

One can see from here that

$$\frac{k_3 - k_1}{k_2 - k_1} = \frac{(v_2 - v_3)(v_1 - v_3)}{(v_1 - v_2)(v_2 - v_3)} = \frac{v_3 - v_1}{v_2 - v_1},$$

as required.

For the Czech version of this article we refer to [11].

The author should like to thank Prof. John Dixon for valuable comments concerning the final formulations.

Literatura

- [1] Coxeter, H. S. M., Greitzer, S. L.: Geometry Revisited. *Math. Assoc. of America*, roč. 19 (1967), s. 60–63.
- [2] Dlab, V., Bečvář, J.: *Od aritmetiky k abstraktní algebře*. 2. vyd., ČVUT, Praha, 2022.

- [3] Dlab, V.: *Komplexní čísla*. MFF UK, Praha, 2010, <https://olympiada.karlin.mff.cuni.cz/prednasky/dlab.pdf>.
- [4] Grünbaum, B.: Is Napoleon's Theorem really Napoleon's Theorem? *Amer. Math. Monthly*, roč. 119 (2012), s. 495–501.
- [5] Horák, S.: Napoleonovy trojúhelníky. *Rozhledy matematicko-fyzikální*, roč. 62 (1988/89), s. 373–377.
- [6] Langr, J.: O jisté úloze v trojúhelníku. *Časopis pro pěstování matematiky a fyziky*, roč. 34 (1905), s. 65–72.
- [7] Mráz, L.: *Napoleonova věta*. dipl. práce PF JČU, České Budějovice, 2016, <https://theses.cz/id/5aw41m/17364015>.
- [8] <https://www.mathpages.com/home/kmath270/kmath270.htm>
- [9] Pech, P.: O Petrově větě. *Rozhledy matematicko-fyzikální*, roč. 67 (1988/89), s. 9–14.
- [10] http://en.wikipedia.org/wiki/Napoleon's_theorem
- [11] Dlab, V.: *Hlubší porozumění větě Napoleonově*. <https://www.delta42.com/Vlastimil%20Dlab/Hlubi.porozumeni.pdf>.
- [12] Dlab, V.: *General Napoleon theorem*. <https://www.geogebra.org/m/se6rw6es>.
- [13] Dlab, V.: *Číselná charakteristika podobných trojúhelníků*. Přijato k publikování.

Slovníček k článku

aforementioned	dříve zmíněný
center of a triangle	těžiště
circumscribed circle	opsaná kružnice
modus operandi	(pracovní) postup
similar triangles	podobné trojúhelníky

Pravděpodobnost zaokrouhlených převrácených hodnot

Dnešní úloha souvisí s článkem, který se bude věnovat sčítání řad, Eulerovu číslu a Eulerově–Mascheroniho konstantě a který pro vás chystáme do příštího čísla.

Úloha

Zvolme náhodně číslo x z intervalu $(0, 1)$. Jaká je pravděpodobnost, že dolní celá část čísla $1/x$, tj. $\lfloor 1/x \rfloor$, je liché číslo?

Na tomto místě je třeba vyjasnit si, co se myslí náhodnou volbou čísla x z intervalu $(0, 1)$. Tím myslíme volbu při rovnoměrném rozdělení pravděpodobnosti. Pro náš příklad ji postačí definovat tak, že pravděpodobnost, že x vybereme z daného intervalu I je přímo úměrná délce tohoto intervalu (nezávisle na tom, jde-li o otevřený, uzavřený nebo polouzavřený interval). Navíc, protože délka celého intervalu $(0, 1)$ je rovna 1 a pravděpodobnost výběru čísla z z $(0, 1)$ je také 1, musí být pravděpodobnost výběru $x \in I$ rovna jeho délce, tj. pro $0 < a < b \leq 1$:

$$P(x \in (a, b)) = P(x \in \langle a, b \rangle) = P(x \in (a, b]) = P(x \in \langle a, b \rangle) = b - a$$

a obdobně, je-li $a = 0$ (pak musí být interval zleva otevřený). Nabádáme čtenáře, aby si rozmyslel, že takováto definice odpovídá intuici za náhodným výběrem čísla z omezeného intervalu.

Nyní se vraťme k úloze z minula. Popisovali jsme „kouzlo“:

- Připravte si kartičku s deseti sloupečky.
- Požádejte kamaráda, ať napíše do prvních dvou sloupců dvě čísla mezi 1 a 20.
- Do dalších sloupců ať kamarád vždy napíše součet předchozích dvou.
- Na závěr ať kamarád spočítá součet všech čísel na kartičce.
- Udiňte kamaráda tím, že výsledek oznámíte okamžitě, bude totiž roven 11násobku čísla v 7. sloupci (a násobit 11 jde snadno). Taký rovnou oznamte, že podíl 10. a 9. řádku je 1,6 (s přesností na jedno desetinné místo).

Úloha zněla: *Dokažte, že trik funguje. To jest, že vaše odpověď bude vždy správná bez ohledu na to, jaká čísla váš kamarád vybral.*

Řešení souvisí s posloupností Fibonacciho čísel $(F_n)_{n=0}^\infty$. Připomeňme jejich rekurentní definici: $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ pro $n \geq 0$, $F_0 = 0$, $F_1 = 1$.

F_0	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9	F_{10}	F_{11}
0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89

Tab. 1: Několik prvních Fibonacciho čísel

Pro Fibonacciho čísla platí celá řada zajímavých vztahů. Nám se bude hodit vztah pro součet prvních n členů, který se dá ověřit matematickou indukcí:

$$F_1 + F_2 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1. \quad (1)$$

Nyní pišme čísla, která dostává kamarád, pokud na začátku zvolil čísla a, b mezi 1 a 20. S využitím rekurentní definice Fibonacciho čísel odvodíme pro číslo x_j , které dostane v j -tém sloupci, vztahy:

$$\begin{aligned} x_1 &= a \\ x_2 &= b = a \cdot F_0 + b \cdot F_1 \\ x_3 &= a + b = a \cdot F_1 + b \cdot F_2 \\ x_4 &= a \cdot F_2 + b \cdot F_3 \\ &\vdots \\ x_7 &= a \cdot F_5 + b \cdot F_6 \\ &\vdots \\ x_{10} &= a \cdot F_8 + b \cdot F_9 \end{aligned}$$

Nyní už můžeme ukázat, že trik funguje.

- Podle vzorce (1) je součet čísel na kartičce roven

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \cdots + x_{10} &= a + a(F_0 + F_1 + \cdots + F_8) + \\ &\quad + b(F_1 + F_2 + \cdots + F_9) = \\ &= a + a(F_{10} - 1) + b(F_{11} - 1) = \\ &= aF_{10} + b(F_{11} - 1) = \\ &= a \cdot 55 + b \cdot 88 \end{aligned}$$

Zároveň

$$x_7 = a \cdot F_5 + b \cdot F_6 = a \cdot 5 + b \cdot 8.$$

Odtud

$$11 \cdot x_7 = x_1 + x_2 + \cdots + x_{10}.$$

- Pro podíl x_{10}/x_9 dostáváme:

$$\frac{x_{10}}{x_9} = \frac{aF_8 + bF_9}{aF_7 + bF_8} = \frac{a \cdot 21 + b \cdot 34}{a \cdot 13 + b \cdot 21} = \frac{34}{21} \cdot \frac{b + a \frac{21}{34}}{b + a \frac{13}{21}}.$$

Dále platí

$$1,619 < \frac{34}{21} < 1,62.$$

Čtenář snadno ověří, že

$$0,99 \leq \frac{b + a \frac{21}{34}}{b + a \frac{13}{21}} \leq 1.$$

Tím je dokázáno, že

$$1,6 < 0,99 \cdot 1,619 < \frac{x_{10}}{x_9} < 1,62,$$

tudíž podíl $x_{10}/x_9 = 1,6$ s platností na jedno desetinné místo.

Uveďme pro zajímavost, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \varphi,$$

kde

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \doteq 1,618$$

je slavná iracionální konstanta zvaná zlatý řez. V tomto čísle vystupuje i v článku L. Spíchala.

Co nám říká Ciolkovského rovnice o mezihvězdných letech?

Vladimír Wagner

Pro dosažení i nejbližších hvězd je potřeba zajistit odpovídající pohon. Pokud půjde o raketový motor, je třeba uvolnit nejen dostatek energie, ale také udělit kosmické lodi dostatečnou hybnost a zajistit její zrychlování. Let rakety a potřebné parametry popisuje Ciolkovského rovnice. Podívejme se na výzvy spojené s mezihvězdným letem, které nám ukazuje.

Pro expanzi člověka do vesmírného prostoru je klíčový pohon. Již pro širší a rychlejší cestování v naší Sluneční soustavě bude potřeba využívat jaderné pohony. A bez nich s největší pravděpodobností nebude možné Sluneční soustavu opustit. V současné době letí ven ze Sluneční soustavy sondy Pioneer 10 a 11, které už však nejsou v provozu. Sonda Voyager 1 a 2 už také vyletěly z heliosféry, tedy oblasti, kam dosáhne sluneční vítr, ty však stále vysílají data. Sonda New Horizons prolétá Kuiperovým pásem a také směřuje ven do mezihvězdného prostoru. Všechna tato tělesa k potřebnému urychlení využila metodu gravitačního praku. Jejich rychlost je však taková, že jim cesta k nejbližším hvězdám potrvá desítky až stovky tisíc let.

V principu lze vysoké urychlení získat pomocí sluneční plachetnice, přičemž se nemusí využívat pouze záření Slunce, ale i záření velmi výkonných laserů. Pokud to však má být na rychlosti potřebné pro mezihvězdné lety, má potenciál pouze pro relativně malá zařízení. Krátká doba urychlování také vede k zrychlením, která jsou pro lidskou posádku neakceptovatelná. Hypoteticky by se možná dala využít exotická fyzika za Standardním modelem hmoty a interakcí ve formě černých děr či Alcubierrův pohon, který ze sci-fi známe jako warp, ale to může být úplně mimo fyzikální realitu.

Klíčovými nejen pro potenciální mezihvězdné lety jsou tak odpovídající raketové motory. Podívejme se proto na zásadní problémy v této oblasti. Pokud chceme změnit rychlost kosmické lodi raketovým motorem, potřebujeme k tomu nejen dostatek energie, ale také hybnosti vyvrženého materiálu. Potřebné parametry a let rakety pak popisuje tzv. Ciolkovského rovnice. V následujícím článku se pokusíme rozebrat podmínky pro realizaci mezihvězdných letů z tohoto hlediska. V případě

takových letů by bylo vhodné dosáhnout rychlostí, které překračují procenta rychlosti světla. Proto je potřeba využívat speciální teorii relativity. Zde budeme potřebovat jen některé její vztahy a dopady na úrovni textu pro řešitele Fyzikální olympiády [1]. Při řešení Ciolkovského rovnice se také neobejdeme bez základů diferenciálního a integrálního počtu, opět na úrovni řešitelů Fyzikální olympiády [2,3,4]. Realizace mezihvězdných letů vede k potřebě jaderných zdrojů energie. Odpovídající popis jaderné fyziky, speciální teorie relativity, řešení typů diferenciálních rovnic a dalších témat, která se vyskytují při řešení radioaktivního zákona i Ciolkovského rovnice, je na úrovni řešitelů Fyzikální olympiády podán v brožuře [5]. Pro podrobnější pochopení problematiky některých matematických a fyzikálních oblastí, které budeme využívat, lze nahlédnout do zmíněné literatury. Nyní se podíváme na mezihvězdné lety.

Posuzované příklady mezihvězdných letů

Hvězdy jsou od nás ve srovnání s našimi současnými možnostmi cestování v obrovských vzdálenostech. Let k nim představuje extrémní výzvu. Je tak pochopitelně otevřenou otázkou, zda a kdy lidstvo s tím spojené překážky překoná. Vzdálenosti nejbližších hvězd jsou větší než čtyři světelné roky. Tedy i světlo, které definuje hraniční rychlost v našem vesmíru, potřebuje k překonání těchto vzdáleností roky. Pokud chceme mezihvězdný let realizovat v průběhu lidského života, tedy v řádu desetiletí, musí se naše kosmická loď pohybovat nejméně v řádu desítek procent rychlosti světla. Pokud chceme realizovat let trvající řádově staletí, potřebujeme dosáhnout nejméně procenta rychlosti světla.

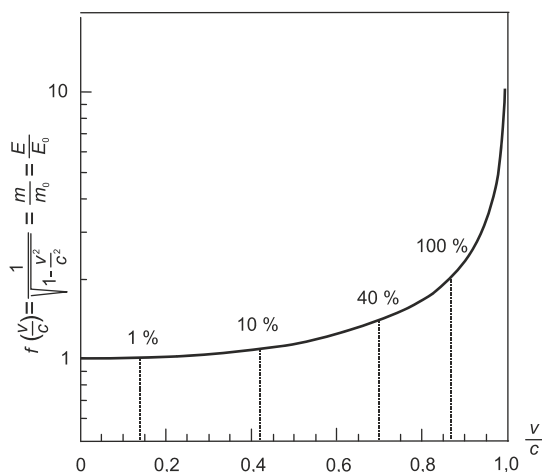
Předpokládejme, že chceme dostat k nejbližším hvězdám automatické sondy. Jejich přežití v řádu staletí je sice velmi náročné, ale ne nepředstavitelné. Zároveň má lidská civilizace zkušenosti s realizací projektů trvajících staletí. Takže i takto dlouhé doby letu nejsou pro nás úplně mimo realitu. Takový mezihvězdný let se uvažuje i v čínském sci-fi románu Problém tří těles. Je pochopitelně otázka, jak zajistit, aby vědecké poznatky získané a odvysílané až po takové době nebyly v době dokončení projektu úplně zastaralé. Do diskuzí tohoto problému se pouštět nebudeme. Nyní se podíváme na problematiku čistě z hlediska energetické náročnosti a řešení Ciolkovského rovnice.

Nároky, které musí pohony mezihvězdných plavidel naplnit, si tak ukážeme na několika příkladech. Nejbližší hvězdou je Proxima Centauri, což je rudý trpaslík gravitačně vázaný k systému dvou hvězd slunečního typu Alfa Centauri. Vzdálenost tohoto systému od Země je zhruba

4,3 světelných let. Proxima Centauri má jednu potvrzenou exoplanetu zhruba hmotnosti i velikosti Země a dva kandidáty na exoplanety. Jeví se tak jako velmi zajímavý cíl první mezihvězdné výpravy.

Podrobněji rozebereme lety, při kterých se dosáhne rychlosti $0,2$ rychlosti světla, tedy $0,2c$, a o řád pomalejší, kdy nám bude stačit rychlost pouhých $0,02c$. V prvním případě se let realizuje v době překračující 22 let. Konkrétní doba letu závisí na tahu motorů a jak rychle se rychlosti $0,2c$ dosáhne. Případně na tom, jestli předpokládáme průlet touto rychlostí systémem Proximy Centauri nebo budeme při přiletu k němu brzdit. V případě, pokud budeme zrychlovat do poloviny cesty konstantním zrychlením a pak zase konstantním zrychlením zpomalovat, bude doba trvání letu necelých 44 let. Tento výsledek dostaneme, když využijeme vztahy pro rovnoměrně zrychlený pohyb. Je tak třeba počítat s dobou mezi 22 až 44 lety. Což už jsou doby srovnatelné s trváním současných dlouhodobých misí.

Je třeba připomenout, že i pro rychlost $0,2c$ je pořád ještě možné využít nerelativistické přiblížení. Jak je vidět na grafu 1, až do rychlosti $0,14c$ nepřekračuje rozdíl mezi relativistickým výpočtem a nerelativistickým klasickým přiblížením 1 %. Můžeme to ocenit na poměru celkové a klidové energie (hmotnosti), viz vztah (4) a [1,5].



Graf 1: Poměr celkové a klidové energie (relativistické a klidové hmotnosti) v závislosti na rychlosti objektu. Je vidět, že relativistické efekty (nárůst relativistické hmotnosti) přesáhnou hodnotu 1 % až pro rychlost $0,14c$, pro rychlost zhruba $0,87c$ už dosahují 100 %.

V případě rychlosti $0,02c$, která je snáze dosažitelná, se už doba trvání mise protáhne na více než 200 let. To bude druhý námi podrobně studovaný případ. Budeme se hlavně věnovat těmto dvěma rychlostem. Pro srovnání pak ještě na opravdu relativistickou rychlost $0,8c$ a poměrně nízkou rychlost $0,002c$ (600 km/s), která může být již relativně brzy v našich technických možnostech.

Budeme předpokládat, že čistá hmotnost lodi po vypotřebování veškeré hmoty vyvrhnuté při urychlování či zpomalování lodi, bude 100 tun. Jen část z toho je užitečné zatížení, je zde také hmotnost motorů a dalšího vybavení potřebného k realizaci pohybu lodi. Hmotnost je vybrána tak, aby pro automatický let představovala realistickou hodnotu. Zároveň se pak dají získané hodnoty snadno přeškálovat pro řádové zvýšení či snížení hmotnosti lodi.

Možné typy pohonů

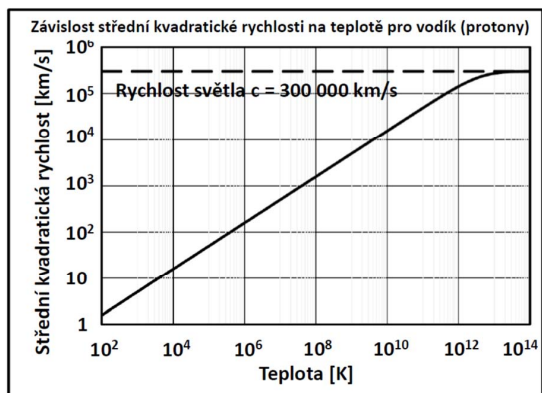
Než se podíváme na možné typy pohonů, připomeňme si fyzikální veličiny definující jejich parametry. Jedná se o tah motoru, specifický impuls a výtokovou rychlost. *Tah motoru* udává sílu, kterou působí na urychlovanou loď, jeho jednotkou je newton. Udává, jaké zrychlení je schopen pohon poskytnout, a jak rychle bude loď s danou hmotností zrychlovat. Na něm závisí, kdy dosáhne cílové rychlosti.

Specifický impuls je poměr tahu a hmotnosti spotřebované pracovní látky za časovou jednotku. Síla je spojena se změnou hybnosti za časovou jednotku a specifický impuls je tak, pokud se udává v jednotkách SI, roven efektivní *výtokové rychlosti*. Jako standard pro srovnávání si uveďme, že výtoková rychlost klasického raketového motoru využívajícího spalování kapalného vodíku je zhruba 4,5 km/s a jeho specifický impuls je tedy $4,5 \text{ kN} \cdot \text{s} \cdot \text{kg}^{-1}$. To jsou motory, které využívala raketa Saturn nebo americký raketoplán.

Efektivní výtoková rychlost je přesně ta veličina, kterou lze využít ve zmíněné Ciolkovského rovnici. Rozdíl mezi skutečnou a efektivní výtokovou rychlostí je dán její transformací přes hybnost do tahu.

Potřebné výtokové rychlosti lze získat dvěma způsoby. První možností jsou *tepelné motory*. Zde je vysoká teplota spojena se střední kinetickou energií chaotického tepelného pohybu částic plynu nebo plazmatu. Dosažené teplotě odpovídá příslušná hodnota výtokové rychlosti (viz graf 2). V tomto případě je kritická právě hodnota teploty. K jejímu dosažení lze využít například *štěpné jaderné reaktory*. U nich se využívá vysokoteplotní reaktor s vysokým obohacením jaderného paliva. Ten ohřívá vodík,

který je pracovní látkou. Ta pak vytéká tryskou ven. Uvažovaly se také jiné pracovní látky, ale ty měly i vzhledem k vyšším hmotnostem atomů nižší dosažitelné výtokové rychlosti. Je třeba zmínit, že nižší výtokové rychlosti u motoru spalujícího vodík a kyslík jsou také způsobeny vyšší hmotností atomu kyslíku.



Graf 2: Souvislost mezi dosaženou teplotou a střední kvadratickou rychlostí pro vodík v plynu nebo protony v plazmatu. Střední kvadratická rychlost závisí i na složení plynu (plazmatu), výtoková rychlost pak na geometrii a konstrukci motoru, tedy na převodu chaotického tepelného pohybu na uspořádaný pohyb plynu (plazmatu) tryskou z motoru.

Vysokoteplotní reaktory umožňují teploty v řádu $1\,000\text{ }^{\circ}\text{C}$. To je srovnatelné s motory využívající chemické hoření. V tomto ohledu se dosahuje vyšších efektivních výtokových rychlostí, než je tomu u raketových motorů na pevná paliva i těch na kapalná. Například jaderný reaktor projektu NERVA umožňoval teploty okolo $2\,200\text{ }^{\circ}\text{C}$ a efektivní výtokové rychlosti 8 km/s . Dalším vyladěním parametrů, včetně zvýšení teploty až ke $2\,600\text{ }^{\circ}\text{C}$, se lze dostat k efektivní výtokové rychlosti blízké 10 km/s . To je dvojnásobek oproti raketovým motorům spalujícím vodík a kyslík. Jak bylo zmíněno, v tomto případě je rozdíl dán tím, že čistý vodík je lehčí než systém složený z vodíku a kyslíku.

Ještě vyšší teploty lze získat, pokud se kinetická energie neutronů vznikajících při štěpení předává přímo protonům vodíku. V tomto případě je potřeba mít úplně jinou konstrukci reaktoru. Musí se realizovat tekuté nebo plynné jádro obsahující štěpné palivo. V případě reaktorů s plynným jádrem by se v principu mohlo dosáhnout výtokové rych-

losti až 40 km/s. Ovšem žádný prototyp takového reaktoru zatím nebyl realizován a jedná se o velkou technologickou výzvu.

Je ještě jedna možnost, jak pomocí štěpení získat vyšší výtokové rychlosti. Už na počátku kosmické éry se uvažovalo o využití jaderných explozí, kdy by se během letu postupně odpalovaly jaderné bomby. Připomeňme projekt Orion i mezihvězdný let z čínské sci-fi knize Problém tří těles. Zde se dá dosáhnout výtokových rychlostí až 100 km/s. Ještě vyšší lze získat ve výbuších termojaderných bomb.

V případě využití *termojaderné fúze* lze získat daleko vyšší teploty, než je tomu u štěpení. Zde existují různé možnosti udržení plazmatu, a tedy i konstrukce termojaderného fúzního raketového pohonu. Lze kombinovat dlouhé udržení plazmatu a jeho relativně nízké hustoty v případě magnetického udržení nebo krátkou dobu udržení a velmi vysoké hustoty plazmatu u udržení inerciálního. Zatím se nám však fungující fúzní zařízení na Zemi vytvořit nepodařilo. Dosažitelné efektivní výtokové rychlosti závisí na využití reakci, dosažených teplotách a konkrétní využití metody udržení plazmatu i konstrukce reaktoru a motoru. Fúze by však mohla zajistit efektivní výtokové rychlosti v řádu stovek i tisíců km/s.

K ještě vyšším výtokovým rychlostem by mohlo pomoci *využití antimoty a anihilace*. Nejdříve by v malém objemu mohla přispět k vylepšení fúzních pohonů a zvýšení jejich dosažených teplot i výtokových rychlostí. V případě anihilačního pohonu by se pak výtokové rychlosti mohly blížit k rychlosti světla. O tom, jaká by mohla být reálná konkrétní konstrukce anihilačního pohonu však zatím představu nemáme a jejich konkrétní efektivní výtokové rychlosti jsou pouze spekulace. Připomeňme, že antiprotony (antinukleony obecně) anihilují s protony (nukleony) za vzniku mezonů. Ty nabitě se rozpadají na miony a neutrina a neutrální pak na dva fotony. Miony se rozpadají na elektrony, pozitrony a neutrina. Anihilace elektronu a pozitronu vede k produkci páru fotonů. Pokud jsou pracovní látkou fotony s rychlostí světla, dostaneme kosmickou loď, která se často označuje jako fotonová raketa. Ovšem reálný průběh anihilace a formování směru výletu pracovní látky je velkou otázkou a také extrémní technologickou výzvou. Fotony se dají produkovat i jiným způsobem, než je anihilace. Lze v principu využít i laser či fúzi, ale problémem u nich je malá účinnost konverze energie. Tedy, kromě toho, že fúzní zdroje nemáme a odpovídající lasery také ne.

Druhým typem pohonů jsou *iontové motory*, kde je výtoková rychlost dána uspořádaným pohybem iontů urychlených elektrostatickým, kombinací elektrického a magnetického pole nebo vysokofrekvenčním elek-

tromagnetickým polem. Existuje celá řada různých typů těchto pohonů. Zdroj energie je zde využíván pro produkci elektřiny a ta se následně využívá pro napájení urychlovacího systému iontového motoru. Je třeba zdůraznit, že v tomto případě je efektivita využití energie dána konverzí vzniklé tepelné energie na elektrickou. Připomeňme, že u štěpných jaderných reaktorů, a podobně tomu bude u těch fúzních, je účinnost konverze mezi 30 až 40 %. Další i řádové ztráty energie jsou spojeny s fungováním iontového motoru. Urychlovat elektrickým polem lze pouze nabitě ionty, ty je pak třeba po urychlení neutralizovat. Jak proces urychlení, tak i neutralizace iontů a řada podpůrných systémů vede k energetickým ztrátám. Většinou pak s růstem dosahované kinetické energie urychlených iontů tyto ztráty rostou. V další diskuzi musíme mít existenci těchto ztrát energie stále na paměti, i když se nebudou explicitně zmiňovat. V současné době využívají vesmírné iontové motory pro dodávku elektřiny fotovoltaické panely. Jde o elektrostatické typy motorů, které mají nízké tahy, tedy s nízkými intenzitami svazku urychlených iontů. Pro případné lety na velké vzdálenosti budou pravděpodobně využity systémy s vysokými tahy, jako je například VASIMR.

Podívejme se na výtokové rychlosti iontových motorů. U těch současných se urychlují většinou ionty xenonu, ale využívá se i argon nebo jód. Je několik sond, které využily iontové motory. K planetce Psyche letí od 13. října 2023 stejnojmenná sonda, která využívá čtyři Hallové iontové motory SPT-140. Ty mají výtokovou rychlost okolo 18 km/s a pomohou zrychlit její cestu k cíli i realizovat potřebné manévry a změny dráhy. U využívaných iontových motorů se výtokové rychlosti pohybují mezi hodnotami 10 a 80 km/s. Testovány, i s využitím vakuové komory, už byly i pokročilé systémy s výtokovými rychlostmi 210 km/s.

Předpokládá se, že by se dalo dosáhnout až hodnot v řádu 10 000 km/s. V takových případech je však kritické, pro jaké by to bylo tahy motorů a účinnosti konverze elektrické energie na kinetickou energii urychlených iontů. Jak blízko se lze v budoucnu k této hodnotě inženýrsky dostat u reálně fungujícího motoru, je otázka úplně otevřená. Je možné zmínit, že urychlovače iontů dokáží tyto urychlit na rychlosti i extrémně blízké rychlosti světla. Ovšem intenzity svazku jsou extrémně malé a stejně tak účinnosti konverze energie při urychlování.

Detailní populárnější rozbor jaderných zdrojů energie i s odkazy na literaturu je v cyklu článků v časopisu *Jaderná energie* [6]. Jsou zde popsány principy, historie i perspektivy radionuklidových zdrojů, štěpných jaderných reaktorů, fúzních zařízení i možnosti využití antihmoty.

Potřebná kinetická energie

Než se s využitím diskutovaných výtokových rychlostí podíváme na Ciolkovského rovnici, připomeňme si energetické potřeby mezihvězdných letů. Hmotnost je spojená s energií světoznámou Einsteinovou rovnicí $E = mc^2$, viz podrobně popis speciální teorie relativity [1]. Tzv. klidovou hmotnost m_0 objektu, kterou má v klidu v dané souřadné soustavě, tak můžeme spojit s klidovou energií E_0 :

$$E_0 = m_0 c^2 \quad (1)$$

Díky této rovnici můžeme vyjadřovat hmotnost v energetických jednotkách. V jaderných reakcích získáváme energii z přeměny mikroskopických objektů. Absolutně jde o velmi malé hodnoty energie, pro jejich vyjádření je vhodnou jednotkou elektronvolt (eV) a její násobky (keV, MeV či GeV). Elektronvolt je energie, kterou jako kinetickou získá částice s nábojem jednoho náboje elektronu při urychlení v potenciálovém rozdílu jednoho voltu. Vztah mezi elektronvoltem a jednotkou energie v SI (joulem): $1 \text{ eV} = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J}$. Podrobněji je definice elektronvoltu a jak vzniká její vztah k jednotce joule v [5].

U relativistických částic je kinetická energie srovnatelná s energií spojenou s klidovou hmotností objektu, a je tak vhodné pracovat s celkovou energií E částice. Ta je dána součtem její klidové energie E_0 a kinetické energie E_K :

$$E = E_0 + E_K. \quad (2)$$

Během exoergických¹⁾ jaderných reakcí se část klidové energie spojená s klidovou hmotností přemění na kinetickou energii. Při štěpení se uvolní zhruba 200 MeV energie a klidová energie uranu 235, který se štěpí, je zhruba 219 000 MeV. Na kinetickou energii se tak přemění zhruba 0,09 % klidové energie (stejný podíl hmotnosti). Hmotnost rozštěpeného uranu tak bude zhruba 1100krát větší, než je hmotnostní ekvivalent kinetické energie získané štěpením. Je třeba zdůraznit, že v každém štěpení vznikají různé produkty, takže se uvolněná energie při konkrétních štěpeních liší a je také rozdíl u různých štěpných jader. Zmíněných 200 MeV je tak přibližná hodnota.

U vesmírných fúzních pohonů se s největší pravděpodobností bude využívat reakce deuteria a helia 3, při které se uvolňuje 18,3 MeV energie.

¹⁾ U exoergických reakcí se energie uvolňuje a u endoergických je třeba energii dodat, aby mohly proběhnout. Samovolné rozpady jader jsou exoergickými reakcemi.

Součet klidových energií deuteria a helia 3 je 4 684 MeV. Na kinetickou energii se tak při této fúzní reakci přemění 0,39 % klidové energie (stejný podíl hmotnosti). V tomto případě tak musí být celková hmotnost deuteronu a helia 3 jen 256krát větší, než je hmotnostní ekvivalent získané kinetické energie.

V případě anihilace proběhne v konečném důsledku přeměna veškeré zúčastněné hmoty a antihmoty na fotony a neutrina, tedy klidová energie se úplně přemění na kinetickou.

Nyní se podívejme, jaké jsou potřeby kinetické energie v našem případě urychlení kosmické lodi o hmotnosti 100 tun na rychlosti 0,2c a 0,02c. Jak bylo ukázáno, s přesností lepší, než jsou nízké jednotky procent, můžeme využít klasický vztah mezi kinetickou energií E_k a rychlostí v . U něj kinetická energie roste s kvadrátem rychlosti. Pokud vyjádříme rychlost v jednotkách rychlosti světla, můžeme vyjádřit kinetickou energii jako polovinu klidové energie lodi vynásobené kvadrátem její rychlosti v jednotkách rychlosti světla:

$$E_k = \frac{m_0 v^2}{2} = \frac{m_0 c^2 \cdot \left(\frac{v}{c}\right)^2}{2} = \frac{E_0 \cdot \left(\frac{v}{c}\right)^2}{2}. \quad (3)$$

Klidová energie, která se tak musí přeměnit pro získání této kinetické energie, odpovídá v případě rychlosti 0,2c hmotnosti 2 tuny a v případě 0,02c je to hmotnost 0,02 tuny, což je 20 kg. Je však třeba připomenout, že se kinetická energie předává i pracovní látce zajišťující urychlení lodě. Reálně je tak potřeba energie vyšší, než je konečná kinetická energie lodi.

Podívejme se na to, jaké různé možnosti uvolňování energie můžeme využít. V případě využití pohonu na bázi antihmoty by stačilo anihilovat v případě rychlosti 0,2c celkově dvě tuny hmoty a antihmoty, pro případ rychlosti 0,02c jen 20 kg. V tomto případě je hmotnost paliva pro dodávku energie menší, a v případě menší rychlosti dokonce významně menší, než je hmotnost urychleného vesmírného plavidla. Připomínám, že zde absolutně neřešíme extrémní problémy s uchováváním antihmoty a konstrukcí motoru na antihmotu. Řešení toho je v nedohlednu. Neřešíme také, že část energie uniká ve formě neutrín a existuje celá řada dalších ztrát.

U fúzního pohonu už je pro rychlost 0,02c potřeba 5,12 tuny sumární hmotnosti deuteria a helia 3, pro rychlost 0,2c pak hmotnost 512 tun. V druhém případě je hmotnost tohoto paliva násobkem hmotnosti kosmické lodi. Výhodou zde je, že produkty fúze můžou tvořit pracovní

látku vytékající tryskou. Je třeba počítat s tím, že ne u všeho deuteria a hélia 3 dojde k fúzní reakci.

Ještě horší je situace v případě štěpného reaktoru. Zde je potřeba u rychlosti $0,02c$ rozštěpit 22 tun čistého štěpného materiálu a pro rychlost $0,2c$ pak až 2 200 tun štěpného materiálu. Zdůrazněme, že žádný známý typ reaktoru neumožňuje rozštěpit všechna jádra paliva. V každém zůstává i značné množství uranu i transuranů vznikajících zachytem neutronu, který nezpůsobí štěpení.

Pokud bychom chtěli dosáhnout dokonce rychlosti $0,8c$, musíme kinetickou energii E_{kin} určit pomocí relativistické rovnice. Vztah mezi celkovou energií E , klidovou energií E_0 a rychlostí v je, podrobněji viz [1,5]:

$$E = \frac{E_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}. \quad (4)$$

Dostaneme tak:

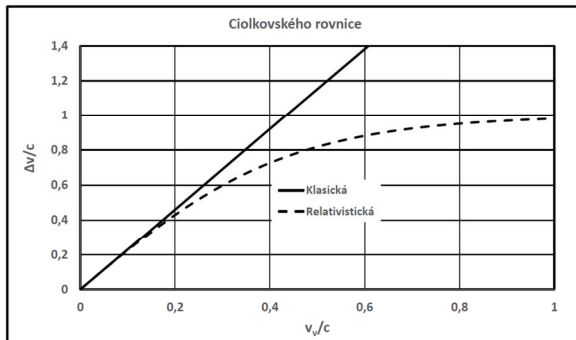
$$E = E_0 + E_{\text{kin}} = \frac{E_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \Rightarrow E_{\text{kin}} = \frac{E_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} - E_0. \quad (5)$$

V tomto případě by šlo o kinetickou energii stotunové lodi, která je stejná jako klidová energie odpovídající necelým 67 tunám hmoty. Kromě pohonu na antihmotu se tak dostáváme na hmotnosti paliva o několik řádů větší, než je hmotnost lodi.

Na závěr si ještě připomeňme, že v případě popsaného letu, kdy zrychlení probíhá první polovinu letu a pak bude loď symetricky brzdit, potřebujeme dvojnásobek energie a pro rychlost $0,2c$ výkony nejméně v řádu stovek GW.

Ciolkovského rovnice

Nyní se dostáváme k Ciolkovského rovnici, která popisuje let rakety. Při urychlování totiž potřebujeme odpovídajícím způsobem měnit hybnost kosmické lodi. To se děje pomocí využití zákona akce a reakce a vytékání proudu pracovní látky tryskou. Popis děje získáme ze zákona zachování hybnosti. Velikost změny hybnosti lodi o hmotnosti m je stejná jako velikost hybnosti materiálu vyvrženého raketovým motorem. Předpokládejme limitně malé změny hybností. Hmotnost vyvrženého materiálu dm je zanedbatelně malá oproti celkové hmotnosti lodi, stejně tak



Graf 3: Závislost změny rychlosti na efektivní výtokové rychlosti pro poměr mezi počáteční a konečnou hmotností $m_I/m_F = 10$. Plnou čarou je klasický nerelativistický vztah a přerušovanou relativistický vztah.

jsou zanedbatelně malé změny hybnosti dp a rychlosti dv :

$$dp_L = d(m \cdot v) = u \cdot dm = dp_v, \quad (6)$$

kde p_L a p_v jsou hybnosti lodi a vyvrženého materiálu, u je rychlost vyvrženého materiálu v laboratorní soustavě (v té fyzikální děj pozorujeme). Jestliže je výtoková rychlost materiálu v_v , pak platí:

$$u = v - v_v, \quad (7)$$

a tedy

$$m \cdot d(v) + v \cdot d(m) = (v - v_v) \cdot dm. \quad (8)$$

Po úpravě:

$$m \cdot d(v) = -v_v \cdot dm. \quad (9)$$

V nerelativistickém případě, kdy platí Galileiho transformace pro sčítání rychlostí (7) a hybností a platí zákon zachování hmotnosti jsme mohli ke vztahu (9) dospět přímo. V případě řešení relativistické Ciolkovského rovnice²⁾ je výhodné pracovat s rychlostmi vyjádřenými v jednotkách rychlosti světla, takže naši nerelativistickou diferenciální rovnici, kterou jsme získali, přepíšeme do následujícího tvaru:

$$m \cdot d\left(\frac{v}{c}\right) = -\frac{v_v}{c} \cdot dm. \quad (10)$$

²⁾ Konstantin Eduardovič Ciolkovskij se rychlostmi, při kterých je potřeba speciální teorie relativity, nezabýval. Proto se obvykle mluví o relativistické raketové rovnici a s jeho jménem se tato rovnice nespojuje.

Jde o typ diferenciální rovnice, který se vyskytuje při řešení fyzikálních problémů často, například při řešení zákona radioaktivního rozpadu (viz [5,7]), a vede k exponenciální (logaritmické) funkci. Diferenciální rovnici řešíme metodou separace proměnných, využijeme znalosti z [2–4]:

$$\frac{dm}{m} = -\frac{d\left(\frac{v}{c}\right)}{\frac{v_v}{c}} \Rightarrow \int_{m_I}^{m_F} \frac{dm}{m} = -\frac{1}{\frac{v_v}{c}} \cdot \int_0^{\frac{\Delta v}{c}} d\left(\frac{v}{c}\right). \quad (11)$$

Zde jsme označili jako m_I počáteční hmotnost rakety a m_F její koncovou hmotnost po spotřebování paliva, tedy v našem případě sledovaných 100 tun. Jako v_v je označena efektivní výtoková rychlost pracovní látky a Δv pak celková změna rychlosti, kterou raketa realizovala. Provedeme integraci:

$$\ln m_F - \ln m_I = -\frac{\frac{\Delta v}{c}}{\frac{v_v}{c}} \Rightarrow \frac{\Delta v}{c} = \frac{v_v}{c} \cdot \ln \frac{m_I}{m_F}, \quad (12)$$

což je známá Ciolkovského raketová rovnice. Poměr změny rychlosti a efektivní výtokové rychlosti je roven přirozenému logaritmu poměru počáteční a konečné hmotnosti rakety:

$$\frac{\Delta v}{v_v} = \ln \frac{m_I}{m_F}. \quad (13)$$

Pro konstantní poměr počáteční a koncové hmotnosti lodě je v nerelativistickém případě závislost změny rychlosti lodě na efektivní výtokové rychlosti lineární. V grafu 3 je zobrazen příklad závislosti změny rychlosti lodě na efektivní výtokové rychlosti pro poměr počáteční a konečné hmotnosti rakety 10, tedy pro hmotnost paliva, které je devítinásobek konečné hmotnosti kosmické lodi. V našem případě hmotnosti kosmické lodi 100 tun by hmotnost paliva byla 900 tun. To je pořád rozumná hodnota.

Pro závislost hmotností z rovnice (13) plyne

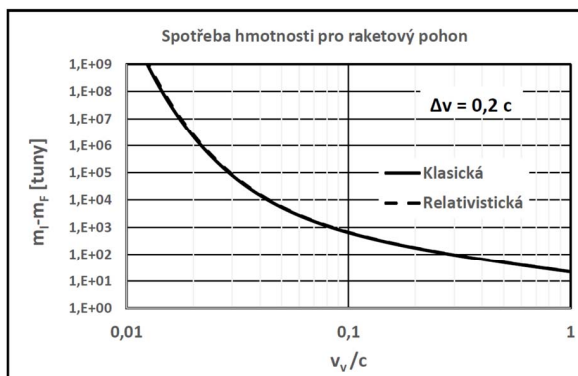
$$m_I = m_F \cdot e^{\frac{\Delta v}{v_v}}. \quad (14)$$

Hmotnost vyvrženého materiálu získáme dosazením za m_I ze vztahu (14):

$$m_I - m_F = m_F \cdot e^{\frac{\Delta v}{v_v}} - m_F = m_F \cdot \left(e^{\frac{\Delta v}{v_v}} - 1\right) \quad (15)$$

Je vidět, že hmotnost paliva roste exponenciálně s konečnou dosaženou změnou rychlosti. Pokud je požadovaná změna rychlosti menší nebo srovnatelná s efektivní výtokovou rychlostí, je potřebná hmotnost pracovní látky malá nebo srovnatelná s konečnou hmotností lodi. Pokud je však požadovaná změna rychlosti větší než efektivní výtoková rychlost, tak hmotnost pracovní látky velmi rychle exponenciálně roste.

Na grafu 4 je závislost potřebné hmotnosti pracovní látky na výtokové rychlosti, pokud chceme dosáhnout změny rychlosti vesmírné lodi $0,2c$. Je vidět, že teprve pro hodnoty výtokové rychlosti srovnatelné s požadovanou rychlostí lodi a vyšší dostáváme hmotnost pracovní látky, která není o mnoho řádů vyšší, než je konečná hmotnost lodi.



Graf 4: Závislost hmotnosti pracovní látky na výtokové rychlosti pro hmotnost vesmírné lodi 100 tun a rychlost $0,2c$. Klasická nerelativistická (plná čára) a relativistická (přerušovaná) se v tomto případě překrývají.

V části o potřebné kinetické energii bylo zmíněno, že se kinetická energie předává nejen urychlované lodi, ale také vyvrhované pracovní látce. Ciolkovského rovnice nám umožňuje určit závislost účinnosti využití energie na poměru dosažené změny rychlosti a efektivní výtokové rychlostí. Získáme je porovnáním toho, jaká část z celkově uvolněné energie se předá lodi:

$$E_{k\Delta v} = \frac{m_F(\Delta v)^2}{2}. \quad (16)$$

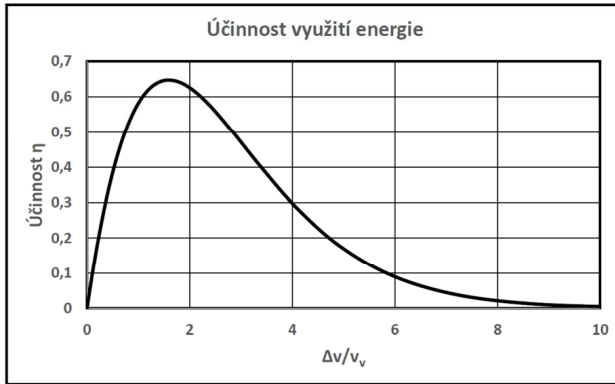
Celková uvolněná energie, která se předala vyvrhovanému materiálu:

$$E_{kT} = \frac{(m_I - m_F)v_v^2}{2}. \quad (17)$$

Účinnost je tak poměr mezi kinetickou energií lodi $E_{k\Delta v}$ a celkovou uvolněnou energií E_{kT} (dosadíme ze vztahu (15) za $m_I - m_F$):

$$\eta = \frac{E_{k\Delta v}}{E_{kT}} = \frac{\frac{m_F(\Delta v)^2}{2}}{\frac{(m_I - m_F)v_v^2}{2}} = \frac{m_F(\Delta v)^2}{(m_I - m_F)v_v^2} = \frac{\left(\frac{\Delta v}{v_v}\right)^2}{e^{\frac{\Delta v}{v_v}} - 1}. \quad (18)$$

V grafu 5 je vidět, že v optimálním případě, který je pro poměr změny rychlosti a výtokové rychlosti 1,59, je hodnota účinnosti 64,8 %. Potřebné energie, které jsme určovali v předchozí části stačí v ideálním případě jen o něco méně než zdvojnásobit. Ovšem, pokud nebudeme v optimu, musíme mít energii mnohonásobně i řádově větší. Ještě zmiňme, že poměr mezi počáteční a konečnou hmotností rakety je ve zmíněném optimálním případě 4,92.



Graf 5: Závislost účinnosti využití energie na poměru dosažené změny rychlosti a efektivní výtokové rychlosti.

V případě potřeby dosažení relativistických rychlostí je nutné pracovat se speciální teorií relativity. Využijme znalosti z [1] a opět zákon zachování hybnosti. Relativistická Lorentzova transformace hybnosti je (označíme $m_0 = m$):

$$p = \frac{m_0 \cdot v}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{m \cdot v}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}, \quad (19)$$

$$dp_L = d\left(\frac{m \cdot v}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}\right) = u \cdot \frac{dm}{\sqrt{1 - \left(\frac{u}{c}\right)^2}} = dp_v, \quad (20)$$

kde dp_L je změna hybnosti lodi a dp_v je hybnost spojená s vyvrženým materiálem. Musí platit zákon zachování energie. Součet změny celkové energie lodi dE_L v laboratorní soustavě a energie vyvrženého materiálu dE_v musí být nula. Celková energie se nemění, zachovává se:

$$dE_L = d\left(\frac{m \cdot c^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}\right) = -\frac{dm \cdot c^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = -dE_v. \quad (21)$$

Pro transformaci (sčítání) rychlostí platí místo nerelativistického vztahu (7) relativistický:

$$u = \frac{v - v_v}{1 - \frac{v \cdot v_v}{c^2}}. \quad (22)$$

Do vztahu (20) dosadíme na pravé straně z rovnice (22) pro rychlost a z (21) za element hmotnosti vyvrženého materiálu:

$$d\left(\frac{m \cdot v}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}\right) = \frac{v - v_v}{1 - \frac{v \cdot v_v}{c^2}} \cdot d\left(\frac{m}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}\right). \quad (23)$$

Využijeme pravidla pro derivování [2–4]:

$$d\left(\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}\right) = \frac{\frac{v \cdot dv}{c^2}}{\left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}. \quad (24)$$

Můžeme tak provést derivace ve vztahu (23), využijeme zase naše znalosti o derivování součinu a podílu funkcí [2–4]:

$$\begin{aligned} \frac{dm \cdot v}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} + \frac{m \cdot dv}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} + \frac{\frac{m \cdot v^2 \cdot dv}{c^2}}{\left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \\ = \frac{v - v_v}{1 - \frac{v \cdot v_v}{c^2}} \cdot \left(\frac{dm}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} + \frac{m \cdot \frac{v}{c^2} \cdot dv}{\left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} \right). \end{aligned} \quad (25)$$

Vynásobíme rovnici stejným výrazem $\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}$, který máme ve jmenovateli u všech členů, a provedeme další úpravy:

$$dm \cdot v + m \cdot dv + \frac{\frac{m \cdot v^2 \cdot dv}{c^2}}{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} = \frac{v - v_v}{1 - \frac{v \cdot v_v}{c^2}} \cdot \left(dm + \frac{m \cdot \frac{v}{c^2} \cdot dv}{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} \right), \quad (26)$$

$$\left(v - \frac{v - v_v}{1 - \frac{v \cdot v_v}{c^2}}\right) dm = -m \cdot \left[1 + \frac{\frac{v}{c^2}}{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} \left(v - \frac{v - v_v}{1 - \frac{v \cdot v_v}{c^2}}\right)\right] dv. \quad (27)$$

Upravíme, rovnice se dramaticky zjednoduší:

$$\left(\frac{v_v - \frac{v^2 \cdot v_v}{c^2}}{1 - \frac{v \cdot v_v}{c^2}}\right) dm = -m \cdot \left(\frac{1}{1 - \frac{v \cdot v_v}{c^2}}\right) dv. \quad (28)$$

Ještě dále upravíme a vyjádříme rychlosti v rychlostech světla:

$$\frac{dm}{m} = -\frac{d\left(\frac{v}{c}\right)}{\frac{v_v}{c} \cdot \left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)}. \quad (29)$$

Dostáváme diferenciální rovnici velice podobnou nerelativistické a můžeme ji opět řešit pomocí separace proměnných.

$$\int_{m_I}^{m_F} \frac{dm}{m} = -\frac{1}{\frac{v_v}{c}} \int_0^{\frac{\Delta v}{c}} \frac{d\left(\frac{v}{c}\right)}{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}. \quad (30)$$

Příslušný integrál komplikovanější funkce můžeme zjistit na internetu třeba pomocí Numberempire.com:

$$\ln m_F - \ln m_I = -\frac{1}{2 \cdot \frac{v_v}{c}} \left[\ln \left(1 + \frac{\Delta v}{c}\right) - \ln \left(1 - \frac{\Delta v}{c}\right) \right] \quad (31)$$

$$\ln \frac{m_I}{m_F} = \ln \left[\frac{\left(1 + \frac{\Delta v}{c}\right)^{\frac{c}{2v_v}}}{\left(1 - \frac{\Delta v}{c}\right)^{\frac{c}{2v_v}}} \right] \quad (32)$$

Dostáváme tak relativistickou Ciolkovského rovnici, kterou můžeme ještě upravit:

$$\frac{m_I}{m_F} = \left(\frac{1 + \frac{\Delta v}{c}}{1 - \frac{\Delta v}{c}} \right)^{\frac{c}{2v_v}} \quad (33)$$

$$m_I - m_F = m_F \cdot \left(\frac{1 + \frac{\Delta v}{c}}{1 - \frac{\Delta v}{c}} \right)^{\frac{c}{2v_v}} - m_F = m_F \cdot \left[\left(\frac{1 + \frac{\Delta v}{c}}{1 - \frac{\Delta v}{c}} \right)^{\frac{c}{2v_v}} - 1 \right] \quad (34)$$

Pomocí úpravy vztahu (33) můžeme určit změnu rychlosti v závislosti na poměru hmotností a výtokové rychlosti:

$$\left(\frac{m_I}{m_F}\right)^{\frac{2v_v}{c}} = \frac{1 + \frac{\Delta v}{c}}{1 - \frac{\Delta v}{c}} \quad (35)$$

$$\left(1 + \frac{\Delta v}{c}\right) \left(\frac{m_I}{m_F}\right)^{\frac{2v_v}{c}} = 1 + \frac{\Delta v}{c} \quad (36)$$

$$\left(\frac{\Delta v}{c}\right) \left[1 + \left(\frac{m_I}{m_F}\right)^{\frac{2v_v}{c}}\right] = \left(\frac{m_I}{m_F}\right)^{\frac{2v_v}{c}} - 1 \quad (37)$$

Na obou stranách vytkneme výraz $\left(\frac{m_I}{m_F}\right)^{\frac{2v_v}{c}}$ a exponenciální funkce převedeme na přirozený základ e:

$$\frac{\Delta v}{c} = \frac{\left(\frac{m_I}{m_F}\right)^{\frac{v_v}{c}} - \left(\frac{m_I}{m_F}\right)^{-\frac{v_v}{c}}}{\left(\frac{m_I}{m_F}\right)^{\frac{v_v}{c}} + \left(\frac{m_I}{m_F}\right)^{-\frac{v_v}{c}}} = \frac{e^{\frac{v_v}{c} \ln\left(\frac{m_I}{m_F}\right)} - e^{-\frac{v_v}{c} \ln\left(\frac{m_I}{m_F}\right)}}{e^{\frac{v_v}{c} \ln\left(\frac{m_I}{m_F}\right)} + e^{-\frac{v_v}{c} \ln\left(\frac{m_I}{m_F}\right)}} \quad (38)$$

Protože existuje funkce tangens hyperbolický, definovaná takto:

$$\tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \quad (39)$$

můžeme relativistickou Ciolkovského rovnici zapsat způsobem, se kterým se setkáte v literatuře:

$$\frac{\Delta v}{c} = \tanh\left(\frac{v_v}{c} \ln\left(\frac{m_I}{m_F}\right)\right) \quad (40)$$

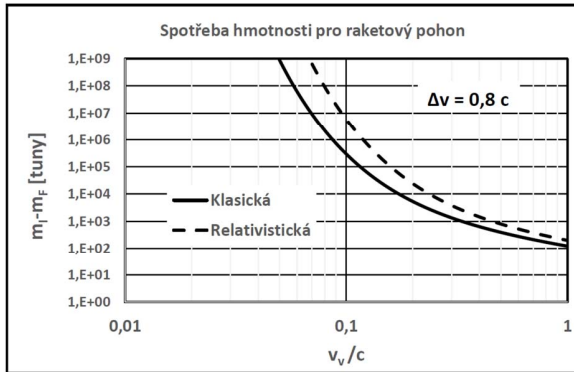
Tangenta hyperbolická se v této rovnici vyskytuje kvůli Lorentzově transformaci. Pro znalější připomeňme, že v relativistickém případě se daleko lépe než s rychlostmi, pracuje s rapiditami. Stejně, jako se v případě použití logaritmu převádí násobení na sčítání, převádí se pomocí rapidity Lorentzova transformace na sčítání. V grafu 3 je vidět, že rozdíl mezi ne-relativistickou a relativistickou rovnicí se začne významněji projevovat pro rychlosti větší než 20 % rychlosti světla.

I pro účinnost využití energie lze pomocí relativistického vztahu pro kinetickou energii (5) odvodit potřebné relativistické vztahy:

$$\begin{aligned}
 \eta = \frac{E_{k\Delta v}}{E_{kT}} &= \frac{m_F \cdot c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\Delta v}{c}\right)^2}} - 1 \right)}{(m_I - m_F) \cdot c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_v}{c}\right)^2}} - 1 \right)} = \\
 &= \frac{m_F \cdot c^2 \sqrt{1 - \left(\frac{v_v}{c}\right)^2} \left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{\Delta v}{c}\right)^2} \right)}{(m_I - m_F) \cdot c^2 \sqrt{1 - \left(\frac{\Delta v}{c}\right)^2} \left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{v_v}{c}\right)^2} \right)}. \quad (41)
 \end{aligned}$$

Dosadíme za $m_I - m_F$ ze vztahu (34):

$$\begin{aligned}
 \eta &= \frac{m_F \cdot c^2 \sqrt{1 - \left(\frac{v_v}{c}\right)^2} \left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{\Delta v}{c}\right)^2} \right)}{m_F \cdot c^2 \left[\left(\frac{1 + \frac{\Delta v}{c}}{1 - \frac{\Delta v}{c}} \right)^{\frac{c}{2v_v}} \right] \sqrt{1 - \left(\frac{\Delta v}{c}\right)^2} \left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{v_v}{c}\right)^2} \right)} = \\
 &= \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{v_v}{c}\right)^2} \left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{\Delta v}{c}\right)^2} \right)}{\left[\left(\frac{1 + \frac{\Delta v}{c}}{1 - \frac{\Delta v}{c}} \right)^{\frac{c}{2v_v}} \right] \sqrt{1 - \left(\frac{\Delta v}{c}\right)^2} \left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{v_v}{c}\right)^2} \right)} \quad (42)
 \end{aligned}$$



Graf 6: Závislost hmotnosti pracovní látky na efektivní výtokové rychlosti pro hmotnost vesmírné lodi 100 tun a dosažené změny rychlosti 0,8c. Klasická nerelativistická funkce (plná čára) a relativistická (přerušovaná) se v tomto případě už liší.

Podívejme se, kolik budeme potřebovat v našich případech s lodí o hmotnosti 100 tun pracovní látky. Její závislost na výtokové rychlosti pro námi požadované dosažení rychlosti $0,2c$ je v grafu 4. Při této požadované rychlosti se výsledky relativistického a nerelativistického výpočtu blíží. V logaritmickém měřítku není vidět, že u relativistické funkce je hmotnost potřebné pracovní látky o jednotky až desítky procent vyšší, zvyšuje se s poklesem výtokové rychlosti. Rozdíl viditelný i v logaritmické měřítku se objevuje až v případě, kdy potřebujeme dosáhnout opravdu relativistických rychlostí, například $0,8c$, jak je vidět v grafu 6.

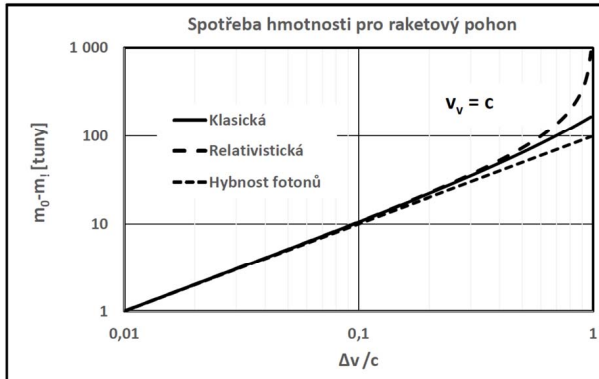
Připomeňme, že štěpné reaktory by mohly realizovat výtokové rychlosti maximálně okolo 40 km/s. V tomto případě by dosažení rychlosti $0,2c$ potřebovalo zhruba řádově nepředstavitelných 10^{660} tun. V případě rychlosti $0,02c$ je to 10^{65} tun a i pro $0,002c$, což je 600 km/s, to je pořád 327 milionů tun.

Pokud bychom využili iontový motor se špičkovou hodnotou výtokové rychlosti 10 000 km/s, jsou odpovídající hodnoty pro $0,2c$ celkově 43 700 tun, pro $0,02c$ je 82 tun a pro $0,002c$ je to už jen něco více než 6 tun. Výtokové rychlosti v řádu tisíců km/s by mohly být dostupné i v případě fúze. Anihilační pohon by mohl přiblížit výtokové rychlosti k rychlosti světla.

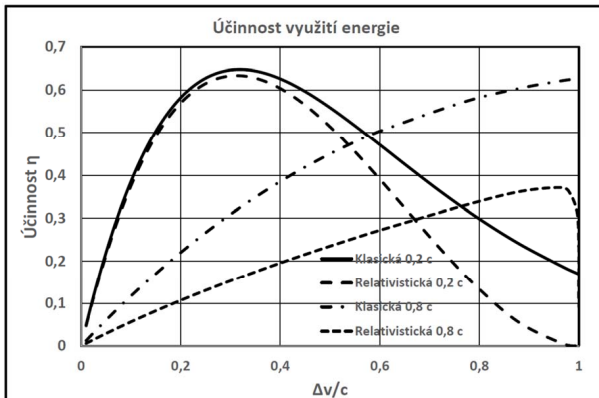
Pokud se hmota přemění na fotony, jedná se o ultrarelativistické částice, u kterých je lineární závislost mezi hybností a energií. Celková energie, která je celá jen kinetická, vzniklých fotonů je dána klidovou energií anihilované hmoty a antihmoty, tedy součinem klidové hmotnosti a kvadrátem rychlosti světla. Celková hybnost fotonů, předpokládáme-li jejich proud v jednom směru, je součinem klidové hmotnosti původní hmoty a antihmoty a rychlosti světla. V ideálním případě je zároveň blízká hybnosti, kterou má loď po zrychlení, a potřebná celková hmotnost anihilované hmoty a antihmoty je jen o něco vyšší než hmotnost vesmírné lodi vynásobená podílem dosažené rychlosti a rychlosti světla. K této hodnotě potřebné hmotnosti pracovní látky se blížíme při přiblížení rychlosti pracovní látky k rychlosti světla. Platí to pro nerelativistické přiblížení. Pro změnu rychlosti blížící se rychlosti světla je potřebná hmotnost větší a větší. Podrobněji to ukazuje graf 7.

Podívejme se na relativistický výpočet účinnosti využití energie. V grafu 8 je vidět, že pro výtokovou rychlost $0,2c$ se relativistická funkce velmi dobře shoduje s nerelativistickou pro změnu rychlosti rakety nepřesahující $0,2c$. Po jejím překročení se obě křivky začínají rozcházet. Maximum je i u relativistického vztahu přes 60 % a nachází se v oblasti poměru

změny rychlosti lodi a výtokové rychlosti okolo 1,5. Pro výtokové rychlosti, které jsou silně relativistické, se už relativistická funkce od klasické liší i dramaticky. V grafu 8 je ukázána situace pro výtokovou rychlost $0,8c$.



Graf 7: Závislost hmotnosti pracovní látky na požadované změně rychlosti pro hmotnost vesmírné lodi 100 tun a výtokové rychlosti c (fotony). Je zobrazena klasická nerelativistická (plná čára) a relativistická funkce (přerušovaná čára). Ty se začínají významněji lišit okolo požadované změny rychlosti $0,2c$ a vyšší.



Graf 8: Účinnosti využití energie v závislosti na dosažené změně rychlosti po urychlení v klasickém i relativistickém výpočtu. Pro výtokovou rychlost $0,2c$ se relativistická funkce začne od klasické významně lišit pro dosažené rychlosti větší než $0,2c$. Pro výtokovou rychlost $0,8c$ je rozdíl v celém rozsahu.

Jak je vidět, pro realizaci možnosti mezihvězdných letů je klíčové dosažení dostatečně velké výtokové rychlosti. Ideální je, pokud je srovnatelná s rychlostí, kterou chceme dosáhnout. V tomto případě je vysoké využití energie dosahující hodnot i přes 60 % a i hmotnost pracovní látky je srovnatelná s hmotností kosmické lodi. Pro dosažení rychlosti kosmického plavidla v řádu procent rychlosti světla to znamená, že je potřeba se dostat k hodnotám 1 000 km/s až 10 000 km/s. Kromě anihilačního motoru by to mohl umožnit i ten fúzní. Ovšem ani ten zatím nemáme a není jasná ani cesta, jak k němu dospět.

Lze sice spojit štěpný reaktor s iontovým motorem, který může mít v principu výtokové rychlosti v řádu 1 000 km/s. Ty však také zatím nemáme ani ve výhledu. Zde je navíc velký problém v nízké účinnosti konverze energie a dosažení odpovídajícího tahu.

Štěpné reaktory sice mezihvězdný let neumožní, mohou však přispět k realizaci podrobného studia vnějších oblastí Sluneční soustavy. Znalosti podmínek vně heliosféry, odkud máme zatím informace pouze ze sond Voyager 1 a 2, jsou klíčové pro reálnou přípravu mezihvězdného letu. Mezihvězdná loď se v mezihvězdném prostoru bude pohybovat řadu desetiletí nebo dokonce staletí. Je třeba vědět, jak chránit elektroniku a zajistit přežití aparátů.

Závěr

Jak je vidět z předchozího rozboru, nejsou mezihvězdné lety s využitím raketového motoru realizovatelné bez osvojení využití termojaderné fúze. Kdy se to podaří, nelze odhadnout. Ještě větší výzvou je případné využití antihmoty, zde je úroveň inženýrských překážek ještě o mnoho řádů výše. V předchozím textu jsme se věnovali pouze energetickým nárokům a požadavkům na hybnost. Doufáme, že to i tak čtenáři přiblížilo extrémní náročnost úkolu.

V tomto článku se vůbec neposuzovaly extrémní technologické nároky, které jsou s vesmírnými štěpnými, fúzními i anihilačními technologiemi spojeny. Společně jsou extrémní nároky na materiály. Zásadní je pokrok v oblasti supravodivých magnetů, laserů i metod urychlování částic. Dalším zásadním problémem je radiační odolnost a ochrana před galaktickým kosmickým zářením. Některé oblasti se rozebírají v přednáškách vystavených na internetu [7–10].

Literatura

- [1] Šedivý, P.: *Kapitoly ze speciální teorie relativity*. (studijní text pro řešitele FO a ostatní zájemce o fyziku).
- [2] Jírů, J.: *Diferenciální počet ve fyzice*. (studijní text pro řešitele FO a ostatní zájemce o fyziku).
- [3] Jarešová, M., Volf, I.: *Diferenciální počet ve fyzice*. (studijní text pro řešitele FO a ostatní zájemce o fyziku).
- [4] Jarešová, M., Volf, I.: *Integrální počet ve fyzice*. Knihovnička FO č. 73, MAFY, Hradec Králové, 2006.
- [5] Wagner, V., Vícha, V., Janout, Z.: *Hranice Mendělejevovy tabulky aneb jak produkovat stále těžší prvky*. (studijní text pro řešitele FO a ostatní zájemce o fyziku).
- [6] Wagner, V.: Cyklus článků o jaderných zdrojích pro vesmír. *Jaderná energie*, ročník 2022 a 2023, <https://jadernaenergie.online/>.
- [7] Wagner, V.: *Matematika pro jadernou fyziku*. Přednáška pro středoškolské pedagogy v rámci akce Matematika pro život, FJFI ČVUT, Praha, 2019, <https://www.youtube.com/watch?v=N241fq1JPe8>.
- [8] Wagner, V.: *Jaderné technologie a jejich aplikace ve vesmíru či při kolonizaci Marsu*. Přednáška pro Czech Mars Society, Opava, 2023, https://www.youtube.com/watch?v=rV_lWRoNODI.
- [9] Wagner, V.: *Kosmické záření a ochrana před ním*. Přednáška pro Czech Mars Society, Opava, 2024, <https://www.youtube.com/watch?v=ohLfzp-aFLM>.
- [10] Wagner, V.: *Jak se bude cestovat ke hvězdám*. Přednáška pro Czech Mars Society, Opava, 2025, <https://www.youtube.com/watch?v=s0rZPjdm02k>.

Věda vs. konspirace: Otázka falzifikovatelnosti

*Leontýna Šlégrová, Jan Šlégr**Přírodovědecká fakulta Univerzity Hradec Králové*

Abstrakt. Přestože neexistují žádné věrohodné důkazy o existenci rozsáhlého tajného programu na rozprašování škodlivých chemikálií do atmosféry, konspirační teorie o tzv. chemtrails i nadále získává pozornost veřejnosti, zejména na sociálních sítích. V tomto dílu našeho seriálu si ji rozebereme a podíváme se na důležitou vlastnost teorií – falzifikovatelnost.

Úvod

Jak jsme definovali v prvním díle seriálu, konspirační teorie jsou přesvědčení, že určité události nebo situace jsou výsledkem tajného spiknutí mocných skupin, které před veřejností úmyslně tají pravdu. Konspirační teorie o chemtrails je poměrně pestrá, zahrnuje totiž širokou škálu přesvědčení a domnělých motivací, které se výrazně liší – od snahy o ovlivnění počasí, přes kontrolu populace až k psychologické manipulaci. Tato teorie totiž tvrdí, že kondenzační čáry za letadly ve skutečnosti slouží k rozprašování škodlivých chemikálií, virů, bakterií, případně látek ovlivňujících klima na Zemi.

Kondenzační stopy (anglicky contrails) jsou oblačné útvary, které vznikají jako důsledek činnosti proudových motorů letadel. Voda obsažená ve výfukových plynech zvyšuje relativní vlhkost za motorem na více než 100 %. Vodní pára v tomto přesyceném vzduchu následně kondenzuje na částicích sazí a síranů z motoru, zmrzne a vytvoří ledové krystalky. V závislosti na aktuálních atmosférických podmínkách mohou tyto kondenzační stopy rychle zmizet, nebo se naopak vyvinout v cirrovitou oblačnost, která je nerozeznatelná od přirozeně vzniklých mraků [1]. Právě to, že chování kondenzačních čar není vždy intuitivní, přizívuje konspirační teorie, i když se je například Český hydrometeorologický úřad snaží soustavně vyvracet [2, 3].

Fyzika kondenzačních stop

Kondenzační stopy jsou názorným příkladem toho, jak se vodní pára může v atmosféře měnit na kapalinu nebo pevnou látku v závislosti na aktuálních podmínkách. Pokud je okolní vzduch dostatečně studený a

zároveň obsahuje dostatek vlhkosti, vodní pára z výfukových plynů letadel kondenzuje a následně zmrzne. Vznikají tak drobné ledové krystalky, které ve vhodných podmínkách přetrvávají jako viditelné kondenzační čáry.



Obr. 1: „Důkaz“ chemtrails, autor: Michal Shark (vlevo), kondenzační čáry nad Litomyšlí, autor: Lubos Haberland (vpravo)

Kondenzační stopy se však nevytvářejí za všech okolností. Aby k jejich vzniku došlo, musí být ve výšce letu dostatečně chladno – obvykle pod $-40\text{ }^{\circ}\text{C}$. Jen za takových teplot může vodní pára z výfukových plynů zkondenzovat a zmznout. Vznik stopy ovlivňuje také vlhkost okolního vzduchu. Je-li vzduch suchý, ledové krystalky rychle sublimují a stopa mizí. Naopak při vysoké vlhkosti se krystalky udrží déle – a mohou se dokonce rozrůst do podoby cirrovité oblačnosti.

Podobný jev se dá snadno ukázat pomocí zvlhčovače vzduchu, například ultrazvukového difuzéru. Pokud necháme odpařovat vodu v prostředí, kde je vysoká vlhkost vzduchu a nízká teplota, vytvoříme dobře viditelnou vodní mlhu, tedy mikroskopické kapičky vody, které se vypařují jen velmi pomalu, protože je k tomu jednak tolik nenutí nízká teplota, jednak proto, že okolní vzduch už je vlhký a další vodní páru nepřijímá tak dobře. Naopak pokud připravíme prostředí, kde bude nízká vlhkost vzduchu a vyšší teplota, vodní mlha ve vzduchu nevydrží tak dlouho, protože voda snadno přejde do plynného skupenství. V případě konden-

začnících stop a ledových krystalků je samozřejmě ve hře sublimace, ale jinak se jedná o stejný princip.



Obr. 2: Odpařování vody při vysoké vlhkosti a nízké teplotě (vlevo) a při nízké vlhkosti a vyšší teplotě (vpravo)

Neintuitivní vlastnosti kondenzačních stop

Inspirací pro tento článek byl příspěvek na sociální síti, provázený fotografiemi, který měl přibližně toto znění: „Můžete mi napsat z obou stran pohledu na věc, jak se vám líbila včerejší obloha nad Litomyšlí a dalekým okolím, a proč podle vás ta letadla létala v různých výškách sem a tam jakoby nekoordinovaně, a přesto po nich velmi dlouho zůstávaly "kondenzáty"? Kondenzáty, které přímo před očima začínaly nebo přestávaly?“

Kondenzační stopy si za své „negativní PR“ mohou do jisté míry samy, protože mají vlastnosti, které nemusí být na první pohled intuitivní.

V některé dny kondenzační stopy na obloze nezůstávají vůbec, zatímco v jiné dny zůstávají viditelné po delší dobu. Je pravděpodobné, že počet létajících letadel je konzistentní (možná s výjimkou svátků), ale člověk si jich nemusí všimnout, když se jejich kondenzační stopy rychle rozptýlí. Pomocí serverů jako Flightradar24 [4] lze sledovat letecký provoz a zjistit, že i ve dnech, kdy na obloze nejsou žádné kondenzační stopy, je letecký provoz velmi podobný jako ve dnech, kdy se stopy drží dlouho.

Na obloze můžete „vedle sebe“ vidět dvě letadla, jedno s dlouhou kondenzační stopou a druhé téměř bez stopy (viz obr. 1 vlevo). To lze vysvětlit-

lit velmi jednoduše: Ze země to tak nemusí vypadat, ale letadla rozhodně létají v různých výškách, kde je různá vlhkost a teplota vzduchu.

Protože se atmosféra mění velmi dynamicky, může se zdát, že kondenzační stopy jsou přerušené. K tomu dochází proto, že letadlo může prolétnout oblastí, kde vlhkost vzduchu není dostatečná k udržení stop po delší dobu. Tento jev lze pozorovat na obr. 1 vpravo.

Všechny tyto vlastnosti lze sice snadno vysvětlit výše uvedenými fyzikálními ději, ale konspirační teorie jsou tak přitažlivé...

Boj proti chemtrails – octování

Obyvatelstvo našťstí není proti chemtrails zcela bezmocné! Na sociálních sítích se dočteme, že existuje jednoduchá a účinná metoda, jak negativní vliv chemtrails neutralizovat – tzv. octování. Vysvětlení základů této metody uvádíme v původním znění:

Atmosféra má elektrický náboj. Při CHEMTRAILOVÁNÍ se atmosféra nabíjí Kladně a vznikají zde KATIONTY, jsou to kladně nabitě molekuly. U OCTOVÁNÍ vzniká náboj opačný – Záporný, vznikají tzv. ANIONTY. Obojí je bezbarvé, bez chuti a bez zápachu. ANIONTY, díky svému zápornému náboji, neutralizují viry s kladným nábojem a zároveň zneškodňují bakterie, eliminují zápach v ovzduší, zabraňují rozvoji nákaz.... Čím více je aniontů v ovzduší, tím méně je v něm škodlivin.

Žádný živý organismus, nejen člověk, nemůže existovat bez aniontů. Existence záporně nabitých elektronů na oběžných drahách atomů je jedním ze základů života. Anionty ruší účinek různé mikročástice. Anionty též zbavují ovzduší zápachu a zabíjejí mikroby. Spojení aniontů – vzduchu – záporného náboje – virů a smradu – jsou základním mechanismem „vzdušných vitamínů“, případně doslovněji „čističi vzduchu“. Ačkoliv užitečné vlastnosti aniontů zůstávaly dlouho nepovšimnuty, jsou velmi důležité pro lidské zdraví.

Takže anionty mohou akumulovat a neutralizovat prach, ničit viry s kladně nabitými elektrony, pronikat do buněk mikrobů, ničit je, a tím rušit destruktivní působení na lidské zdraví. Čím je více aniontů ve vzduchu, tím je tam méně mikrobů (když koncentrace aniontů dosáhne určité úrovně, množství mikrobů se prakticky blíží nule).

Nejjednodušší a neefektivnější možností, jak do vzduchu dostat co nejvíce aniontů, je OCTOVÁNÍ. Právě obyčejný OCET (cena za litr se pohybuje okolo 10 Kč) má totiž záporný, vysoce konstruktivní náboj. Jestliže postříkáte OCTEM například silnici, začne se OCET okamžitě vypařovat do atmosféry. Tedy jinak řečeno, začnete neutralizovat atmosféru. A z vysoce kladného atmosférického (vytvořené chemtrailovými sítěmi) se stává záporný atmosférický náboj, tzn. chemtraily se nemohou rozptýlit. 5 litrů octa dokáže „vyčistit“ chemtrails během cca 1 hodiny v okruhu cca 20 km.

Přírodovědně vzdělanému čtenáři je na první pohled jasné, že se jedná o pseudovědecké sdělení, které kombinuje zrnka pravdy s nesmyslnými nebo zavádějícími tvrzeními. Právě tato směs je ale psychologicky velmi účinná – čtenář snadněji uvěří celku, pokud zná alespoň některé prvky jako reálné.

Text totiž používá odborné pojmy (kationty, anionty, elektrony, elektrický náboj, ...), ale v nesprávném nebo nedoloženém kontextu. Fyzika potěší formulace „viry s kladně nabitými elektrony“. Pokud jde o zrnka pravdy, najdeme jich tam celkem dost: Atmosféra skutečně může být ionizována (např. ve vyšších vrstvách, tedy v ionosféře), anionty i kationty v ovzduší existují, např. při bouřce, a kyselina octová je skutečně těkavá a může se odpařovat.

Na druhou stranu, v textu jsou zavádějící a chybné interpretace: Kupříkladu neexistuje fyzikální mechanismus, kterým by rozprašování octa ovlivnilo iontové složení atmosféry v měřítku několika kilometrů. Na prostým nesmyslem pak je, že „5 litrů octa vyčistí chemtrails v okruhu 20 km během hodiny“. Výpočet, jaká bude koncentrace octa v polokouli o průměru 20 km, pokud použijeme 5 litrů octa, je přenechána čtenáři jako cvičení.

Typickým znakem podobných „zaručených zpráv“ je pak absence zdrojů: Text neobsahuje žádné odkazy na výzkumy, měření, autority nebo data. Vše je postaveno na dojmu „všichni to víme“ nebo „prostě to tak funguje“. Nesmíme zapomenout ani na poměrně manipulativní jazyk – opakování slov jako „nejjednodušší“, „nejefektivnější“, „dokáže vyčistit“, „prakticky nula mikrobů“ vytváří falešnou jistotu, velká písmena (OCET, CHEMTRAILOVÁNÍ) dodávají dojmu naléhavosti a autority.

Falzifikovatelnost teorií

Jednou z podmínek, které by měla splňovat teorie, aby mohla být považována za vědeckou, je *falzifikovatelnost* – tedy existence jasně formulovaných podmínek, za nichž může být empiricky vyvrácena.¹⁾ Existuje velké množství fyzikálních teorií, které byly falzifikovány, například:

- 1) Michelsonův–Morleyův experiment z roku 1887 vyvrátil existenci světlonosného éteru, což zpochybnilo tehdejší představy o šíření světla a

¹⁾V praxi věda pracuje i s teoriemi, které nejsou okamžitě falzifikovatelné, ale postupně se zpřesňují a vyvíjejí. Např. teorie strun pracuje s extrémně malými délkami (řádově 10^{-35} m), které jsou mimo dosah současné experimentální techniky.

vedlo k hlubšímu přehodnocení základních fyzikálních principů. Ačkoli Einstein tento výsledek ve své práci o speciální teorii relativity výslovně nezmiňuje, negativní výsledek experimentu sehrál důležitou roli v širší vědecké debatě, která nakonec vedla k opuštění éterové hypotézy.

- 2) Thomsonův pudinkový model atomu jako kladně nabitě hmoty se záporně nabitými elektrony byl vyvrácen v roce 1909 Rutherfordovým experimentem, který ukázal, že atom je z větší části prázdný prostor.
- 3) Teorie stacionárního (neměnného) vesmíru byla vyvrácena pozorováním galaxií, které se od sebe vzdalují, protože se vesmír rozpíná. Formulace Hubbleova zákona (čím jsou od nás galaxie dál, tím rychleji se vzdalují) byl podkladem pro Teorii velkého třesku, která je dnes dominantně přijímaným kosmologickým modelem.

Když teorie není falzifikovatelná, nelze zjistit, jestli je pravdivá – protože cokoli ji zpochybní, je rovnou označeno za podvod. Taková teorie se nedá vědecky testovat. Konspirační teorie se často pozná podle toho, že ji nelze falzifikovat: Teorie chemtrails není jednoduše testovatelná: i kdybychom spolu se zastáncem této teorie odebírali vzorky ovzduší nebo prachu a analyzovali je například pomocí elektronového mikroskopu s prvkovou analýzou, výsledky by s vysokou pravděpodobností neprokázaly přítomnost většiny látek, které teorie předpovídá. Na to by ale od zastánce této teorie přišla jistě celá řada odpovědí: Všechny analytické přístroje jsou podvržené, aby zabránily odhalení „pravdy“ o chemtrails, případně že zrovna dnes k rozptylování chemikálií nedošlo, případně k němu došlo, ale šikovně rozptýlený ocet všechno neutralizoval.

Konspirační teorie jsou navíc obvykle formulovány tak, aby vůbec nešly testovat – jejich tvrzení jsou vágní („oni nám něco tají“, „něco je ve vzduchu“) nebo proměnlivá. Vědecké teorie jsou otevřené zpochybnění, zatímco konspirační narativy fungují jako uzavřený systém víry – všechny důkazy proti jsou interpretovány jako součást spiknutí. A právě proto zastánce konspirační teorie není možné přesvědčit ani experimentem – v minulém díle našeho seriálu jsme popisovali Foucaultovo kyvadlo, které jednoznačně vyvrací teorii nehybné Země. I kdybyste stáli se zastáncem teorie ploché Země přímo pod Foucaultovým kyvadlem, které jednoznačně prokáže rotaci, stejně ho to nepřesvědčí a bude hledat důvody, proč ke stáčení roviny došlo (obvykle elektrostatické nebo magnetické povahy).

Závěr

Teorie o chemtrails neobstojí již při této základní úvaze: Proč by někdo pro doručování škodlivých látek volil takto složitou, logisticky náročnou a jen velmi obtížně regulovatelnou metodu? Navíc metodu, která by zcela nevyhnutelně zasáhla i samotné spiklence... A to by si autoři multibiliardového globálního spiknutí neohlídali, že jejich plán lze zcela rozložit pomocí obyčejného octa, který stojí do dvaceti korun za litr?

Pro nás teorie o chemtrails zůstává ukázkou toho, že je potřeba dávat ve škole pozor, aby člověk v životě dokázal rozlišit, co je a co není fyzikálně možné. Zastáncům pak teorie dává to, co všechny konspirační teorie: Pocit výjimečnosti. Pocit, že právě oni „prokoukli“, co ostatní nechápou, že vidí za oponu spiknutí, které elity skrývají před „běžnými“ lidmi. A ještě důležitější je pocit kontroly – svět může být chaotický, nebezpečný a nespravedlivý, ale když si ho vysvětlí jako výsledek řízeného záměru, dává jim to iluzi, že s tím mohou něco dělat. Třeba rozprašovat ocet, a tím „očistit“ oblohu od zlých sil. Je ale důležité si uvědomit, že lidé, kteří věří podobným teoriím, často nejsou hloupí ani zlí – spíš hledají smysl, kontrolu a řád ve světě, který je složitý a plný nejistot. Proto je potřeba nejen vyvracet nesmyslná tvrzení, ale také vést otevřený dialog.

Literatura

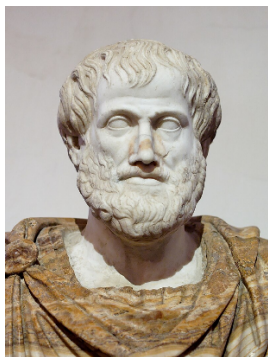
- [1] Sobota, J., Kráčmar, J.: *Meteorologie*. Akademické nakladatelství CERM, Brno, 2002.
- [2] *Kondenzační stopy*. Český hydrometeorologický ústav, (on-line). [cit. 29. 5. 2025]. Dostupné z: <https://www.chmi.cz/aktualni-situace/aktualni-stav-pocasi/informace-a-zajimovosti/kondenzacni-stopy>.
- [3] *Společné vyjádření Českéh hydrometeorologického ústavu (ČHMÚ), Ústavu fyziky atmosféry Akademie věd ČR (ÚFA AVČR), Katedry meteorologie a ochrany prostředí Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy (KMOP MFF UK) a České meteorologické společnosti (ČMeS) k problematice tzv. „chemtrails“*. Ministerstvo obrany ČR, 2017. (on-line). Dostupné z: https://www.mo.gov.cz/images/id_15001_16000/15635/011.pdf.
- [4] *Flightradar24.com* (on-line). [cit. 2024-05-29]. Dostupné z: <https://www.flightradar24.com/>.

Co kdybychom se všichni pohybovali v medu?

Michal Růžek, INSA Lyon, Francie

Naše schopnost zkoumat přírodní jevy a objevovat jejich zákonitosti dosti závisí na našich možnostech sledovat děje kolem nás. Naše smysly, naše velikost, rychlost pohybu nebo délka života nám umožňují snadno vidět určité jevy, přemýšlet o nich a dříve či později najít jejich fyzikální podstatu. Pokud se ovšem daný jev vymyká běžným lidským zkušenostem a měřítkům, pak může trvat velmi dlouho, než jej lidstvo pochopí. Takový byl patrně i případ jednoho z nejznámějších zákonů fyziky, a to druhého Newtonova zákona neboli zákona pohybu.

Na tomto místě mi dovoluje krátkou osobní poznámku, která též popisuje moji motivaci k tomuto článku. V roce 2004 jsem studoval v prvním ročníku na FJFI ČVUT dějiny fyziky u doc. Štolla. Nemohl jsem tehdy pochopit, jak je možné, že Aristotelova představa o dynamice, přes svoji chybnost, mohla přetrvat celý středověk až do novověku. Tato otázka mě nahlodávala posledních dvacet let, než jsem objevil knihu od Károly Simonyi [1]. Tato kniha velmi detailně rozebírá vztah fyziky a kulturního kontextu v historii lidstva. Objevy a omyly fyziky jsou zde zasazené jako rostlina uprostřed zahrady, tzn. se vztahem k okolí. Její přečtení mě inspirovalo k napsání následující úvahy.



Obr. 1: Aristotelés, zák Platónův, žil v letech 384–322 př. n. l. v antickém Řecku. Patří k nejvýznamnějším intelektuálním autoritám své doby. Významným způsobem zasáhl do celé řady oborů a disciplín [2].

Aristotelés se prochází po Athénách a přemýšlí o pohybu

Řecký polyhistor Aristotelés je jistě právem označován za jednoho z nejvýznamnějších starověkých myslitelů. Kromě mnoha jiných děl zanechal svůj vliv též ve fyzice, konkrétně v dynamice. Než přistoupíme k jeho teoriím, pokusme si představit myšlenkový pochod, který mohl provázet tohoto učenice ve 4. století před našim letopočtem.

Představme si následující situaci: Aristotelés se prochází po přístavním molu přístavu Pireus a sleduje okolní shon. Všude se něco pohybuje, otroci nosí balíky, mladý chlapec přibíhá celý uřícený se zprávou z Athén, veslaři zabírají a triéra opouští přístaviště. V odpoledním horku se všude lesknou upoceně svaly mládenců, kteří jsou hybateli těchto činností. Zdá se, že každý pohyb je vykoupen lidskou, případně zvířecí silou. Navíc je patrné, že pro větší rychlost je třeba více této síly, vždyť dva otroci táhnou břemeno rychleji než jeden. Dále se filozof zastavuje u stánku s uzenými rybami pro malé občerstvení. A hle, kouř stoupá vzhůru, lehce a jakoby sám od sebe. Není tu žádný upocený sval, ani tu nikdo nefouká z plných plic. Náhle zaslechne známý zvuk mince, která vypadla prodáváči z ruky a spadla na zem. Opět bez přičinění. „Tyto pohyby nahoru a dolů jsou jaksi samovolné,“ říká si filozof a pokračuje v úvaze: „ale ty předcházející by nebyly bez vynaložení síly živých organismů.“ Přemítání o světě a dlouhá diskuze s několika žáky vytrhují Aristotela ze zamyšlení a celé odpoledne i večer utečou jako voda. Za soumraku se vrací zpátky do Athén a nad hlavou se postupně rýsuje noční obloha. Slunce už zapadlo a planety ekliptiky jsou teď jasně vidět. Pozornému oku Aristotela neujde, že nejsou ve stejné pozici jako před několika týdny. I ony se pohybují bez přičinění živé síly. Jak je to možné?

Aristotelova versus Newtonova dynamika

Skládáním podobných zkušeností došel Aristotelés k formulování svých „zákonů dynamiky“ – podotkněme, že jsou všechny chybné (více informací poskytne například [3, 4]):

- 1) Pohyb nebeských těles je věčný a neměnný,
- 2) naproti tomu pohyb na Zemi je možné charakterizovat následujícím způsobem:
 - i) Pohyb *přirozený*, kde každé těleso se samovolně vrací na svou přirozenou polohu (lehké stoupá, těžké padá).

- ii) Pohyb *nepřirozený* (později latinsky *motus violentus*). Tento pohyb existuje díky živým organismům.

Posledně jmenovaný, tzv. *motus violentus*, bude předmětem našeho zájmu dále. O nuceném pohybu říká Aristotelés následující. Rychlost pohybu určují dva faktory: síla F a odpor proti pohybu R . Čím větší síla, tím rychlejší pohyb, naproti tomu čím větší odpor, tím pomalejší pohyb. O mnoho století po Aristotelovi bychom dnes napsali tento zákon ve tvaru:

$$v = \frac{F}{R}.$$

Tato (chybná) dynamika nepotřebuje definovat zrychlení, rychlost je přímo úměrná síle. Dalším zajímavým faktem je, že bez síly není pohyb. Tento výsledek zhruba odpovídá zkušenosti: pokud nikdo netáhne za provaz, tak se mramorová deska nikam neposunuje, pokud táhnou dva, tak se sune rychleji apod.

Pokusme se podívat na příklad z dynamiky, kde porovnáme řešení dané správnou formulací, tedy pozdější Newtonovou, a nesprávnou Aristotelovou. Zde se na scénu dostává slibovaný med. Představme si homogenní kouli padající v důsledku tíže skrz kapalinu, v tomto případě velmi viskózní, jakou je med. Newtonova pohybová rovnice bude zapsána následovně:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{F - Rv}{m}.$$

kde m je hmotnost koule, $F = mg$ je tíhová síla a R je koeficient síly odporu prostředí. Tento koeficient je možné dále vyjádřit pro daný problém známou Stokesovou rovnicí $R = 6\pi r\eta$, kde r je poloměr koule, η viskozita kapaliny. Tato pohybová rovnice je separovatelná v proměnných v a t a je možné ji integrovat s počátečními podmínkami $v(0) = 0$. Řešení je možné získat tímto způsobem. Nejprve separujeme proměnné v a t :

$$\frac{dv}{F - Rv} = \frac{dt}{m},$$

kde na levé straně je pouze funkce v a na pravé straně pouze funkce t . Pokud se tyto funkce rovnají, tak se také rovnají jejich primitivní funkce, tzn. integrály (až na prozatím neznámou konstantu C):

$$-\frac{\ln(F - Rv)}{R} = \frac{t + C}{m}.$$

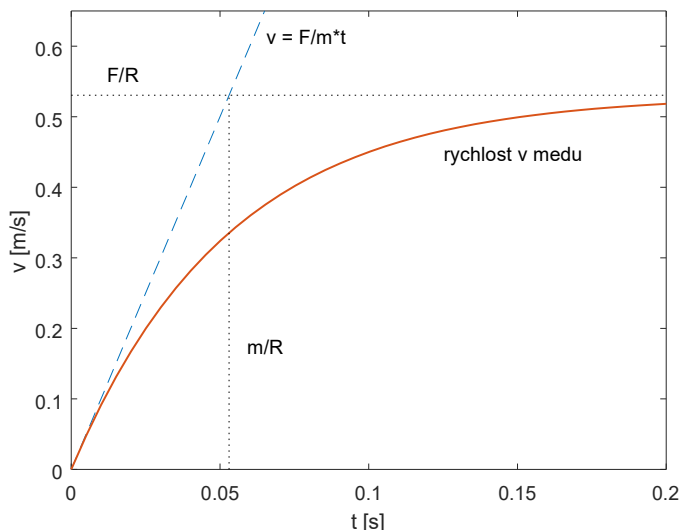
Následně využijeme počáteční podmínky $v(0) = 0$, která nám umožní identifikovat konstantu C :

$$-\frac{\ln F}{R} = \frac{C}{m}.$$

Dosazením této konstanty do rovnice výše a algebraickými úpravami získáme konečný tvar funkce $v(t)$:

$$v(t) = \frac{F}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{m}t} \right).$$

Pro hodnoty $m = 1 \text{ kg}$, $r = 0,1 \text{ m}$, $\eta = 10 \text{ Pa} \cdot \text{s}$ je výsledek zobrazen na obr. 2.



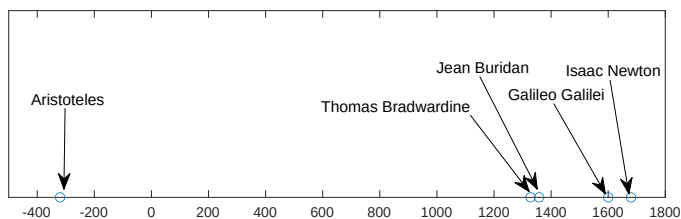
Obr. 2: Závislost rychlosti na čase pro padající kouli.

Zde můžeme učinit zajímavý poznatek. Řešení Newtonovy rovnice se pro rostoucí čas blíží k hodnotě F/R , tedy k hodnotě určené teorií Aristotelovy dynamiky. Čili ani Aristotelova představa není úplně špatná. Zde je důležité si uvědomit význam časových intervalů. Pro pohyb v medu je hodnota m/R , která se objevuje v exponenciále, velmi malá (v řádu 50 ms). Tato hodnota je poměrem inerciální (setrvačné) hmoty a odporu prostředí. Má jednotku času a udává charakteristicky

čas, po který přibližně trvá zrychlený/zpomalený pohyb, než nastane dominance rovnoměrného pohybu. V tomto případě je počáteční zpomalený pohyb téměř nepostřehnutelný. Kdybychom všichni žili a pohybovali se v medu, tak bychom měli jenom velmi malou zkušenost se zrychlením kolem nás s uvážením obvyklých časových škál. Dovedu si představit, že takový byl i důvod dlouhověkosti Aristotelovy dynamiky. Celá staletí byl pohyb relativně pomalý a zrychlené části pohybu byly krátké ve srovnání s dobou ustáleného pohybu. Navíc lidstvu chyběly nástroje, jak spolehlivě zaznamenat zrychlený pohyb. Všechny přístroje pro měření času byly pro takto přesné experimenty nevhodné. Jako jedna z výjimek, kde zrychlený pohyb byl vždy nutně přítomen, je volný pád. Ovšem po celá staletí neexistovaly výškové budovy, ze kterých by bylo možné provádět experimenty s pádem.

Závěrem

Aristotelova dynamika přežila více než 1500 let bez úhony, ale nakonec i na tuto teorii přišel soumrak (obr. 3).

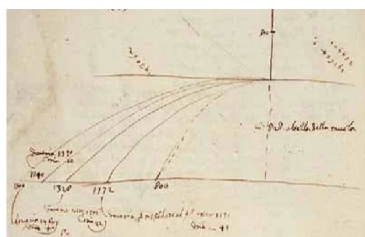


Obr. 3: Obrázek ilustruje dlouhé rozmezí mezi počátkem a koncem Aristotelovy představy o dynamice. Na ose úseček jsou letopočty.

První trhliny nastaly s rozvojem univerzit v Evropě. I přes odpor oficiální univerzitní a církevní reprezentace té doby bylo čím dál tím více možné diskutovat a kritizovat dávné autority jako byl Aristotelés. Je zajímavé, že zásadní kritika Aristotelovy dynamiky přišla ve 14. století z obou stran kanálu La Manche téměř současně, od Jeana Buridana (Paříž) a Thomase Bradwardina (Oxford). Thomas Bradwardine argumentoval tím, že pro velmi malou sílu se objekt nepohybuje, tudíž výraz $v = F/R$ nemůže být správný. Navrhl vlastní řešení, které je sice též chybné, ale jeho zajímavostí je použití logaritmu $v = \log(F/R)$ (toto je dnešní formulace, v té době ještě logaritmus nebyl znám). Jean Buridan oproti Aristotelovi argumentoval některými pozorováními. Například tvrdil, že když veslaři přestanou loď pohánět svými vesly, tak loď

stále ještě pluje, byť se po určité době zastaví. To je v protikladu k Aristotelovi, který pohyb bez působící síly zapovídá. Buridan navíc též jako první mluvil o hybnosti namísto rychlosti, což je další střípek do mozaiky pozdějšího Newtonova zákona pohybu.

Asi posledním hřebíkem do rakve Aristotelovy dynamiky byly experimenty Galilea Galileiho kolem roku 1600. Galileo geniálním způsobem vyřešil problém nepřesného měření času a namísto volného pádu zkoumal pohyb po nakloněné rovině (obr. 4). Nyní již nebylo pochyb o tom, že pohyb pod účinkem tíhy je pohyb zrychlený a nevyhovuje Aristotelově představě.



Obr. 4: Vlevo: Freska od Guizeppa Bezzuoli v Tribuna di Galileo ve Florencii (1841) znázorňuje Galilea demonstrujícího svůj koncept zrychleného pohybu po nakloněné rovině. Vpravo: Patrně první dochované zobrazení parabolické trajektorie z Galileových diářů ukazuje myšlenkový experiment volného pádu projektilu vystřeleného vodorovně.

Majíce dostatečně přesné měření, lidstvo nakonec záhadu zákona pohybu rozluštilo. Všechno by ale mohlo být i jinak, pokud bychom žili a pohybovali se v medu. To by Aristotelovy teorie mohly být doposud považovány za pravdivé. Popravdě řečeno, život v medu by asi žádný med nebyl.

Literatura

- [1] Károly, Simonyi: *A fizika kulturtörténete a kezdetektől a huszadik század végéig*. Akadémiai kiadó, 2011, (pouze v maďarštině, česky: Kulturní historie fyziky od počátků do dvacátého století.).
- [2] <https://en.wikipedia.org/wiki/Aristotle>.
- [3] Štoll, I.: *Dějiny fyziky*. Prometheus, Praha, 2010.
- [4] Kaiser Science: <https://kaiserscience.wordpress.com/2016/10/21/aristotles-laws-of-motion/>.

Oslavy 100. ročníku Rozhledů

Lubomíra Dvořáková

20. června 2025 jsme na Jaderné fakultě ČVUT oslavili 100. ročník Rozhledů matematicko-fyzikálních dnem nabitým zajímavými přednáškami. Přesvědčte se sami pohledem do programu.

Přednášky byly 15minutové a v každé z nich byla zadána úloha, kterou posluchači řešili a odnášeli si domů hezké ceny v podobě hlavolamů a knih popularizujících matematiku a fyziku. Přednášejícími byli lidé, kteří mají vztah k časopisu (autoři článků, zástupci organizací vydávajících a podporujících RMF, známí popularizátoři matematiky, bývalí šéfredaktoři apod.), nechyběli mezi nimi ani studenti (v programu vyznačení modře).

Podle reakcí účastníků byla akce vydařená. Během dne se jí zúčastnilo asi 120 posluchačů, z velké části středoškoláků a učitelů matematiky a fyziky. Velký úspěch měly pro tuto příležitost na 3D tiskárně vyrobené přívěsky (děkujeme Věrce Krajčové) a taky buchty a koláče při kávových přestávkách :)



Slajdy s prezentacemi, zadání a řešení úloh a fotky z akce najdete na rozhledy.jcmf.cz.

PROGRAM

Zahájení 9:00

1. blok 9:15–10:30

Luboš Pick: Česká matematická společnost

Marie Snětinová: Pokusy z kuchyně i z obýváku

Jaroslav Zhouf: Historie RMF

Kryštof Sedláček: Catalanova čísla

2. blok 11:00–12:30

Vladimír Wagner: Hvězdné lety a logaritmické rovnice

Tomáš Roskovec: Pravděpodobnost a hry

Martina Škorpilová: Paprskové n-úhelníky

Alena Šolcová: Od vzniku JČMF k Rozhledům

Ivo Kraus: V Husově ulici č. 5 se dařilo exaktním vědám

3. blok 13:30–15:00

Dalibor Martišek: Symetrie Juliovy množiny

Jan Jekl: Conwayova funkce ve třináctkové soustavě a její význam

Pavel Gajdoš: Kardinální čísla aneb jak spočítat nespočetné

Adéla Heroudková: p-adická čísla

Lukáš Moudrý: Pokrývací systémy

4. blok 15:30–17:00

Mirko Rokyta: Nejtěžší je dokázat, že něco nejde

Jakub Řada: Návrh točitého schodiště v rodinném domě

Oliver Bukovianský: Nerovnost s absolutní hodnotou

Adam Blažek: Nestandardní číselné soustavy

Vlastimil Dlab: Hrátky s přirozenými čísly

Vydává Jednota českých matematiků a fyziků
tel.: 222 090 708-9, e-mail: jcmf@math.cas.cz
za podpory MFF UK Praha a FJFI ČVUT Praha



Vycházejí 4 čísla v kalendářním roce

Obálku navrhl Bohuslav Šír

Sazbu programem $\text{\TeX}$ připravil RNDr. Miloslav Závodný

Adresa redakce: MFF UK, V Holešovičkách 2, 182 00 Praha 8–Troja
e-mail: rozhledy@jcmf.cz

Internetové stránky časopisu: <https://rozhledy.jcmf.cz/>

Vytiskla Tiskárna Matula, Olomoucká 27, 618 00 Brno

Distribuci pro předplatitele provádí v zastoupení vydavatele
MediaCall, s. r. o.

Vídeňská 546/55, 639 00 Brno

tel.: +420 532 165 165, e-mail: export@mediacall.cz

web: www.zahranicnitisk.com

ISSN 0035-9343

MK ČR E4691

© Jednota českých matematiků a fyziků, Praha 2025

Redakční rada

Vedoucí redaktorka:

doc. Ing. Lubomíra Dvořáková, Ph.D., FJFI ČVUT Praha

Redaktorka pro matematiku:

doc. Ing. Lubomíra Dvořáková, Ph.D., FJFI ČVUT Praha

Redaktor pro fyziku:

RNDr. Věra Krajčová, Ph.D., FJFI ČVUT Praha

Členové redakční rady:

prof. RNDr. Vlastimil Dlab, DrSc., F.R.S.C., Praha

doc. RNDr. Zdeněk Drozd, Ph.D., MFF UK Praha

RNDr. Petr Hanuš, FSv ČVUT Praha

doc. RNDr. Jaroslav Hora, CSc., FPE ZČU Plzeň

prof. RNDr. Ivo Kraus, DrSc., FJFI ČVUT Praha

doc. RNDr. Jan Kříž, Ph.D., PřF UHK Hradec Králové

prof. RNDr. Miroslav Lávička, Ph.D., FAV ZČU Plzeň

RNDr. Pavel Pokorný, Ph.D., VŠCHT Praha

RNDr. Miroslav Randa, Ph.D., PdF ZČU Plzeň

RNDr. Filip Studnička, Ph.D., PřF UHK Hradec Králové

doc. RNDr. Jan Šlégr, Ph.D., PřF UHK Hradec Králové

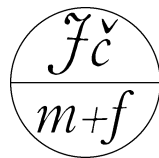
prof. RNDr. Pavel Tlustý, CSc., PedF JU České Budějovice

doc. RNDr. Pavel Töpfer, CSc., MFF UK Praha

RNDr. Vladimír Wagner, CSc., ÚJF AV ČR Řež

ROZHLEDY matematicko-fyzikální

Ročník 100 (2025), číslo 2



OBSAH

L. Spíchal: Nekonečné součiny, pětiúhelník, zlatý řez a číslo π	1
T. Krejčí: Dělitelnost pro konečná zobrazení	13
M. Klouček: Rubikova kostka, jak ji neznáte	26
V. Dlab: Towards understanding of Napoleon's theorem: Complex numbers are the key	33
Matematické oříšky: Pravděpodobnost zaokrouhlených převrácených hodnot	41
V. Wagner: Co nám říká Ciolkovského rovnice o mezihvězdných letech?	44
L. Šlégrová, J. Šlégr: Věda vs. konspirace: Otázka falzifikovatelnosti	66
M. Růžek: Co kdybychom se všichni pohybovali v medu?	73
E. Dvořáková: Oslavy 100. ročníku Rozhledů	79

Pokyny pro autory

Příspěvky dodávejte na adresu redakce v elektronické podobě. Nejlépe napsané ve formátu $\text{\LaTeX}$, přijatelný je i formát $\text{\PlainTeX}$, je akceptovatelný i text připravený editorem Word či podobným.

Pokud jde o obrázky, je žádoucí, aby byly připraveny v reprodukovatelné podobě. Každý obrázek nechť je v samostatném souboru, nejlépe ve formátu pdf nebo eps. Přípustná je též bitmapa v dostatečném rozlišení.

Ke každému zasílanému příspěvku (ne u soutěží, zpráv a recenzí) přiložte krátkou anotaci v českém jazyce. Dále je žádoucí, aby u každého příspěvku byla uvedena literatura, na kterou je v textu odkazováno.