

ROZ HLEDY

MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ

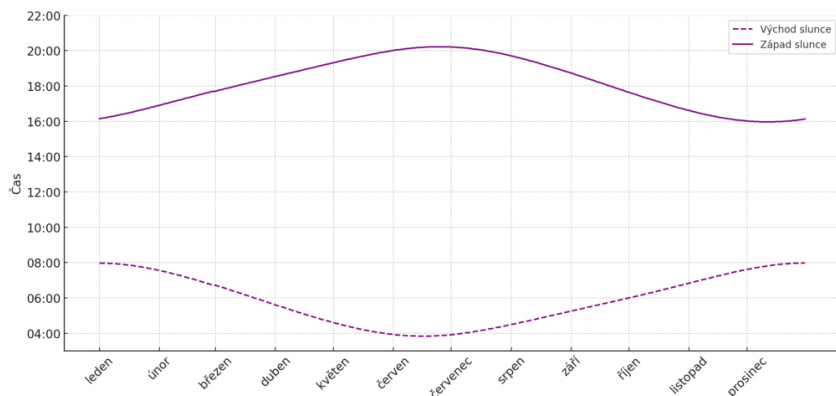
ČASOPIS PRO ZÁJEMCE O MATEMATIKU, FYZIKU A INFORMATIKU

ROČNÍK 100 (2025) • ČÍSLO 4

Změna délky dne a derivace funkce

Luděk Spíchal, Česká lesnická akademie, Trutnov

Každý z nás si během roku všímá, že se dny a noci proměňují. Pravidelné změny délky dne v průběhu roku bereme jako naprosto samozřejmou součást přírodních cyklů. Zatímco v zimě vstáváme často ještě za tmy a stmívá se brzy odpoledne, v létě si užíváme dlouhé světlé večery. Na obr. 1 jsou znázorněné časy východů a západů Slunce v průběhu roku na 50° severní šířky a 15° východní délky (středoevropský čas, SEČ) v roce 2025.¹⁾



Obr. 1: Východy a západy Slunce (SEČ) v roce 2025 na 50° s. š. a 15° v. d.

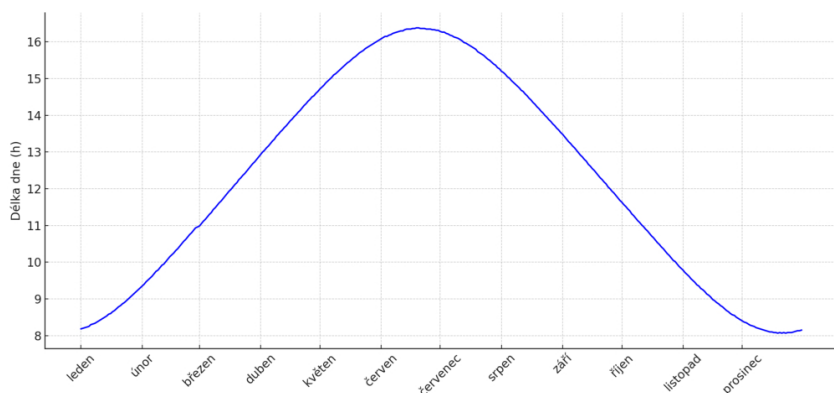
Délka dne, tedy čas mezi východem a západem Slunce, se během roku neustále mění. Nejkratší den nastává v době zimního slunovratu (kolem 21. prosince), nejdelší naopak v letním slunovratu (kolem 21. června). Mezi těmito dvěma body se den zkracuje nebo prodlužuje, rychlost této změny není ovšem vždy stejná.

Například během jara se den může prodlužovat až o tři a půl minuty denně, zatímco v období kolem letního slunovratu se mění jen nepatrně. Tato proměnlivá rychlost změny délky dne je celkem intuitivní. Zatímco

¹⁾ Zdroj: <https://www.myslivo.cz/Pro-myslivo/Informace-pro-myslivo/Vychody-a-zapady-Slunce-a-Mesice>

v březnu si prodlužování dne všimneme skoro každým dnem, v červenci si rozdíl prakticky nevšimneme.

Důvodem existence tohoto jevu typického pro střední zeměpisné šířky je naklonění zemské osy vůči rovině dráhy kolem Slunce zhruba o $23,5^\circ$.²⁾ Proto se během roku střídá úhel, pod kterým sluneční paprsky dopadají na dané místo. Na 50° s. š. (přibližná poloha České republiky) trvá nejkratší den kolem zimního slunovratu asi 8 h 5 min, zatímco nejdelší den v období letního slunovratu dosahuje zhruba 16 h 14 min.³⁾ Mezi těmito extrémy se délka dne vyvíjí relativně hladce a periodicky. Na grafu pak vypadá téměř jako čistá sinusoida (obr. 2).



Obr. 2: Délka dne (50° s. š., 15° v. d.)

Zatímco délka dne se mění plynule a poměrně snadno předvídatelně, rychlost těchto změn se během roku výrazně liší. V blízkosti rovnodenností (kolem 21. března a 23. září) se den prodlužuje nebo zkracuje nejrychleji. V našich zeměpisných šířkách to znamená až několik minut

²⁾Naklonění zemské osy (tzv. sklon ekliptiky) má vliv nejen na délku dne, ale i na střídání ročních období. Tento sklon není neměnný, s velmi dlouhou periodou se mírně mění (tzv. nutace a precese), což má vliv i na dlouhodobé klimatické změny (např. Milankovičovy cykly).

³⁾Zmíněné změny jsou výrazně závislé na zeměpisné šířce. V tropických i polárních oblastech tak zaznamenáme značně odlišné poměry. V tropických oblastech poblíž rovníku (zeměpisná šířka 0°) je délka dne téměř stejná po celý rok – přibližně 12 hodin. Ráno slunce vychází kolem 6. hodiny a zapadá okolo 18. hodiny, s jen malými sezónními výkyvy. V polárních oblastech (nad $66,5^\circ$ severní nebo jižní šířky) dochází k extrémům – v létě nastává období tzv. polárního dne, kdy Slunce nezapadá vůbec, a v zimě naopak polární noc, kdy Slunce vůbec nevychází. Například na severu Norska trvá polární den několik týdnů.

denně. Naopak v období slunovratů (kolem 21. června a 21. prosince) se délka dne mění nejpomaleji, zůstává stejná. A právě zde přichází ke slovu pojem, který je základem nejen matematiky, ale i fyziky, techniky a přírodních věd obecně – derivace. Zatímco funkce popisuje, jaká je například délka dne v určitém okamžiku, derivace nám říká, jak rychle se tato veličina mění. Jinými slovy řečeno platí, že derivace odpovídá na otázku „jak rychle roste nebo klesá“ délka dne [3].

V článku se podíváme na to, jak můžeme pomocí goniometrických funkcí popsat jak změnu délky dne v průběhu roku, tak rychlost změny délky dne. V obecné rovině si představíme pojem derivace funkce a ukážeme, že funkce popisující rychlost změny délky dne velmi dobře odpovídá derivaci funkce délky dne. Přitom využijeme reálná data a ukážeme, že i něco tak zdánlivě „obyčejného“, jako je střídání dne a noci, může v sobě ukrývat fascinující matematický rytmus. Pojem derivace funkce tak nebude jen abstraktním matematickým pojmem, ale velmi užitečným nástrojem pro porozumění světu kolem nás.

Délka dne a graf funkce sinus

V úvodu jsme zmínili, že graf délky dne v průběhu roku svým tvarem odpovídá grafu funkce sinus. V této kapitole se pokusíme ukázat, že křivku délky dne lze skutečně aproximovat pomocí grafu funkce sinus.

Předpokládejme, že hledaná funkce určující délku dne (v hodinách), kde t je číslo dne v roce (např. $t = 1$ je 1. leden, $t = 172$ je 21. červen apod.), má tvar

$$L(t) = A + B \sin(C(t - D)). \quad (1)$$

Pro jednotlivé parametry rovnice platí, že:

- A je střední délka dne (hod), která představuje aritmetický průměr délek dnů za celý rok, v modelu je $A \approx 12,26$.
- B je amplituda grafu funkce sinus (hod)⁴⁾, v modelu je

$$B = \frac{L_{\max} - L_{\min}}{2} = \frac{16,233 - 8,083}{2} \doteq 4,08.$$

- C je úhlová frekvence (rad/den), udávající, o kolik radiánů se fázový úhel posune za jediný den, v modelu je $C = \frac{2\pi}{365}$.

⁴⁾Pro výpočet amplitudy byly uvažovány následující hodnoty: nejkratší den – 8 hod 5 min, nejdelší den – 16 hod 14 min.

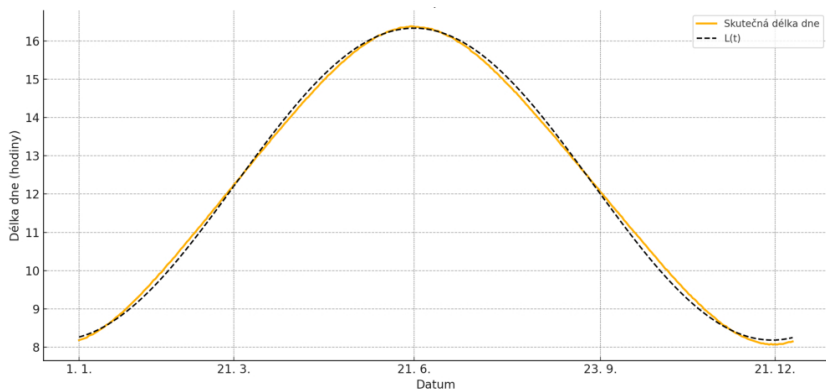
- D představuje (fázový) posun tak, aby maximum funkce připadlo na letní slunovrat ($t = 172$). Funkce určená rovnicí (1) má maximum, když

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{2\pi(t-D)}{365}\right) &= 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{2\pi(t-D)}{365} &= \frac{\pi}{2} \Rightarrow t-D = 91,25 \Rightarrow D = t - 91,25.\end{aligned}$$

Pokud je $t = 172$, pak $D = 172 - 91,25 = 80,75$. Po úpravě a dosazení do rovnice (1) dostáváme funkci

$$L(t) \approx 12,26 + 4,08 \sin\left(\frac{2\pi}{365}(t - 80,75)\right). \quad (2)$$

Na obr. 3 vidíme srovnání grafu skutečných délek dne a grafu funkce (2). Funkce se blíží skutečným hodnotám, ale není s nimi zcela totožná. Použitá aproximující funkce dobře vystihuje periodickou povahu jevu (střídání délky dne). Velikost odchylky od reálných hodnot je možné kvantifikovat např. pomocí *střední kvadratické chyby*.⁵⁾



Obr. 3: Srovnání skutečných délek dne (50° s. š., 15° v. d., plná čára) a grafu funkce (2)

⁵⁾Střední kvadratická chyba se označuje také jako *root mean square error*, ve zkratce RMSE. RMSE umožňuje měřit, jak daleko se průměrně předpovědi modelu liší od skutečných hodnot. Menší hodnota RMSE znamená lepší shodu se skutečností.

V našem případě činí střední kvadratická chyba empirického modelu cca 0,12 hod, tedy cca 7 min. Výpočet střední kvadratické chyby znamená, že porovnáváme hodnoty modelu s hodnotami skutečnými. Například náš model tvrdí, že 100. den v roce trvá cca 13,59 hodiny, i když ve skutečnosti trval cca 13,48 hodiny. Rozdíl je tedy cca 0,11 hodiny. Takové rozdíly určíme pro každý den v roce. Každý rozdíl dále umocníme, aby se nezrušily při následném sčítání kladné a záporné hodnoty (např. $-0,3$ a $+0,3$ dávají 0,09). Pokud sečteme všechny tyto čtverce a vydělíme počtem dní, pak dostaneme průměrnou kvadratickou chybu. Nakonec z toho vezmeme odmocninu, abychom získali výsledek opět ve stejných jednotkách jako původní rozdíly (v našem případě v hodinách) [2].

Vedle vlastního modelu délky dne můžeme uvést návrh modelu vytvořený pomocí jazykového modelu ChatGPT (OpenAI), který navrhl následující funkci

$$L_m(t) \approx 12,27 + 3,99 \sin\left(\frac{2\pi}{365}(t - 81,9)\right). \quad (3)$$

Tato funkce vykazuje střední kvadratickou chybu přibližně 6,5 minuty.⁶⁾

Změny délky dne a graf funkce kosinus

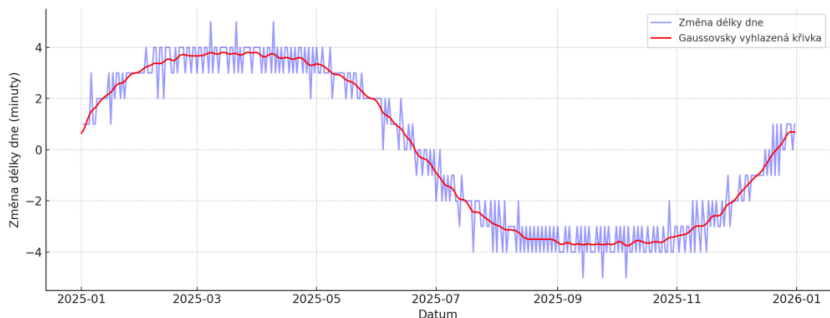
Již v úvodní části jsme zmiňovali proměnlivou rychlost změny délky dne v průběhu roku. Na obr. 4 můžeme sledovat změnu délky dne, která v průběhu roku dosahuje svého maxima v období rovnodenností a minima v období slunovratu. Kladné hodnoty označují dny, kdy se den prodlužoval, záporné hodnoty naopak jeho zkracování.

Lomená křivka v grafu byla dále vyhlazena tak, aby bylo možné roční rytmus změny délky dne lépe pozorovat. Použité gaussové vyhlazení funguje tak, že se pro každý den vypočítá průměr z okolních dnů.⁷⁾ Nejedná se ovšem o běžný aritmetický průměr, nýbrž vážený průměr, kde největší váhu mají dny nejbližší a čím jsou dny vzdálenější, tím menší mají vliv. Tento způsob vážení se řídí Gaussovou křivkou, která má zvonovitý tvar.⁸⁾

⁶⁾ Modelová funkce byla získána s využitím nástroje ChatGPT (model GPT-4-turbo, OpenAI) dne 14. června 2025.

⁷⁾ Carl Friedrich Gauss (1777–1855) byl německý matematik, jehož práce ovlivnila mnoho oblastí matematiky, statistiky a fyziky. Je po něm pojmenována nejen Gaussova křivka (normální rozdělení), ale i například metoda nejmenších čtverců nebo Gaussův zákon v elektrostatice.

⁸⁾ Více o metodě vyhlazení např. <https://en.wikipedia.org/wiki/Smoothing>,



Obr. 4: Graf změn délek dne v roce 2025 (50° s. š., 15° v. d.) a jeho gaussovské vyhlazení

Vyhlazená křivka tedy neukazuje přesné denní změny, ale jejich plynulý průměr, který pomáhá lépe zachytit celkový rytmus prodlužování a zkracování dne během roku, kde maximální rychlost změny nastává kolem jarní a podzimní rovnodennosti a minimum kolem slunovratů.

I v případě grafu rychlosti změny délky dne zaznamenáváme periodické změny odpovídající jisté goniometrické funkci. Současně si můžeme vzhledem ke grafu délek dnů (obr. 3) všimnout určitého fázového posunu, který odpovídá zhruba $1/4$ roku. Pro sestavení modelu tedy v tomto případě použijeme funkci kosinus, která má maximum posunuté o $\pi/2$, tj. budeme předpokládat funkci ve tvaru

$$L_z(t) = A_z + B_z \cos\left(C_z(t - D_z)\right). \quad (4)$$

Pro jednotlivé parametry rovnice platí, že:

- A_z je střední hodnota změny délky dne (min), představující aritmetický průměr změn délek dnů za celý rok, v modelu je $A_z \approx -0,01$.
- B_z je amplituda grafu funkce kosinus (min), v modelu je $B_z = 5$.
- $C_z = \frac{2\pi}{365}$ je úhlová frekvence (rad/den).
- D_z představuje posun tak, aby nulová hodnota změny délky dne připadla na letní slunovrat ($t = 172$). Funkce určená rovnicí (4) má nulovou hodnotu, když

https://en.wikipedia.org/wiki/Gaussian_filter?utm_source=chatgpt.com,
<https://medium.com/data-science/gaussian-smoothing-in-time-series-data-c6801f8a4dc3>

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{2\pi(t-D_z)}{365}\right) &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{2\pi(t-D_z)}{365} &= \frac{\pi}{2} \Rightarrow t-D_z = 91,25 \Rightarrow D_z = t - 91,25.\end{aligned}$$

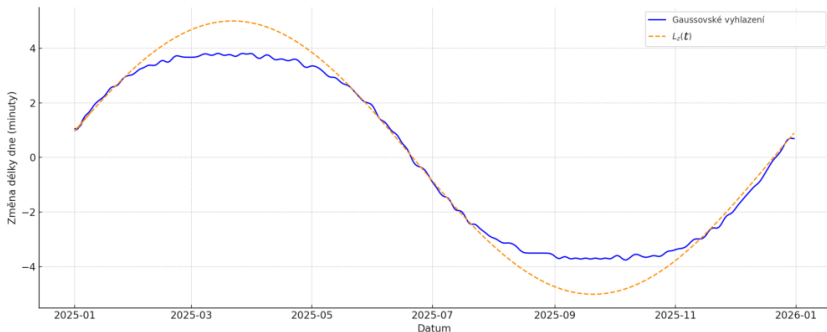
Pokud je $t = 172$, pak

$$D_z = 172 - 91,25 = 80,75.$$

Po úpravě a dosazení do rovnice (4) dostáváme funkci

$$L_z(t) \approx -0,01 + 5 \cos\left(\frac{2\pi}{365}(t - 80,75)\right). \quad (5)$$

Nalezená funkce vykazuje střední kvadratickou chybu přibližně 0,51 minuty (30 vteřin).



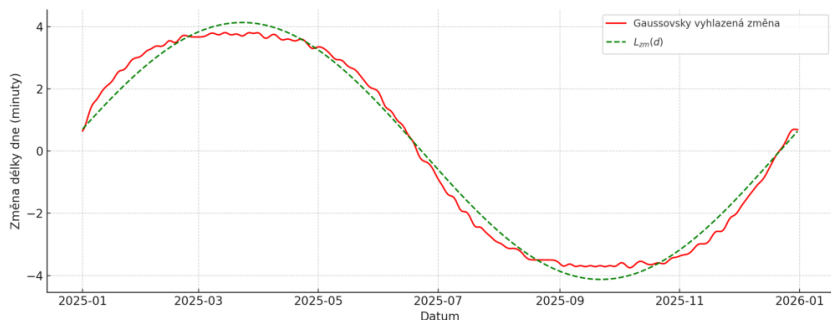
Obr. 5: Srovnání grafu délek dne v roce 2025 (50° s. š., 15° v. d.) a aproximace pomocí funkce (5)

Model ChatGPT (OpenAI) navrhl následující funkci

$$L_{zm}(t) \approx 0,01 + 4,13 \cos\left(\frac{2\pi}{365}(t - 82,28)\right). \quad (6)$$

Tato funkce podle modelu vykazuje střední kvadratickou chybu přibližně 0,31 minuty (19 vteřin).⁹⁾

⁹⁾ Modelová funkce byla získána s využitím nástroje ChatGPT (model GPT-4-turbo, OpenAI) dne 18. června 2025.



Obr. 6: Srovnání grafu délek dne v roce 2025 (50° s. š., 15° v. d.) a aproximace pomocí funkce (6)

Změna délky dne a derivace funkce

Pokud nyní shrneme předchozí pozorování, pak můžeme konstatovat, že délku dne i změnu délky dne lze aproximovat goniometrickou funkcí. Naším záměrem bude nyní ukázat, že jestliže funkce $L(t)$ (resp. $L_m(t)$) představuje aproximaci délky dne, pak funkce $L_z(t)$ (resp. $L_{zm}(t)$) jako funkce aproximující změnu délky dne je její derivací.¹⁰⁾

Pojem derivace funkce zde představíme stručně v obecné podobě, se zaměřením na význam pojmu derivace.¹¹⁾

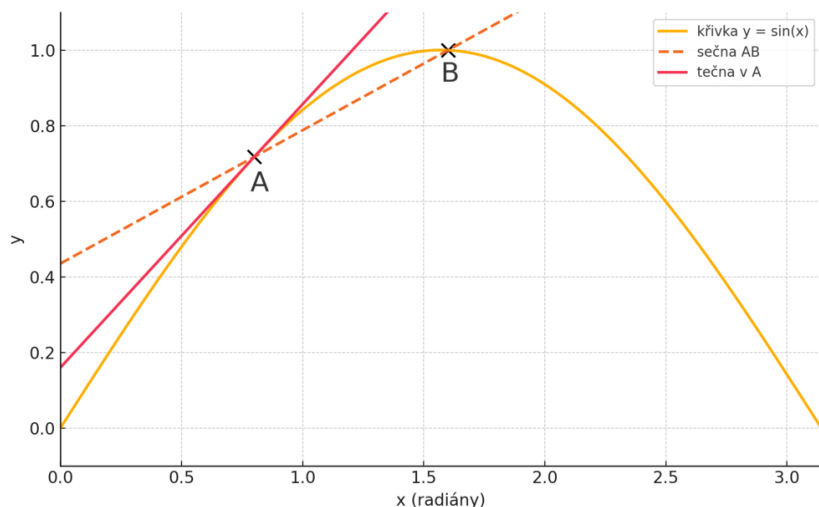
V reálném světě se derivace nejčastěji překládá jako okamžitá časová změna. U jízdy automobilu je derivací jeho dráhy okamžitá rychlost vozu, derivací jeho rychlosti je zrychlení nebo zpomalení. Sledujeme-li průměrnou denní teplotu, derivace udává tempo oteplování či ochlazování. U délky dne derivace zase říká, o kolik minut se den právě prodlužuje či krátí. Přitom jednotky derivace vždy prozradí, co měříme: metry za sekundu, stupně Celsia za hodinu, minuty za den a podobně.¹²⁾

¹⁰⁾Slovo „derivace“ pochází z latinského „derivare“ znamenající „odvádět“ nebo „odvozovat“, doslova „vést od něčeho“. Derivace je „odvozená hodnota“, která vychází z původní funkce. Není tedy něčím, co existuje samo o sobě, ale vzniká z funkce jako nový údaj, jako její „odvozenina“.

¹¹⁾Pojem derivace vznikl v 17. století v souvislosti s rozvojem infinitezimálního počtu. Zakladateli diferenciálního počtu byli nezávisle na sobě Isaac Newton (1643–1727) a Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716), přičemž Newton pojem odvozoval z fyziky (rychlost), zatímco Leibniz rozvíjel spíše formální symboliku. Podobnými problémy jako Newton a Leibniz se již ve 30. letech 17. století zabýval i P. de Fermat, který hledal maximální a minimální hodnoty funkcí – tedy případy, kdy je změna nulová.

¹²⁾Znalost okamžité rychlosti změny je cenná i proto, že tam, kde derivace přechází

Jestliže budeme nyní sledovat obr. 7, pak průměrnou změnu (např. průměrnou rychlost) v určitém intervalu (např. mezi body A a B) si geometricky můžeme představit jako sklon úsečky spojující tyto dva body (sečna). Pokud bychom rovnici sečny zapsali ve směrnicovém tvaru $y = kx + q$, pak průměrná rychlost je hodnota směrnice k .



Obr. 7: Průměrná a okamžitá (derivace) změna

Budeme-li nyní bod B přibližovat k bodu A tak, že zmenšíme interval na nekonečně malou (infinitesimální) hodnotu, pak se sečna promění v tečnu, která se křivky dotýká jen v jediném bodě A . Sklon tečny v bodě A prozrazuje okamžitou změnu (okamžitou rychlost), tedy derivaci. Pokud bychom rovnici tečny zapsali ve směrnicovém tvaru $y = mx + r$, pak hodnota směrnice tečny m je okamžitá rychlost v bodě A , tedy derivace funkce v A .¹³⁾ Derivaci funkce $L(t)$ budeme označovat symbolem $L'(t)$.

z kladné do záporné hodnoty (nebo naopak), dosahuje křivka svého vrcholu či dna. Tak lze zjistit nejvyšší denní teplotu, maximální tržby podniku nebo nejdelší den v roce bez nutnosti prohlížet každý bod grafu.

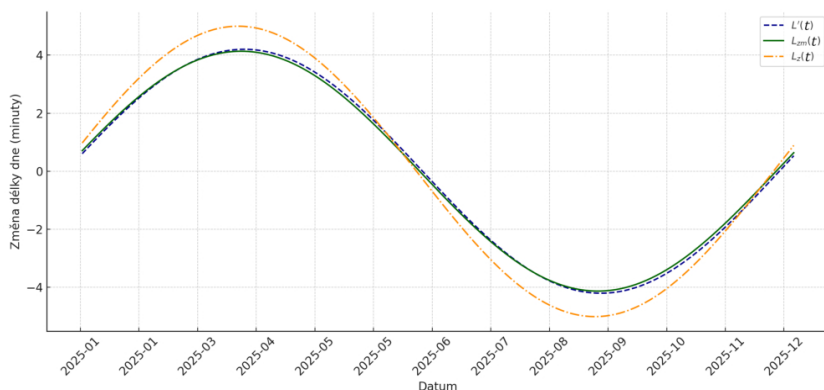
¹³⁾K úplnému porozumění a zvládnutí pojmu derivace nestačí jen vědět, že jde o rychlost změny. Základem je pochopení, co je funkce a jak se její hodnoty mění. Důležité je umět číst grafy funkcí a rozpoznat, kdy funkce roste nebo klesá. Derivace funkce je v moderní matematice založena na pojmu limity funkce. Čtenář by měl vědět, co znamená, když „přibližujeme dva body k sobě“, a jak limitní přechod, kdy je přírůstek vstupu funkce nekonečně malý, vede k okamžité změně. Pro využití derivace

Pro konkrétní výpočet derivace funkce sinus, která popisuje délku dne, nebudeme uvádět podrobný matematický postup. Pro přesný výpočet lze využít řadu volně dostupných nástrojů na internetu.¹⁴⁾ Tyto nástroje umožňují nejen výpočet derivace, ale často také její grafické znázornění či krokové řešení. Pro derivaci funkce (2) platí

$$L'(t) \approx 4,08 \cdot \frac{2\pi}{365} \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{365}(t - 80,75)\right) = 0,07 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{365}(t - 80,75)\right),$$

neboť derivací funkce sinus je funkce kosinus.

Pokud dále amplitudu funkce $L'(t)$ vyjádříme rovněž v minutách, kde $B = 0,07$ hod $\doteq 4,2$ min, pak můžeme provést srovnání grafů funkcí $L'(t)$, $L_z(t)$ a $L_{zm}(t)$ (obr. 8).



Obr. 8: Srovnání grafů funkcí $L'(t)$, $L_z(t)$ a $L_{zm}(t)$

Střední kvadratická chyba mezi funkcemi $L'(t)$ a $L_z(t)$ je přibližně 0,57 minuty, mezi funkcemi $L'(t)$ a $L_{zm}(t)$ pak přibližně 0,1 minuty.

Funkce pro změnu délky dne $L_z(t)$ i $L_{zm}(t)$ skutečně odpovídá derivaci funkce délky dne, od které se liší pouze měřítkem. Je to tedy derivace až na konstantní násobek a posun, což je přesně to, co bychom čekali při

je třeba zvládnout základní pravidla pro její výpočet, pravidla pro derivace elementárních funkcí, pravidla pro derivace součtů, součinů či podílů funkcí apod. Čtenář by současně měl umět použít derivaci při popisu konkrétního jevu (např. změna délky dne) a interpretovat výsledek, např. kdy je změna nejrychlejší nebo kdy se zastaví.

¹⁴⁾Např. Symbolab: Derivative Calculator

(<https://www.symbolab.com/solver/derivative-calculator>),

GeoGebra CAS kalkulačka (<https://www.geogebra.org/classic/cas>),

WolframAlpha (<https://www.wolframalpha.com/input/?i=derivative>)

porovnání fyzikální derivace a empirického přepočtu v jiných jednotkách (hodiny vs. minuty).

Jistě existuje celá řada přírodních cyklů, které mají periodický charakter a lze je amproximovat pomocí goniometrických funkcí. Z dalších můžeme zmínit např. změny výšky hladiny moří jako důsledek střídajícího se přílivu a odlivu, změnu délky stínu v závislosti na poloze Slunce, změnu teploty půdy v průběhu roku, fáze Měsíce apod [1, 4].¹⁵⁾

Čtenář si může ověřit úvahy zmíněné v článku na následující úloze týkající se změny teploty vzduchu v průběhu roku (poznámky k řešení jsou v Příloze A).

Problém. V tab. 1 je uveden normál průměrných měsíčních teplot v Trutnově.¹⁶⁾ Na obr. 9 je graf teplot z tab. 1 a dále graf meziměsíčních změn teplot.

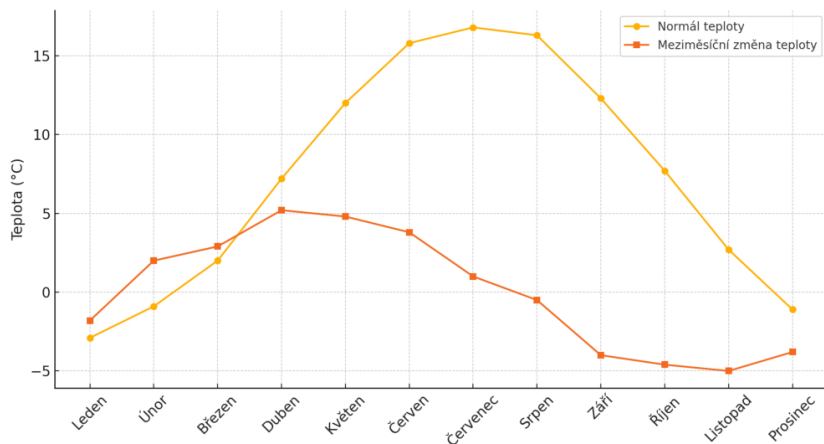
Měsíc	Leden	Únor	Březen	Duben	Květen	Červen
Normál	−2,9	−0,9	2,0	7,2	12,0	15,8
Měsíc	Červenec	Srpen	Září	Říjen	Listopad	Prosinec
Normál	16,8	16,3	12,3	7,7	2,7	−1,1

Tab. 1: Normál průměrných měsíčních teplot v Trutnově

1. Určete předpisy funkcí aproximujících graf průměrných měsíčních teplot a graf meziměsíčních změn teplot vzduchu v Trutnově.
2. Porovnejte (pomocí grafu) nalezené aproximující funkce s grafem průměrných měsíčních teplot a grafem meziměsíčních změn teplot vzduchu.
3. Určete střední kvadratickou chybu (RMSE) pro modely průměrných měsíčních teplot i meziměsíčních změn teploty vzduchu.
4. Derivaci funkce průměrných měsíčních teplot srovnajte s funkcí meziměsíčních změn teplot.
5. Vyzkoušejte AI pro vytvoření modelových funkcí a určení RMSE. Porovnejte tyto modely s empirickými modely z bodu 1.

¹⁵⁾Periodické jevy jako příliv a odliv popisoval už v 17. století Galileo Galilei (1564–1642). Jeho pozorování měsíčních fází, pohybu planet i mořských jevů vedla k hlubšímu chápání rytmů v přírodě.

¹⁶⁾Normál teploty vzduchu je průměrná hodnota teploty, která je vypočtena z dlouhodobého sledování počasí. Typicky se počítá za období 30 let podle metodiky Světové meteorologické organizace (WMO).



Obr. 9: Graf průměrných měsíčních teplot vzduchu a meziměsíčních změn teplot vzduchu v Trutnově

Závěr

Obsah článku o změně délky dne jako modelu periodického přírodního jevu nabízí příležitost propojit výuku goniometrických funkcí s reálným světem. Funkce sinus a kosinus tak nejsou jen abstraktní matematické objekty, ale naopak velmi užitečné nástroje k popisu pravidelně se opakujících jevů v přírodě. Konkrétně bylo ukázáno, jak parametry těchto funkcí – amplituda, perioda, fázový posun a vertikální posun – odpovídají skutečným charakteristikám délky dne během roku.

V článku jsme využili i možnosti, které nabízí umělá inteligence (AI). Modely, které jsme takto získali, poskytly přesnější přizpůsobení modelů reálným datům než ručně získané modely. Jedním ze zásadních důvodů, proč model navržený pomocí AI (např. ChatGPT) vykazuje nižší střední kvadratickou chybu než ručně odvozená funkce, je použití numerické optimalizace. AI model hledá takové parametry funkce (například střední hodnotu, amplitudu, frekvenci a fázový posun), které vedou k co nejmenší chybě mezi modelem a reálnými daty. Tento přístup je výpočetně náročnější, ale umožňuje přesnější přizpůsobení modelu konkrétnímu datovému souboru.

Zatímco ručně odvozená funkce se často snaží přesně vystihnout konkrétní klíčový bod (například délku dne při letním slunovratu), AI model bere v úvahu chybu napříč celým rokem a snaží se ji rovnoměrně minimalizovat. Výsledkem bývá model, který nemusí perfektně odpoví-

dat fyzikální interpretaci (např. maximálně přesný den slunovratu), ale poskytuje menší celkovou odchylku.

Literatura

- [1] Benth, F. E., Benth, J. Š.: Weather derivatives and stochastic modelling of temperature. *International Journal of Stochastic Analysis*, roč. 2011 (2011), č. ID 576791, s. 1–21.
- [2] Hodson, T. O.: Root-mean-square error (RMSE) or mean absolute error (MAE): When to use them. *Geoscientific Model Development*, roč. 15 (2022), s. 5481–5487.
- [3] Strogatz, S.: *Infinite Powers. The Story of Calculus, The Language of the Universe*. Atlantic Books, Londýn, 2020.
- [4] Wang, Y.-K.: Mathematical model for solving the relationship of shadow length changing over time through solar elevation. *Advances in Engineering Research*, roč. 118 (2017), s. 226–228.

Příloha

Předpokládejme, že funkce aproximující průměrné teploty vzduchu má tvar odpovídající rovnici (1). Podle tab. 1 platí, že $A \doteq 7,51$ a $B \doteq 9,85$. Úhlová frekvence funkce odpovídá počtu měsíců v roce, tj. $C = 2\pi/12 = \pi/6$. K odhadu fázového posunu D uvážíme fakt, že maximum teploty nastává v červenci ($t = 7$). Funkce určená rovnicí (1) má maximum, když

$$\sin\left(\frac{\pi(t-D)}{6}\right) = 1 \Rightarrow \frac{\pi(t-D)}{6} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t-D = 3 \Rightarrow D = t-3.$$

Pokud je maximum teploty v $t = 7$, pak $D = 7 - 3 = 4$. Po dosazení do rovnice (1) platí, že funkce aproximující průměrné teploty vzduchu má tvar (obr. 10 vlevo)

$$L(t) = 7,51 + 9,85 \sin\left(\frac{\pi}{6}(t-4)\right). \quad (7)$$

Předpokládejme, že funkce aproximující meziměsíční změny teploty vzduchu má tvar odpovídající rovnici (4).

Podle tab. 2 platí, že $A_z = 0$ a $B_z \doteq 5,1$. Úhlová frekvence funkce odpovídá počtu měsíců v roce, tj. $C_z = 2\pi/12 = \pi/6$.

Měsíc	Leden	Únor	Březen	Duben	Květen	Červen
Změna teploty	-1,8	2,0	2,9	5,2	4,8	3,8
Měsíc	Červenec	Srpen	Září	Říjen	Listopad	Prosinec
Změna teploty	1,0	-0,5	-4,0	-4,6	-5,0	-3,8

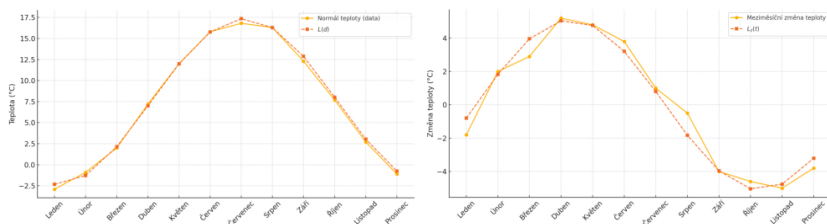
Tab. 2: Meziměsíční změny teploty vzduchu

K odhadu fázového posunu D_z uvážíme fakt, že maximální změna teploty vzduchu nastává v dubnu ($t = 4$). Funkce určená rovnicí (4) má maximum, když

$$\cos\left(\frac{\pi(t - D_z)}{6}\right) = 1 \Rightarrow \frac{\pi(t - D_z)}{6} = 0 \Rightarrow t - D_z = 0 \Rightarrow D_z = t.$$

Pokud maximální změna teploty nastává v $t = 4$, pak $D_z = 4$, a funkce aproximující průměrné teploty vzduchu má tvar (obr. 10, vpravo)

$$L_z(t) = 5,1 \cos\left(\frac{\pi}{6}(t - 4)\right). \quad (8)$$



Obr. 10: Porovnání reálných dat s modelovými funkcemi pro průměrné měsíční teploty vzduchu (vlevo), meziměsíční změny teplot vzduchu (vpravo)

Střední kvadratická chyba pro model průměrných měsíčních teplot určený rovnicí (7) je cca $0,7^\circ\text{C}$, střední kvadratická chyba pro model meziměsíčních změn teploty vzduchu určený rovnicí (8) je cca $1,12^\circ\text{C}$. Pro derivaci funkce teploty vzduchu platí

$$L'(t) \approx 9,85 \cdot \frac{\pi}{6} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6}(t - 4)\right) \doteq 5,15 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6}(t - 4)\right).$$

Srovnání funkcí $L'(t)$ a $L_z(t)$ ukazuje malý rozdíl v amplitudě, střední kvadratická chyba činí cca $0,04^\circ\text{C}$.

Číselná charakteristika podobných trojúhelníků

Vlastimil Dlab, Bzí u Železného Brodu

Článek [2] poukázal na důležitost pojmu podobnost trojúhelníků při studiu rovinné geometrie. Přitom znovu podtrhl roli komplexních čísel, zdůrazněnou už v učebnici [1]. V tomto článku popíšeme bijekci svazující podobné trojúhelníky a komplexní čísla.

Stejně jako v [2] je náš modus operandi komplexní Gaussova rovina¹⁾ opatřená pravoúhlými souřadnicemi, takže její body $D, V, W, H, Z, \dots$ budeme identifikovat s komplexními čísly $d, v, w, h, z, \dots$. Množinu komplexních čísel budeme značit písmenem $\mathbb{C}$. Trojúhelníky identifikujeme s trojicemi komplexních čísel, které neleží na téže přímce.

Pro porozumění tomuto článku jsou potřeba základní znalosti komplexních čísel: reálná část $\operatorname{Re}(z)$ a imaginární část $\operatorname{Im}(z)$ komplexního čísla z , absolutní hodnota $|z|$, komplexně sdružené číslo $\bar{z}$, argument komplexního čísla, sčítání, odčítání, násobení a dělení komplexních čísel. Je třeba rozumět tomu, že násobení komplexním číslem odpovídá rotaci kolem počátku.

Omezíme se na orientované trojice bodů: Trojúhelníky ABC (tj. abc) a UVW (tj. uvw) jsou podobné, jestliže délky jejich stran AB, BC a CA (tj. absolutní hodnoty $|a - b|, |b - c|$ a $|c - a|$) jsou, pro jisté kladné (reálné) číslo t , t -násobky délek stran UV, VW a WU (tj. $|u - v|, |v - w|$ a $|w - u|$). Budeme v tomto případě mluvit o „přímé“ či „orientované“ podobnosti a značit ji symbolem $\sim$: $abc \sim uvw$.

Jádrem důkazu hlavní věty v článku [2] bylo následující lemma, které je v tomto článku naším výchozím tvrzením.

Lemma. *Trojúhelníky $Z_1Z_2Z_3$, tj. $z_1z_2z_3$, a $W_1W_2W_3$, tj. $w_1w_2w_3$, jsou přímo podobné právě tehdy, když*

$$\frac{w_3 - w_1}{w_2 - w_1} = \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}. \quad (1)$$

Podáme dva důkazy tohoto tvrzení, abychom blíže osvětlili bezprostřední vztah mezi elementární rovinnou geometrií a strukturou komplexních čísel.

¹⁾V cizojazyčné literatuře častěji nazývána Argandova či Argandova–Gaussova rovina.

Prvním důkazem oslovíme čtenáře, kteří se seznamují se strukturou komplexních čísel. Důkaz využívá pojmy translace (posunutí) a rotace (otočení) komplexní roviny a je prezentován ve formě tohoto objasňujícího tvrzení: *Pro každou uspořádanou trojici $z_1 z_2 z_3$ existuje právě jedna trojice tvaru $01u$ splňující $z_1 z_2 z_3 \sim 01u$. Navíc, jestliže je $z_1 z_2 z_3$ kladně orientována²⁾, potom $\text{Im}(u) > 0$.*

Aplikací $t(z) = z - z_1$ dostáváme $z_1 z_2 z_3 \sim 0z'_2 z'_3$, kde $z'_2 = z_2 - z_1$ a $z'_3 = z_3 - z_1$. Poté aplikace $r(z) = (z'_2)^{-1}z$ vede ke $0z'_2 z'_3 \sim 01u$ s $u = (z'_2)^{-1}z'_3$. Tedy $z_1 z_2 z_3 \sim 01u$. Navíc, je-li trojúhelník $z_1 z_2 z_3$ kladně orientován, je kladně orientován též $01u$ a tedy u leží v horní polorovině. Z těchto výpočtů vyplývá, že

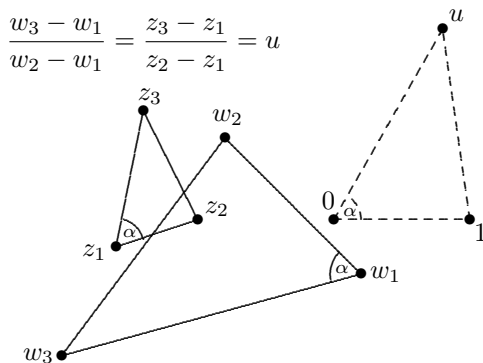
$$u = \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} \quad (2)$$

a že tedy $01u$ je taková trojice jediná.

Druhý důkaz je stručná sbírka jednoduchých faktů, které čtenáři obeznámení se strukturou komplexních čísel shledají zcela elementární a evidentní. Absolutní hodnota poměru (1)

$$\left| \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} \right| = \frac{|z_3 - z_1|}{|z_2 - z_1|}$$

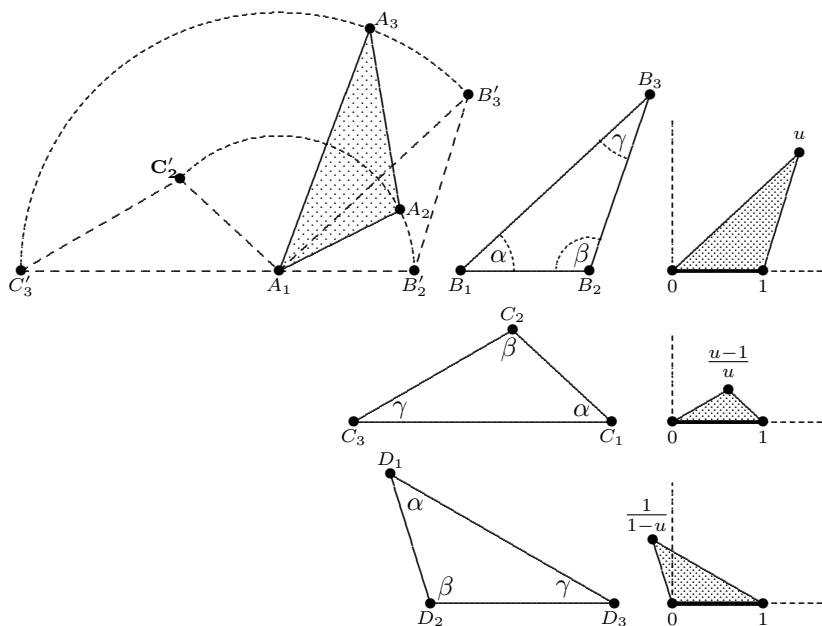
vyjadřuje poměr délek dvou stran trojúhelníku a argument podílu (2) úhel α mezi těmito dvěma stranami. Tuto situaci jasně vyjadřuje obr. 1.



Obr. 1: Trojúhelníky $z_1 z_2 z_3$, $w_1 w_2 w_3$ a $01u$ jsou podobné

²⁾Připomeňme, že trojice bodů z_1, z_2, z_3 je kladně orientována, pokud se na kružnici opsané těmito bodům dostaneme pohybem proti směru ručiček hodin ze z_1 nejprve do z_2 a poté do z_3 .

Důkaz je tedy založen na jednoduché myšlence vybrat ze souboru všech přímo podobných trojúhelníků takový, jehož jedna strana má (zvolenou) délku 1. Takové volby jsou obecně možné tři, jak ukazuje obr. 2.



Obr. 2: Podobné trojúhelníky $01u$, $01\frac{u-1}{u}$ a $01\frac{1}{1-u}$

Obr. 2 dokazuje bezprostředně následující tvrzení.

Věta. Množina všech komplexních čísel $z \in \mathbb{C}$ splňujících $\text{Im}(z) > 0$ (tj. čísel ležících v Gaussově rovině nad reálnou osou) připouští rozklad na vzájemně disjunktní trojice čísel

$$\mathbb{D}_u = \left\{ u, \frac{1}{1-u}, \frac{u-1}{u} \right\}. \quad (3)$$

Tyto trojice jsou v jednoznačné korespondenci s třídami přímo podobných trojúhelníků. Pouze jedna z těchto trojic degeneruje na jedno číslo

$$u = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

a odpovídá množině orientovaných rovnostranných trojúhelníků.

Zde si neodpustíme malou poznámku týkající se imaginární části čísel v trojici (3). Jakmile jedno z těchto čísel má tuto část kladnou, mají ji kladnou (jak jsme už zaznamenali) i zbylá dvě čísla. Čtenáři, kteří mají v oblíbené početní argument se mohou přesvědčit, že tvar čísla $u = r + s i$, $r \in \mathbb{R}$, $s \in \mathbb{R}$, $s > 0$, vede k zápisu

$$\frac{1}{1-u} = \frac{1-r}{(1-r)^2 + s^2} + \frac{s}{(1-r)^2 + s^2} i,$$

$$\frac{u-1}{u} = \frac{r(r-1) + s^2}{r^2 + s^2} + \frac{s}{r^2 + s^2} i,$$

a tedy $\text{Im}\left(\frac{1}{1-u}\right) > 0$ a $\text{Im}\left(\frac{u-1}{u}\right) > 0$.

Každý čtenář se jistě nyní rád přesvědčí, že třídám rovnoramenných trojúhelníků odpovídá trojice

$$\mathbb{D} = \left\{ \frac{1}{2} + \frac{t}{2} i, \frac{2}{t^2 + 1} + \frac{2t}{t^2 + 1} i, \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1} + \frac{2t}{t^2 + 1} i \right\}, \quad t > 0,$$

a třídám pravoúhlých trojúhelníků odpovídají trojice

$$\mathbb{D} = \left\{ t i, \frac{1}{t^2 + 1} + \frac{t}{t^2 + 1} i, 1 + \frac{1}{t} i \right\}, \quad t > 0.$$

Pravoúhlé trojúhelníky jsou tedy charakterizovány faktem, že přiřazená trojice čísel obsahuje číslo ryze imaginární. Speciálně,

$$\mathbb{D} = \left\{ i, 1 + i, \frac{1}{2} + \frac{1}{2} i \right\}$$

popisuje pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník.

Poznámka. Shora uvedenou větu můžeme snadno modifikovat na případ všech (tj. neorientovaných) podobných trojúhelníků užitím komplexně sdružených čísel: *Množina všech komplexních čísel $z \in \mathbb{C}$ splňujících $\text{Im}(z) \neq 0$ (tj. čísel ležících v Gaussově rovině mimo reálnou osu) přirouští rozklad na vzájemně disjunktní šestice čísel*

$$\overline{\mathbb{D}}_u = \left\{ u, \bar{u}, \frac{1}{1-u}, \frac{1}{1-\bar{u}}, \frac{u-1}{u}, \frac{\bar{u}-1}{\bar{u}} \right\}.$$

Tyto šestice jsou v jednoznačné korespondenci s třídami všech podobných trojúhelníků. Pouze jedna z těchto šestic degeneruje na dvojici čísel

$$\left\{ \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right\}$$

a odpovídá množině všech rovnostranných trojúhelníků.

Poznámka. „Normování“ podobných trojúhelníků do polohy, kdy je jedna ze stran identifikována s intervalem $[0, 1]$ je pouze naší (vhodnou) volbou. Volba intervalu $[-1, 0]$ definuje stejným způsobem třídy

$$\left\{ u, -\frac{1+u}{u}, -\frac{1}{1+u} \right\}.$$

Poněkud jiný rozklad dostáváme volbou intervalu $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Tato volba vede k rozkladu komplexních čísel s kladnou imaginární částí na třídy

$$\left\{ u, \frac{3+2u}{2-4u}, \frac{2u-3}{4u+2} \right\}.$$

V tomto případě je

$$\left\{ \frac{\sqrt{3}}{2}i \right\}$$

třídou, která degenerovala na jedno číslo (a odpovídá množině orientovaných rovnostranných trojúhelníků).

Nezbývá než uvést shora uvedenou větu ve zcela obecném tvaru, kdy zvoleným intervalem je interval $[a, b]$, kde $a \neq b$, $a \in \mathbb{C}$, $b \in \mathbb{C}$.

Obecná věta. *Množina všech komplexních čísel $z \in \mathbb{C}$ ležících v polovině Gaussovy roviny definované přímkou určenou čísly a a b připouští rozklad na vzájemně disjunktní trojice čísel*

$$\widehat{\mathbb{D}}_u = \left\{ u, a + \frac{(b-a)^2}{b-u}, b + \frac{(b-a)^2}{a-u} \right\}.$$

Tyto trojice jsou v jednoznačné korespondenci s třídami přímo podobných trojúhelníků. Pouze jedna z těchto trojic degeneruje na jedno číslo

$$u = \frac{a(1 - \sqrt{3}i) + b(1 + \sqrt{3}i)}{2}$$

a odpovídá množině orientovaných rovnostranných trojúhelníků.

Pokud bychom chtěli popsat šestice komplexních čísel odpovídající množině všech (tj. neorientovaných) podobných trojúhelníků, využili bychom následující lemma, jehož důkaz ponecháme čtenáři.

Lemma. *Zrcadlový obraz komplexního čísla u podle přímky určené komplexními čísly a a b je číslo*

$$a + \frac{(\bar{u} - \bar{a})(b - a)}{\bar{b} - \bar{a}}.$$

Poznámka. V této závěrečné poznámce poukážeme na souvislost výše popsaného rozkladu komplexních čísel se skládáním příslušných komplexních funkcí. Zvolme dvě různá komplexní čísla a a b a označme pomocí $\mathbb{C}_{a,b}$ množinu všech komplexních čísel, která neleží na přímce definované čísly a a b . Kromě identické funkce f_1 , $f_1(z) = z$, definujme na $\mathbb{C}_{a,b}$ funkce f_2 a f_3 :

$$f_2(z) = a + \frac{(b-a)^2}{b-z} \quad \text{a} \quad f_3(z) = b + \frac{(b-a)^2}{a-z}.$$

Na množině $G = \{f_1, f_2, f_3\}$ definujeme „násobení“ $\times$ pomocí skládání funkcí $(f_s \times f_t)(z) = f_s(f_t(z))$. Násobení je tedy dáno tabulkou

$\times$	f_1	f_2	f_3
f_1	f_1	f_2	f_3
f_2	f_2	f_3	f_1
f_3	f_3	f_1	f_2

V terminologii abstraktní algebry je $(G, \times)$ cyklickou grupou řádu 3.

Závěr článku patří dvěma úlohami čtenáři.

1. Ukažte, že volba $a = -1$ a $b = 1$ definuje bijekci mezi rozkladem poloviny komplexních čísel na tříprvkové třídy

$$\left\{ u, \frac{3+u}{1-u}, \frac{-3+u}{1+u} \right\}$$

a množinami orientovaných podobných trojúhelníků s výjimkou jednočlenné třídy popisující množinu všech orientovaných rovnostranných trojúhelníků. Určete toto komplexní číslo.

2. Dokažte, že rozklad poloroviny komplexních čísel na trojice čísel

$$\left\{ u, \frac{1}{u-i}, \frac{1+ui}{u} \right\}$$

definuje bijekci s množinami všech orientovaných rovnostranných trojúhelníků s výjimkou degenerované jednoprvkové třídy

$$\left\{ \frac{-\sqrt{3}+i}{2} \right\}.$$

Literatura

- [1] Dlab, V., Bečvář, J.: *Od aritmetiky k abstraktní algebře*. 2. vyd., ČVUT, Praha, 2022.
- [2] Dlab, V.: Towards understanding of Napoleon's theorem. Complex numbers are the key. *Rozhledy matematicko-fyzikální*, roč. 100 (2025), č. 2, s. 33–40.
- [3] Dlab, V.: *Hlubší porozumění větě Napoleonově*. <https://www.delta42.com/Vlastimil%20Dlab/Hlubsi.porozumeni.pdf>

Anděl na útěku

Jan Jekl, Univerzita obrany, Brno

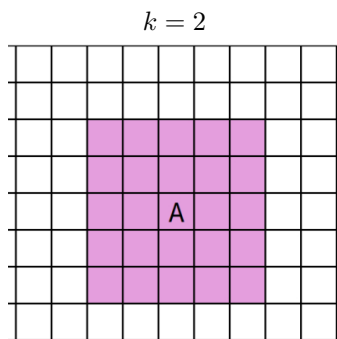
Abstrakt. V tomto článku se zabýváme hrou dvou hráčů na nekonečné šachovnici. Jeden z hráčů (ďábel) odebírá pole a snaží se soupeře polapit, zatímco druhý hráč (anděl) se pohybuje dle předepsaných pravidel a snaží se do nekonečna unikat. Je známo, že anděl dokáže unikat, je-li jeho předem stanovená rychlost dostatečná, a je naopak chycen, když je jeho rychlost příliš malá.

Úvod

Hry a hlavolamy inspirovaly matematiky od nepaměti. Již před naším letopočtem se Archimedes ptal, kolika způsoby lze složit 14 jistých dílků, aby vytvořily čtverec, viz Ostomachion [9]. V roce 1982 tak sepsali Berlekamp, Conway, a Guy dvousvazkovou knihu popisující různé matematické hry *Winning Ways for your Mathematical Plays*. V roce 2004

vyšlo druhé vydání knihy rozdělené do čtyř svazků čítajících dohromady 1000 stran.

Ve druhém svazku z roku 1982 [1] (ve třetím svazku druhého vydání) je zmíněna následující úloha. Představme si, že máme nekonečnou šachovnici, po které se pohybuje anděl. Anděl se pohybuje podobně jako král na šachovnici s jediným rozdílem, že anděl může provést ve svém tahu až k tahů krále, kde k je pevně zvolené číslo, viz obr. 1. Dábel se snaží polapit anděla tak, že postupně odstraňuje čtverce ze šachovnice, aby na ně anděl nemohl znovu vstoupit. Přitom se dokola střídají v tazích, kdy anděl vždy učiní svůj pohyb a dábel odstraní jedno pole. Anděl může ve svém pohybu přeskakovat i odstraněná políčka, ale nemůže na nich skončit. Dábel vyhraje, pokud je anděl uvězněn v pasti, ze které nemůže uniknout. Anděl vyhraje, pokud jej dábel nikdy nepolapí, tj. pokud dokáže donekonečna unikat. Pro usnadnění budeme používat značení anděl_k , kde se jedná o anděla se silou k .

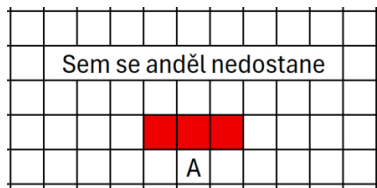


Obr. 1: Vyznačená pole, kam se může přesunout anděl_2

Otázka, která zajímala autory knihy [1], je jednoduchá. Polapí dábel anděla_k ? Dokáže anděl_k unikat navždy, aniž by byl polapen? Hraje volba k nějakou roli? Část odpovědí na tuto otázku poskytli již samotní autoři knihy [1]. Protože však ani po patnácti letech otázku nikdo uspokojivě nezodpověděl, vypsál J. H. Conway finanční odměnu za nalezení odpovědi na zbývající otázky [3]. V závislosti na získané odpovědi a po přepočtení nabízené částky na dnešní peníze by si tak úspěšný řešitel mohl připsat na účet až 40 tisíc korun.

Kompletní odpověď na uvedené otázky byla získána až v roce 2007. Dnes tedy již víme, že je-li $k = 1$, pak dábel dokáže polapit anděla.

Je-li k alespoň 2, pak anděl dokáže unikat donekonečna. V tomto článku popíšeme řešení pro $k = 1$ a pro $k \geq 11$, kde vycházíme primárně z článků [3], [8] a knihy [1]. V případě nejasností doporučujeme čtenáři tyto texty také prozkoumat. Zmiňme také, že není známo, zda byla finanční odměna nakonec vyplacena [12].



Obr. 2: Anděl₁ na tahu. Nachází-li se před andělem₁ tři odebraná pole (červená barva), pak se již anděl₁ nikdy za tuto hranici nedostane

Zmiňme nakonec, že není zcela jasné, kdo samotnou hru vymyslel. Silverman je dle článku [4] vynálezcem her, kde se na šachovnici pohybuje šachová figura a protivník odebírá pole. V knize [1] připisují autorství zde popsané verze hry panu Epsteinovi [11]. Nicméně pan Silverman zde uvedenou hru i s jejími obecnými pravidly uvádí také ve své knize [10] z roku 1971, tj. jedenáct let před vydáním knihy [1].

Polapení anděla pro $k = 1$

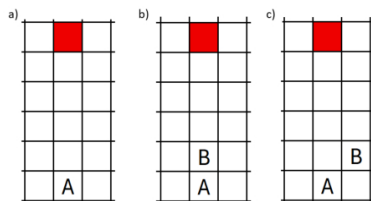
První ze všeho učiníme několik pozorování. Pokud bude d'ábel odebírat pole vždy v blízkosti anděla₁, pak dokáže anděl₁ unikat. Proto aby byl anděl₁ chycen, tak musí d'ábel nachystat „past“, do které se anděl₁ chytí.

Rozmysleme si také, že tři odebraná pole přímo před andělem₁ tvoří pro anděla₁ nepřekonatelnou hranici, viz obr. 2. Posune-li se anděl₁ doprava, pak d'ábel odstraní další pole v řadě napravo. Naopak posune-li se anděl₁ doleva, pak d'ábel odstraní další pole v řadě nalevo.

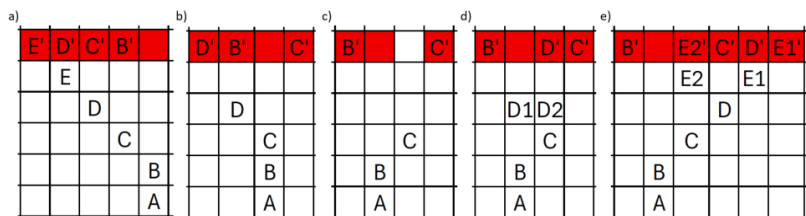
Vítězná strategie vedoucí k uvěznění anděla spočívá v tom, že lze takovou bariéru blížícímu se andělovi předem nachystat. Předpokládejme, že anděl se pohybuje jedním směrem a d'ábel ho chce zastavit. D'áblovi stačí odebrat pole v páté řadě přímo před andělem, viz obr. 3 a), a volit správně následující kroky. Anděl se nyní může posunout dopředu 3 b) nebo do strany 3 c). Vzhledem k symetrii situace stačí studovat pouze posun do jedné ze stran a posun do druhé strany dopadne analogicky.

Rozebereme nejprve variantu 3 b), kdy se anděl₁ posune dopředu na pole B, obr. 4. D'ábel reaguje odebráním pole na jedné straně B'. Vydá-li

se anděl₁ ve směru odebraného pole B', pak ďábel reaguje postupným odebráním polí ve stejném směru, obr. 4 a). Pokud by se anděl₁ posunul z pole B znovu dopředu na pole C, obr. 4 b), pak stačí odebrat pole C' na druhé straně a anděl₁ je již v pasti. Anděl₁ se tedy musí posunout v opačném směru od odebraného pole B', obr. 4 c) a nyní ďábel přeskočí jedno pole a odebere C'. Nyní je již anděl₁ také v pasti.



Obr. 3: a) Anděl₁ se přiblížil k pomyslné hranici, kterou chce ďábel vybudovat, a ďábel odebere čtverec pět polí před andělem₁, aby jej zastavil. Anděl₁ je na tahu a může se posunout vpřed b), nebo do strany c)



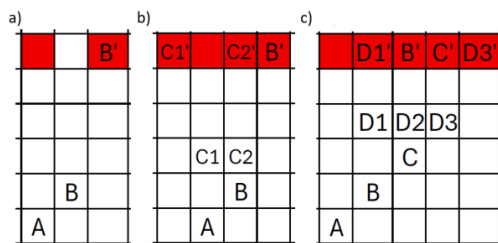
Obr. 4: Tahy anděla₁ jsou vyznačeny tiskacími písmeny. Odpovědi ďábla jsou doplněny o apostrof. Jedná se o rozbor možných tahů, kdy anděl táhne prvním tahem vpřed, viz 3 b).

Posune-li se anděl₁ z pole C doleva nebo dopředu, ďábel odebere vynechané pole D', obrázek 4 d). Posune-li se anděl z pole C dále doprava, obr. 4 e), pak pokračujeme odebráním polí napravo od C', kde vynechané pole E2' odebíráme, jenom kdyby se anděl pokusil proklouznout tahem doleva E2. Pečlivým rozebráním situace vidíme, že anděl₁ je již v pasti.

Nyní se podívejme na druhou variantu 3 c), kde se anděl₁ posune do strany na pole B. Na tento tah je potřeba reagovat vynecháním jednoho pole a odebráním dalšího pole ve směru andělova₁ pohybu, obr. 5 a). Pokud se nyní posune anděl₁ z pole B dopředu na pole C2, pak odebíráme vynechané místo, obr. 5 b), a podobně postupujeme, pokud se

anděl₁ z pole B posune doleva na C1. Pokud se anděl₁ posune z pole B dále doprava na pole C, obr. 5 c), pak odebíráme pole napravo C'. Vynechané místo D1' odebíráme, jenom kdyby se anděl₁ pokusil proklouznout tahem vpřed na D2 nebo doleva na D1. V případě, že anděl pokračuje pohybem na D3, odebíráme další pole D3' v řadě. Ve všech těchto případech je anděl₁ již prakticky zablokován a nemůže překročit ďáblem vytyčenou hranici.

Uvedenými kroky může ďábel uvěznit anděla₁ v jedné polorovině. Je ale jasné, že v tomto případě není anděl chycen, protože stále může nekonečně unikat do strany. Past na anděla₁ však kompletně sklapne, bude-li anděl₁ uvězněn v ohraničené oblasti. Aby bylo možné anděla₁ uvěznit, je potřeba si „oblast“ předem nachystat. Ďábel nejprve odebírá rohová pole ve tvaru písmene L, v dostatečně velkém čtverci tak, jak je vyznačeno na obr. 6. V rozích odebrané pole zajistí, že anděl nebude moci do nekonečně unikat podél přímky.

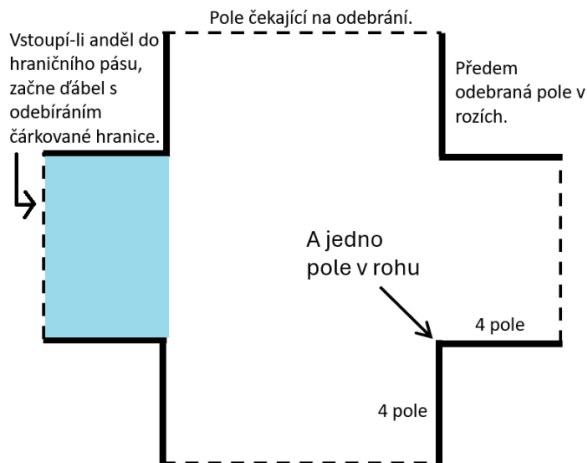


Obr. 5: Tahy anděla₁ jsou vyznačeny tiskacími písmeny. Odpovědi ďábla jsou doplněny o apostrof. Jedná se o rozbor možných tahů, kdy anděl táhne prvním tahem do strany, viz 3 c)

Chystaný čtverec musí být dostatečně velký, aby z něj anděl neunikl než budou rohová pole odebrána. K odebrání rohů stačí ďáblu pouze 36 tahů (9 tahů na vytvoření hranice ve tvaru L v každém rohu), tj. čtverec by měl být dostatečně velký, aby se z něj anděl₁ za 36 tahů nedostal (a nechceme ani, aby se v této době dostal do vznikajících pásů). Tedy počáteční čtverec musí mít stranu délky alespoň 83 polí, tj. 36 v každém směru od anděla. Na stranách čtverce tak vzniknou pásy, do kterých když anděl₁ vstoupí, tak ďábel začne vyplňovat čárkovanou hranici dle výše uvedeného postupu, aby anděl₁ z oblasti neunikl.

Předem odebrané rohy zajistí, že anděl₁ nebude moci unikat do strany věčně, ale dříve nebo později narazí na odebraná pole. Překročí-li anděl₁ z jednoho pásu do druhého, začne ďábel odebírat pole z čárkované hra-

nice nového pásu. Díky předem odebraným rohovým polím jsou na sobě pásy nezávislé a nemůže se tak stát, že by ďábel musel vyplňovat dvě úsečky najednou.



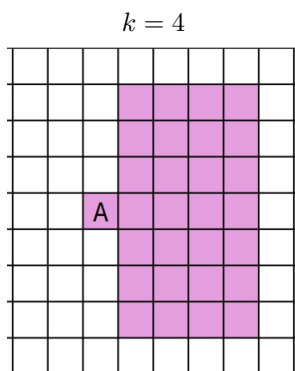
Obr. 6: Předchystaná oblast, kde dojde k uvěznění anděla₁, musí být dostatečně velká, aby ďábel dokázal odebrat vždy 9 polí v každém rohu ve tvaru písmene L, viz černá čára reprezentující odebrané pole. Po tuto dobu se anděl₁ nesmí dostat do vznikajících pásů. Jakmile anděl₁ vstoupí do pásů, začne ďábel odebrat pole na čárkované čáře, aby jej zastavil

Výhoda strategie spočívá také v tom, že pokud by ďábel udělal chybu, pak lze začít znovu od začátku s novou oblastí. Uveďme nakonec, že zde uvedená strategie vychází z textu [6]. Elwyn R. Berlekamp je dle [4] autorem složitější strategie, kterou lze nalézt v knize [1]. Zde je ukázáno, že k uvěznění anděla stačí čtverec o straně délky 33 políček.

Únik anděla není jednoduchý ani pro $k \geq 2$

V předchozí části jsme viděli, že anděla₁ lze polapit. Jak jsme již uvedli, dnes již víme, že pro $k \geq 2$ dokáže anděl_k unikat navždy. Přitom musí být opatrný a volit správnou strategii, neboť pokud by se pohyboval příliš jednoduše, bude uvězněn, jak ukázal Conway [3]. Abychom ukázali, že tomu tak skutečně je, uvažujme anděla_k, který se pohybuje v každém tahu alespoň o jedno pole doprava a nikdy se nevrací doleva, viz obr. 7. Předpokládejme také, že je anděl_k uvězněn, pokud se již nemá kam přesunout. V následující části uvažujme pro přehlednost anděla₄.

Protože se anděl₄ pohybuje pouze jedním směrem, pak ďábel ví, kde je potřeba nachystat past. Předpokládejme, že se pokusíme vybudovat nepropustnou bariéru ve vzdálenosti $h = 2^{260} \approx 1,8 \cdot 10^{78}$ polí napravo od anděla₄. Protože se anděl₄ musí každým tahem posunout doprava, stačí k zastavení anděla₄ dostatečně široká bariéra (o šířce 4), aby ji anděl₄ nemohl přeskočit. Anděl₄ dorazí do vzdálenosti h nejdříve za $\frac{h}{4} = 2^{258}$ tahů, pokud se bude posunovat v každém kroku o 4 pole doprava, tj. co nejrychleji doprava. A naopak nejpozději za $h = 2^{260}$ tahů, pokud se bude pohybovat doprava vždy pouze o jedno pole, tj. co nejpomaleji doprava.

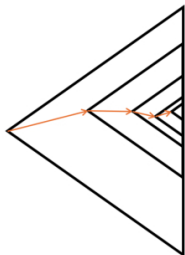


Obr. 7: Pohyb anděla₄ směřujícího vždy alespoň o jedno pole doprava

Nevíme, jaký postup anděl₄ zvolí, a proto je potřeba se dopředu připravit na všechny varianty. Protože se anděl₄ může posunovat ve směru nahoru nebo dolů maximálně h -krát a v každém tahu se posune o maximálně 4 pole, pak chystaná bariéra musí mít délku alespoň $2hk = 8h = 2^{263}$ polí. Zde se zohlednilo, že anděl₄ může směřovat nahoru i dolů. Protože dokonalou neprostupnou bariéru ve vzdálenosti h nelze připravit (ďábel odebrává pole mnohem pomaleji, než se anděl pohybuje), tak si popíšeme, jak lze sestrojit alespoň bariéru postačující k uvěznění anděla₄. Předpokládejme nejprve, že budujeme bariéru o šířce 1. Později uvidíme, že stejný postup lze aplikovat 4-krát, aby byla bariéra dostatečně široká.

Rozmysleme si, že čím více se anděl₄ blíží k hranici, tím přesněji víme, kam směřuje, a k jeho zastavení stačí kratší bariéra, viz obr. 8. Jakmile anděl₄ urazí polovinu vzdálenosti $h = 2^{260}$, tj. vzdálenost 2^{259} , tak nově

stačí postavit bariéru zhruba poloviční délky, viz obr. 8. Vždyť původní délka bariéry $2^{263} = 8h$ bude nově také poloviční $8\frac{h}{2} = 4h = 2^{262}$.



Obr. 8: Po několika tazích lze zmenšit chystanou bariéru, neboť známe andělov cíl přesněji

Označme pro následující kroky hodnotu $M = 2^6$ a uvažujme, že

- Anděl₄ urazí polovinu vzdálenosti h , tj. vzdálenost 2^{259} , za 2^{257} tahů, pokud bude spěchat co nejvíce doprava, a za 2^{259} tahů, bude-li se posouvat co nejméně doprava. Za tuto dobu dokáže ďábel určitě odebrat jedno pole z každých $M = 2^6$ polí bariéry o původní délce 2^{263} . Vskutku, k tomu mu stačí pouze $\frac{2^{263}}{M} = \frac{2^{263}}{2^6} = 2^{257}$ tahů.
- Nově andělovi₄ zbývá urazit již jenom druhou polovinu vzdálenosti h , tj. vzdálenost 2^{259} a ďáblovi naopak stačí se nově soustředit pouze na bariéru délky 2^{262} , neboť již přesněji ví, kam anděl₄ směřuje. Polovinu zbývajících vzdálenosti 2^{259} , tj. vzdálenost 2^{258} anděl₄ urazí za 2^{256} tahů, pokud bude spěchat co nejvíce doprava, a za 2^{258} tahů, bude-li se posouvat co nejméně doprava. Za tuto dobu dokáže ďábel z každých $M = 2^6$ polí zbývajících části bariéry jedno pole odebrat. Vskutku, k tomu mu stačí pouze $\frac{2^{258}}{M} = \frac{2^{258}}{2^6} = 2^{256}$ tahů.
- Po dvou krocích již andělovi₄ zbývá urazit pouze vzdálenost 2^{258} a ďáblovi se stačí soustředit na bariéru délky 2^{261} . I ve třetím kroku by se ďáblovi podařilo odebrat vždy jedno z M polí zbývajících části bariéry.
- Ďábel postupuje stejným způsobem pořád dokola. Zatímco anděl₄ urazí polovinu zbývajících vzdálenosti, tak má ďábel dostatek času odebrat vždy 1 z M polí ve tvořící se bariéře. Důležité je, že počáteční vzdálenost je dostatečně velká, aby bylo možné ji opakovaně

půlit. Dále je důležité, že se délka bariéry zmenšuje stejně rychle jako délka vzdálenosti.

- Po M opakováních tohoto postupu již bude stát ve vzdálenosti $\frac{2^{260}}{2^{26}} = \frac{2^{260}}{2^{64}} = 2^{196}$ před andělem₄ úsečka o šířce 1 a délce $\frac{2^{263}}{2^{26}} = \frac{2^{263}}{2^{64}} = 2^{199}$. Po $4M = 2^8$ opakováních již bude mít bariéra před andělem požadovanou šířku 4.
- Úspěch ďábla spočívá v tom, že si může volit dostatečně velkou počáteční vzdálenost $h = 2^{260}$. Aby postup fungoval pro $k = 4$ a $M = 2^6$, pak musí být $h = 2^\alpha$, kde $\alpha > 256$.

Lze si rozmyslet, že pro obecné k stačí volit $M = 4k^2$ a $\alpha > 4k^3$. Důkaz tohoto tvrzení přenecháváme čtenáři za úkol. Rozmysleme si také, že bariéra by měla být o něco větší než $2hk$, aby ji anděl v posledním tahu nedokázal obejít. Odebrání krajních polí lze však zajistit zvětšením M a h .

Poznamenejme nakonec, že Conway [3] nazývá anděla_k směřujícího v jednom směru hlupákem.

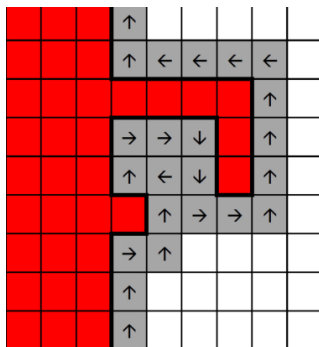
Anděl unikne, je-li $k \geq 11$

Dnes již víme, že anděl_k dokáže unikat, je-li $k \geq 2$. Dvě nezávislá řešení této úlohy byla publikována v roce 2007, a to v článcích [8] a [5]. Přitom autoři o svých výsledcích patrně věděli, neboť se vzájemně ve svých článcích zmiňují. V tomto textu se zaměříme na jednodušší důkaz, který A. Máthé také uvádí ve svém článku [8]. V tomto důkazu je ukázáno, že anděl_k dokáže unikat pro $k \geq 11$. Pro $k \geq 2$ je důkaz o něco složitější a ponecháme jej tedy čtenáři k samostudiu.

Předpokládejme, že je každá buňka hracího pole označena souřadnicemi $[x, y]$, kde $x, y \in \mathbb{Z}$. Dále předpokládejme, že ďábel již před prvním tahem odebral všechna pole, jejichž x -ová souřadnice je záporná. Tento krok andělovi unik pouze ztíží, a tedy nemá vliv na obecnost důkazu. Namísto anděla však A. Mathé studuje takzvaného běžce. Běžec směřuje těsně podél odebraných polí tak, že:

- má vždy odebraná pole nalevo vzhledem ke směru svého pohybu,
- může urazit libovolný počet polí, aby se dostal tam, kam by se dostal i anděl,
- v každém tahu (dokud není uvězněn) se přesunuje co nejdále to lze.

Pro potřeby důkazů je navíc uvažováno, že běžec při pohybu jakoby obarvuje stěny nalevo, okolo kterých projde. Jak uvidíme později, důkaz také vyžaduje, aby běžec v jednom tahu obarvil maximálně $2k$ stěn, tj. může se zastavit dříve, než by se zastavil anděl kvůli nemožnosti obarvit další stěnu. Obarvené stěny následně poslouží k přibližnému určení běžcovy pozice. Více viz následující důkaz. Pohyb běžce je naznačen na obr. 9.



Obr. 9: Trasa běžce (šedá) těsně podél odebraných polí (červená) směrem vzhůru. Tučné čáry značí již obarvené stěny podél běžcova pohybu

Obarvování stěn hraje v následujícím důkazu klíčovou roli, neboť poloha běžce je odhadována právě podle počtu obarvených stěn. Poznamenejme také, že běžec je slabší verzí anděla, tj. pokud by ďábel dokázal uvěznit anděla, pak dokáže uvěznit i běžce. Naopak pokud ďábel nedokáže uvěznit běžce, pak nedokáže uvěznit ani silnějšího anděla.

Mathé také uvažuje hodného ďábla, který neodebírá pole, na něž běžec dříve vstoupil. Důležité je, viz [8], že pokud hodný ďábel nepolapí anděla, pak jej nepolapí ani ďábel. Z chování hodného ďábla navíc vyplývá, že pokud běžec obarví některou stěnu podruhé, pak se dostal zpátky na svůj začátek a již je polapen, neboť obíhá v kruhu. Podle toho lze také poznat, kdy je běžec uvězněn. Dokud běžec neobarví některou stěnu podruhé, pak může vždy ještě unikat.

Předpokládejme nyní, že běžec začíná v buňce $[0, 0]$ a směřuje vzhůru podél pomyslné osy y . Je jasné, že v prvních několika tazích (řekněme prvních 10) běžec nemůže být uvězněn. Vždyť v jednom tahu dokáže běžec oběhnout více polí, než kolik jich ďábel stihl za prvních 10 tahů odebrat.

Indukcí nyní předpokládejme, že běžec nebyl v prvních t tazích chycen. Běžec v každém tahu urazí alespoň k polí (pokud může směřovat přímo vzhůru k polí dopředu), a v čase t je již obarveno alespoň kt stěn. Kolik z těchto stěn se nachází na ose y ? Běžec směřuje vzhůru podél osy y pouze s výjimkou případů, kdy obíhá odebraná pole (ta mají maximálně $4t$ stěn) a kdy mu ďábel vynutí směr dolů, viz obr. 9 (tehdy se běžec posune maximálně o t polí dolů, neboť více polí není dosud odebráno). Na ose y je tedy obarveno alespoň $kt - 4t - t$ polí, tj. běžec se nachází $t(k-5)$ polí nad osou x . Protože však platí, že $t \geq 10$ a $k \geq 11$, pak máme $t(11-5) \geq 10(11-5) \geq 60$. To znamená, že se běžec nachází alespoň 60 polí nad osou x , a protože běžec nemůže v jednom tahu obarvit více než $2k = 22$ stěn, proto se v $(t+1)$ -ním tahu nemůže vrátit na původní pole $[0, 0]$. Běžec by byl uvězněn, jenom pokud by se vrátil na původní pole $[0, 0]$. Tam se ale v $(t+1)$ -ním tahu nevrátil, a tedy v $(t+1)$ -ním tahu není uvězněn. Provedli jsme důkaz indukci, že běžce nelze polapit.

Nyní jsme dokázali, že hodný ďábel nedokáže polapit běžce. Jak již bylo naznačeno dříve, běžec neumí unikat tak dobře jako anděl. Proto pokud hodný ďábel nepolapí běžce, pak nepolapí ani anděla. Důležitou částí důkazu je také to, viz [8], že pokud anděla nepolapí hodný ďábel, pak jej nepolapí ani ďábel.

Zmiňme nakonec, že $t(k-5)$ je konzervativní odhad polohy anděla. Tím je myšleno, že po zevrubné analýze bychom jistě zjistili, že bychom dokázali najít přesnější odhad běžcovy vzdálenosti od osy x . Tj. patrně se nachází ve větší vzdálenosti od osy x . Pro potřeby našeho důkazu však tento odhad postačuje. Zde uvedený důkaz funguje pro $k \geq 11$, ale fungoval by jistě i pro $k \geq 7$. Pro $k < 7$ je potřeba postupovat opatrněji a počítat pečlivěji. Nejpečlivější výpočty jsou potřeba pro $k = 2$, více viz [8].

Závěr

Poznamenejme, že hra byla studována také ve třech rozměrech, viz [6], [2]. Je tak již známo, že anděl₁₃ dokáže ďáblovi ve třech dimenzích uniknout, viz [6]. Nicméně pokud je nám známo, tak hra ve třech dimenzích dosud nebyla zcela rozřešena. Není tak jisté, zda dokáže například unikat i anděl₁. V minulosti se andělskému problému věnovala jen malá skupina matematiků. Je to patrně také tím, že řešení úlohy nepřináší žádné aplikovatelné poznatky a není jasné, jak na úlohu aplikovat standardní matematické nástroje, se kterými jsou matematici zvyklí pracovat.

Na závěr tedy přenecháme čtenáři otázku. Zamyslete se, zda by bylo

některé z uvedených důkazů možné aplikovat i tehdy, kdyby se anděl pohyboval jako jezdec na šachovnici (viz také [4]). Dopadl by výsledek jinak, kdyby mohl ďábel odebírat ve svém tahu dvě a více polí?

Poděkování

Tento příspěvek vznikl s podporou projektu DZRO Vojenské autonomní a robotické systémy.

Literatura

- [1] Berlekamp, E. R., Conway, J. H., Guy, R. K.: *Winning Ways for your Mathematical Plays, Volume 2: Games in Particular*. Academic Press, 1982.
- [2] Bollobás, B., Leader, I.: The angel and the devil in three dimensions. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, roč. 113 (2006), č. 1, s. 176–184.
- [3] Conway, J. H.: The Angel Problem. In: Nowakowski, R. (eds): *Games of No Chance*. MSRI Publications, roč. 29, 1996, s. 3–12.
- [4] Gardner, M.: Mathematical games. *Scientific American*, roč. 230 (1974), č. 2, s. 106–108.
- [5] Kloster, O.: A solution to the Angel Problem. *Theoretical Computer Science*, roč. 389 (2007), s. 152–161.
- [6] Kutz, M.: Conway’s Angel in three dimensions. *Theoretical Computer Science*, roč. 349 (2005), s. 443–451.
- [7] Kutz, M.: *The Angel Problem, Positional Games, and Digraph Roots*. PhD Thesis, FU Berlin, 2004.
- [8] Máthé, A.: The Angel of power 2 wins. *Combinatorics, Probability and Computing*, roč. 16 (2007), č. 3, s. 363–374.
- [9] Pickover, C. A.: *Matematická kniha*. Argo – Dokořán, Praha, 2012.
- [10] Silverman, D. L.: *Your Move*. McGraw-Hill, 1971.
- [11] Wikipedia: *Richard Arnold Epstein*. https://en.wikipedia.org/wiki/Richard_Arnold_Epstein, [cit 17.9.2025].
- [12] *The Angel Problem – was the bet paid?*. <https://mathoverflow.net/questions/16686/the-angel-problem-was-the-bet-paid>, [cit 17.9.2025].

Ochranovská hvězda: Světlo naděje s geometrií v srdci

Tereza Bártllová, MFF UK, Praha

Ochranovská hvězda, známá také jako *herrnhutská hvězda*, je nejen symbolem adventního času, ale také fascinující ukázkou spojení matematiky, geometrie a tradice. Její příběh začíná v roce 1821 v saském Herrnhutu (česky Ochranov), kde se původně zrodila jako netradiční učební pomůcka.

Od matematického cvičení k vánoční ozdobě

V malém školním prostředí Herrnhutu, saského města založeného moravskými exulanty, byla hvězda díky svým složitým tvarům původně určena k procvičování prostorové geometrie. Původní podoba byla impozantní – složená z 110 jehlanů, z nichž některé měly trojúhelníkovou a jiné čtvercovou základnu. Tato „ježatá“ hvězda brzy zaujala studenty natolik, že si začali vyrábět vlastní verze pro zdobení pokojů.



Obr. 1: Ochranovská hvězda (fotografie autorky)

*) Článek byl se svolením autorky převzat z webu MFF UK www.matfyz.cz.

Postupem času se z praktické pomůcky stala ozdoba, která zářila ve školách i domácnostech. Přidáním svíčky nebo jiného světelného zdroje získala hvězda nový, slavnostní rozměr. Tím začala její cesta k tomu, aby se stala neodmyslitelným symbolem adventu.

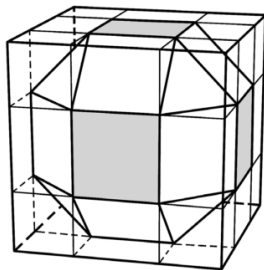
Symetrie a záře archimédovského mnohostěnu

Moderní verze Ochranovské hvězdy má 26 paprsků. Z hlediska geometrie jde o *archimédovské těleso*, konkrétně s mnohostěnem zvaným rombokubooktaedr. Archimédovská tělesa, která vděčí za svůj název řeckému mysliteli Archimédovi ze Syrakus, jsou zvláštní skupinou geometrických tvarů nacházející se na pomezí pravidelných platónských těles a nepravidelných mnohostěnů.

Platónská tělesa, pojmenovaná po filozofovi Platónovi, jsou pravidelné mnohostěny s naprosto symetrickými stěnami tvořenými shodnými pravidelnými mnohoúhelníky. Existuje pouze pět platónských těles: tetraedr (čtyřstěn), hexaedr (krychle), oktaedr (osmistěn), dodekaedr (dvanáctistěn) a ikosaedr (dvacetistěn).

Archimédovská tělesa jsou oproti nim poloprávidelné mnohostěny, jejichž stěny tvoří pravidelné mnohoúhelníky dvou nebo tří typů. Zároveň zůstávají symetrická, protože v každém vrcholu se setkává stejný počet stěn téhož typu ve stejném pořadí. Těchto těles je 13 a jsou výsledkem „ořezávání“ platónských těles.

Například z krychle lze vytvořit rombokubooktaedr, který tvoří základ ochranovské hvězdy, odříznutím hrany krychle rovinami rovnoběžnými s jejími hranami, a to tak, aby z původních čtvercových stěn vznikly menší čtvercové stěny, místo každé hrany vznikl opět čtverec a místo původních vrcholů vznikly pravidelné trojúhelníky.



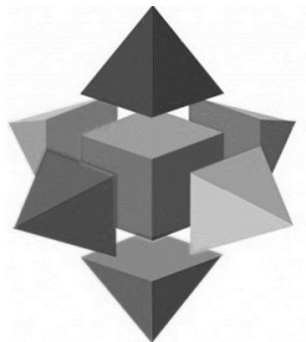
Obr. 2: Rombokubooktaedr (zdroj obrázku: https://dml.cz/bitstream/handle/10338.dmlcz/402379/DejinyMat_54-2012-1_9.pdf)

Rombokubooktaedr má 26 stěn: 18 čtvercových a 8 trojúhelníkových. Na něj jsou v případě hvězdy připevněny jehlany – 18 čtyřbokých a 8 trojbokých, což jí dodává typický „ježatý“ vzhled. Dokonalá symetrie těchto těles fascinovala již starověké matematiky a dodnes inspirativně kombinuje vědu s estetikou.

Novodobé provedení hvězd

V průběhu let se výroba ochranovské hvězdy výrazně zjednodušila. Dnešní verze se již obejdou bez komplikovaného vnitřního tělesa, na které by byly připevněny jednotlivé paprsky. Konstrukce hvězdy je nyní tvořena lehkou, často skládací konstrukcí, která drží jednotlivé paprsky na místě, případně se vnitřní konstrukce zcela vynechává a výroba hvězdy spočívá pouze v lepení jehlanů k sobě. Tyto úpravy nejen usnadňují výrobu, ale také snižují hmotnost hvězdy, což je praktické při zavěšování a manipulaci.

Pokud byste si chtěli ochranovskou hvězdu sami vyrobit, ale máte pocit, že hvězda s 26 vrcholy je pro vás příliš složitá, můžete zkusit jednodušší, ale velmi hezkou variantu podle našeho návodu.



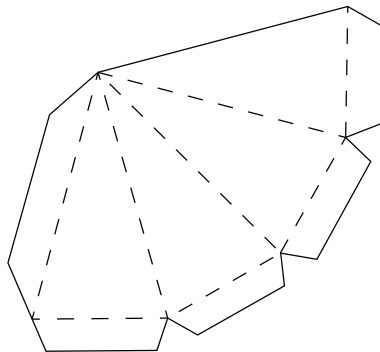
Obr. 3: Jednoduchá ochranovská hvězda

Návod na výrobu jednoduché ochranovské hvězdy: Připravte si šest jehlanů (můžete využít naši šablonu na obr. 4), které k sobě slepíte tak, jako kdybyste je lepili na stěny krychle. Vznikne vám jednodušší verze ochranovské hvězdy se šesti vrcholy.

Světlo naděje a tradice

Ochranovská hvězda se rozšířila z Herrnhutu do celého světa. Dnes je neodmyslitelnou součástí vánoční výzdoby, zejména v Německu, Česku a

dalších zemích se sasko-ochranovskou tradicí. Její zářivý vzhled a dokonalá symetrie připomínají betlémskou hvězdu, která symbolizuje naději, lásku a mír.



Obr. 4: Plášť jehlanu



Obr. 5: Ochránovská hvězda se šesti hroty (fotografie autorky)

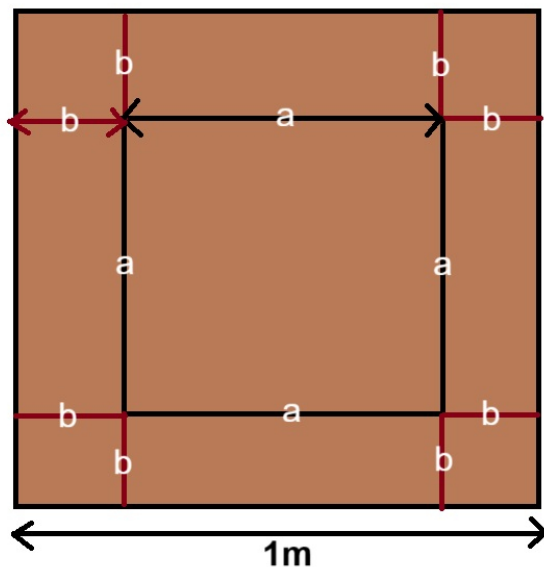
Pokud v adventním čase projíždíte setmělými vesničkami Saska nebo jiných regionů, nemůžete ochranovskou hvězdu přehlédnout. Zářící na domech, kostelích i ulicích, přináší radost a připomíná bohatou historii, která spojuje vědu, víru a kulturu.

Krabice na dárek

Následující vánoční úloha je od prof. Jiřího Bouchaly, stejně jako obrázek Hlavolam, který ji doprovází.

Úloha

Představte si, že máte velmi kvalitní písek a na půdě karton ve tvaru čtverce o straně délky 1 metr. Svému nejlepšímu kamarádovi chcete dát k Vánocům svůj kvalitní písek. A protože je to nejlepší kamarád, chcete karton poskládat tak, aby vznikla krabice (bez víka) co největšího objemu. Ohýbáte karton tak, že uprostřed zůstane čtverec o straně délky a , přičemž boky budou mít výšku b , viz obrázek 1. Jaké budou délky a , b tak, aby objem krabice byl co největší?



Obr. 1: Ohýbání kartonu

Úloha z minulého čísla zněla:

Ukažte, že mezi libovolnými 39 po sobě jdoucími přirozenými čísly je alespoň jedno, jehož součet číslic je dělitelný 11.

A pak následovala ještě úloha v obecnější podobě:

Jaké je minimální číslo M_z , pro které mezi každými M_z po sobě jdoucími přirozenými čísly existuje alespoň jedno číslo, jehož součet číslic v zápisu o základu z je dělitelný $z + 1$?

Řešení těchto úloh je popsáno v tomto čísle v článku *Hrátky s dělitel-
ností: Řešení – Solution* od Vlastimila Dlabá a Erzsébet Lukács.



Obr. 2: Jiří Bouchala: Hlavo-lam

Hrátky s dělitelností. Řešení – Solution

Vlastimil Dlab, Praha – Erzsébet Lukács, Budapešť

V tomto článku vyřešíme úlohy z minulých Matematických oříšků.

Úloha 1

Ukažte, že mezi libovolnými 39 po sobě jdoucími přirozenými čísly je alespoň jedno, jehož součet číslic je dělitelný 11.

A v obecnější podobě.

Úloha 2

Jaké je minimální číslo M_z , pro které mezi každými M_z po sobě jdoucími přirozenými čísly existuje alespoň jedno číslo, jehož součet číslic v zápisu o základu z je dělitelný $z + 1$?

V první části článku rozřešíme úlohu 1 pro dekadický zápis čísel, tj. pro $z = 10$. Ta je napsána česky. Druhá část, řešící úlohu obecně pro zápis čísel v soustavě o libovolném základu z , je prezentována v angličtině.

Použité značení

Každé přirozené číslo a lze jednoznačně zapsat v číselné soustavě o základu $z \in \mathbb{N}$, $z \geq 2$,

$$a = a_s z^s + a_{s-1} z^{s-1} + \dots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0, \quad (1)$$

kde $a_s \neq 0$, $a_0, a_1, \dots, a_s \in \{0, 1, \dots, z-1\}$. Tento zápis budeme značit stručněji

$$a = (a_s, a_{s-1} \dots a_2 a_1 a_0)_z. \quad (2)$$

Dále definujeme součet číslic

$$\sigma_z(a) = \sum_{t=0}^s a_t. \quad (3)$$

Pomocí funkce σ_z je možno formulovat úlohu 2 následovně:

Úloha 2

Pro daný základ z najděte nejmenší číslo M_z splňující podmínku, že každá posloupnost M_z po sobě jdoucích přirozených čísel obsahuje číslo x takové, že $\sigma_z(x)$ je dělitelné číslem $z + 1$.

Číslo M_z budeme dále v textu značit $\text{Min}(z)$.

Řešení úlohy 1

V této první části budeme čísla rozumět přirozená čísla spolu s nulou, zapsaná v desítkové číselné soustavě. Každému přirozenému číslu

$$a = (a_s a_{s-1} \dots a_2 a_1 a_0)_{10}$$

je tedy přiřazen součet číslic $\sigma(a) = \sum_{t=0}^s a_t$.

Konečnou posloupnost po sobě jdoucích (celých) čísel nazveme *segment*. Segment délky d začínající číslem a budeme značit symbolem ${}_a\mathcal{S}(d)$:

$${}_a\mathcal{S}(d) = (a, a+1, a+2, \dots, a+d-1).$$

Tedy

$${}_0\mathcal{S}(10) = (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9),$$

$$\text{pro } 1 \leq k \leq 9 \text{ je } {}_0\mathcal{S}(k) = (0, 1, 2, \dots, k-1) \text{ a}$$

$${}_{10-k}\mathcal{S}(k) = (10-k, 10-k+1, 10-k+2, \dots, 9).$$

Každá posloupnost *posledních číslic* čísel segmentu ${}_a\mathcal{S}(39)$ zapsaných v desítkové soustavě má tedy jeden z těchto tvarů:

$${}_0\mathcal{S}(10) {}_0\mathcal{S}(10) {}_0\mathcal{S}(10) {}_0\mathcal{S}(9),$$

$${}_1\mathcal{S}(9) {}_0\mathcal{S}(10) {}_0\mathcal{S}(10) {}_0\mathcal{S}(10),$$

.....

$${}_t\mathcal{S}(10-t) {}_0\mathcal{S}(10) {}_0\mathcal{S}(10) {}_0\mathcal{S}(10) {}_0\mathcal{S}(t-1) \text{ pro } 2 \leq t \leq 8,$$

.....

$${}_9\mathcal{S}(1) {}_0\mathcal{S}(10) {}_0\mathcal{S}(10) {}_0\mathcal{S}(10) {}_0\mathcal{S}(8).$$

Proto každá z těchto posloupností obsahuje posloupnost

$${}_0\mathcal{S}(10) {}_0\mathcal{S}(10) {}_0\mathcal{S}(10) = (0, 1, 2, \dots, 8, 9, 0, 1, 2, \dots, 8, 9, 0, 1, 2, \dots, 8, 9).$$

To jsou poslední číslice segmentu, který označíme

$${}_m\mathcal{S}(30) = (m, m+1, m+2, \dots, m+29).$$

Nyní uvažujme příslušnou posloupnost *číslí*

$$(k_1, k_2, k_3, \dots, k_9, k_{10}, k_{11}, k_{12}, k_{13}, \dots, k_{19}, k_{20}, k_{21}, k_{22}, k_{23}, \dots, k_{29}, k_{30}),$$

které jsou v tomto zápisu čísel příslušného segmentu ${}_m\mathcal{S}(30)$ na předposledním místě. Je-li $k_1 = k \neq 9$, je příslušná posloupnost párů posledních číslic

$$(k\ 0, k\ 1, k\ 2, k\ 3, \dots, k\ 9, k+1\ 0, k+1\ 1, k+1\ 2, \dots, k+1\ 9, \dots, k_{29}\ 8, k_{30}\ 9).$$

Mimochodem, zde $k_{29} = k_{30} = 0$ nebo $k+2$ v závislosti na tom, zda $k = 8$, nebo $k \neq 8$. Omezme se na prvních 20 čísel tohoto segmentu a označme $\sigma(m) = N$. Potom posloupnost

$$(\sigma(m), \sigma(m+1), \dots, \sigma(m+9), \sigma(m+10), \sigma(m+11), \dots, \sigma(m+19)) = \\ = (N, N+1, \dots, N+9, N+1, N+2, \dots, N+10),$$

a proto mezi těmito čísly musí být číslo dělitelné 11.

Jestliže $k_1 = k = 9$, pak $k_{11} \neq 9$ a předešlý postup aplikujeme na posloupnost $(k_{11}, k_{12}, \dots, k_{30})$. Tím je dokázáno, že v dekadickém případě každý segment délky 39 obsahuje číslo, jehož součet číslic, tj. σ -hodnota je násobek 11.

Dodejme ještě, že kromě segmentu

$${}_{999981}\mathcal{S}(38) = (999981, \dots, 1000018)$$

zmíněného v zadání úlohy, kdy σ -hodnota žádného z jeho prvků není násobkem 11, je takových segmentů délky 38 nekonečně mnoho. Čtenář se může přesvědčit, že pro každé $t = 0, 1, 2, \dots$,

$${}_{99\dots 9981}\mathcal{S}(38) = (99\dots 9981, \dots, 100\dots 0018),$$

kde počet devítek (a příslušných nul) je $11t+4$, má tuto vlastnost. Tedy $\text{Min}(10) = 39$.

Solution of Problem 2

The solution presented in the first part is a special case of the general situation where the numbers are expressed in base- z numeral system. Let us express in English the general problem that we want to solve.

Problem 2

For a given base z find the minimum number M_z satisfying the condition that every sequence of M_z consecutive non-negative integers contains a number x such that $\sigma_z(x)$ of the digits of x in the base- z system is divisible by the number $z+1$.

In the following, we denote M_z by $\text{Min}(z)$.

Following the first part of the article, denote by ${}_a\mathcal{S}(d)$ the sequence of d consecutive numbers starting with the number a and call it a segment. Let us call the segment ${}_a\mathcal{S}(z)$ a *basic z -sequence* if the starting number a is divisible by z . Thus in the base- z form (1) of the numbers of this segment only last digits change, running from 0 to $z - 1$. The σ_z -values (3) of these numbers are also consecutive numbers.

We begin the solution of the problem with a few preliminary observations.

Observation 1. *A basic z -sequence contains a number whose σ_z -value is divisible by $z + 1$, unless it starts with a number whose σ_z -value has a remainder 1 when divided by $z + 1$.*

Let ${}_a\mathcal{S}(z)$ be a basic z -sequence and let $\sigma_z(a) = k$. Then the σ_z -values of the numbers in ${}_a\mathcal{S}(z)$ form a sequence ${}_k\mathcal{S}(z) = (k, k + 1, \dots, k + z - 1)$. Among the $z + 1$ consecutive numbers $k - 1, k, \dots, k + z - 1$, exactly one is divisible by $z + 1$; this number lies in ${}_k\mathcal{S}(z)$ if and only if $k - 1$ is not a multiple of $z + 1$.

Observation 2. *Let ${}_a\mathcal{S}(2z)$ be a sequence consisting of two consecutive basic z -sequences, where $a = (a_s a_{s-1} \dots a_2 a_1 0)_z$. If $a_1 < z - 1$, then ${}_a\mathcal{S}(2z)$ contains a number whose σ_z -value is divisible by $z + 1$.*

In this case ${}_a\mathcal{S}(2z) = {}_a\mathcal{S}(z)_{a+z}\mathcal{S}(z)$, where $a + z = (a_s a_{s-1} \dots a_2 a_1 + 10)_z$, so $\sigma_z(a + z) = \sigma_z(a) + 1$. Therefore, by Observation 1, either ${}_a\mathcal{S}(z)$ or $_{a+z}\mathcal{S}(z)$ contains a number with σ_z -value divisible by $z + 1$.

Observation 3. *If z is odd, then in any sequence ${}_a\mathcal{S}(2z)$ consisting of two consecutive basic z -sequences, there is a number with σ_z -value divisible by $z + 1$.*

Let $a = (a_s a_{s-1} \dots a_2 a_1 0)_z$ be the starting number of the first sequence. By Observation 2, the statement is true if $a_1 < z - 1$. Thus, it suffices to consider the case where

$$a = (a_s \dots a_{k+1}(z - 1) \dots (z - 1)0)_z$$

for some $k > 0$, where $a_{k+1} < z - 1$. Then the starting number of the second basic z -sequence is

$$a + z = (a_s \dots a_{k+2}(a_{k+1} + 1)0 \dots 0)_z.$$

Thus, $\sigma_z(a+z) - \sigma_z(a) = -k(z-1) + 1$. But this is an odd number, so it cannot be divisible by $z+1$. Hence $\sigma_z(a)$ and $\sigma_z(a+z)$ yield different remainders when divided by $z+1$. It now follows from Observation 1 that at least one of ${}_a S(z)$ and ${}_{a+z} S(z)$ contains a number with σ_z -value divisible by $z+1$.

Based on these observations, we can deduce the following statement.

Corollary. *Any sequence of $4z-1$ consecutive numbers contains a number with σ_z -value divisible by $z+1$. In fact, if z is odd, then any sequence of $3z-1$ consecutive numbers contains a number with σ_z -value divisible by $z+1$.*

Indeed, a sequence of $4z-1$ consecutive numbers must contain three consecutive basic z -sequences (otherwise the length of the sequence could not be greater than $(z-1)+2z+(z-1) = 4z-2$), and at least one of the first and second of these sequences would start with a number satisfying the condition for Observation 1. When z is odd then we can do even better: a sequence of $3z-1$ numbers contains at least two consecutive basic z -sequences and thus following Observation 3, there is a number in the sequence whose σ_z -value is divisible by $z+1$.

Now we want to show that these are actually the minimum values we are looking for.

Theorem.

$$\text{Min}(z) = \begin{cases} 4z-1 & \text{if } z \text{ is even,} \\ 3z-1 & \text{if } z \text{ is odd.} \end{cases}$$

Let us first consider the case where z is odd. As a counterexample we need a sequence ${}_{a-z+1} S(3z-2) = {}_{a-z+1} S(z-1) {}_a S(z) {}_{a+z} S(z-1)$, where $a = (a_s \dots a_1 0)_z$ and the remainder of $\sigma_z(a)$ by $z+1$ is 1 (see Observations 3 and 1). Actually, ${}_1 S(3z-2) = (1, 2, \dots, 3z-2)$ is such a sequence and the table below shows that none of the σ_z -values are divisible by $z+1$.

a	1	$\dots$	$z-1$	z	$\dots$	$(2z-1)$	$2z$	$\dots$	$3z-2$
in base z	$\bar{1}$	$\dots$	$\overline{(z-1)}$	$\overline{10}$	$\dots$	$\overline{1(z-1)}$	$\overline{20}$	$\dots$	$\overline{2(z-2)}$
$\sigma_z(a)$	1	$\dots$	$z-1$	1	$\dots$	z	2	$\dots$	z

In fact, if we choose $0 < a_1 < z-1$, while assuring that $\sigma_z(a)$ has a remainder 1 by $z+1$, then the σ_z -values of the numbers in the sequence

will still have the same remainders as above and thus those sequences will also be counterexamples.

Suppose now that z is even and let us try to construct a sequence of $4z - 2$ consecutive numbers such that the σ_z -value of none of these numbers is divisible by $z + 1$. By Observation 2, this sequence of numbers must not contain more than two consecutive basic z -sequences. Hence it contains exactly two such sequences, which are preceded and followed by $z - 1$ numbers. Furthermore, the two basic z -sequences must start with a and $a + z$ such that $\sigma_z(a)$ and $\sigma_z(a + z)$ both give remainder 1 when divided by $z + 1$, otherwise Observation 1 would ensure the existence of a number with σ_z -value divisible by $z + 1$. So a must be of the form described in the proof of Observation 3. With the notation used there, we have $\sigma_z(a + z) - \sigma_z(a) = -k(z - 1) + 1$. The divisibility conditions imply that both this and $\sigma_z(a + z) - 1 = a_s + \dots + a_{k+1}$ should be divisible by $z + 1$. The first is equivalent to saying that

$$(z + 1) \mid -k(z - 1) + 1 + k(z + 1) = 2k + 1,$$

and clearly, $k = \frac{z}{2}$ satisfies this. The easiest way to satisfy the second divisibility condition is to set $a_s = \dots = a_{k+1} = 0$. So we choose the sequence

$$_{a-z+1}S(4z - 2) = _{a-z+1}S(z - 1)_aS(z)_{a+z}S(z)_{a+2z}S(z - 1)$$

with $a = ((z - 1) \dots (z - 1)(z - 1)0)_z$, where the number of the digits equal to $(z - 1)$ is $k = \frac{z}{2}$. Now we need to check that also the σ_z -values of the numbers in the “incomplete” subsequences $_{a-z+1}S(z - 1)$ and $_{a+2z}S(z - 1)$ are not divisible by $z + 1$. The first number of the sequence $_{a-z+1}S(z - 1)$ is $a - z + 1 = ((z - 1) \dots (z - 1)(z - 2)1)_z$, and thus

$$\sigma_z(a - z + 1) = \left(\frac{z}{2} - 1\right)(z - 1) + (z - 2) + 1 = \frac{z}{2}(z - 1) = \sigma_z(a).$$

Since $\frac{z}{2}(z - 1) = (z + 1)\left(\frac{z}{2} - 1\right) + 1$, the remainder of both $\sigma_z(a)$ and of $\sigma_z(a - z + 1)$ is 1 when divided by $z + 1$. Furthermore, $a + z = z^{k+1} = (1 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0 \ 0)_z$, and $a + 2z = z^{k+1} + z = (1 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1 \ 0)_z$, with σ_z -values 1 and 2. Thus the remainder terms of the σ_z -values of the $4z - 2$ numbers are

$$(1, \dots, z - 1)(1, \dots, z)(1, \dots, z)(2, \dots, z).$$

This shows that neither of the σ_z -values of the $4z - 2$ consecutive numbers in $_{a-z+1}S(4z - 2)$ is divisible by $z + 1$.

As a concrete illustration, consider the case where $z = 60$. To find a counterexample in this case, we need numbers that have at least 32 digits (in base 60) and at least 56 digits in the decimal system. To be more specific, using the following standard way of denoting the digits in the sexagesimal system

1	2	3	4	5	6
7	8	9	$A = 10$	$B = 11$	$C = 12$
...	...	...	...	...	...
$V = 31$	$W = 32$	$X = 33$	$Y = 34$	$Z = 35$	$a = 36$
$b = 37$	$c = 38$	$d = 39$	$e = 40$	$f = 41$	$g = 42$
...	...	...	...	...	...
$t = 55$	$u = 56$	$v = 57$	$w = 58$	$x = 59$	0

we may display the situation in the following table:

[illegible]

Table 1 The segment of the length 238 in the sexagesimal system and the translation into the decimal system

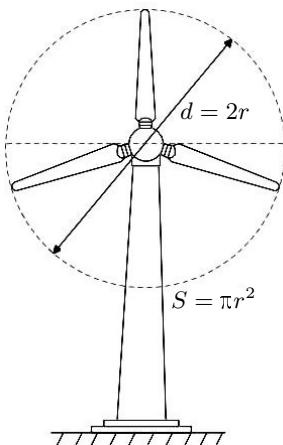
Energie větru

Oldřich Lepil, Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

Větrné elektrárny jako alternativní zdroje elektrické energie jsou v současnosti ve středu pozornosti celé společnosti. Dříve to byly hlavně tepelné elektrárny, které pracují na základě termodynamických zákonů. O nich víme, že cyklus takového tepelného stroje má svoje omezení, která určují účinnost přeměny tepla na mechanickou energii. V tomto příspěvku se podíváme, zda existují obdobná omezení účinnosti přeměny energie proudícího vzduchu na mechanickou energii pro pohon elektrárny.

Určíme energii větru a posoudíme možnost její přeměny na energii otáčivého pohybu soustrojí větrné elektrárny. Budeme uvažovat větrnou elektrárnu, jejíž rotor má průměr $d = 2r$, takže účinná plocha S rotoru větrné elektrárny, kterou proudí vzduch, bude $S = \pi r^2$ (obr. 1). Vzduch má hustotu ρ a výpočet provedeme pro rovnoměrný pohyb vzduchu stálou rychlostí v . Jestliže vzduch urazí za dobu Δt dráhu Δs , bude hmotnost vzduchu, který projde účinnou plochou rotoru, $m = \rho S \Delta s$ a celková kinetická energie vzduchu je

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\rho S \Delta s v^2.$$



Obr. 1

Pokud by veškerou tuto energii bylo možné využít, získali bychom výkon

$$P = \frac{E_k}{\Delta t} = \frac{1}{2} \rho S \frac{\Delta s}{\Delta t} v^2 = \frac{1}{2} \rho S v^3.$$

Z tohoto vztahu je zřejmé, že pro využití větrné energie je rozhodující rychlost větru. Kdybychom uvažovali např. průměrnou rychlost větru v České republice ve výšce 10 m nad zemí, která je $4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, byl by při hustotě vzduchu $\rho = 1,2 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ výkon připadající na 1 m^2 účinné plochy rotoru $P/S = 0,6 v^3 \approx 38 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$ (veličina se označuje jako hustota výkonu). Větrné elektrárny se budují v lokalitách, kde je průměrná rychlost větru alespoň $6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, a tomu odpovídá hustota výkonu $130 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$, tedy téměř 3,5krát větší.

Výkon větrné elektrárny ovlivňuje také hustota vzduchu, která se v místě elektrárny může měnit v závislosti na změnách tlaku a teploty vzduchu. Pro určení hustoty vzduchu vyjdeme ze stavové rovnice ideálního plynu ve tvaru

$$pV = \frac{m}{M_m} RT,$$

kde $M_m = 29 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$ je efektivní molární hmotnost vzduchu. Pro hustotu vzduchu pak platí vztah

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{M_m}{R} \frac{p}{T} = \frac{1}{287} \frac{p}{T},$$

kde p je tlak vzduchu v pascalech a T je termodynamická teplota vzduchu v kelvinech. V blízkosti povrchu Země lze při zjednodušených výpočtech uvažovat již uvedenou přibližnou hodnotu hustoty vzduchu $1,2 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

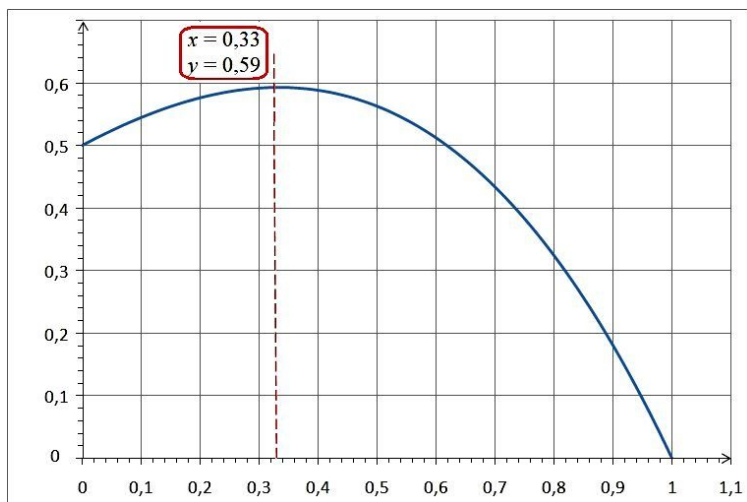
V praxi je však možné využít jen podstatně menší část energie větru. Tímto problémem se ve 20. letech 20. století zabýval rakouský inženýr *Albert Betz* (1885–1968), který zkoumal možnost využití energie větru k pohonu. Jestliže např. plochou rotoru proudí vzduch rychlostí v_1 (vstupní rychlost), předává mu část energie a rychlost vzduchu se zmenší na rychlost v_2 (výstupní rychlost). Můžeme uvažovat, že vzduch zařízením proudí průměrnou rychlostí $\bar{v} = (v_1 + v_2)/2$ a hmotnost vzduchu, který projde rotorem za jednotku času, čili *hmotností tok* vzduchu je $\bar{m} = \rho S \bar{v}$. Na vstupu elektrárny má vzduch energii $E_{k1} = \frac{1}{2} \bar{m} v_1^2$ a na výstupu energii $E_{k2} = \frac{1}{2} \bar{m} v_2^2$. Je tedy možné získat energii

$$\Delta E = E_{k1} - E_{k2} = \frac{1}{2} \bar{m} (v_1^2 - v_2^2) = \frac{1}{2} \rho S \cdot \frac{1}{2} (v_1 + v_2) (v_1^2 - v_2^2).$$

Důležité však je, jak tato energie závisí na poměru obou rychlostí. Označíme x poměr rychlostí ($x = v_2/v_1$) a

$$y = \frac{1}{2}(v_1 + v_2)(v_1^2 - v_2^2) = \frac{1}{2}v_1^3(1 - x^2 + x - x^3).$$

Na obr. 2 je graf závislosti $y = f(x)$, z něhož je patrné, že veličina y dosahuje maxima při hodnotě $x = 0,33$, tedy když rychlost na vstupu zařízení je 3krát větší než na výstupu ($v_2/v_1 = 1/3$).



Obr. 2

Provedeme výpočet veličiny y pro tento poměr rychlostí, při němž se maximální část energie větru přemění na rotační energii:

$$y = \frac{1}{2}v_1^3(1 - x^2 + x - x^3) = \frac{1}{2}v_1^3\left(1 - \frac{1}{9} + \frac{1}{3} - \frac{1}{27}\right) = \frac{16}{27}v_1^3 \doteq 0,59 v_1^3.$$

Odtud vyplývá, že maximální výkon zařízení využívajícího energii větru je

$$P_{\max} \doteq 0,59 \cdot \frac{1}{2}\rho S v_1^3.$$

Tento vztah se označuje také jako *Betzovo pravidlo*. Maximální dosažitelná hustota výkonu při rychlosti větru v je s ohledem na Betzovo pravidlo dána vztahem

$$\frac{P_{\max}}{S} \approx 0,35v^3.$$

Teoretická největší účinnost zařízení využívajících energii proudícího vzduchu je tedy necelých 60 % celkové kinetické energie vzduchu. Ani nejmodernější systémy současných větrných elektráren však této účinnosti nedosahují, poněvadž dochází k dalším ztrátám energie. Jsou to jednak ztráty v mechanickém soustrojí elektrárny, jednak ztráty v elektrických obvodech generátoru a při transformaci výstupního napětí elektrárny. To způsobuje, že větrné elektrárny využívají přibližně jen 30 % až 45 % energie větru.

Například větrná elektrárna v ČR u obce Pchery má rotor o průměru 100 m a jeho osa je ve výšce 88 m. Startovní rychlost větru je $4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, jmenovitá rychlost $12,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ a vypínací rychlost $22 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Jmenovitý výkon elektrárny je 3 032 kW. Energie větru při jmenovité rychlosti a hustotě vzduchu $\rho = 1,2 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ je

$$P = \frac{1}{2} \rho S v^3 \approx 9\,400 \text{ kW}.$$

Vzhledem k jmenovitému výkonu elektrárny je využito přibližně jen 32 % energie větru, což je 56 % maximálně využitelné energie určené Betzovým pravidlem.

Dosud jsme si všímali jen změn rychlosti proudění vzduchu před vrtulemi rotoru elektrárny a za rotorem, přičemž $v_2 < v_1$. Současně budeme předpokládat, že vzduch proudí plochou rotoru průměrnou rychlostí $\bar{v}$. To znamená, že podle zákona zachování energie, vyjádřeného Bernoulli-ovou rovnicí, dochází v místě rotoru k poklesu tlaku vzduchu Δp . Tomu odpovídá vznik tahové síly T rotoru, která je dána rozdílem tlaků těsně před rotorem a za ním. Má velikost $T = \Delta p S$, kde S je plocha rotoru. Tahovou sílu lze současně vyjádřit na základě 2. Newtonova pohybového zákona jako změnu hybnosti vzduchu, který prošel rotorem za jednotku času, čili $T = \bar{m}(v_1 + v_2)$, kde $\bar{m}$ je hmotnostní tok vzduchu. Nejvíce nás však zajímá výkon P , který lze prouděním vzduchu rotorem získat:

$$P = \frac{1}{2} \bar{m} (v_1^2 - v_2^2).$$

Pro posouzení vlivu rychlosti větru na tahovou sílu rotoru a výkon elektrárny se zavádí bezrozměrová veličina, *axiální indukční faktor* a . Je definován vztahem

$$a = \frac{v_1 - \bar{v}}{v_1},$$

takže $\bar{v} = v_1(1-a)$ a $v_2 = v_1(1-2a)$. S použitím součinitele a vyjádříme velikost tahové síly

$$T = 2\bar{m}v_1a(1-a)$$

a výkon

$$P = 2\bar{m}v_1^2a(1-a)^2.$$

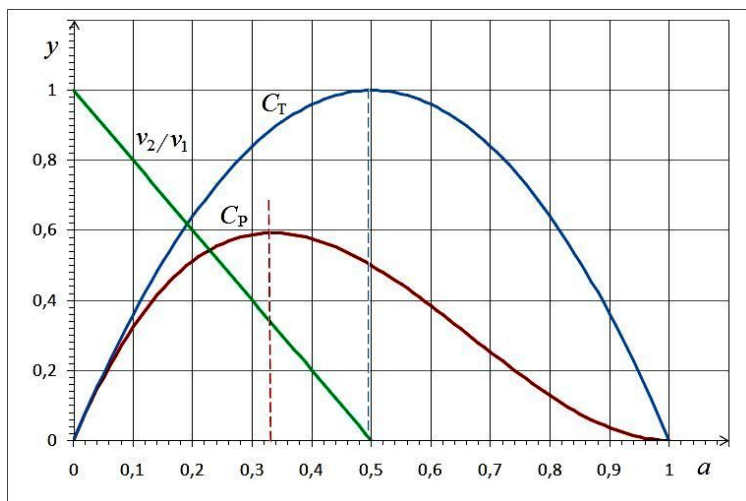
Porovnáme tahovou sílu s maximální hodnotou danou dynamickým tlakem vzduchu proudícího rychlostí v_1

$$T_{\max} = \frac{1}{2}\rho S v_1^2 = \frac{1}{2}\bar{m}v_1.$$

a definujeme veličinu *tahový součinitel* C_T

$$C_T = \frac{T}{T_{\max}} = \frac{2\bar{m}v_1a(1-a)}{\frac{1}{2}\bar{m}v_1} = 4a(1-a).$$

Graf součinitele tahu $C_T = f(a)$ je na obr. 3.



Obr. 3

Optimální rychlosti $\bar{v}$ proudění vzduchu rotorem odpovídá maximum této funkce, kterou určíme anulováním její derivace

$$\frac{dC_T}{da} = \frac{d}{da} [4a(1-a)] = 4 - 8a = 0 \implies a = 0,5.$$

Z výsledku vyplývá, že maximální tahové síly lze dosáhnout v případě, že rotorem protéká vzduch poloviční rychlostí, než je rychlost volně proudícího vzduchu ($\bar{v} = 0,5v_1$). Při této hodnotě součinitele a má poměr rychlostí v_2/v_1 nulovou hodnotu (viz zeleně na obr. 3) a při větších hodnotách a je poměr rychlostí záporný, což postrádá fyzikální smysl. Proto hodnotou $a = 0,5$ také končí platnost Betzova pravidla (tzv. *Betzův limit*).

Obdobnou úvahou porovnáme celkový výkon volně proudícího vzduchu

$$P_{\max} = \frac{1}{2} \rho S v \cdot v^2 = \frac{1}{2} \bar{m} v^2$$

s výkonem P a určíme *výkonový součinitel* C_P

$$C_P = \frac{P}{P_{\max}} = 4a(1 - a)^2.$$

Závislost $C_P = f(a)$ je rovněž na obr. 3. Vidíme, že maximum dosahuje při menší hodnotě a a tedy při menší rychlosti. To opět zjistíme určením maxima:

$$\frac{dC_P}{da} = \frac{d}{da} [4a(1 - a)^2] = 1 - 4a + 3a^2 = 0 \implies a \in \{1, 1/3\}.$$

Pro $a = 1/3$ platí

$$C_{P_{\max}} = \frac{4}{3} \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{16}{27} \doteq 0,593.$$

Výsledek odpovídá Betzovu pravidlu, odvozenému v první části příspěvku.

Dospěli jsme k závěru, že tahová síla rotoru větrné elektrárny závisí na druhé mocnině rychlosti větru a průměru rotoru a na součiniteli tahu. Snahou je minimalizovat tah rotoru pro danou rychlost větru a průměr motoru, tzn. pro co nejmenší hodnoty C_T . Výkon elektrárny závisí na třetí mocnině rychlosti větru, na druhé mocnině průměru rotoru a na součiniteli C_P .

Literatura

- [1] Aerodynamics_Presentation.pdf (nd.edu).
- [2] 2a.1 The Actuator Disk Model | AERSP 583: Wind Turbine Aerodynamics (psu.edu).
- [3] Physics of Wind Turbines | Energy Fundamentals (uni-leipzig.de).

Věda vs. konspirace: Proč se vlastně zdržovat vědou?

Leontýna Šlégrová, Jan Šlégr

Přírodovědecká fakulta Univerzity Hradec Králové

Abstrakt. Jak poznat rozdíl mezi vědeckou teorií a konspiračním tvrzením? V článku ukazujeme, že vědecké teorie musí být v souladu s ověřenými poznatky, jejich výsledky musí být možné nezávisle zopakovat a procházejí přísným recenzním řízením. Na příkladech teorií duté Země, studené fúze nebo údajného supravodiče LK-99 ukazujeme, proč je reprodukovatelnost klíčem k potvrzení objevů. Zároveň upozorňujeme na rozdíl mezi skutečnými odbornými časopisy a publikacemi, které otiskují „zázračné“ výsledky bez kritické kontroly.

Úvod

V předchozích dvou dílech našeho seriálu jsme se zabývali tím, že konspirační teorie často neuspějí při experimentálním ověřování jejich tvrzení a také tím, že konspirační teorie často ani experimentálně ověřit nejde – jsou často formulovány tak, aby nebyly falzifikovatelné. V tomto díle se podíváme na další vlastnosti skutečných vědeckých teorií, které konspirační teorie často postrádají.

Konzistence s existujícími poznatky

Tvrzení konspiračních teorií často nejsou v souladu s obecně uznávanými teoriemi (což jsme viděli již na příkladu ploché Země). Poučený čtenář by mohl namítnout, že například taková speciální teorie relativity přece také byla v rozporu s do té doby uznávanou newtonovskou fyzikou, a přesto bylo experimentálně dokázáno, že je správná. Ovšem speciální teorie relativity není s newtonovskou fyzikou v rozporu – pro malé rychlosti její popis reality přechází v popis klasický: Lorentzův faktor se pro malé rychlosti blíží jedničce:

$$\lim_{v \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 1.$$

Relativistické rovnice pak přecházejí v rovnice, které známe z klasické (newtonovské) fyziky.

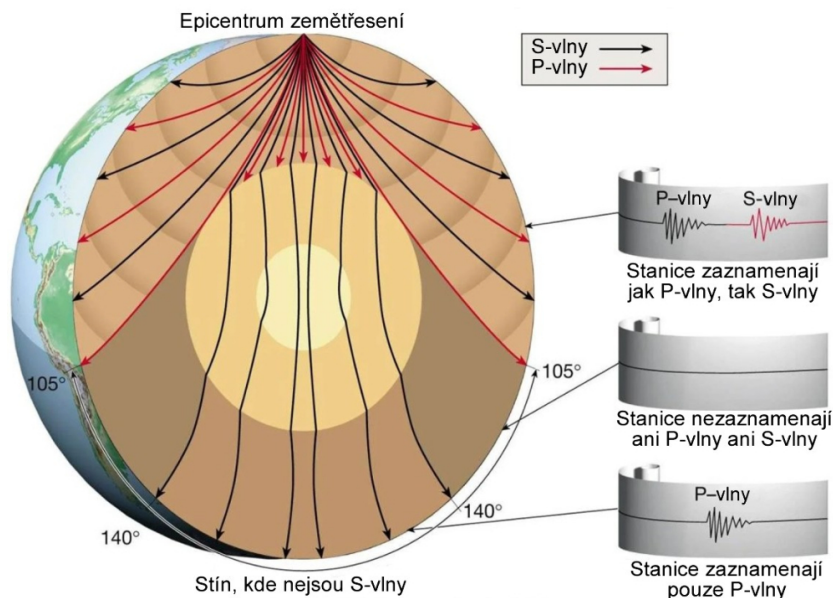
Protože teorii ploché Země, která je v příkrém rozporu s klasickou astronomií, geofyzikou, gravimetrií, optikou a leccím dalším, jsme už řešili, ukážeme si výše uvedené na příkladu jiné konspirační teorie o tvaru naší planety, a sice na teorii *duté Země*.

Myšlenka duté Země se poprvé objevila v 17. století, kdy se Edmund Halley snažil vysvětlit anomálie v magnetickém poli, zejména magnetickou deklinaci (že kompas na různých místech neukazuje přesně k zeměpisným pólům Země) a to, že se magnetické póly Země pohybují. Navrhl hypotézu, že je Země tvořena několika soustřednými kulovými vrstvami, které jsou odděleny dutinami, a z nichž každá má své vlastní magnetické pole. Podle Halleyho se tyto vrstvy mohou nezávisle otáčet, což by vysvětlovalo pomalé posuny magnetických pólů a složitý charakter magnetického pole [1]. To byla ve své době naprosto přijatelná hypotéza, protože v té době ještě neexistovala seismologie, která by popsala nitro Země, ani geofyzikální modely jádra, které popisují vznik magnetického pole Země. Koneckonců, gravitační měření hustoty Země provedl Cavendish až v roce 1798. Halleyho hypotéza nebyla konspirační – byla založena na tehdy dostupných datech.

Situace se změnila v 19. století, kdy John Cleves Symmes propagoval teorii tzv. „polárních otvorů“, kterými by bylo možné vstoupit do nitra planety, a kdy vznikla i komunita kolem představy Cyruse Teeda, který jako první tvrdil, že lidé ve skutečnosti žijí uvnitř duté Země. Pro někoho, kdo je seznámen se základními myšlenkami ploché Země, to není nic nepředstavitelného – prostě žijeme na vnitřním povrchu koule a to, čemu říkáme vesmír, je jakýsi mlžný oblak se dvěma většími tělesy (Sluncem a Měsícem), který se otáčí uprostřed kulové dutiny. Později vznikly různé okultní teorie, v nichž např. německé společnosti jako Vríl a Thule kombinovaly myšlenky duté Země s mysticismem, ztracenými civilizacemi a energetickými zdroji. Jacques Bergier ve své knize *Jitro kouzelníků* [2] dokonce píše, že za druhé světové války němečtí vědci zaměřovali radarové vlny tak, aby se odrazily od vnitřního povrchu planety a umožnily sledovat objekty na opačné straně Země. Toto tvrzení však není doloženo žádnými historickými prameny ani technickými údaji a většina historiků ho považuje za Bergierovu fabulaci. Neexistuje žádný důkaz, že by Wehrmacht či SS vyvíjeli technologii založenou na modelu duté Země.¹⁾

¹⁾ V tuto chvíli jsme z jedné konspirační teorie plynule přešli do druhé; to se občas stane. Berme to ale rovněž jako ukázkou toho, že nesmysly nemusí být jen na Internetu, ale i v tištěných knihách.

Moderní věda poskytuje jednoznačné důkazy, že Země dutá není: Seismologie využívá zemětřesné vlny k určení struktury naší planety. Seismologie nám umožňuje zjistit vnitřní stavbu Země díky analýze šíření seizmických vln, které vznikají při zemětřeseních nebo umělých explozích. Existují dva hlavní typy vln: P-vlny (primární, podélné) se šíří stlačováním a rozpínáním hornin a dokážou procházet pevnými, kapalnými i plynnými látkami, zatímco S-vlny (sekundární, příčné) se šíří kmitáním kolmo na směr pohybu a neprocházejí kapalinami. Měřením rychlosti, odrazů a lomů těchto vln v různých hloubkách dokážeme určit, kde se mění hustota a složení hornin (viz obr. 1). Pokud například S-vlny určitou oblastí vůbec neprocházejí, znamená to, že tam musí být kapalně prostředí.



Obr. 1: P-vlny a S-vlny při průchodu Zemí. Původní obrázek © Pearson Prentice Hall, Inc.

Díky této metodě vědci zjistili, že Země má vrstvenou strukturu: tenkou kůru, silný plášť, kapalně vnější jádro a pevné vnitřní jádro. Klíčové objevy přinesl Richard Oldham (1906), který z absence S-vln usoudil,

že Země musí mít kapalné vnější jádro, a Inge Lehmann (1936), jež objevila pevné vnitřní jádro podle odrazů P-vln. Kdyby byla Země dutá, seizmické vlny by se chovaly zcela jinak – vznikaly by rozsáhlé tiché zóny a naměřené signály by se zásadně lišily od toho, co dnes pozorujeme. Navíc gravitační měření dokazují, že hustota Země činí asi $5\,500\text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$, což by bylo u duté planety nemožné.

Ke stejnému výsledku lze dojít také z oběhu Měsíce kolem Země (samozřejmě pokud předpokládáme, že Měsíc obíhá kolem téměř kulové Země): Gravitační síla, kterou Země působí na Měsíc, je silou dostředivou, která jej udržuje na kruhové trajektorii:

$$M_M \frac{v^2}{r} = G \frac{M_Z M_M}{r^2}.$$

Hmotnost orbitujícího tělesa se zkrátí (takže hmotnost Měsíce nemusíme znát) a ze známé doby oběhu (27,3 dne) a obvodu oběžné dráhy (uvažujeme kružnici s poloměrem 384 000 km) určíme hmotnost Země:

$$M_Z = \frac{v^2 r}{G} = \frac{(2\pi r)^2 r}{GT^2} = \frac{4\pi^2 r^3}{GT^2} \doteq 6,02 \cdot 10^{24}\text{ kg}.$$

Pokud budeme uvažovat Zemi jako kouli o poloměru 6 371 km, získáme hustotu

$$\rho = \frac{M_Z}{\frac{4}{3}\pi R_Z^3} \doteq 5\,500\text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}.$$

Máme tedy několik nezávislých důkazních linií, které směřují ke stejnému závěru: Země má vrstvenou strukturu. Magnetické pole navíc vzniká v kapalném vnějším jádru, což koncept duté Země vylučuje. Současná geofyzika tak poskytuje konzistentní model, který experimentálně vyvrací všechny varianty teorie.

Reprodukovatelnost výsledků

Na první pohled to vypadá jako samozřejmost, ale pokud máme teorii, která něco předpovídá, musí být daný postup nebo experiment nezávisle reprodukovatelný dalšími výzkumníky.

Například teorie ploché Země v jedné ze svých variant pracuje s tím, že Slunce ve skutečnosti nezapadá (kam by taky zapadalo na ploché Zemi, že), ale že se od pozorovatele pouze vzdaluje. To dokládají různými obrázky a videi, kdy pomocí zoomu fotoaparátu „vytáhnou“ Slunce zpoza obzoru, případně ukazují, že večer má Slunce jinou velikost než přes den.

Autoři tohoto článku se pokusili jejich tvrzení ověřit a pomocí fotoaparátu s astronomickou solární fólií zjistili, že se velikost slunečního disku během dne nemění (i když během západu může být deformován vlivem lomu světla v atmosféře) a že ani 125násobným zoomem není možné Slunce u obzoru najít, jakmile jednou zapadne.

Tento požadavek je standardní součástí vědecké práce: Např. v březnu 1989 oznámili chemici Martin Fleischmann a Stanley Pons z University of Utah, že dosáhli studené fúze – jaderné reakce uvolňující energii při pokojové teplotě. Aby lehčí jádra sfúzovala na jádra těžší, je potřeba překonat elektrostatickou sílu, která je odpuzuje. Pokud se jádra dostanou dostatečně blízko k sobě, převáží silná jaderná síla a dojde ke sloučení jader a uvolnění energie. Proto fúzní reakce probíhají za vysokých teplot, kdy mají částice takovou rychlost, že se dokáží dostat blízko k sobě alespoň na tak dlouho, aby silná síla převážila předtím, než částice rozežene elektrostatická síla. Ve hvězdách se to děje tak nějak automaticky, na Zemi jsou k tomu potřeba složitá zařízení, jako je např. tokamak. Proto by studená fúze byla revolučním zdrojem energie. Fleischmann a Pons tvrdili, že v elektrolytickém článku s palladiovou elektrodou a těžkou vodou (D_2O) naměřili nadbytečné teplo a produkty jaderné reakce, zejména neutrony, což by znamenalo, že skutečně dochází k jaderným reakcím.

Krátce po zveřejnění proběhly desítky nezávislých pokusů, ale většina laboratoří nedokázala výsledky zopakovat. Další analýzy ukázaly, že pozorované efekty lze vysvětlit chybami měření a chemickými procesy, nikoli jadernou fúzí.

Případ způsobil obrovský mediální rozruch, ale vědecká komunita jej nakonec odmítla, protože reprodukovatelnost je základním kritériem potvrzení objevů.

K podobné situaci došlo poměrně nedávno: V červenci 2023 korejský tým vedený Sukbaem Lee a Ji-Hoonem Kimem zveřejnil objev materiálu LK-99, který se chová jako supravodič za pokojové teploty a normálního tlaku [3]. Jako supravodiče označujeme materiály, které mají nulový elektrický odpor, což je velmi užitečná vlastnost pro energetiku – např. v urychlovači LHC v CERNu se používají supravodivé vodiče z niobu a titanu (NbTi), které pracují při teplotě asi 1,9 K a umožňují vést proudy kolem 12 kA bez odporu a ztrát tepla. Pokud bychom chtěli stejný proud vést běžným měděným vodičem při pokojové teplotě, musel by mít obrovský průřez – pro ztráty jen 1 kW na kilometr by vycházel průřez asi $2,5 \text{ m}^2$, tedy kabel o průměru přibližně 1,8 metru. Jinak by docházelo

k masivním tepelným ztrátám. Díky supravodivosti mohou mít vodiče v LHC mnohem menší průměr.

Všechny známé supravodiče však mají jedno společné – fungují pouze při velmi nízkých teplotách. Některým stačí chlazení kapalným dusíkem na 77 K, ale jiné vyžadují ještě nižší teploty, dosažitelné jen pomocí kapalného helia. Proto by supravodič fungující za pokojové teploty znamenal energetickou revoluci. O to větší rozruch vyvolal LK-99, složený z běžně dostupných prvků (olovo, měď, fosfor a kyslík).



Obr. 2: Údajná levitace vzorku materiálu LK-99 (<https://en.wikipedia.org/wiki/LK-99>)

Autoři publikovali na serveru arXiv dva články, v nichž uváděli, že pozorovali nulový odpor a částečnou levitaci vzorků v magnetickém poli – typický znak supravodivosti – a navíc přidali i návod na syntézu materiálu. Desítky laboratoří po celém světě se proto okamžitě pustily do pokusů o reprodukci výsledků. Během několika týdnů se ale ukázalo, že tvrzení nejsou správná: většina nezávislých týmů místo supravodivosti naměřila chování typické pro polovodiče nebo izolanty. Podrobné analýzy nakonec ukázaly, že zvláštní magnetické projevy LK-99 souvisely s přítomností nečistot z fosfidu mědi (Cu_2P), který je feromagnetický, a že původní experimenty měly metodické chyby. Do konce srpna 2023 byla hypotéza o supravodivosti LK-99 považována za vyvrácenou a případ se stal dalším příkladem, proč je nezávislá reprodukovatelnost výsledků pro vědu zásadní – podobně jako u případu studené fúze z roku 1989.

Co se týče konspiračních teorií, asi nejpopulárnější teorií, která se vzpírá nezávislému ověření výsledků, jsou různá zařízení využívající „vol-

nou energii“, tedy zařízení, která bychom bez uzardění mohli označit jako perpetuum mobile. Obvykle se objevují vědecky znějící pojmy jako nulový bod energie vakua, magnetické generátory nebo to, že jsou zařízení inspirovaná Teslovými patenty (které ale podle jiných teorií údajně skončily v trezorech zlotřilých korporací, které je před veřejností tají). Typicky jsou prezentována videa, kde se točí motory, rozsvěčují žárovky nebo napájejí spotřebiče „bez vstupní energie“. Společným znakem většiny těchto konstrukcí je, že neexistuje žádná ověřená dokumentace, publikace v recenzovaných časopisech ani nezávislé testy, které by jejich funkčnost potvrdily. Často se ukáže, že zařízení ve skutečnosti využívá skryté napájení nebo se spoléhá na akumulovanou energii, takže nedochází k žádnému porušení fyzikálních zákonů.

Z fyzikálního hlediska je problém v tom, že tato zařízení často předpokládají porušení zákona zachování energie. Podle první věty termodynamiky nelze vyrobit více energie, než do systému vstupuje, a jakékoliv zařízení, které by trvale dodávalo energii bez paliva nebo jiného zdroje, by muselo být perpetuum mobile prvního druhu – což odporuje experimentálně potvrzeným fyzikálním principům. Přesto mají „zdroje volné energie“ velký mediální i komerční ohlas. Na internetu se šíří schémata, návody a videa, ale pokud se někdo pokusí tyto konstrukce nezávisle reprodukovat, obvykle se ukáže, že zařízení nefunguje, nebo poskytuje jen zanedbatelný výkon využívající běžné fyzikální jevy. Tento fenomén ukazuje, jak důležitá je kritická analýza tvrzení a ověřování reprodukovatelnosti výsledků.

Peer review (recenzní řízení)

V předchozí kapitole jsme našli další důležitou vlastnost skutečných vědeckých teorií – vycházejí v odborných časopisech. Ty totiž před zveřejněním článku provádějí tzv. peer review – článek se pošle dvěma až třem odborníkům ze stejného oboru, kteří posoudí jeho kvalitu a metodu. Recenzenti článek obvykle dostanou anonymizovaný, aby hodnotili obsah a ne jméno autora. Proces je často dlouhý a pro autory úmorný – recenzenti mohou navrhnout rozsáhlé úpravy, nebo dokonce článek zamítnout, pokud má zásadní metodické nedostatky. To je součástí normální vědecké praxe a důvod, proč jsou publikované články považovány za ověřenější než tvrzení na blogu nebo na sociálních sítích.

V oblasti alternativní medicíny se často setkáváme s tvrzením, že popis „zázračných léků proti rakovině“ v odborných časopisech chybí kvůli spiknutí farmaceutických firem. To je typický znak konspiračních teorií:

předpokládají, že „vládnoucí elity“ záměrně tají pravdu, aby chránily své zisky. Homeopaté tento „problém“ vyřešili tak, že si založili vlastní časopisy, například *Indian Journal of Research in Homeopathy*. Ten sice tvrdí, že provádí peer review, ale recenzní proces probíhá téměř výhradně mezi zastánci homeopatie, což znamená, že kritická kontrola chybí. Časopis navíc publikuje téměř výhradně pozitivní výsledky, což je ve skutečné vědě velmi podezřelé – i účinné léky někdy nefungují tak, jak se očekávalo, a o těchto neúspěších se běžně publikují články.

Podobných časopisů je více. Například *Journal of Alternative and Complementary Medicine* otiskuje studie o homeopatii, akupunktúře nebo „energetickém léčení“, ale často bez dostatečně přísné metodiky. Další příkladem je řada predátorských časopisů, které vybírají poplatky za publikování a prakticky neprovádějí recenzní řízení – článek otisknou bez ohledu na jeho kvalitu. Oproti tomu prestižní časopisy jako *Nature*, *Science* nebo *The Lancet* požadují přísnou metodiku a zveřejňují i negativní výsledky. Například *The Lancet* v roce 2005 publikoval rozsáhlou metaanalýzu 110 klinických studií homeopatie a dospěl k závěru, že účinky homeopatie jsou srovnatelné s placebem [4]. To je dobrý příklad toho, jak se ve vědě postupuje – nespolehá se na jednotlivé „zázračné studie“, ale porovnává se větší množství dat.

Podobné rozdíly mezi vědeckým přístupem a konspiračními interpretacemi najdeme i v jiných oblastech. Například po útocích z 11. září 2001 se na internetu rozšířily stovky teorií o tom, že pád budov WTC byl způsoben řízenými explozemi, nikoli nárazem letadel. Konspirační weby často pracují se zpomalenými záběry, neověřenými svědectvími a izolovanými „důkazy“, zatímco odborné studie publikované v recenzovaných časopisech, například zprávy NIST (National Institute of Standards and Technology), analyzovaly tisíce fotografií, videozáznamů, svědectví a dat z konstrukce budov. Výsledky ukazují, že zhroutení budov bylo důsledkem kombinace strukturálního poškození a následných požárů, které oslabily nosné konstrukce [5]. Tady je dobře vidět rozdíl: zatímco vědecké publikace se snaží vyhodnotit všechna dostupná data a uvádějí i míru nejistoty, konspirační teorie často vytrhávají dílčí informace z kontextu a nedodržují metodické standardy.

Závěr

Ve vědě nejde o to, kdo má „pravdu“, ale o to, které tvrzení nejlépe odpovídá pozorováním a ověřeným datům. Skutečné vědecké teorie mají několik společných rysů: jsou konzistentní s ostatními poznatky, jejich

závěry lze nezávisle reprodukovat a procházejí přísným recenzním řízením. Kospirační teorie naopak často stojí na izolovaných tvrzeních, ignorují data, která se jim nehodí, a jejich „výsledky“ nebývají ověřitelné ani reprodukovatelné. To neznamená, že věda je neomylná – historie zná mnoho případů, kdy se teorie musely upravit nebo nahradit. Rozdíl je v tom, že ve vědě se teorie mění na základě nových důkazů, zatímco kospirační teorie se často přizpůsobují tak, aby byly nefalzifikovatelné a jejich závěry přežily bez ohledu na fakta. Zatímco věda své závěry ověřuje a kontroluje, kospirační teorie už dávno žije na Internetu vlastním životem.

Literatura

- [1] Halley, E.: An account of the cause of the change of the variation of the magnetical needle, with an hypothesis of the structure of the internal parts of the earth. *Philosophical Transactions of the Royal Society*, roč. 17 (1692), č. 195, s. 563–578.
- [2] Bergier, J., Pauwels, L.: *Jitro kouzelníků: úvod do fantastického realismu*. 2. vyd., Svoboda, Praha, 1990.
- [3] Lee, S., Kim, J.-H., Kwon, Y.-W.: *The First Room-Temperature Ambient-Pressure Superconductor*. (Preprint) <https://doi.org/10.48550/arXiv.2307.12008>.
- [4] Shang, A., Huwiler-Müntener, K., Nartey, L., Jüni, P., Dörig, S., Sterne, J. A. C., Pewsner, D., Egger, M.: Are the clinical effects of homoeopathy placebo effects? Comparative study of placebo-controlled trials of homoeopathy and allopathy. *The Lancet*, roč. 366 (2005), č. 9487, s. 726–732.
- [5] Shyam-Sunder, S. et al.: *NIST NCSTAR 1: Federal Building and Fire Safety Investigation of the World Trade Center Disaster: Final Report of the National Construction Safety Team on the Collapses of the World Trade Center Towers*. National Construction Safety Team Act Reports (NIST NCSTAR), National Institute of Standards and Technology, Gaithersburg, MD, 2005.

Všechna lichá čísla jsou prvočísla

Adam Blažek, student FJFI ČVUT v Praze

Nejen ve fyzice, ale i v matematice je třeba mít se na pozoru, jak ukazují následující hravé „důkazy“, které zčásti vysbíral, zčásti vytvořil autor článku.

Věta. *Každé liché přirozené číslo větší než 1 je prvočíslo.*

$$\forall n \in \mathbb{N}, n > 1: 2 \nmid n \Rightarrow n \in \mathbb{P}$$

Důkaz (matematický). 3 je prvočíslo, 5 je prvočíslo, 7 je prvočíslo. Zbytek důkazu je zřejmý, proto byl ponechán jako cvičení pro čtenáře.

Důkaz (teoreticky fyzikální). n je prvočíslo právě tehdy, pokud $2 \nmid n \wedge 3 \nmid n \wedge 4 \nmid n \wedge \dots \wedge (n-1) \nmid n$. Pro jednoduchost všechny členy kromě prvního zanedbáme. Tedy pokud n není dělitelné dvěma, potom je přibližně prvočíslo.

Důkaz (experimentálně fyzikální). 3 je prvočíslo, 5 je prvočíslo, 7 je prvočíslo, 9 je chyba měření, 11 je prvočíslo, 13 je prvočíslo, ...

Důkaz (inženýrský). 3 je prvočíslo, 5 je prvočíslo, 7 je prvočíslo, 9 je prvočíslo, 11 je prvočíslo, 13 je prvočíslo, ...

Důkaz (anglický). 3 is an odd prime, 5 is an odd prime, 7 is an odd prime, 9 is a *very odd* prime, 11 is an odd prime, 13 is an odd prime, ...

Důkaz (marketingový). 3 je prvočíslo, 5 je prvočíslo, 7 je prvočíslo, 11 je prvočíslo, 13 je prvočíslo, ...

Důkaz (statistický). 3 je prvočíslo (s pravděpodobností $p = 1$), 5 je prvočíslo ($p = 1$), 7 je prvočíslo ($p = 1$), 9 je prvočíslo ($p = 0,857$), 11 je prvočíslo ($p = 1$), 13 je prvočíslo ($p = 1$), ...

Důkaz (demokratický). Necht' n je liché číslo větší než 1. Zřejmě žádné z čísel od $(n+1)/2$ do $n-1$ nedělí n . Těchto čísel je $(n-1)/2$ z celkových $n-2$ čísel mezi 2 a $n-1$. Jelikož

$$\frac{n-1}{2} > \frac{n-2}{2},$$

je n z nadpoloviční většiny prvočíslo.

Důkaz (kapitalistický). Necht' n je liché číslo větší než 1. Zřejmě žádné z čísel od $\frac{n+1}{2}$ do $n-1$ nedělí n . Jelikož tato čísla jsou větší než všechna ostatní čísla mezi 2 a $n-1$, je n prvočíslo.

Důkaz (politicky korektní). Některým lichým číslům sice byla po narození netolerantní společností přiřazena role složeného čísla, ale pokud se sama identifikují jako prvočísla, potom jsou to samozřejmě prvočísla. Pokud bude někdo vymazávat jejich identitu, zařídím, aby byl(a/o/x) vyhozen(a/o/x) z práce a „zrušen(a/o/x)“.

Důkaz (náboženský). Když Bůh tvořil vesmír, ze všech možných vesmírů si zvolil právě ten, kde všechna lichá čísla vyšší než 1 jsou prvočísla. Není to úžasné?

Důkaz (právnícký). V zákonu 1234/5678 §90 se píše, že všechna lichá čísla vyšší než 1 jsou prvočísla.

Důkaz (pomocí kryptoměny). Uvedli jsme zpět do provozu starou uhelnou elektrárnu a nechali několik dní běžet obrovskou serverovou farmu, abychom ověřili, že první tři lichá čísla větší než 1 jsou skutečně prvočísla. Dál jsme se zatím nedostali, protože na trhu došly grafické karty. Pokud chcete vydělat na výsledcích našeho výzkumu, kupte si OddPrimeCoiny™, dokud jsou levné!

Důkaz (programátorský v jazyce C). 3 je prvočíslo, 5 je prvočíslo, 7 je prvočíslo, Segmentation fault (core dumped)

Důkaz (analytický). Necht' n je liché číslo větší než 1. Vezměme libovolné $\varepsilon > 0$. Zjevně pro dostatečně malá ε nikdy nenajdeme $a, b \in \mathbb{N}$ taková, že

$$a \cdot b = n + \varepsilon.$$

Číslo n je tedy limitně prvočíslo.

Důkaz (pomocí teorie míry). Množina lichých čísel větších než 1, která nejsou prvočísla, má nulovou Lebesgueovu míru, můžeme ji tedy zanedbat.

Důkaz (pomocí teorie množin). Existuje bijekce mezi množinou lichých čísel větších než 1 a množinou prvočísel různých od 2, takže je můžeme považovat za ekvivalentní.

Objemový výkon aneb když pojem výkon nestačí

Věra Krajčová, FJFI ČVUT v Praze

Pokud pořizujeme jakýkoli elektrospotřebič do své domácnosti, jako první nás zajímá jeho výkon. Určitě si radši pořídíme výkonnější rychlovarnou konvici (mikrovlnnou troubu, páječku, ...), která nám uvaří ranní čaj (ohřeje jídlo, roztaví pájku, ...) za kratší dobu než konvici sice levnější, ale s výkonem menším (a tím i delší dobou ohřevu). Ovšem co kdybychom při stejném výkonu ohřívali mnohem větší objem vody? Pro porovnání výkonu různých tepelných zdrojů je vhodné zavést novou fyzikální veličinu *objemový výkon*. Níže si ukážeme proč.

Začneme pro nás tepelným zdrojem největším – Sluncem. Jeho zářivý výkon se dá poměrně snadno vypočítat. Stačí si uvědomit, že Slunce překvapivě můžeme považovat za absolutně černé těleso (ano, naše „bílé“ Slunce), a to proto, že množství fotonů vylétajících přímo z nitra Slunce je zanedbatelné oproti počtu fotonů vylétajících z jeho povrchu.

Při této představě použijeme k výpočtu intenzity vyzařování Stefanův–Boltzmannův zákon, který říká, že výkon P vyzařovaný z povrchu S je úměrný čtvrté mocnině teploty T :

$$P = \sigma \cdot S \cdot T^4,$$

kde $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$ je Stefanova–Boltzmannova konstanta.

Když vezmeme v úvahu, že povrch Slunce je cca $6 \cdot 10^{18} \text{ m}^2$ a jeho teplota cca 5780 K, pak dostaneme

$$P = \sigma \cdot S \cdot T^4 = 5,67 \cdot 10^{-8} \cdot 6 \cdot 10^{18} \cdot 5780^4 \text{ W} \doteq 3,8 \cdot 10^{26} \text{ W}.$$

Výkon Slunce je tedy zaokrouhleně $4 \cdot 10^{26} \text{ W}$.

Objemový výkon získáme vydělením tohoto výsledku objemem zdroje záření. Mohli bychom si myslet, že zdrojem je celé Slunce, ale není tomu tak. Běžně používaný model Slunce říká, že podmínky dovolující uvolňování fúzní energie, tj. dostatečný tlak, teplota a hustota plazmatu směrem do středu Slunce, panují jen zhruba do 20 % jeho poloměru, tedy do vzdálenosti 139 000 km od středu Slunce (poloměr Slunce je $R_S = 696\,340 \text{ km}$).

$$P_V = \frac{P}{V} = \frac{P}{\frac{4}{3}\pi r^3}.$$

$$P_{V,\text{Slunce}} = \frac{4 \cdot 10^{26}}{\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 139000000^3} \text{ W} \cdot \text{m}^{-3} \doteq 36 \text{ W} \cdot \text{m}^{-3}.$$

Jde o průměrný výkon reaktoru Slunce, tedy jádra Slunce, na jednotku objemu. Přičemž ale poblíž centra, kde je hodnota maximální, je objemový výkon přibližně $276 \text{ W} \cdot \text{m}^{-3}$, a dále od centra exponenciálně klesá.

Po výletu do vesmíru se ale vraťme zpět do kuchyně. Jaký je objemový výkon rychlovarné konvice? Pro konvici o průměrném výkonu 2000 W , která zahřívá objem cca $1,5$ litru, dostaneme hodnotu

$$P_{V,\text{konvice}} = \frac{2000}{0,0015} \text{ W} \cdot \text{m}^{-3} \doteq 1\,300\,000 \text{ W} \cdot \text{m}^{-3}.$$

Pokud toto číslo porovnáme s průměrným objemovým výkonem reaktoru Slunce, zjistíme, že konvice má objemový výkon $36\,000$ krát větší!

Protože člověk je také tepelný stroj, můžeme pro něho objemový výkon vypočítat obdobně. Průměrný doporučený denní příjem pro dospělou osobu je cca $9\,000 \text{ kJ}$, což odpovídá příjmu v průměru 104 J za každou sekundu. Tedy příkon člověka je cca 104 W . Pokud vezmeme v úvahu, že námi vybraná osoba má 80 kg , a přihlídneme k tomu, že z velké části je člověk „složen“ z vody, pak je jeho objem cca 80 litrů a objemový výkon člověka nám vyjde

$$P_{V,\text{člověk}} = \frac{104}{0,08} \text{ W} \cdot \text{m}^{-3} \doteq 1\,300 \text{ W} \cdot \text{m}^{-3},$$

což je sice tisíckrát méně než u konvice, ale skoro čtyřicetkrát více než v reaktoru Slunce. Nicméně toto číslo je spíše objemovým příkonem než výkonem. Na rozdíl od předchozích dvou „topných těles“, člověk poměrně velkou část svého příkonu „vyzář“ ve formě vykonané práce, svého pohybu apod., tedy objemový výkon člověka bude menší než jeho objemový příkon.

Až vám zase někdo poví, že úplně záříte, nepřekvapí vás to. Budete totiž vědět, že záříte jako pět Sluncí (přepočteno na objem), a to musí být přece vidět! Jen to, prosím, nezačněte dotyčnému přepočítávat.

Vydává Jednota českých matematiků a fyziků
tel.: 222 090 708-9, e-mail: jcmf@math.cas.cz
za podpory MFF UK Praha a FJFI ČVUT Praha



Vycházejí 4 čísla v kalendářním roce

Obálku navrhl Bohuslav Šír

Sazbu programem $\text{\TeX}$ připravil RNDr. Miloslav Závodný

Adresa redakce: MFF UK, V Holešovičkách 2, 182 00 Praha 8–Troja
e-mail: rozhledy@jcmf.cz

Internetové stránky časopisu: <https://rozhledy.jcmf.cz/>

Vytiskla Tiskárna Matula, Olomoucká 27, 618 00 Brno

Distribuci pro předplatitele provádí v zastoupení vydavatele
MediaCall, s. r. o.

Vídeňská 546/55, 639 00 Brno

tel.: +420 532 165 165, e-mail: export@mediacall.cz

web: www.zahranicnitisk.com

ISSN 0035-9343

MK ČR E4691

© Jednota českých matematiků a fyziků, Praha 2025

Redakční rada

Vedoucí redaktorka:

doc. Ing. Lubomíra Dvořáková, Ph.D., FJFI ČVUT Praha

Redaktorka pro matematiku:

doc. Ing. Lubomíra Dvořáková, Ph.D., FJFI ČVUT Praha

Redaktor pro fyziku:

RNDr. Věra Krajčová, Ph.D., FJFI ČVUT Praha

Členové redakční rady:

prof. RNDr. Vlastimil Dlab, DrSc., F.R.S.C., Praha

doc. RNDr. Zdeněk Drozd, Ph.D., MFF UK Praha

RNDr. Petr Hanuš, FSv ČVUT Praha

doc. RNDr. Jaroslav Hora, CSc., FPE ZČU Plzeň

prof. RNDr. Ivo Kraus, DrSc., FJFI ČVUT Praha

doc. RNDr. Jan Kříž, Ph.D., PřF UHK Hradec Králové

prof. RNDr. Miroslav Lávička, Ph.D., FAV ZČU Plzeň

RNDr. Pavel Pokorný, Ph.D., VŠCHT Praha

RNDr. Miroslav Randa, Ph.D., PdF ZČU Plzeň

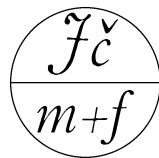
RNDr. Filip Studnička, Ph.D., PřF UHK Hradec Králové

doc. RNDr. Jan Šlégr, Ph.D., PřF UHK Hradec Králové

prof. RNDr. Pavel Tlustý, CSc., PedF JU České Budějovice

doc. RNDr. Pavel Töpfer, CSc., MFF UK Praha

RNDr. Vladimír Wagner, CSc., ÚJF AV ČR Řež



OBSAH

L. Spíchal: Změna délky dne a derivace funkce	1
V. Dlab: Číselná charakteristika podobných trojúhelníků	15
J. Jekl: Anděl na útěku	21
T. Bártlová: Ochránovská hvězda: Světlo naděje s geometrií v srdci	33
Matematické oříšky: Krabice na dárek	37
V. Dlab, E. Lukács: Hrátky s dělitelností: Řešení – Solution	39
O. Lepil: Energie větru	46
L. Šlégrová, J. Šlégr: Věda vs. konspirace: Proč se vlastně zdržovat vědou?	48
A. Blažek: Všechna lichá čísla jsou prvočísla	61
V. Krajčová: Fyzikální okénko: Objemový výkon aneb když pojem výkon nestačí	63

Pokyny pro autory

Příspěvky dodávejte na adresu redakce v elektronické podobě. Nejlépe napsané ve formátu $\text{\LaTeX}$, přijatelný je i formát $\text{\PlainTeX}$, je akceptovatelný i text připravený editorem Word či podobným.

Pokud jde o obrázky, je žádoucí, aby byly připraveny v reprodukovatelné podobě. Každý obrázek nechť je v samostatném souboru, nejlépe ve formátu pdf nebo eps. Přípustná je též bitmapa v dostatečném rozlišení.

Ke každému zasílanému příspěvku (ne u soutěží, zpráv a recenzí) přiložte krátkou anotaci v českém jazyce. Dále je žádoucí, aby u každého příspěvku byla uvedena literatura, na kterou je v textu odkazováno.