

ROZ HLEDY

MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ

ČASOPIS PRO ZÁJEMCE O MATEMATIKU, FYZIKU A INFORMATIKU

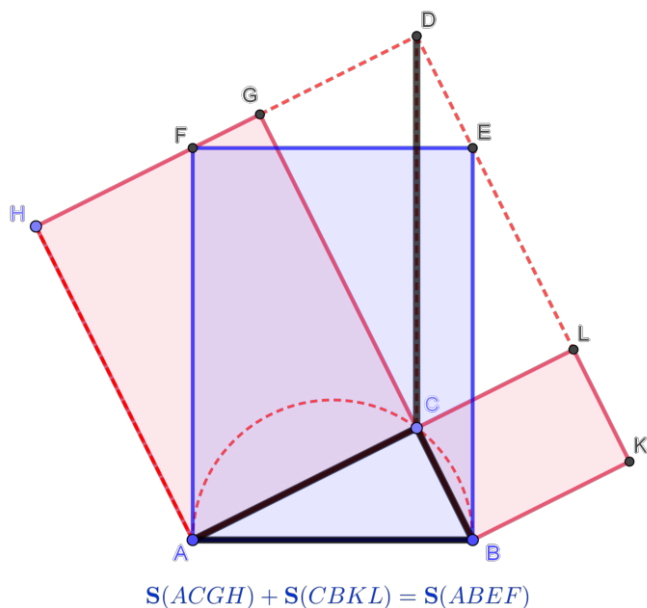
ROČNÍK 101 (2026) • ČÍSLO 1

Několik slov k zobecnění, a tedy porozumění,
Pythagorově větě

Vlastimil Dlab, Bzí u Železného Brodu

V této krátké poznámce, adresované školám, odhalíme kořeny tvrzení, známé pod jménem Pythagorova věta.¹⁾ Té je pozorně věnován článek [1].

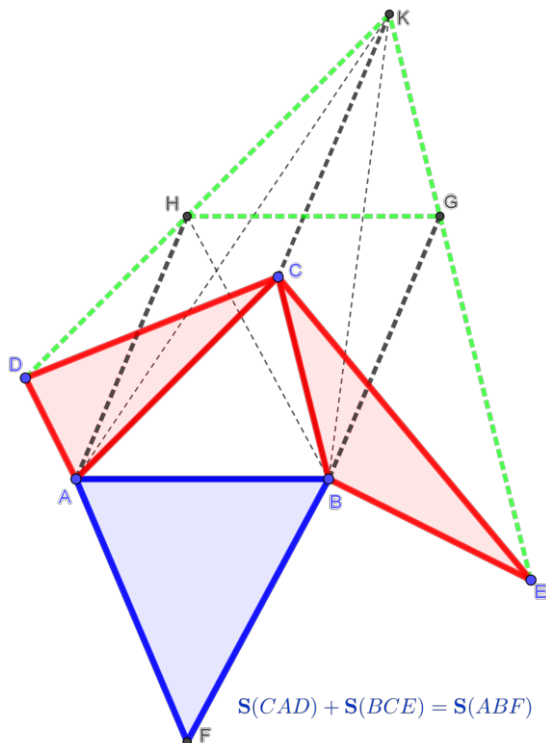
Tento příspěvek začneme dvěma obrázky. První z nich zobrazuje a dokazuje pythagorejské tvrzení pro podobné obdélníky.



Obr. 1

Toto tvrzení je dále zobecněno a znázorněno na druhém obrázku pro zcela libovolné trojúhelníky.

¹⁾Pythagoras ze Samu žil v 6. století př. n. l. Pythagorova věta byla známa, alespoň v konkrétní formě, už o řadu století dříve v Babylonii, Egyptě, Číně a Indii.



Obr. 2

1. První obrázek je určen volbou bodů A, B, C a D , tj. volbou pravoúhlého trojúhelníku ABC a kolmicí k základně AB vedenou z bodu C . úsečky DH a DK jsou rovnoběžné s odvěsnami trojúhelníku ABC a strany obdélníků $ACGH$ a $CBKL$ obdržíme prodloužením odvěsen a konstrukcí jejich protilehlých rovnoběžných stran. Využijeme též kolmosti úseček. Tak např. z toho, že úsečka AF je kolmá na úsečku AB a AH je kolmá na AC , plyne, že $|\sphericalangle HAF| = |\sphericalangle CAB|$ a že tedy trojúhelníky ABC a AFH jsou podobné. Stejným způsobem zjistíme, že trojúhelníky AFH , EBK , DCL a CDG jsou shodné. Též trojúhelníky ABC a FED jsou shodné a jsou podobné trojúhelníku AFH .

Z předešlých tvrzení vyplývají rovnosti pro poměry délek úseček

$$\frac{|AH|}{|AF|} = \frac{|AC|}{|AB|}, \quad \text{tj.} \quad \frac{|AC|}{|AH|} = \frac{|AB|}{|AF|},$$

a tedy obdélníky $ACGH$ a $ABEF$ jsou podobné. Analogicky

$$\frac{|BK|}{|BE|} = \frac{|BC|}{|BA|}, \quad \text{tj.} \quad \frac{|BC|}{|BK|} = \frac{|BA|}{|BE|},$$

odkud plyne, že obdélníky $CBKL$ a $ABEF$ jsou podobné.

Tím jsme dokázali první část následujícího tvrzení.

Věta 1. *Obdélníky $ACGH$, $CBKL$ a $ABEF$ na obr. 1 jsou podobné a jejich obsahy jsou svázány pythagorejskou rovností*

$$\mathbf{S}(ABEF) = \mathbf{S}(ACGH) + \mathbf{S}(CBKL).$$

Důkaz druhé části věty je jednoduchý. Uvažujme pětiúhelník $ABEDF$ a tyto jeho části: rovnoběžníky $ACDF$ a $BCDE$ a shodné trojúhelníky ABC a FED . Jelikož obsah rovnoběžníku je dán součinem délky strany a výšky, platí $\mathbf{S}(ACGH) = \mathbf{S}(ACDF)$ a $\mathbf{S}(CBKL) = \mathbf{S}(CBED)$, a tedy

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(ABEF) &= \mathbf{S}(ABC) + \mathbf{S}(ACDF) + \mathbf{S}(CBED) - \mathbf{S}(FED) = \\ &= \mathbf{S}(ACGH) + \mathbf{S}(CBKL). \end{aligned}$$

2. Věta 1 si zasluhuje zobecnění. Jedno takové je zobrazeno na obr. 2, který též naznačuje jednoduchý důkaz. Zde je úsečka DK rovnoběžná se stranou AC a úsečka EK se stranou BC . Stejně dlouhé úsečky CK , AH a BG jsou rovnoběžné. $AFBH$ je rovnoběžník.

Věta 2.²⁾ *Nechť ABC je libovolný trojúhelník, ACD libovolný trojúhelník sestrojený nad stranou AC a BCE libovolný trojúhelník sestrojený nad stranou BC . Obr. 2 ilustruje rovnost*

$$\mathbf{S}(ABF) = \mathbf{S}(CAD) + \mathbf{S}(BCE).$$

Důkaz je napodobeninou důkazu věty 1:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(ABF) &= \mathbf{S}(BAH) = \frac{1}{2} \mathbf{S}(BAHG) = \\ &= \frac{1}{2} [\mathbf{S}(BAHKG) - \mathbf{S}(GHK)] = \frac{1}{2} [\mathbf{S}(BAHKG) - \mathbf{S}(BAC)] = \\ &= \frac{1}{2} [\mathbf{S}(CAHK) + \mathbf{S}(CBGK)] = \mathbf{S}(CAK) + \mathbf{S}(BCK) = \\ &= \mathbf{S}(CAD) + \mathbf{S}(BCE). \end{aligned}$$

²⁾ Autorem této věty se ve formulaci s rovnoběžníky udává Pappus z Alexandrie, významný řecký matematik žijící ve 4. století.

Věta 2 otevírá cestu k řadě tvrzení popisujících speciální případy, kdy trojúhelník ABC je rovnoramenný, rovnostranný či pravoúhlý a trojúhelníky CAD a BCE jsou podobné, shodné či pravoúhlé atd. Vyšetřování takovýchto speciálních případů vzbuzuje u žáků zájem o matematiku. Jednoduchým příkladem zde může být případ, kdy trojúhelník ABC je rovnoramenný a trojúhelníky CAD a BCE jsou podobné. Umíte v tomto případě popsat trojúhelník ABF ? Pomůckou při řešení těchto „hříček“ může být odkaz na <https://www.geogebra.org/m/vwqgcef3>.

Literatura

- [1] Dlab, V.: *Krátký příběh o obecném tvaru Pythagorovy věty. Rozhledy matematicko-fyzikální*, roč. 94 (2019), č. 4, s. 8–15.



Pythagorova K-věta prof. Jiřího Bouchaly

Anguli per animalia

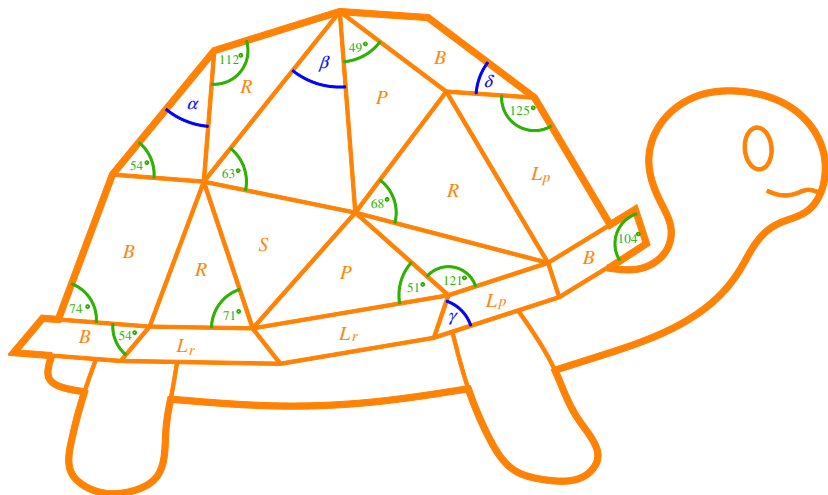
Martina Škorpilová, MFF UK Praha

Mezi základní dovednosti z oblasti planimetrie patří výpočty velikostí úhlů, které se váží k rovinným útvarům. Níže předkládáme tři příklady na procvičení této problematiky, které vyžadují znalost vlastností úhlů příslušejících mnohoúhelníkům.

Při řešení vycházejte pouze z jednoznačně daných dat (pokud např. u dvou úseček s jedním společným krajním bodem váháte, zda leží na přímce, nebo ne, tento fakt nevyužívejte). Upravená zadání (např. bez čísel stránek časopisu) připravená k využití při výuce jsou dohledatelná na webové stránce [1]. Hodně radosti a úspěchů při řešení úloh!

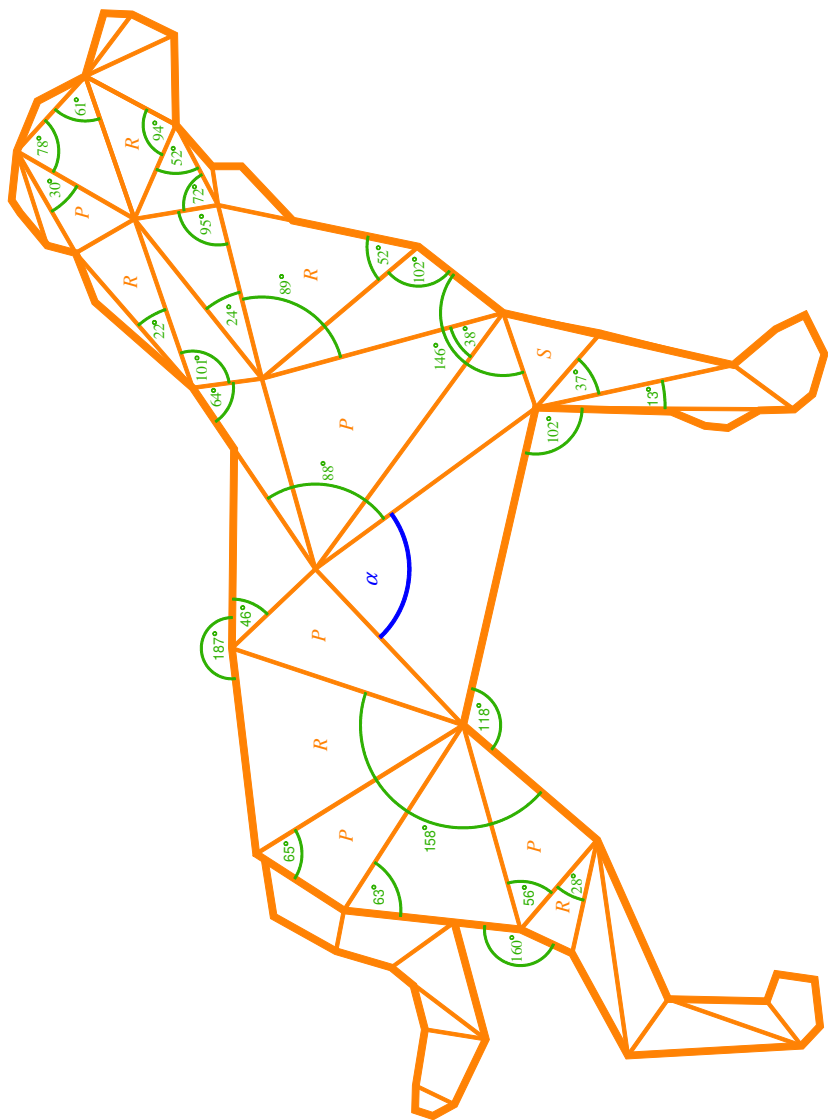
Příklad 1. Početně určete velikosti úhlů α , β , γ , δ , znáte-li velikosti některých jiných úhlů a víte-li, že

- útvary označené P jsou pravoúhlé trojúhelníky,
- útvary označené R jsou rovnoramenné trojúhelníky,
- útvar označený S je rovnostranný trojúhelník,
- útvary označené B jsou rovnoběžníky,
- útvary označené L_r jsou rovnoramenné lichoběžníky,
- útvary označené L_p jsou pravoúhlé lichoběžníky.



Příklad 2. Početně určete velikost úhlu α , znáte-li velikosti některých jiných úhlů a víte-li, že

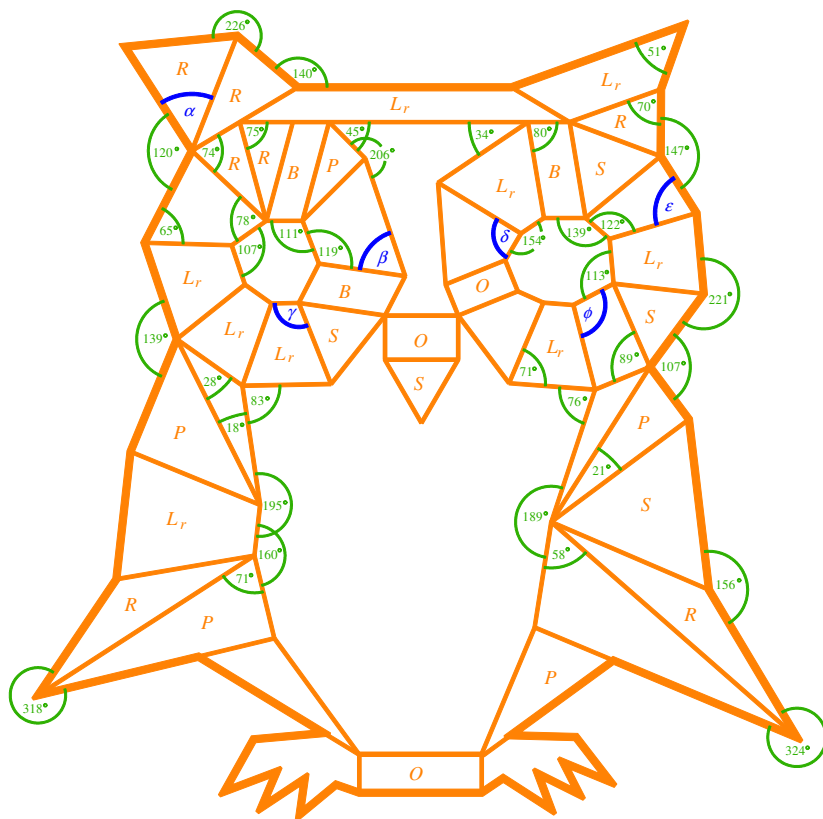
- útvary označené P jsou pravoúhlé trojúhelníky,
- útvary označené R jsou rovnoramenné trojúhelníky,
- útvar označený S je rovnostranný trojúhelník.



Příklad 3. Početně určete velikosti úhlů α , β , γ , δ , ϵ , ϕ , znáte-li velikosti některých jiných úhlů a víte-li, že

- útvary označené P jsou pravoúhlé trojúhelníky,

- útvary označené R jsou rovnoramenné trojúhelníky,
- útvary označené S jsou rovnostranné trojúhelníky,
- útvary označené B jsou rovnoběžníky,
- útvary označené L_r jsou rovnoramenné lichoběžníky,
- útvary označené O jsou obdélníky.



Řešení: *Příklad 1:* $\alpha = 35^\circ$, $\beta = 43^\circ$, $\gamma = 53^\circ$, $\delta = 33^\circ$. *Příklad 2:* $\alpha = 83^\circ$. *Příklad 3:* $\alpha = 54^\circ$, $\beta = 63^\circ$, $\gamma = 111^\circ$, $\delta = 92^\circ$, $\epsilon = 74^\circ$, $\phi = 103^\circ$.

Literatura

[1] <https://www.karlin.mff.cuni.cz/~stepanov/vyuka.html>

Řešení extrémálních úloh podle Fermata

Luděk Spíchal, Česká lesnická akademie, Trutnov

Úvod

Hledání extrémů funkcí patří k základním úlohám matematiky s mnoha praktickými aplikacemi. Týkájí se možnosti nalezení největší nebo nejmenší hodnoty veličiny, která se mění podle nějakého zákona. Může se jednat o nejkratší cestu, nalezení nejúspěšnějšího tvaru nádoby, zavedení nejvýhodnějšího výrobního postupu či zajištění největšího možného zisku. Podobné otázky se objevují v celé řadě oborů, jako je např. fyzika, ekonomie, technika nebo přírodní vědy.

Současný přístup k určování maximálních a minimálních hodnot (tedy extrémů funkcí) vychází z vlastností tzv. diferencovatelných funkcí, jejichž graf lze nakreslit jako „hladkou“ plynulou křivku bez ostrých zlomů. Myšlenku se pokusíme přiblížit bez formální definice pojmu derivace, který moderní matematika běžně k určování extrémů využívá.

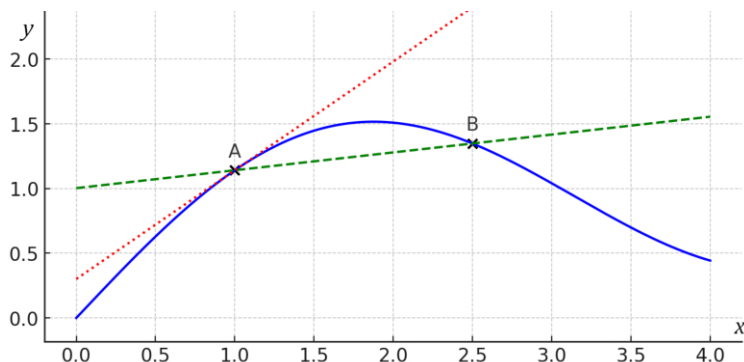
Derivaci si můžeme představit jako okamžitou rychlost změny. V praxi to může vypadat například tak, že u dráhy, kterou urazí auto, představuje derivace dráhy jeho aktuální rychlost. Při sledování hladiny řeky během jarního tání ukazuje derivace, jak rychle hladina stoupá nebo klesá. A pokud sledujeme výšku rostliny během růstu, derivace nám prozradí, jak rychle v daném okamžiku rostlina přirůstá.

Představme si nyní, že vezmeme dva blízké body grafu funkce a spojíme je přímkou, která je sečnou grafu funkce (obr. 1). Průměrnou změnu v určitém úseku (např. průměrnou rychlost mezi body A a B) znázorňuje sklon úsečky, která tyto dva body spojuje. Zapišeme-li rovnici této přímky ve tvaru

$$y = kx + q,$$

pak číslo k (směrnice sečny) udává průměrnou rychlost.

Představme si dále, že budeme bod B postupně přibližovat k bodu A . Při přibližování se sklon sečny postupně mění, až se v určité chvíli ustálí na jisté hodnotě. Přímkou, která se v dané chvíli dotýká grafu funkce právě v jednom bodě, označujeme jako tečnu grafu funkce. Sklon tečny (směrnice tečny) v bodě A udává okamžitou změnu (např. okamžitou rychlost auta), tedy *derivaci*.



Obr. 1: Graf funkce $y = \sin x + 0,3x$ (plná čára), tečna grafu funkce v bodě A (tečkovaná čára) a sečna vedená body A a B (čárkovaná čára)

Lokální maxima a minima (intuitivně vrcholky a údolí grafu funkce) se mohou vyskytnout jen tam, kde je tečna vodorovná, tedy rovnoběžná s osou x a má směrnici (derivaci) nulovou. To je nutná podmínka pro existenci extrému. Nesmíme však zapomenout, že sama o sobě nestačí. Například u funkce $y = x^3$ je derivace v bodě $x = 0$ také nulová, ale graf tam žádný vrchol ani údolí netvoří, zde jde pouze o tzv. inflexní bod¹⁾.

Extremální úlohy svojí podstatou spadají do oblasti kalkulu (diferenciální a integrální počet). Zmíněná oblast matematiky, jejíž počátky se datují do 17. století a pojí se jmény Isaaca Newtona (1642–1727) a Gottfrieda Wilhelma Leibnize (1646–1716), ovšem není obvykle zařazovaná do výuky středoškolské matematiky. Faktem na druhou stranu zůstává, že podobné úlohy zajímaly matematiky již v obdobích před nástupem kalkulu. Metody, které přitom používali, svou náročností nevybočují z rámce středoškolské matematiky a mohou tak být zajímavou ukázkou způsobů uvažování a postupů, které posléze vedly k objevu kalkulu.

Ke známým postavám na tomto poli určitě patří Johannes Kepler (1571–1630), který se zabýval výpočtem objemů těles ve svém díle *Nova stereometria doliorum vinariorum* (1615). V této knize řešil praktický problém odhadování objemů vinných sudů různých tvarů a vyvinul metody, které kalkulu předcházely.

¹⁾Inflexní bod (těž bod inflexe nebo bod obratu) je místo na grafu funkce, kde se mění zakřivení křivky – tedy přechod z „vydutého“ (konvexního) tvaru do „vypouklého“ (konkávního) nebo naopak.

Zmiňme v krátkosti způsob, jakým Kepler uvažoval. Tělesa si představoval jako složená z velkého množství malých, jednoduchých částí (například válcových vrstev). Tím předjímal ideu aproximace objemu integrací. Objem odhadoval jako součet objemů těchto jednoduchých částí. Například vinný sud mohl být modelován jako rotace určité křivky, což vyžadovalo výpočet objemu rotačního tělesa. Pro výpočet objemu sudů Kepler experimentoval s měřením jejich výšky a šířky v různých bodech. Srovnával je s objemy známých geometrických těles, jako jsou koule, válce nebo kužele. Při zkoumání tvaru sudů zjistil, že sud má největší objem, pokud jeho šířka v nejužším bodě odpovídá určitému poměru k jeho výšce, což lze považovat za raný příklad extrémální úlohy.

Hlavní část článku se věnuje předvedení postupu hledání extrémů pocházejícího z pera dalšího velikána matematiky, kterým byl francouzský matematik Pierre de Fermat (mezi 1601 a 1607–1665). Po vysvětlení Fermatovy metody budeme řešit několik úloh, které charakterem odpovídají některým problémům řešeným matematiky v daném období (např. v souvislosti s tzv. Keplerovými trojúhelníky). Současně neopomeneme rovněž ponechat některé úlohy pro čtenáře k případnému procvičení.

1. Extrémy podle Fermata

Následující příklad lze vyřešit výhradně použitím středoškolské matematiky. Nám však současně poslouží jako modelový příklad pro představení Fermatovy metody.

Příklad 1. Jakou největší plochu pravoúhelníkového tvaru je možné oplotit pletivem o délce 180 m?

Řešení. Vyjdeme z obecného obdélníku a prozkoumáme vztah mezi obsahem takového obrazce a rozměry jeho stran. Pro obvod o obdélníku platí $o = 2a + 2b$. Po dosazení známé délky pletiva vyjádříme délku jedné strany

$$b = 90 - a,$$

a dosadíme do vzorce pro výpočet obsahu obdélníku

$$S = ab = a(90 - a) = 90a - a^2. \quad (1)$$

Získali jsme kvadratickou funkci, která nabývá maximální hodnoty ve vrcholu paraboly. Polohu vrcholu můžeme určit např. doplněním kvadratického dvojčlenu na čtverec

$$S = 90a - a^2 = -(a^2 - 90a + 2025) + 2025 = -(a - 45)^2 + 2025.$$

Optimálním tvarem pro oplocení je vzhledem k zadání úlohy čtverec s délkou strany 45 m, maximální možná velikost oplocené plochy činí 2025 m². Pro úplnost dodejme, že funkce má vzhledem k zadání rovněž dvě minima ($S = 0$), pro $a = 0$ a $a = 90$.

Studenti se znalostí základů kalkulu by pravděpodobně vypočítali derivaci funkce (1) popisující obsah obdélníku²⁾

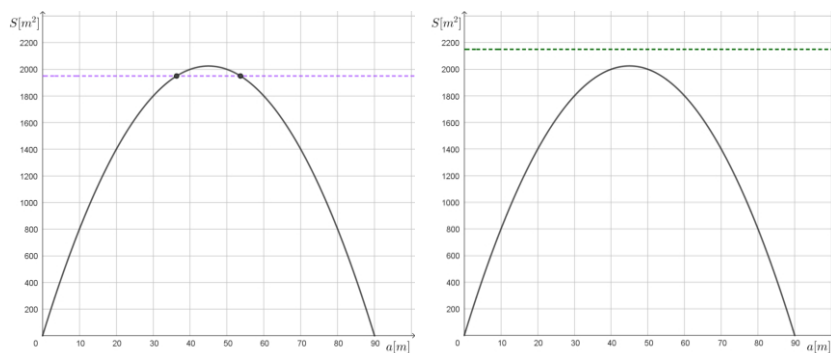
$$S' = 90 - 2a,$$

a položili tuto derivaci rovnu nule, tj.

$$90 - 2a = 0 \rightarrow a = 45.$$

Důvod proč tak činí, byl zmíněn již v úvodní části článku. V extrémních hodnotách (minimum či maximum) je tečna ke grafu funkce rovnoběžná s osou x , tj. její směrnice má hodnotu 0.

Fermat sám pojem derivace funkce neznal, uvědomil si však, že extrémy mají jistou zvláštní vlastnost. Pokud uvažoval např. maximum, pak mu bylo zřejmé, že rovnoběžky s osou x nacházející se pod maximum protnou graf funkce ve dvou bodech. Naopak rovnoběžka s osou x ležící nad maximální hodnotou neprotne graf funkce vůbec (obr. 2).



Obr. 2: Fermatova metoda určení maxima funkce

Z uvedené úvahy pro Fermata vyplynula celkem intuitivní strategie hledání extrému. Nechme rovnoběžku nacházející se pod maximum povolna stoupat. Dva původní průsečíky se budou postupně vzájemně přibližovat, až v místě maxima splynou v jeden bod.

²⁾Použitý symbol S' označuje derivaci funkce obsahu obdélníku S .

Předpokládejme, že pro danou rovnoběžku nacházející se pod maximum se průsečíky objeví ve dvou různých bodech $a = a_1$ a $a = a_2$. Plocha rovnoběžníku v těchto dvou bodech musí být stejná, tj.

$$90a_1 - a_1^2 = 90a_2 - a_2^2.$$

Úpravou rovnosti dostáváme

$$90(a_1 - a_2) = a_1^2 - a_2^2,$$

a dále

$$90(a_1 - a_2) = (a_1 - a_2)(a_1 + a_2).$$

Nyní vydělíme obě strany poslední rovnosti výrazem $a_1 - a_2$

$$90 = a_1 + a_2,$$

což je vzhledem k předpokladu $a_1 \neq a_2$ korektní. Fermat dále předpokládal, že poslední rovnice platí, když se přibližujeme k maximu. Podle Fermatovy představy, kterou popsal v díle *Methodus ad disquirendam maximam et minimam* z roku 1636, se a_1 a a_2 stávají v maximu tak trochu rovnými, ale ne skutečně rovnými. Při jeho dosažení se pak $a_1 \approx a_2$, tj.

$$2a_1 = 90 \rightarrow a_1 = 45.$$

Zjevný rozpor mezi původním předpokladem, že $a_1 \neq a_2$ a následným položením $a_1 \approx a_2$ Fermat ospravedlnil použitím poněkud mlhavého konceptu „přibližné rovnosti“. ³⁾

Kontroverze, týkající se nejasného pojetí infinitezimálních (nekonečně malých) veličin, se ovšem netýkaly pouze Fermatovy metody výpočtu extrémů. Rovněž Newtonovo zacházení s infinitezimály nelze v moderním smyslu považovat za korektní. Ve svých úvahách zacházel s infinitezimálními veličinami neformálně, podle potřeby buď byly „nekonečně malé“, nebo zcela „mizely“. Přesto jeho přístup vedl k mimořádným objevům a položil základy kalkulu.

Potřebné přesnosti a korektnosti bylo dosaženo zavedením konceptu limity funkce, který se ovšem v matematice objevil až v 1. polovině

³⁾Více o uvedeném Fermatově konceptu viz např. <https://en.wikipedia.org/wiki/Adequality>.

19. století jako důsledek snahy přesně popsat chování funkce v situacích, kde běžné algebraické výpočty nestačí nebo nemají smysl.⁴⁾

Fermat většinou řešil konkrétní geometrické a fyzikální problémy jako je nejkratší doba, největší plocha, maximum součinu apod. Zde se celkem přirozeně očekává, že řešení skutečně představuje největší nebo nejmenší možnou hodnotu. Po nalezení kandidáta extrémní hodnoty Fermat kontroloval, že pro hodnoty o něco menší či větší je funkční hodnota menší (u maxima) či větší (u minima).

Další příklad odkazuje na problémy řešené J. Keplerem.

Příklad 2. Jaký zvolit poměr mezi výškou v a poloměrem r válce tak, aby měl válec pro daný povrch S největší objem V ?

Řešení. Pro objem V a povrch S válce platí

$$V = \pi r^2 v, \quad S = 2\pi r(r + v).$$

Pokud chceme maximalizovat objem válce, pak ze vzorce pro povrch vyjádříme výšku

$$v = \frac{S - 2\pi r^2}{2\pi r},$$

a dosadíme do vzorce pro objem válce

$$V = \pi r^2 \frac{S - 2\pi r^2}{2\pi r} = \frac{Sr - 2\pi r^3}{2}.$$

Předpokládejme, že pro danou rovnoběžku nacházející se pod maximum se průsečíky grafu funkce objeví ve dvou různých bodech $r = r_1$ a $r = r_2$. Objem válce v těchto dvou bodech musí být stejný, tj.

$$\frac{Sr_1 - 2\pi r_1^3}{2} = \frac{Sr_2 - 2\pi r_2^3}{2}.$$

Úpravou rovnosti dostáváme

$$Sr_1 - 2\pi r_1^3 = Sr_2 - 2\pi r_2^3,$$

a dále

$$S(r_1 - r_2) - 2\pi(r_1^3 - r_2^3) = 0.$$

⁴⁾ Významným způsobem se o zavedení pojmu limity funkce zasloužili Bernard Bolzano (1781–1848), Augustin-Louis Cauchy (1789–1857) a Karl T. W. Weierstrass (1815–1897).

Nyní vydělíme obě strany poslední rovnosti výrazem $r_1 - r_2$ a dostáváme

$$S - 2\pi(r_1^2 + r_1r_2 + r_2^2) = 0.$$

Použitím principu „přibližné rovnosti“ $r_1 \approx r_2$ pak dále platí

$$S = 6\pi r_1^2.$$

Porovnáním se vzorcem pro povrch válce dostáváme

$$6\pi r_1^2 = 2\pi r_1(r_1 + v),$$

$$2r_1 = v.$$

Válec o daném povrchu má největší objem, pokud jeho výška je dvojnásobkem poloměru.

Čtenář si může použít Fermatovy metody vyzkoušet na následujícím problému, jehož řešení nalezne v příloze A.

Problém 1. Jaký zvolit poměr mezi výškou válce v a jeho poloměrem r_V tak, aby měl válec vepsaný kouli o daném objemu V_K největší objem V_V ?

2. Extremální úlohy a Keplerovy trojúhelníky

*Keplerův trojúhelník*⁵⁾ je každý pravoúhlý trojúhelník, pro jehož délky stran platí poměr

$$1 : \sqrt{\varphi} : \varphi,$$

kde φ je tzv. *zlatý řez*.

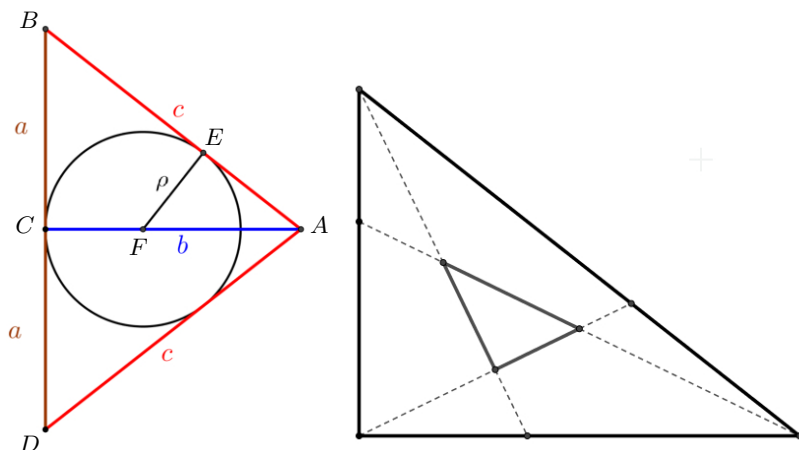
Poznámka. Zlatý řez označuje poměr, kdy se úsečka dělí do dvou částí takovým způsobem, že poměr délky celé úsečky vůči délce její větší části se rovná poměru délky větší části k délce té menší. Číselnou hodnotu zlatého řezu získáme z řešení rovnice

$$\frac{x+y}{x} = \frac{x}{y},$$

kde x, y ($x > y$) jsou části úsečky o délce $x + y$. Pokud dále položíme $y = 1$, pak po zjednodušení dostáváme rovnici $x^2 - x - 1 = 0$, pro jejíž kořeny platí $x_{1,2} = (1 \pm \sqrt{5})/2$. Zlatým řezem (ozn. φ) je kladný kořen $\varphi = (1 + \sqrt{5})/2$.

⁵⁾Johannes Kepler se o trojúhelnících v roce 1597 zmiňuje v dopise svému učiteli Michaelu Mästlinovi (1550–1631). Průřez Velké pyramidy v Gíze je podle Keplera tvořen rovnoramenným trojúhelníkem složeným ze dvou pravoúhlých trojúhelníků, jejichž strany jsou v poměru $1 : \sqrt{\varphi} : \varphi$. Existují ovšem i starší zmínky o těchto trojúhelnících, např. v knize *Liber mensurationum* perského matematika Abú Bakr al-Karajiho (953–1029) nebo knize *Practica geometriæ* italského matematika Leonarda Pisánského zvaného Fibonacci (okolo 1170–okolo 1240) [4].

Z vlastností těchto trojúhelníků zmiňme, že pokud vezmeme dvě kopie Keplerova trojúhelníku a přiložíme je k sobě druhou nejdelší stranou (obr. 3, vlevo), pak výsledný rovnoramenný trojúhelník má největší poloměr vepsané kružnice ze všech rovnoramenných trojúhelníků s danou délkou ramen.⁶⁾



Obr. 3: Dva Keplerovy trojúhelníky s délkami stran v poměru $a : b : c = 1 : \sqrt{\varphi} : \varphi$ přiložené druhou nejdelší stranou a vepsaná kružnice o poloměru $\rho = a/\sqrt{2\varphi + 1}$ (vlevo). Keplerův trojúhelník v Keplerově trojúhelníku (vpravo)

Zajímavé tvrzení vycházející z následující konstrukce dokázal Jun v článku [3]. Konstrukce předpokládá, že postupně obejdeme Keplerův trojúhelník proti směru hodinových ručiček a na každou stranu umístíme bod, který stranu rozdělí v poměru zlatého řezu. Tyto body následně spojíme úsečkou s odpovídajícím protilehlým vrcholem. Platí, že trojúhelník tvořený průsečíky těchto úseček je rovněž keplerovský (obr. 3, vpravo).

Keplerovy trojúhelníky jsme popsali jako pravoúhlé trojúhelníky, jejichž délky stran splňují výše uvedený poměr založený na hodnotě zlatého řezu. V článku se dále zaměříme na trojúhelníky (nikoliv nutně pravoúhlé), jejichž délky stran tvoří po sobě jdoucí členy geometrické posloupnosti.

⁶⁾ Pro poloměr kružnice vepsané trojúhelníku s obsahem S a stranami délek a, b, c platí $\rho = S/s$, kde $s = (a + b + c)/2$.

Konstruovatelný trojúhelník, jehož délky stran a , aq , aq^2 tvoří geometrickou posloupnost, musí splňovat trojúhelníkovou nerovnost, tj. délky stran musí splňovat soustavu nerovnic

$$\left. \begin{aligned} aq + aq^2 &> a, \\ a + aq^2 &> aq, \\ a + aq &> aq^2, \end{aligned} \right\}$$

kde řešením soustavy je interval

$$q \in \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2}, \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right),$$

popř. $q \in (1/\varphi, \varphi)$.

Příklad 3. Najděte kvocient q , pro který má kružnice opsaná trojúhelníku se stranami o délkách tvořících geometrickou posloupnost minimální poloměr.

Pro poloměr kružnice opsané trojúhelníku s obsahem S a stranami o délkách a , aq , aq^2 platí⁷⁾

$$r = \frac{a^3 q^3}{4S}.$$

Pro stanovení obsahu trojúhelníku je vzhledem k zadání úlohy nejvhodnější Heronův vzorec

$$S = a^2 \sqrt{\frac{1+q+q^2}{2} \left(\frac{1+q+q^2}{2} - 1 \right) \left(\frac{1+q+q^2}{2} - q \right) \left(\frac{1+q+q^2}{2} - q^2 \right)},$$

a dále po zjednodušení

$$S = \frac{a^2}{4} \sqrt{-q^8 + 2q^6 + q^4 + 2q^2 - 1}.$$

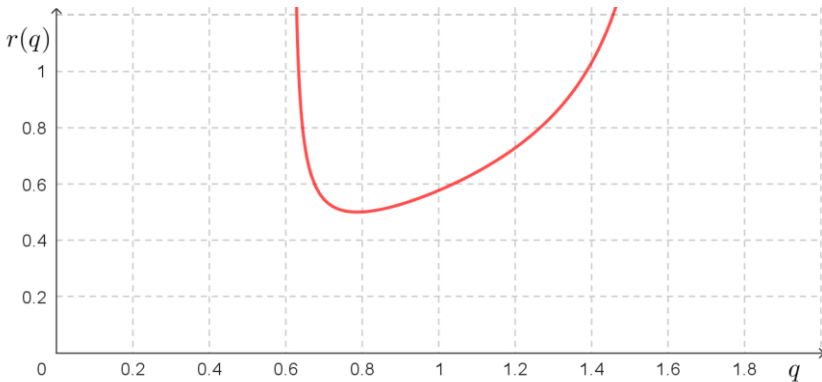
Jestliže bez újmy na obecnosti položíme $a = 1$, pak pro poloměr kružnice opsané trojúhelníku platí

$$r = \frac{q^3}{\sqrt{-q^8 + 2q^6 + q^4 + 2q^2 - 1}}. \quad (2)$$

⁷⁾ Pro poloměr kružnice opsané trojúhelníku s obsahem S a stranami délek a , b , c platí $r = (abc)/(4S)$.

Použitím Geogebry (obr. 3) se můžeme přesvědčit, že funkce určená rovnicí (2) má v intervalu $q \in (1/\varphi, \varphi)$ minimum. Pokud nyní použijeme Fermatovu metodu, pak rovnoběžka s osou x protne graf funkce v bodech $q = q_1$ a $q = q_2$ ($q_1 \neq q_2$), kde $r(q_1) = r(q_2)$, jestliže

$$\frac{q_1^3}{\sqrt{-q_1^8 + 2q_1^6 + q_1^4 + 2q_1^2 - 1}} = \frac{q_2^3}{\sqrt{-q_2^8 + 2q_2^6 + q_2^4 + 2q_2^2 - 1}}.$$



Obr. 4: Graf funkce $r(q) = q^3 / \sqrt{-q^8 + 2q^6 + q^4 + 2q^2 - 1}$ pro $q > 0$

Po zjednodušení dostáváme

$$q_1^8 q_2^6 - q_1^6 q_2^8 + q_1^6 q_2^4 - q_1^4 q_2^6 + 2q_1^6 q_2^2 - 2q_1^2 q_2^6 - (q_1^6 - q_2^6) = 0,$$

a dále

$$q_1^6 q_2^6 (q_1^2 - q_2^2) + q_1^4 q_2^4 (q_1^2 - q_2^2) + 2q_1^2 q_2^2 (q_1^2 - q_2^2) (q_1^2 + q_2^2) - (q_1^2 - q_2^2) (q_1^4 + q_1^2 q_2^2 + q_2^4) = 0.$$

Vzhledem k předpokladu, že $q_1 \neq q_2$ rovnici zkrátíme výrazem $q_1^2 - q_2^2$

$$q_1^6 q_2^6 + q_1^4 q_2^4 + 2q_1^2 q_2^2 (q_1^2 + q_2^2) - (q_1^4 + q_1^2 q_2^2 + q_2^4) = 0,$$

a použitím principu „přibližné rovnosti“, tj. $q_1 \approx q_2$, dále dostáváme

$$q_1^4 (q_1^8 + q_1^4 + 4q_1^2 - 3) = 0.$$

Hledané řešení musí náležet intervalu $(1/\varphi, \varphi)$, zaměříme se dále na rovnici

$$q_1^8 + q_1^4 + 4q_1^2 - 3 = 0. \quad (3)$$

Pokud rovnici upravíme do tvaru

$$q_1^8 + 2q_1^4 + 1 - q_1^4 + 4q_1^2 - 4 = 0,$$

pak dále zřejmě platí

$$(q_1^4 + 1)^2 - (q_1^2 - 2)^2 = 0,$$

nebo také

$$(q_1^4 - q_1^2 + 3)(q_1^4 + q_1^2 - 1) = 0.$$

Rovnici (3) vyhovuje kořen

$$q_1 = \sqrt{\frac{\sqrt{5} - 1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{\varphi}},$$

který je řešením rovnice $q_1^4 + q_1^2 - 1 = 0$. Kružnice opsaná trojúhelníku, jehož strany mají délky tvořící členy geometrické posloupnosti, má nejmenší poloměr, jestliže kvocient geometrické posloupnosti má hodnotu $q = \sqrt{1/\varphi}$.

Řešení následujícího problému čtenář nalezne v příloze B.

Problém 2. Pro jakou hodnotu kvocientu q má trojúhelník, jehož délky stran tvoří geometrickou posloupnost, maximální obsah S ?

V posledním problému se vrátíme na začátek článku, kde jsme zmínili Keplerovy trojúhelníky (obr. 1, vlevo). Řešení problému je uvedeno v příloze C.

Problém 3. Ukažte, že pokud vezmeme dvě kopie Keplerova trojúhelníku a přiložíme je k sobě druhou nejdelší stranou, pak výsledný rovnoramenný trojúhelník má největší poloměr vepsané kružnice ze všech rovnoramenných trojúhelníků s danou délkou ramen.

Závěr

V článku jsme se pokusili ukázat, že kalkulus jako důležitá oblast matematické analýzy, nevznikl tak říkajíc ve vzduchoprázdnu. I. Newton a G. W. Leibniz jako jeho objevitelé navázali jak na práci řady svých předchůdců, tak na práci některých současníků.

V předchozích částech byli v této souvislosti zmíněni jen někteří, J. Kepler a zejména P. Fermat. Z řady významných matematiků uvedeme ještě další dva, kteří byli Fermatovi současníci a rovněž pomohli vytvořit příznivé podmínky a živnou půdu pro objev kalkulu.

Prvním z nich bude francouzský filosof a matematik René Descartes (1596–1650). Descartesovo jméno si obvykle připomínáme v souvislosti s kartézskou soustavou. Bývá považován za zakladatele analytické geometrie, která spojila algebru a geometrii pomocí kartézských souřadnic. To umožnilo algebraický popis křivek, což je nutný základ pro zavedení derivací a integrálů.

Italského jezuitu a matematika Bonaventuru Cavalieriho (1598–1647) spojujeme s tzv. Cavalieriho principem. Princip je založen na představě, že geometrické objekty (plochy a objemy) se skládají z nekonečně mnoha nekonečně malých částí. Plochy jsou složeny z nekonečně mnoha nekonečně tenkých úseček, objemy tvoří nekonečně mnoho nekonečně tenkých ploch. Podle tohoto principu mají dvě tělesa stejný objem, mají-li stejné velké podstavy i výšky a současně řezy těchto těles rovnoběžné s podstavami a vedené ve stejné vzdálenosti od podstav mají stejné obsahy.

Poděkování. Autor děkuje neznámému recenzentovi za pečlivé přečtení a cenné připomínky k obsahu článku.

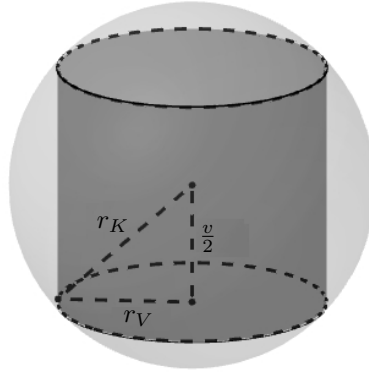
Literatura

- [1] Cadeddu, L., Lai, G.: Maxima and Minima without Derivatives? *The College Mathematics Journal*, roč. 46 (2015), č. 1, s. 15–22.
- [2] Grabiner, J. V.: The Changing Concept of Change: The Derivative from Fermat to Weierstrass. *Mathematics Magazine*, roč. 56 (1983), č. 4, s. 195–206.
- [3] Jun, Li: Some properties of the Kepler triangle. *The Mathematical Gazette*, roč. 101 (2017), č. 552, s. 494–495.
- [4] Sugimoto, T.: Inducing the symmetries out of the complexity: The Kepler triangle and its kin as a model problem. In: Darvas, G.: *Complex Symmetries*. Birkhäuser, Cham, 2021.
- [5] Strogatz, S.: *Infinite powers. The story of calculus, the language of the universe*. Atlantic Books, Londýn, 2020.

Příloha A

Pro poloměr r_K koule o objemu V_K , délku výšky v a objem V_V vepsaného válce platí (obr. 4)

$$r_K = \sqrt[3]{\frac{3V_K}{4\pi}}, \quad v = 2\sqrt{r_K^2 - r_V^2}, \quad V_V = \pi r_V^2 v.$$



Obr. 5: Válec vepsaný kouli

Dosazením do vzorce pro objem válce dostáváme

$$V_V = 2\pi r_V^2 \sqrt[3]{\left(\frac{3V_K}{4\pi}\right)^2 - r_V^2},$$

kde objem vepsaného válce pro daný objem koule závisí pouze na poloměru podstavy válce. Použitím Fermatovy metody $V_V(r_1) = V_V(r_2)$ ($r_1 \neq r_2$) je

$$2\pi r_1^2 \sqrt[3]{\left(\frac{3V_K}{4\pi}\right)^2 - r_1^2} = 2\pi r_2^2 \sqrt[3]{\left(\frac{3V_K}{4\pi}\right)^2 - r_2^2},$$

a dále po umocnění, zjednodušení, krácení výrazem $r_1^2 - r_2^2$ a zavedení $r_1 \approx r_2$

$$r_1^2 \left(2\sqrt[3]{\left(\frac{3V_K}{4\pi}\right)^2} - 3r_1^2 \right) = 0,$$

kde

$$V_K = \pi r_1^3 \sqrt{6}.$$

Porovnáním se vzorcem pro objem koule dostáváme

$$r_K = r_1 \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Výška v vepsaného válce pak musí být

$$v = 2\sqrt{r_K^2 - r_V^2} = 2\sqrt{\frac{3}{2}r_1^2 - r_1^2} = r_1\sqrt{2}.$$

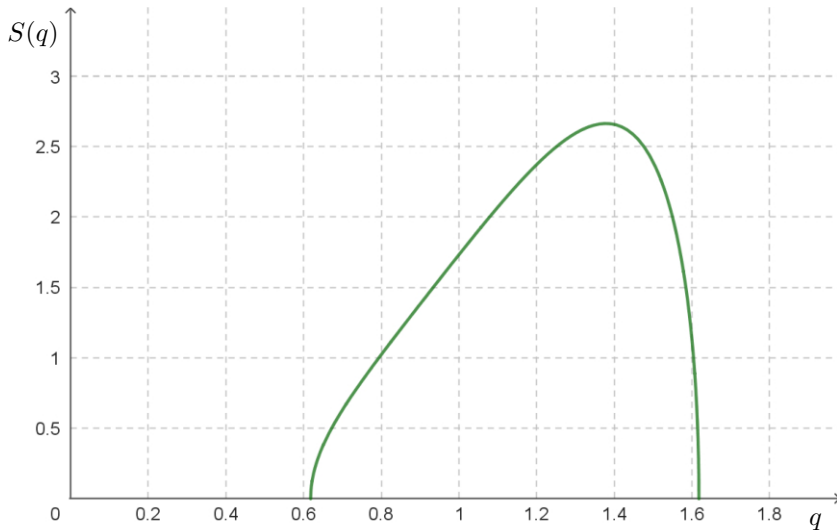
Válec vepsaný kouli o daném objemu má největší objem, když $v/r_V = \sqrt{2}$.

Příloha B

Použitím Geogebra (obr. 5) se můžeme přesvědčit, že funkce

$$S(q) = \sqrt{-q^8 + 2q^6 + q^4 + 2q^2 - 1}$$

má pro $q \in (1/\varphi, \varphi)$ maximum.



Obr. 6: Graf funkce $S(q) = \sqrt{-q^8 + 2q^6 + q^4 + 2q^2 - 1}$ pro $q > 0$

Použitím Fermatovy metody $S(q_1) = S(q_2)$, kde $q_1 \neq q_2$, platí

$$\sqrt{-q_1^8 + 2q_1^6 + q_1^4 + 2q_1^2 - 1} = \sqrt{-q_2^8 + 2q_2^6 + q_2^4 + 2q_2^2 - 1}.$$

MATEMATIKA

Po zjednodušení a zkrácení výrazem $q_1^2 - q_2^2$ dostáváme

$$-q_1^6 - q_2^6 - q_1^2 q_2^4 - q_1^4 q_2^2 + 2q_1^4 + 2q_2^4 + 2q_1^2 q_2^2 + q_1^2 + q_2^2 + 2 = 0,$$

a dále pro $q_1 \approx q_2$

$$2q_1^6 - 3q_1^4 - q_1^2 - 1 = 0.$$

Řešením rovnice, které náleží intervalu $(1/\varphi, \varphi)$, je (např. Wolfram Alpha)

$$q_1 = \sqrt{\frac{3 + \sqrt[3]{108 - 3\sqrt{921}} + \sqrt[3]{108 + 3\sqrt{921}}}{6}} \doteq 1,3789.$$

Trojúhelník, jehož strany mají délky tvořící členy geometrické posloupnosti, má největší obsah, jestliže kvocient geometrické posloupnosti má hodnotu $q \doteq 1,3789$.

Příloha C

Pro poloměr vepsané kružnice platí (obr. 1, vlevo)

$$\rho = \frac{S}{s} = \frac{a\sqrt{c^2 - a^2}}{c + a}.$$

Použitím Fermatovy metody $\rho(a_1) = \rho(a_2)$, kde $a_1 \neq a_2$, platí

$$\frac{a_1\sqrt{c^2 - a_1^2}}{c + a_1} = \frac{a_2\sqrt{c^2 - a_2^2}}{c + a_2}.$$

Po umocnění a zjednodušení dostáváme

$$a_1^2(c^2 - a_1^2)(c + a_2)^2 = a_2^2(c^2 - a_2^2)(c + a_1)^2,$$

dále

$$a_1^2(c - a_1)(c + a_2) = a_2^2(c - a_2)(c + a_1),$$

a po dalším zjednodušení a využití principu „přibližné rovnosti“ $a_1 \approx a_2$

$$c^2 - a_1c - a_1^2 = 0,$$

kde

$$c_{1,2} = a_1 \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Součet prvočísel

Dnešní úloha je převzata ze školního kola soutěže Pangea 2026 pro 9. ročník. Autorem úloh pro 9. ročník je Ing. Jan Matoušek, učitel matematiky na Keplerově gymnáziu.

Možná někteří z vás ví, že prvočísel menších než 100 je 25. Víte ale, kolik je všech prvočísel menších než 1 000? Nebojte, nemusíte je počítat, prozradíme, že je jich 168. Budeme po vás ovšem chtít, abyste vyřešili následující úlohu.

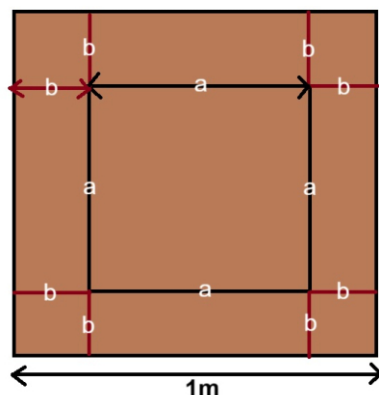
Úloha

Z uvedených možností vyberte správný součet 168 prvočísel menších než 1 000. Odpověď zdůvodněte.

- a) 14 865 b) 54 382 c) 76 127 d) 81 994 e) 126 668

Úloha z minulého čísla zněla:

Představte si, že máte velmi kvalitní písek a na půdě karton ve tvaru čtverce o straně délky 1 metr. Svému nejlepšímu kamarádovi chcete dát k Vánocům svůj kvalitní písek. A protože je to nejlepší kamarád, chcete karton poskládat tak, aby vznikla krabice (bez víka) co největšího objemu. Ohýbáte karton tak, že uprostřed zůstane čtverec o straně délky a , přičemž boky budou mít výšku b , viz obrázek. Jaké budou délky a , b tak, aby objem krabice byl co největší?



Řešení podle José Marciala Nájarese Romera Úlohu budeme řešit dvěma různými způsoby. Nejdříve běžným způsobem pomocí derivací a pak pomocí nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem (AG nerovnost) bez derivace.

Podle zadání víme, že $a + 2b = 1$, a dále víme, že v našem případě objem určíme jako $V = a^2b$. Vyjádříme $a = 1 - 2b$ a po dosazení do vztahu pro výpočet objemu dostaneme

$$V = (1 - 2b)^2b. \quad (1)$$

Proměnná b evidentně splňuje nerovnosti $0 \leq b \leq 1/2$. Navíc pro případy $b = 0$ a $b = 0,5$ je objem naší krabice nulový.

Při hledání maximálního objemu budeme vycházet ze vzorce (1) a budeme uvažovat funkci

$$f(x) = (1 - 2x)^2x \quad (2)$$

na intervalu $\langle 0; 0,5 \rangle$. Proměnnou b jsme přeznačili na x , jak bývá u funkcí zvykem.

Řešení pomocí derivací. Funkci (2) upravíme:

$$f(x) = (1 - 2x)^2x = (1 - 4x + 4x^2)x = 4x^3 - 4x^2 + x. \quad (3)$$

Derivací této funkce je $f'(x) = 12x^2 - 8x + 1$, její nulovou hodnotu dostaneme vyřešením kvadratické rovnice $12x^2 - 8x + 1 = 0$. Kořeny této rovnice jsou $x_1 = 1/2$ a $x_2 = 1/6$.

Funkce (3) je spojitá na celém uzavřeném intervalu. V krajních bodech je její hodnota nulová a ve všech ostatních bodech je kladná. Proto nabývá svého maxima na intervalu $(0; 0,5)$ v bodě $x = 1/6$. Tedy maximální objem naší krabice je $2/27 \text{ m}^3$ a nabývá se pro $b = 1/6 \text{ m}$.

Řešení pomocí AG nerovnosti. Toto řešení předvedl doc. Petr Vodstrčil ve své přednášce „Jak řešit extrémální úlohy bez derivací“ na konferenci Matematika pro život v roce 2025. Záznam přednášky je dostupný na https://www.youtube.com/watch?v=xrm6rnem_7I&list=PLd0y7E74TNFZMq1nZyBsGiKm6lUifagiI&index=9. Nejprve si připomeňme definici aritmetického průměru A a geometrického průměru G a AG nerovnost. Přitom se omezíme na případ pro tři kladné reálné hodnoty a, b, c :

$$A = \frac{a + b + c}{3}, \quad G = \sqrt[3]{abc}.$$

Věta (AG nerovnost): *Platí $G \leq A$, přičemž rovnost nastane, právě když $a = b = c$.*

Vysvětleme tvrzení o nabývání rovnosti. Pokud $a = b = c$, pak je zřejmé, že $A = G = a$.

Pokud $A = G$, ukážeme, že musí platit $a = b = c$. Předpokládejme bez újmy na obecnosti, že a je největší z hodnot, c nejmenší, tj. $a > c$. Pak $c < A < a$. Označme $a' = a + c - A$, $b' = b$, $c' = A$. Jsou to opět kladné hodnoty a jejich aritmetický průměr je také roven A , tedy aritmetickému průměru čísel a , b , c . Tudíž podle AG nerovnosti musí být jejich geometrický průměr menší nebo roven A . Ale platí následující vztahy

$$(a + c - A)A - ac = (A - c)(a - A) > 0, \quad (a + c - A)bA > abc,$$

proto

$$\sqrt[3]{a'b'c'} = \sqrt[3]{(a + c - A)bA} > \sqrt[3]{abc} = A = \frac{a' + b' + c'}{3}.$$

To je ale ve sporu s AG nerovností, proto z rovnosti $A = G$, plyne rovnost $a = b = c$.

Nyní se pokusíme o částečný přepis řešení doc. Vodstrčila. Máme funkci $f(x) = (1-2x)^2x$ a chceme najít její maximální hodnotu. Abychom využili AG nerovnost co nejšikovněji, tuto funkci vynásobíme čtyřmi. Pouze konstatujeme, že pokud naše funkce nabývá svého maxima v nějakém bodě našeho intervalu, v tom samém bodě nabývá svého maxima i funkce, která je čtyřnásobek původní funkce. Tedy

$$g(x) = 4f(x) = (1 - 2x)(1 - 2x)4x.$$

Z AG nerovnosti dostaneme

$$\sqrt[3]{(1 - 2x)(1 - 2x)4x} \leq \frac{1 - 2x + 1 - 2x + 4x}{3} = \frac{2}{3}.$$

Odtud je jasný důvod, proč jsme naši funkci vynásobili čtyřmi. Bylo to proto, aby pravá strana vyšla konstantní.

Rovnost nastane, právě když se všechny tři hodnoty rovnají, tedy

$$1 - 2x = 4x \Rightarrow x = \frac{1}{6}.$$

Průměrná rychlost nerovnoměrného pohybu

Pavel Pokorný, VŠCHT Praha

Abstrakt. Ukážeme některé překvapivé vztahy pro průměrnou rychlost, je-li pohyb brzděn silou úměrnou n -té mocnině rychlosti. Vyřešíme pohybovou rovnici a spočteme průměrnou rychlost. Na závěr zmíníme, které fyzikální děje lze popsat určitým exponentem n .

Začneme úryvkem tohoto primitivního rozhovoru:

- Co to je průměrná rychlost?
- No přece celková dráha L dělená celkovým časem T

$$\bar{v} = \frac{L}{T}.$$

- A jak se spočítá, když je počáteční rychlost v_1 a koncová rychlost v_2 ?
- No přece

$$\bar{v} = \frac{v_1 + v_2}{2}.$$

- Opravdu?!

Pojďme se na tuto otázku podívat podrobněji. Uvažujme pohyb tělesa, které je brzděno (např. odporem prostředí, ve kterém se pohybuje) silou F úměrnou n -té mocnině rychlosti v . Protože

$$F = ma = m \frac{dv}{dt},$$

lze takový pohyb popsat diferenciální rovnicí

$$\frac{dv}{dt} = k v^n, \tag{1}$$

kde k je konstanta. O brzdění pak hovoříme, když je $k < 0$. Ale pro naše úvahy tato podmínka není důležitá. Nebudeme ani předpokládat celočíselnou hodnotu exponentu n . Pak ale musíme předpokládat kladnou rychlost $v > 0$. Rovnici (1) vyřešíme separací proměnných

$$v^{-n} dv = k dt$$

$$\int v^{-n} dv = \int k dt \quad (2)$$

$$\frac{v^{1-n}}{1-n} = kt + c.$$

Označme v_1 počáteční rychlost v čase $t = 0$ a v_2 koncovou rychlost v čase $t = T$. Pak

$$c = \frac{v_1^{1-n}}{1-n}$$

a

$$\frac{v^{1-n}}{1-n} = kt + \frac{v_1^{1-n}}{1-n}.$$

Připravíme si ještě vztah

$$\frac{v_2^{1-n}}{1-n} = kT + \frac{v_1^{1-n}}{1-n}.$$

Nyní můžeme vyjádřit rychlost v jako funkci času t

$$v = ((1-n)kt + v_1^{1-n})^{\frac{1}{1-n}}$$

a integrací od $t = 0$ do $t = T$ dostaneme celkovou dráhu

$$L = \int_0^T v dt = \int_0^T ((1-n)kt + v_1^{1-n})^{\frac{1}{1-n}} dt.$$

Tento integrál vypadá složitě, ale vlastně je to jen integrál mocninné funkce, podobně jako integrál (2). Po drobných úpravách s využitím odvozených vztahů dostaneme

$$L = \frac{1}{k(2-n)} (v_2^{2-n} - v_1^{2-n})$$

a průměrná rychlost je pak po úpravě

$$\bar{v} = \frac{L}{T} = \frac{1-n}{2-n} \frac{v_2^{2-n} - v_1^{2-n}}{v_2^{1-n} - v_1^{1-n}}. \quad (3)$$

To je hlavní výsledek našeho úsilí. Podívejme se na jeho některé zvláštní případy.

Případ $n = 0$

Pro $n = 0$, tedy když je zrychlení (kladné nebo záporné) nezávislé na rychlosti, dostáváme

$$\bar{v} = \frac{1}{2} \frac{v_2^2 - v_1^2}{v_2 - v_1} = \frac{v_1 + v_2}{2}. \quad (4)$$

Za tohoto předpokladu měl tedy naivní diskutující z úvodu pravdu, že průměrná rychlost je aritmetický průměr počáteční a koncové rychlosti. Takto se pohybuje např. hmotný bod v homogenním gravitačním poli (vrh svislý) nebo nabitá částice v homogenním elektrickém poli, při zanedbání odporu prostředí.

Případ $n = 1$

Pro $n = 1$ nelze tuto hodnotu n přímo dosadit do vztahu (3), ale uvážením limity a použitím l'Hospitalova pravidla (viz dodatek) dostaneme zajímavý a užitečný vztah. Konkrétně pro $n = 1$, když odpor prostředí je přímo úměrný první mocnině rychlosti, dostaneme

$$\bar{v} = \frac{v_2 - v_1}{\ln \frac{v_2}{v_1}}, \quad (5)$$

kde $\ln$ je přirozený logaritmus. Takový pohyb nastává např. při pomalém pohybu malého tělesa prostředím, např. vzduchem nebo vodou. Při pomalém pohybu je obtékání tělesa laminární a netvoří se víry.

Stejně matematické vztahy ale popisují ještě jiný fyzikálně odlišný děj, a to přenos tepla z teplého proudícího media, např. teplé vody, stěnou, např. trubkou. Pak je přenos tepla přímo úměrný první mocnině rozdílu teplot media a okolí. Potom je průměrná teplota dána opět vztahem (5), kde místo počáteční rychlosti dosadíme počáteční teplotu a místo konečné rychlosti dosadíme konečnou teplotu.

Milovníky aritmetického průměru snad potěšíme poznámkou, že pro blízké hodnoty v_1 a v_2 se vztah (5) blíží vztahu (4).

Případ $n = 2$

Ani v tomto případě nelze hodnotu $n = 2$ dosadit přímo do vztahu (3). Pomocí limity a použitím l'Hospitalova pravidla (viz dodatek) dostaneme

$$\bar{v} = \frac{\ln \frac{v_1}{v_2}}{\frac{1}{v_2} - \frac{1}{v_1}}. \quad (6)$$

Tento případ nastává, když se těleso pohybuje v prostředí větší rychlostí, kdy obtékání již není laminární, ale turbulentní a tvoří se víry. Tento případ je v běžném životě nejčastější (pohyb cyklisty nebo motorového vozidla, zejména proti větru).

Případ $n > 2$

V klasické aerodynamice je v^2 nejčastější a nejvyšší běžná mocnina. Vyšší mocniny však mohou nastat, např. při rychlostech blízkých nebo vyšších, než je rychlost zvuku. Dále při pohybu v granulárním prostředí, např. písek, sníh nebo v husté suspenzi. Také při pohybu v plazmatu. Nebo v případě nelineárního tření v technických systémech, např. magnetická brzda, aktivní tlumiče.

Dodatek

Zde si ukážeme, jak odvodíme vztahy (5) a (6) ze vztahu (3).

Hodnotu $n = 1$ nemůžeme přímo dosadit, protože bychom dostali neurčitý výraz typu „nula lomeno nulou“. Ale můžeme spočítat limitu pro n se blíží k jedné pomocí l'Hospitalova pravidla.

L'Hospitalovo pravidlo je užitečný nástroj, jak spočítat širokou třídu jinak obtížných limit. My se zde soustředíme na speciální případ, kdy spočítáme limitu zlomku jako podíl derivací

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

Abychom ukázali platnost tohoto vztahu, budeme předpokládat $f(x_0) = 0$, $g(x_0) = 0$ a existenci derivací

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \\ g'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \end{aligned}$$

a nenulovost jmenovatele $g'(x_0) \neq 0$. Věta o l'Hospitalově pravidle je obecnější, nám bude stačit tento omezený případ. A za těchto předpokladů můžeme psát

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}{\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

V našem případě nebude proměnnou x , ale n . Dále budeme potřebovat pravidlo pro derivaci exponenciální funkce s obecným základem

$$(a^x)' = a^x \ln a.$$

Limitu výrazu (3) pro n se blíží k jedné spočteme takto:

$$\begin{aligned} \bar{v} &= \lim_{n \rightarrow 1} \frac{1-n}{2-n} \frac{v_2^{2-n} - v_1^{2-n}}{v_2^{1-n} - v_1^{1-n}} = \\ &= (v_2 - v_1) \lim_{n \rightarrow 1} \frac{1-n}{v_2^{1-n} - v_1^{1-n}} \stackrel{\text{l'H}}{=} \\ &\stackrel{\text{l'H}}{=} (v_2 - v_1) \lim_{n \rightarrow 1} \frac{-1}{-v_2^{1-n} \ln v_2 + v_1^{1-n} \ln v_1} = \\ &= (v_2 - v_1) \frac{-1}{-\ln v_2 + \ln v_1} = \frac{v_2 - v_1}{\ln \frac{v_2}{v_1}}. \end{aligned}$$

A podobně odvodíme vztah (6) ze vztahu (3). Limitu výrazu (3) pro n se blíží ke dvěma spočteme takto:

$$\begin{aligned} \bar{v} &= \lim_{n \rightarrow 2} \frac{1-n}{2-n} \frac{v_2^{2-n} - v_1^{2-n}}{v_2^{1-n} - v_1^{1-n}} = \\ &= \frac{-1}{\frac{1}{v_2} - \frac{1}{v_1}} \lim_{n \rightarrow 2} \frac{v_2^{2-n} - v_1^{2-n}}{2-n} \stackrel{\text{l'H}}{=} \\ &\stackrel{\text{l'H}}{=} \frac{-1}{\frac{1}{v_2} - \frac{1}{v_1}} \lim_{n \rightarrow 2} \frac{-v_2^{2-n} \ln v_2 + v_1^{2-n} \ln v_1}{-1} = \frac{\ln \frac{v_1}{v_2}}{\frac{1}{v_2} - \frac{1}{v_1}}. \end{aligned}$$

Je zajímavé, že hodnoty $n = 1$ a $n = 2$ jsou z fyzikálního pohledu nejčastější, a tedy nejdůležitější, a z matematického pohledu to jsou jediné dvě hodnoty, které nelze přímo dosadit do vztahu (3).

Věda vs. konspirace: Má vůbec smysl diskutovat?

Leontýna Šlégrová, Jan Šlégr

Přírodovědecká fakulta Univerzity Hradec Králové

Abstrakt. V závěrečném dílu seriálu se zaměřujeme na konspirační tvrzení zpochybňující vliv člověka na současnou změnu klimatu a ukazujeme, proč tato tvrzení neobstojí v testu důkazů. Ukazujeme také, že základní princip skleníkového efektu lze vysvětlit pomocí jednoduchého fyzikálního modelu založeného na tepelné rovnováze Země, albedu a emisivitě atmosféry, tedy bez nutnosti opírat se o složité numerické simulace. Dále shrnujeme, že klimatické modely jsou při srovnání s pozorováním překvapivě přesné, že spektrální měření potvrzují roli CO_2 a že „alternativní“ vysvětlení často selhávají jak ve fyzice, tak v předpovědích. V závěru připomínáme, že i když diskuse se zastánci konspiračních teorií jen zřídka vede ke změně jejich názoru, má smysl kvůli těm, kdo si teprve utvářejí představu o tom, jak ve vědě fungují důkazy.

Úvod

V závěrečném dílu našeho seriálu se pokusíme odpovědět na otázku, proč jsme tomuto tématu věnovali celý seriál. Teorie ploché nebo duté Země jsou možná kuriozity, které mohou najít využití ve výuce přírodních věd a kritického myšlení. Existují však i tvrzení s reálnými dopady – například konspirační teorie o zanedbatelném vlivu člověka na klima.

Závěr předchozího odstavce může na některé čtenáře zapůsobit trochu jako cimrmanovský šrapnel – po třech dílech o zdánlivě okrajových tématech jsme totiž najednou vstoupili na podstatně citlivější půdu. Zde bychom chtěli upozornit, že je naprosto v pořádku se ptát, jaký je vliv člověka na klima a jak to víme. Ne každá pochybnost o míře lidského vlivu je konspirační; konspirační se stává až tehdy, když tvrdí, že důkazy jsou záměrně falšovány a že vědci skutečnost tají. Reagujeme hlavně na tvrzení kolující na internetu, že naše poznatky o změně klimatu jsou dílem „podplacených klimatologů“, kteří údajně tají „skutečnou pravdu“ – totiž že současné změny klimatu způsobují přirozené procesy a „vládnoucí elity“ to skrývají.

Má tedy vůbec smysl o tom s přesvědčenými zastánci těchto teorií diskutovat? K odpovědi se dostaneme v samotném závěru. Do té doby ale využijeme vše, co jsme popsali v předchozích dílech, a krok za krokem

ukážeme, proč tato konspirační teorie v testu důkazů neobstojí – stejnými nástroji, jaké jsme už použili například u ploché Země.

Vliv člověka na klima

Autor tohoto textu se přiznává, že právě otázka vlivu člověka na klima byla jednou z mála konspiračních tezí, které byl ochoten brát vážně. Jedno deštivé léto proto strávil tím, že prošel všechny informace, ke kterým se dokázal dostat, a propočítal všechno, co propočítat svedl. Výsledek tohoto pátrání byl mimo jiné jedním z důvodů, proč vznikl tento seriál.

Na sociálních sítích se často objevuje tvrzení, že změnu klimatu popisují pouze složité počítačové modely běžící na superpočítačích – a že jim proto nelze věřit. Ve skutečnosti lze základní tepelnou rovnováhu Země odvodit velmi jednoduchou úvahou, kterou lze provést doslova „na rantlu od novin“.

Ve výuce astrofyziky se často odvozuje teplota planet: Na planetu Zemi ze Slunce dopadá přibližně 1360 wattů na každý čtverečný metr plochy. Země zachytává záření na kruhovém průřezu o ploše πR^2 , ale vyzařuje energii z celého povrchu koule o ploše $4\pi R^2$. V tepelné rovnováze musí být pohlcený a vyzařený výkon stejný:

$$\pi R^2 I = 4\pi R^2 \sigma T^4,$$

kde $I = 1360 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$ je solární konstanta, $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$ Stefanova–Boltzmannova konstanta a R poloměr Země. Po úpravě dostaneme rovnovážnou teplotu:

$$T = \sqrt[4]{\frac{I}{4\sigma}} \doteq 278 \text{ K} = 5 \text{ }^\circ\text{C}.$$

To je užitečný první odhad, ale výrazně pod skutečným průměrem: v literatuře se běžně uvádí, že průměrná (globální) teplota Země je asi $T_Z = 15 \text{ }^\circ\text{C}$. Země se ale nechová jako absolutně černé těleso – přibližně třicet procent energie odrazí zpět do vesmíru. To popisuje veličina známá jako albedo, jehož průměrná hodnota pro Zemi je $\alpha = 0,3$. Absorbovaný tok záření je tedy o 30 % menší a rovnice energetické rovnováhy má tvar

$$\pi R^2 (1 - \alpha) I = 4\pi R^2 \sigma T^4.$$

Odtud dostaneme

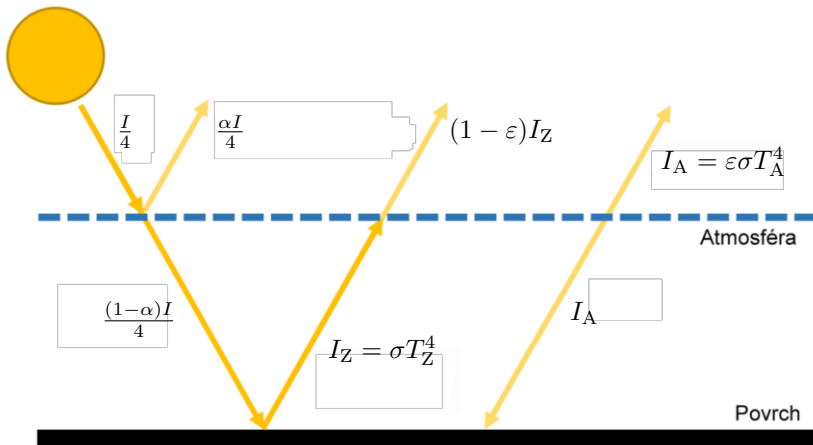
$$T = \sqrt[4]{\frac{(1 - \alpha) I}{4\sigma}} \doteq 255 \text{ K} = -18 \text{ }^\circ\text{C}.$$

To je ještě větší rozdíl než předtím! Proto musí existovat nějaký jev, který teplotu planety Země udržuje vyšší.

Na obr. 1 je znázorněn jednoduchý jednorozměrný model atmosféry. Povrch Země vyzařuje infračervené záření podle Stefanova-Boltzmannova zákona

$$I_Z = \sigma T_Z^4.$$

Atmosféra část tohoto záření absorbuje a část znovu vyzařuje. Označme emisivitu atmosféry symbolem ε . Tato veličina vyjadřuje, jak velkou část infračerveného záření atmosféra absorbuje (a zároveň vyzařuje). Povrch Země tedy přijímá energii ze dvou zdrojů: ze slunečního záření, ale přijímá také infračervené záření vyzařované atmosférou směrem dolů.



Obr. 1: Jednoduchý 1D model atmosféry

Sluneční záření dopadající na jednotku plochy Země je $(1 - \alpha)I/4$. Atmosféra navíc vyzařuje směrem k povrchu tok $\varepsilon \sigma T_A^4$, kde T_A je teplota atmosférické vrstvy. Podmínka energetické rovnováhy povrchu Země tedy má tvar:

$$\sigma T_Z^4 = \frac{(1 - \alpha)I}{4} + \varepsilon \sigma T_A^4.$$

Atmosféra sama také vyzařuje energii. Vyzařuje ji jak směrem do vesmíru, tak zpět k povrchu. Pro rovnováhu atmosférické vrstvy tedy platí

$$2\varepsilon \sigma T_A^4 = \varepsilon \sigma T_Z^4.$$

Z této rovnice dostaneme jednoduchý vztah mezi teplotou atmosféry a povrhu:

$$T_A^4 = \frac{T_Z^4}{2}.$$

Po dosazení do rovnice energetické bilance povrhu získáme vztah pro teplotu povrhu Země:

$$T = \sqrt[4]{\frac{(1 - \alpha)I}{4\sigma(1 - \frac{\varepsilon}{2})}}.$$

Pro hodnoty $I = 1360 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$, $\alpha = 0,3$ a $\varepsilon = 0,74$ dostaneme teplotu přibližně 13°C , což je velmi blízko skutečně naměřené teplotě. Z rovnice plyne, že globální teplota Země se zvýší s rostoucí solární konstantou, snížením albeda a zvýšením emisivity. A právě emisivita je závislá na koncentraci CO_2 (a dalších skleníkových plynů) v atmosféře. Hodnota $\varepsilon = 0,74$ vychází z článku [1], není to číslo zvolené tak, aby „model vyšel“. Účinek CO_2 roste přibližně logaritmicky s koncentrací; v jednoduchém modelu se to projevuje jako růst efektivní emisivity atmosféry [2].

Tento jednoduchý model samozřejmě zanedbává řadu procesů v atmosféře (například konvekci nebo spektrální závislost absorpce), přesto však dobře ukazuje základní fyzikální princip skleníkového efektu. Čtenářům, kteří by chtěli jít ještě dál, autoři doporučují didakticky velmi povedený článek [3] v časopise *American Journal of Physics*, který výše uvedené výpočty rozšiřuje o robustněji definovaný vliv CO_2 a vodní páry.

Jednoduchý model planetární atmosféry také ukazuje, proč není správná častá námitka, že absorpční pásma CO_2 jsou již „saturovaná“. I když je střed absorpčního pásma skutečně téměř neprůhledný, zvýšení koncentrace CO_2 způsobí, že infračervené záření uniká do vesmíru z vyšších vrstev atmosféry. Protože teplota atmosféry s výškou klesá, tyto vrstvy vyzařují méně energie (protože je úměrná σT^4). Aby byla zachována energetická rovnováha planety, musí se celý systém (zejména povrch) ohřát. Zvýšení koncentrace skleníkových plynů tedy nefunguje jako „ zesílení jedné absorpční čáry“, ale jako posun výšky, ze které planeta efektivně vyzařuje energii do vesmíru.

Na začátku této části jsme nakousli problematiku modelů klimatu. Stejně jako u mnoha jiných konspiračních narativů se zde objevuje několik vzájemně si odporujících tvrzení. Jedna skupina „klimaskeptiků“ tvrdí, že jsou všechny modely podvržené, jiná naopak zastává názor, že

modely změny klimatu nefungují. Analýza publikovaná v článku [4] porovnává klimatické modely od roku 1970 a ukazuje, že modely byly překvapivě přesné (i když se postupně zpřesňovaly zavedením dalších vlivů). Historické modely předpovídají oteplení konzistentní s tím, co je skutečně pozorováno, pokud se do nich dosadí skutečné emise CO_2 . Pokud např. v roce 1970 vědci modelovali změnu klimatu, museli odhadnout, kolik CO_2 lidstvo vypustí např. v letech 1980 a 1990 (a samozřejmě, že lidstvo jich vypustilo více, než by kdo v roce 1970 předpokládal). Vztah mezi forcingem a změnou teploty funguje napříč všemi generacemi modelů, chyby historicky dělaly odhady (kolik asi lidstvo v budoucnu vypustí), ne základní fyzika v modelech. O tom, jak se modely postupně zpřesňovaly, pojednává moc pěkný český článek [5].

Experimenty a konzistence s existujícími poznatky

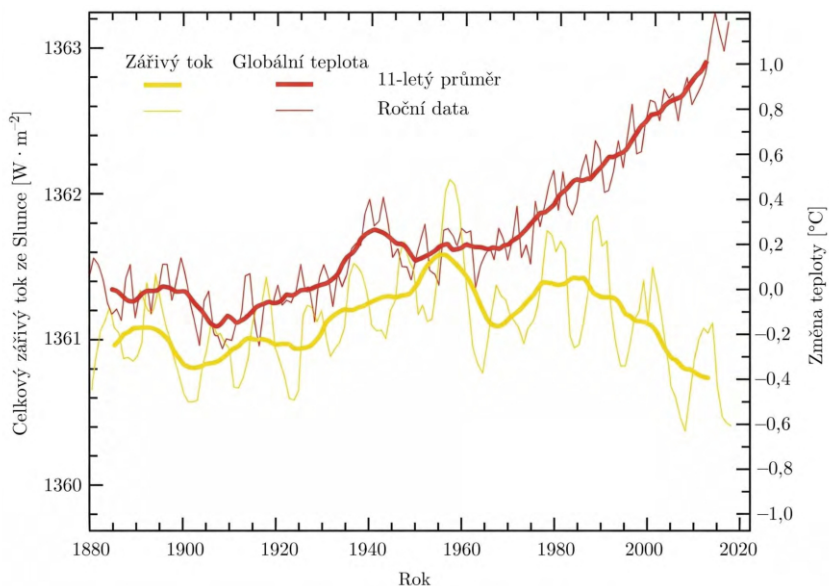
Otázka falzifikovatelnosti je v případě změny klimatu poněkud specifická – nemáme totiž žádnou „kontrolní planetu“, na které bychom mohli provést experiment. Proto se musíme soustředit na jiný typ testu: zda jsou teoretické předpovědi klimatických modelů v souladu s pozorováním. Právě porovnání předpovědí s reálnými daty umožňuje ověřit, zda jsou fyzikální předpoklady modelů správné.

V roce 2015 vyšla v *Nature* studie [6], která prokázala, že nárůst koncentrace CO_2 v atmosféře během deseti let vedl k měřitelnému nárůstu množství infračerveného záření dopadajícího z atmosféry k povrchu Země. Nezávislá satelitní měření přístrojem AIRS na družici Aqua naopak ukazují změny právě v pásmech CO_2 a potvrzují přímý vliv růstu CO_2 na odchozí dlouhovlnné záření [7].

Díky těmto měřením víme, že skleníkové plyny absorbují infračervené záření pouze v určitých vlnových délkách. Pokud by za oteplování Země mohl jiný mechanismus než rostoucí koncentrace CO_2 , změny v energetické bilanci planety by se projevily rovnoměrně v celém spektru. Satelitní měření však ukazují, že změny nastávají právě v těch spektrálních pásmech, kde CO_2 absorbuje infračervené záření.

Satelitní měření také ukazují, že při zesilování skleníkového efektu se troposféra ohřívá, ale stratosféra ochlazuje. Kdyby byl hlavní příčinou oteplování silnější výkon Slunce, čekali bychom naopak oteplování ve vyšších vrstvách atmosféry. NASA to uvádí přímo jako jedna ze „smoking guns“ a novější práce [8] označuje kombinaci oteplování troposféry a ochlazování stratosféry napříč šířkami za unikátní „otisk prstu“ působení skleníkových plynů.

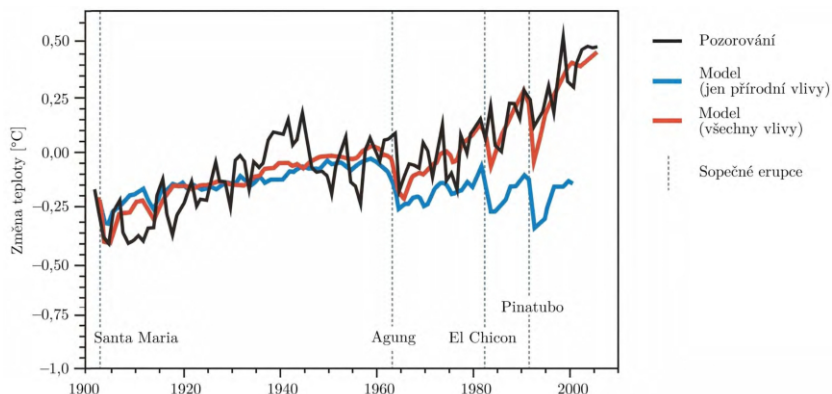
Občas se setkáme i s „vysvětlením“, že za změnu klimatu nemůže CO_2 , ale Slunce (koneckonců, solární konstanta se ve vzorci nachází v čitateli). Energie přicházející ze Slunce je však velmi přesně měřena, a proto víme, že celkový sluneční příkon neukazuje od poloviny 20. století žádný růstový trend, který by vysvětlil současné oteplování (viz obr. 2).



Obr. 2: Vývoj teploty Země a sluneční činnosti (převzato z [13])

Článek [5] popisuje, jak klimatologie umí rozlišit jednotlivé jevy, které mají na klima vliv. Z obr. 3 je zřejmé, že kdyby nebylo skleníkových plynů, teplota by se po erupcích velkých sopek na nějakou dobu snížila. Tyto přirozené jevy jsou však spolehlivě překonány skleníkovými plyny. Navíc víme, že se jedná skutečně o CO_2 přidaný do atmosféry člověkem: Oxid uhličitý, který je součástí přirozeného uhlíkového cyklu planety, vzniká biologickými procesy. Fosilní paliva ležela miliony let pod zemí, takže se v nich rozpadl prakticky všechen radioaktivní izotop ^{14}C a zároveň jsou ochuzena o izotop ^{13}C . Rostoucí koncentrace CO_2 v atmosféře je proto doprovázena poklesem poměru $^{13}\text{C}/^{12}\text{C}$. Současně klesá i koncentrace atmosférického kyslíku, přičemž [9] uvádí jako hlavní příčinu právě spalování fosilních paliv. Nepozorujeme tedy pouze oteplování a

růst koncentrace CO_2 , ale i nezávislé chemické stopy, které ukazují na jeho původ v lidské činnosti.



Obr. 3: Příčiny změny klimatu. Převzato z [5]

Dalším nezávislým důkazem změny energetické bilance Země je růst tepelné energie oceánů. Oceány totiž absorbují více než 90 % přebytečného tepla v klimatickém systému.

Naproti tomu se dodnes neprosadilo žádné fyzikálně i observačně přesvědčivé alternativní vysvětlení, které by data popsalo lépe než role skleníkových plynů. Podobně jako teorie ploché Země hledá další a další vysvětlení stáčení roviny kyvu Foucaultova kyvadla, na „klimaskeptických“ stránkách se dočteme, že změny teplot způsobují třeba Milankovičovy cykly, periodické změny dráhy Země. Ty však probíhají na časových škálách desítek až stovek tisíc let, takže současné rychlé změny (v desítkách let) vysvětlit nedokážou.

Peer review (recenzní řízení)

Občas se také setkáváme s názorem, že jakákoli diskuse o jiných příčinách změny klimatu je ve vědě potlačována. Podle tohoto tvrzení jsou klimatologové podplacení a vědci, kteří by chtěli zpochybnit roli CO_2 , riskují ztrátu grantů, profesní diskreditaci nebo dokonce osobní perzekuci. To není pravda – i ve vědeckých časopisech vycházejí články, které tvrdí (obvykle na základě statistických analýz, ne na základě fyzikálních výpočtů), že se role CO_2 přeceňuje. Problém těchto článků je především v tom, že jejich předpovědi nejsou v souladu s pozorovanými daty. Napří-

klad v roce 2021 vyšly dva články, které tvrdily, že se role CO_2 přeceňuje a mimo jiné v nich byly i předpovědi, jak se bude teplota dále vyvíjet. Stefani et al. [10] předpověděli, že v nejbližších letech (po roce 2021) budou teploty klesat, protože atmosféra už je CO_2 satureovaná. Přesto jsme zažili po sobě jdoucí rekordně horké roky. Scafetta [11] uvádí, že oteplování bude pokračovat podstatně pomalejším tempem, přibližně kolem $0,1^\circ\text{C}$ za dekádu. Skutečně naměřený nárůst globální teploty však činil přibližně $0,45^\circ\text{C}$ za tři roky, což odpovídá lineárnímu trendu asi $1,5^\circ\text{C}$ za dekádu. Navíc v poslední době nárůst teplot ještě zrychluje [12].

Tyto dva články ve vědeckých časopisech skutečně vyšly. Je však celá řada prací, které recenzním řízením v odborných časopisech neprošla například proto, že velmi volně zachází s fyzikálními zákony (autoři tohoto textu byli svědky toho, že ve snaze vysvětlit současné změny klimatu bez CO_2 byl popřen nejen Stefanův–Boltzmannův zákon, ale dokonce i zákon zachování energie). Takové články se pak objevují na různých klimaskeptických blozích právě s vysvětlením, že jakýkoliv nemainstreamový názor je potlačován a proto nebylo možné výsledky výzkumu publikovat ve vědeckém časopise. V těchto textech se často objevuje argument s Giordanem Brunem – připomíná se, že byl za svůj „nemainstreamový“ názor upálen. Má to vyvolat dojem, že i dnešní „klimaskeptici“ představují pronásledovanou menšinu, která pouze přináší nepohodlnou pravdu.

Závěr

Je pochopitelné, že lidé citlivě reagují na téma, které se dotýká jejich životního stylu, peněz i politických preferencí. Část odporu proto nesměřuje ani tak proti fyzikálním argumentům samotným jako spíš proti mediálním zkratkám a politickým opatřením, která se s klimatickou politikou spojují. Zejména na sociálních sítích se setkáváme s příspěvky, jejichž autoři prezentují změnu klimatu jako součást kulturní války – mezi „zlou Evropskou unií“, „klimahysterikou“ a „zelenými ideologií“ na jedné straně a jimi, racionálně smýšlejícími „klimaskeptiky“, na straně druhé. Tomu odpovídá i použitý slovník, který je velmi podobný slovníku zastánců teorie ploché Země: Kdo s nimi nesouhlasí, je „ovce mainstreamu“ a „oběť indoktrinace“. Autor tohoto textu byl nazván trollem proto, že požadoval citaci pramenu, ze kterého by vyplynulo, že v minulosti byla koncentrace CO_2 v atmosféře 45 % (což by znamenalo zcela extrémní složení atmosféry neodpovídající geologickým rekonstrukcím).

Jak jsme viděli v předchozích dílech našeho seriálu, diskuse se zastánci konspiračních teorií jen zřídka vede ke změně názoru. Přesto je

ale víc než kdy jindy důležité trpělivé a slušné vysvětlování: autorovi tohoto textu se po asi třiceti příspěvcích podařilo přesvědčit diskutujícího, který svou argumentaci opíral mimo jiné o to, že je „inženýr s červeným diplomem“, že člověk má na současnou změnu klimatu významný vliv. Bylo zapotřebí detailně rozebrat, proč jeho vysvětlení změny klimatu nemohou fungovat a proč je hlavní fyzikální příčinou současné změny klimatu zesílení skleníkového efektu způsobené skleníkovými plyny. To je ale velká výjimka – málokterý diskutující je schopen uznat svůj omyl, hlavně když do diskuse investoval velké množství emocí. I tak má ale cenu se těchto diskusí účastnit – nepřesvědčíte protistranu, ale píšete pro „mlčící většinu“ – uživatele, kteří nekomentují, ale jen čtou a třeba v těchhle věcech ještě nemají pořádek a hledají informace. Pokud by v diskusích zůstala tvrzení typu „Koncentrace 45 % CO₂ v atmosféře Země“ bez oponentury, mohli by tito lidé získat dojem, že vliv člověka na klima je něco, co vlastně není vyřešené.

Literatura

- [1] Kawaguchi, K., Shakespeare, C. J., Roderick, M. L.: CO₂ Dependence in Global Estimation of All-Sky Downwelling Longwave: Parameterization and Model Comparison. *Geophysical Research Letters*, roč. 51 (2024), č. 18, e2024GL110384, s. 1–12.
- [2] Roms, D. M., Seeley, J. T., Edman, J. P.: Why the Forcing from Carbon Dioxide Scales as the Logarithm of Its Concentration. *Journal of Climate*, roč. 35 (2022), č. 13, s. 4027–4047.
- [3] Jeevanjee, N.: Climate sensitivity from radiative-convective equilibrium: A chalkboard approach. *American Journal of Physics*, roč. 91 (2023), č. 9, s. 731–745. Dostupné z: <https://pubs.aip.org/aapt/ajp/article/91/9/731/2906666/Climate-sensitivity-from-radiative-convective>.
- [4] Hausfather, Z., Drake, H. F., Abbott, T., Schmidt, G. A.: Evaluating the performance of past climate model projections. *Geophysical Research Letters*, roč. 47 (2020), č. 1, e2019GL085378, s. 1–10. Dostupné z: <https://agupubs.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1029/2019gl085378>.
- [5] Halenka, T.: Nobelova cena za fyziku pro modelování změny klimatu. *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*, roč. 67 (2022), č. 1, s. 1–16. Dostupné z: https://dml.cz/bitstream/handle/10338.dmlcz/150392/PokrokyMFA_67-2022-1_1.pdf.

- [6] Feldman, D. R., Collins, W. D., Gero, P. J., Torn, M. S., Mlawer, E. J., Shippert, T. R.: Observational determination of surface radiative forcing by CO₂ from 2000 to 2010. *Nature*, roč. 519 (2015), č. 7543, s. 339–343. Dostupné z: <https://www.nature.com/articles/nature14240>.
- [7] <https://airs.jpl.nasa.gov/news/288/confirming-a-critical-foundation-of-the-science-of-global-warming/>
- [8] Santer, B. D., Po-Chedley, S., Zhao, L., Zou, C.-Z., Fu, Q., Solomon, S., Thompson, D. W. J., Mears, C., Taylor, K. E.: Exceptional stratospheric contribution to human fingerprints on atmospheric temperature. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, roč. 120 (2023), č. 20, Article e2300758120, s. 1–9.
- [9] Keeling, R. F., Shertz, S. R.: Seasonal and interannual variations in atmospheric oxygen and implications for the global carbon cycle. *Nature*, roč. 358 (1992), DOI: 10.1038/358723a0, s. 723–727.
- [10] Stefani, F.: Solar and anthropogenic influences on climate: regression analysis and tentative predictions. *Nature*, roč. 9 (2021), č. 11, 163; <https://doi.org/10.3390/cli9110163> s. 1–25. Dostupné z: <https://www.mdpi.com/2225-1154/9/11/163>.
- [11] Scafetta, N.: Testing the CMIP6 GCM Simulations versus Surface Temperature Records from 1980–1990 to 2011–2021: High ECS Is Not Supported. *Climate*, roč. 9 (2021), č. 11, 163; <https://www.mdpi.com/2225-1154/9/11/161> s. 1–30. Dostupné z: <https://www.mdpi.com/2225-1154/9/11/161>.
- [12] Foster, G., Rahmstorf, S.: Global warming has accelerated significantly. *Geophysical Research Letters*, roč. 53 (2026), č. 5, e2025GL118804, s. 1–8. Dostupné z: <https://agupubs.onlinelibrary.wiley.com/doi/full/10.1029/2025GL118804>.
- [13] <https://science.nasa.gov/resource/graphic-temperature-vs-solar-activity/>

Astrofotografie s chytrým telefonem

Filip Hložek, MFF UK, Praha

Abstrakt. Astrofotografie je často spojována s nákladným vybavením, nicméně kvalitních snímků noční oblohy lze dosáhnout i pomocí běžného chytrého telefonu. V článku jsou vysvětleny základní expoziční parametry a jejich vliv na podobu snímků. Text představuje praktické postupy od kompozice přes zpracování snímků až po tvorbu star trails, možností různých značek mobilních telefonů a vhodné aplikace. Cílem článku je ukázat, že astrofotografie je dostupná všem zájemcům a může být inspirativní cestou k hlubšímu poznání noční oblohy. Tento článek vychází z metodických materiálů autora publikovaných online [1].

Internet je plný nádherných fotografií noční oblohy, jaké lze vidět například na stránkách Astro.cz [2]. Pořídit takové fotografie ale obvykle vyžaduje mnoho času, zkušeností a také poměrně nákladné vybavení. Pěkné snímky však lze pořídit i bez dalekohledu či zrcadlovky. Stačí k tomu běžná součást našich moderních životů – chytrý mobilní telefon. Pojdme si ukázat, jak na to.

Základní pojmy

Fotoaparát je zařízení, které soustředí světlo čočkou na (téměř výlučně) digitální senzor, jenž sbírá světlo a ukládá ho. Čím déle je závěrka ponechána otevřená a čím větší je vstupní otvor fotoaparátu, tím více světla dopadne na senzor. Astrofotografie typicky vyžaduje delší expoziční časy, obvykle v řádu několika sekund, aby snímač stihl zachytit dostatek světla z noční oblohy. Naopak při fotografování za denního světla stačí na expozici pouhý zlomek sekundy.

Výslednou podobu fotografie ovlivňují tři základní parametry: *expoziční čas*, hodnota *ISO* a *clona*. Digitální fotoaparát umožňuje měnit všechny tři parametry v manuálním režimu. U mobilních telefonů, na které se tento článek zaměřuje, je však clona obvykle pevně daná výrobcem. Pouze některé modely, zejména vyšší třídy, umožňují její změnu. Případně lze vybírat mezi různými objektivy s odlišnou clonou.

Expoziční čas, nebo také rychlost závěrky, je doba, po kterou je závěrka fotoaparátu otevřená a dochází k osvětlení snímače. Čím delší je expozice, tím více světla se zachytí a tím světlejší bude výsledný obraz.

Za denního světla jsou časy expozice velmi krátké a automatika fotoaparátu je obvykle nastavuje sama. Delší expozice by vedla k přesvícenému obrazu (tzv. přeexponovaný snímek). Naopak při fotografování rychlého pohybu je potřeba velmi krátký expoziční čas v řádu tisícín sekundy, aby byl objekt zachycen ostře a bez rozmazání.

Při fotografování hvězdné oblohy je však zapotřebí delší expozice, aby snímač zachytil co nejvíce světla. Není ale rozumné zvyšovat expoziční čas příliš. Obvykle se doporučuje expoziční čas maximálně do 30 sekund, ideálně však méně než 20 sekund. Při delších expozicích se na snímku projeví rotace Země a hvězdy na snímku nebudou bodové, nýbrž mírně protažené do krátkých čar, viz obr. 1. Navíc s rostoucí délkou expozice zesilují i další rušivé jevy. Atmosférické chvění může snímek opticky rozostřit a zahřívání snímače vede ke zvýšené hladině šumu, který se ve výsledku projevuje jako zrnitost či barevné skvrny na fotografii.



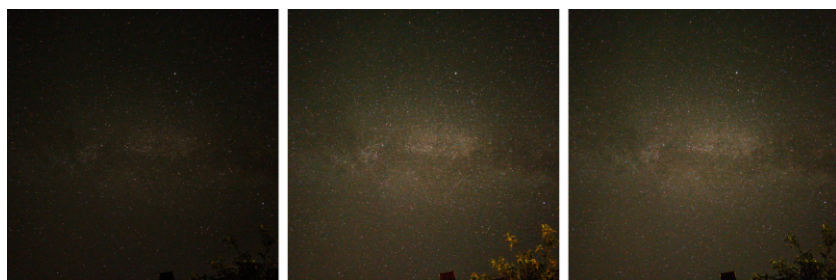
Obr. 1: Porovnání fotografií hvězdné oblohy s expozičními časy 8, 16 a 32 sekund. Při delší expozici se stihnou hvězdy pohnout ze své původní polohy (vlivem otáčení Země). Při bližším zkoumání tak mohou být na snímku patrné krátké světelné čáry namísto bodů. Pro větší názornost byly obrázky upraveny v programu Snapseed. Protažená čára v rohu prostředního obrázku zaznamenává prolétávající letadlo.

Zdánlivý pohyb hvězd (takzvané star trails) by sice bylo možné zachytit jednou velmi dlouhou expozicí, avšak tento postup přináší již zmíněné nevýhody. Proto se kýženého efektu dosahuje častěji složením mnoha po sobě jdoucích snímků s kratšími expozičními časy, namísto jediného snímku exponovaného po velmi dlouhou dobu. Jak takový postup realizovat na mobilním telefonu si ukážeme na konci článku.

ISO je hodnota citlivosti snímače na světlo. U analogových fotoaparátů byla tato hodnota určena druhem použitého filmu. U digitálních snímačů lze tuto citlivost jednoduše měnit v nastavení. Vyšší hodnota ISO

zvyšuje jas snímku (zesiluje signál ze senzoru), což je užitečné zejména při slabém osvětlení.

Vyšší hodnota ISO může být využita ke kompenzaci krátkých expozičních časů, například při fotografování rychle se pohybujících objektů. U snímků noční oblohy pak zvýšení ISO umožňuje zkrátit dobu expozice. Zesílený signál dodává fotografii více informací, a moderní přístroje toho dokážou využít k redukci šumu. Nicméně při delší době expozice, kdy vzniká na fotce více šumu, může vyšší hodnota ISO způsobit zesílení nejen dopadajícího světla, ale také nežádoucího šumu. Na obr. 2 jsou pro srovnání zachyceny fotografie noční oblohy při různých hodnotách ISO.



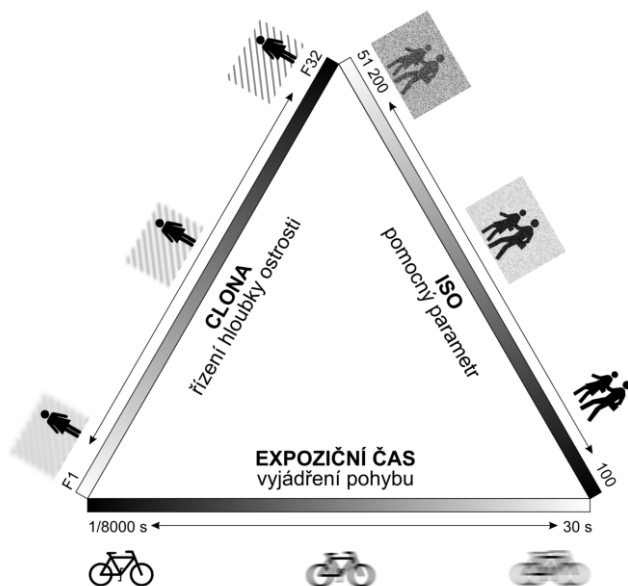
Obr. 2: Porovnání fotografií hvězdné oblohy s hodnotami ISO 800, 1 600 a 3 200. Při kratších expozicích lze využít vyšší hodnoty ISO k získání světlejšího snímku. Při delších expozicích už dochází nejen k zesílení signálu, ale také nežádoucího šumu. Pro větší názornost byly obrázky upraveny v programu Snapseed. Světlejší obraz stromu v prostředním obrázku byl způsoben jeho nechtěným osvětlením.

Clonové číslo udává, jak velká část objektivu je otevřená pro průchod světla. U samostatných fotoaparátů lze clonu manuálně nastavit, zatímco v případě mobilního telefonu nikoliv (jak bylo vysvětleno). Clonové číslo je určeno vztahem $k = \frac{f}{D}$, kde f je ohnisková vzdálenost objektivu fotoaparátu a D průměr otvoru clony. Na objektivěch a fotoaparátech se světelnost typicky zapisuje ve tvaru f/k (například $f/2.8$ nebo $f/4$). Zřejmě platí, že čím menší je otvor clony, tím vyšší je clonové číslo, a tedy menší světelnost (objektivem projde méně světla). Nejmenší clonové číslo (tedy maximální světelnost), které lze na objektivu nastavit, je určeno jeho konstrukcí, a proto na něm bývá uvedeno.

Clonová čísla (respektive světelnosti) lze zapsat do řady $f/1.4$, $f/2$, $f/2.8$, $f/4$, $f/5.6$, $f/8$, $f/11$, $f/16$, a tak dále. Hodnoty za lomítkem představují (zaokrouhlené) mocniny čísla $\sqrt{2}$. Když se totiž průměr otvo-

ru clony zmenší dvakrát, zmenší se plocha objektivu čtyřikrát, jelikož plocha je úměrná druhé mocnině průměru. Každé další clonové číslo v řadě tedy znamená polovinu světla, které projde objektivem.

Tyto vztahy umožňují fotografům snadnou změnu expozičních parametrů. Například pokud se hodnota ISO zdvojnásobí ze 400 na 800 a zároveň se zkrátí expoziční doba na polovinu (např. z 2 s na 1 s), výsledný snímek bude exponovaný stejně. S clonovými čísly v uvedené řadě je to totéž. Uvedenému zdvojnásobení hodnoty ISO by proto odpovídala změna clonového čísla např. z $f/2.8$ na $f/4$ (dvakrát méně světla). To proto, že při dvojnásobné citlivosti snímače nám postačí jen poloviční množství světla. Ovládnutí tohoto pravidla, známého jako expoziční trojúhelník, viz obr. 3, výrazně usnadňuje správné a rychlé nastavení fotoaparátu.



Obr. 3: Expoziční trojúhelník dává do souvislosti tři expoziční parametry: ISO, clonu a expoziční čas. Na obrázku je vidět, jak změna těchto parametrů ovlivňuje focení běžných objektů. [3]

Kromě základních expozičních parametrů je pro úplnost vhodné zmínit i další nastavení ovlivňující kvalitu snímku.

Vyvážení bílé (White Balance) určuje, jak fotoaparát interpretuje barevnou teplotu osvětlení a podle toho upravuje barevné podání snímku. Různé zdroje světla vyzařují různě teplé či studené odstíny. Například denní světlo je spíše chladnější. Automatické vyvážení bílé se běžně používá při fotografování běžných scén a u moderních telefonů funguje velmi spolehlivě. Při fotografování noční oblohy však může automatika vyhodnotit scénu nesprávně, zejména v přítomnosti světelného znečištění. Výsledný snímek pak může mít nepřírozený nádech do oranžova nebo do modra. Z toho důvodu se při astrofotografii doporučuje nastavit vyvážení bílé manuálně, čímž lze dosáhnout konzistentního barevného podání v celé sérii snímků a usnadnit jejich následné zpracování.

Manuální ostření (Manual Focus) umožňuje určit rovinu ostrosti bez zásahu automatického systému fotoaparátu. Automatické ostření je navrženo především pro běžné scény s dostatkem světla a výraznými kontrastními hranami. Při fotografování hvězdné oblohy však automatika opět selhává, jelikož jsou hvězdy příliš malé a slabé. Ostření se proto obvykle nastavuje ručně, nejčastěji na hodnotu ∞ (nekonečno), neboť jsou hvězdy (ale i planety či Měsíc) velmi vzdálené.

Pro pokročilé úpravy se často využívají snímky ve *formátu RAW*, který uchovává maximální množství obrazových dat. Na rozdíl od komprimovaného formátu JPG, který telefon automaticky upravuje a zmenšuje, umožňuje RAW detailnější editaci. Nevýhodou je větší velikost souborů a nutnost následných úprav. Nezpracované RAW snímky obvykle vypadají nevýrazně a musí se pak dále upravovat. Například již zmíněné obrázky 1 a 2 byly pořízeny ve formátu RAW a následně upraveny přímo na telefonu v programu Snapseed.

Možnosti amatérské astrofotografie

Ačkoliv se tento text zabývá fotografováním prakticky bez vybavení, je vhodné alespoň zmínit, čeho všeho se amatérská astrofotografie dotýká. Většinou si ji spojíme s využitím dalekohledů. Pak může jít o planetární astrofotografii, deepsky nebo vědeckou (astro/fotometrickou) astrofotografii. Tyto směry astrofotografie kladou vysoké nároky na technické vybavení i zkušenosti pozorovatele a zpravidla vyžadují pečlivou přípravu a následné zpracování dat.

Lze to ale i bez dalekohledu. Takzvaná širokoúhlá astrofotografie má za cíl zachytit velkou část noční oblohy (Mléčnou dráhu, souhvězdí, polární záři). Využívá širokoúhlý objektiv fotoaparátu s delší expozicí, který může být doplněný ještě star trackerem (zařízením, které pomalu otáčí s

fotoaparátem, aby kompenzovalo pohyb oblohy způsobený rotací Země). Ačkoliv výsledné fotky mohou být působivé, cílem je spíše dokumentace oblohy. Naproti tomu krajinářská astrofotografie má pouze estetický zájem. Obloha tvoří součást krajiny, ale není cílem sama o sobě. V popředí bývá zajímavý prvek (strom, socha, jezero, stavba apod.) a snímek se pak skládá z více expozičních. Jedna část expozice míří na oblohu, druhá na krajinu. To proto, že obě scény mají rozdílné světlo, a tedy vyžadují jiné nastavení fotoaparátu. Výsledný obrázek proto vzniká opět až v postprodukci, kdy se tyto expozice sloučí dohromady.

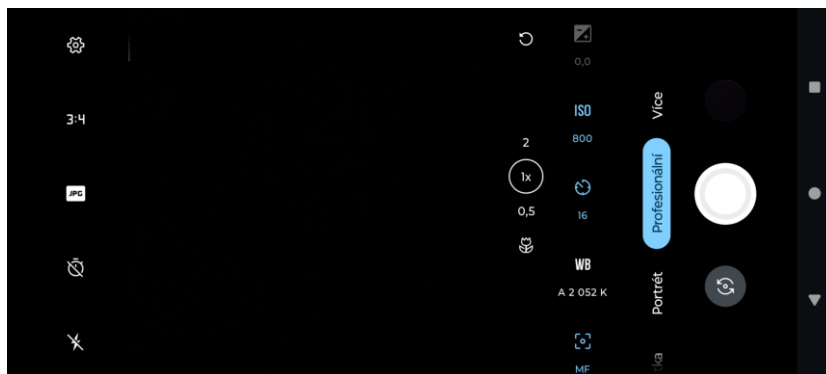
Pokud čtenáře něco z toho zaujalo a neví jak začít, je nejrozzumnější zajít se zeptat na nejbližší hvězdárnu. Z autorova výzkumu [4] vyplývá, že na hvězdárnách je plno nadšených, zapálených lidí, kteří zájemcům rádi poradí nebo alespoň nasměrují jejich další kroky. Doporučit lze také astronomické kroužky a kurzy, které se na hvězdárnách pořádají, a jejichž mapa je k dispozici na stránkách [5]. Účastníci se naučí mnoho zajímavého nejen o astrofotografii, ale o astronomii a astrofyzice vůbec. Zároveň mají přístup k dalekohledům a vybavení hvězdárny. Nehledě na to, že tyto kroužky sdružují komunitu lidí se stejným zájmem, a tím jim umožňují postupovat rychleji vpřed.

Fotografování s chytrým telefonem

Před prvním nočním focením je důležité seznámit se se svým chytrým mobilním zařízením a jeho funkcemi. Všechny chytré telefony sice v sobě mají vestavěnou aplikaci fotoaparátu, ale její rozhraní, ovládání a dostupné funkce se mohou lišit v závislosti na výrobci a modelu.

Rozdíl je také mezi operačními systémy Apple iOS a Google Android. Telefony od Applu (iOS) nedovolují příliš měnit parametry manuálně, většina se řídí automaticky. I tak ale dokážou dosáhnout velmi kvalitních výsledků. K tomu je ale potřeba umístit je do stativu. Po zapnutí fotoaparátu zapneme noční mód a díky tomu se objeví nastavení času expozice. To je nejprve nízké, ale když se telefon nechá chvíli v klidu na stativu, zvětší se maximální možná doba expozice až na 30 sekund.

Telefony s Androidem obvykle nabízejí více možností manuálního nastavení v režimu nazývaném PRO, Profesionální a podobně. Rozhraní tohoto módu pro telefon Motorola Edge 30 Ultra je na obr. 4, pro jiné telefony může být odlišné. V tomto režimu lze měnit již zmíněný expoziční čas a hodnotu ISO. Je potřeba prozkoumat mezní hodnoty, které lze v aplikaci nastavit. Zejména maximální hodnoty mohou být u slabších telefonů nízké.

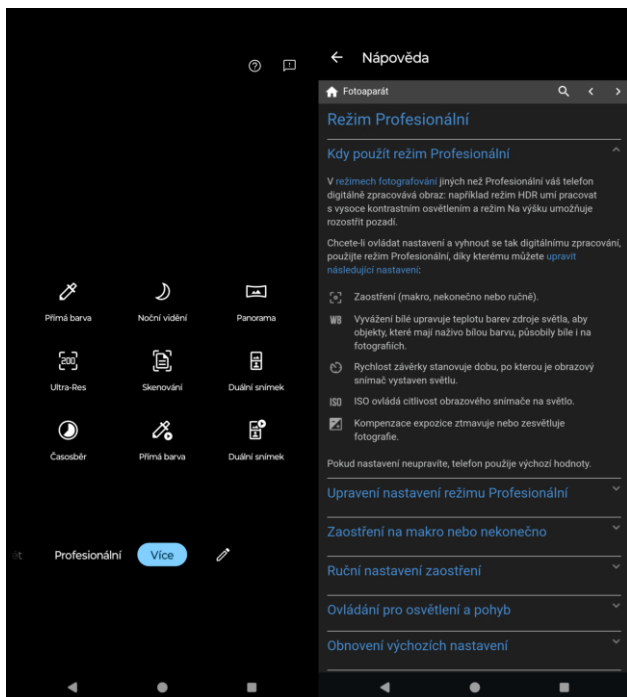


Obr. 4: Profesionální režim fotoaparátu umožňuje manuálně nastavit expoziční parametry. Na pravé liště jsou odspodu ikony pro ostření (MF – manual focus), vyvážení bílé (WB – white balance), délka expozice, ISO a kompenzace expozice (ta však není dostupná pro manuálně zvolené rychlosti závěrky a hodnoty ISO).

Dále může být nutné nastavit ostření, jelikož automatika obvykle nedovede správně zaostřit ve tmě. Nejlepší je proto ostřit za světla, a nastavit hodnotu tak, aby byly všechny předměty (blízké i vzdálené) na displeji ostré. Některé telefony mají v nabídce ostření přímo symbol nekonečna ∞ , který můžeme použít téměř s jistotou pro fotografování noční oblohy. Může se ale stát, že poloha ostření odpovídající nekonečnu bude mírně posunutá. V praxi se proto osvědčuje zaostřit na jasnou hvězdu nebo vzdálený světelný zdroj. Pro kontrolu ostrosti lze dočasně zvětšit náhled obrazu na displeji, což usnadní jemné doladění polohy ohniska. Samotné digitální přiblížení nezlepšuje rozlišení snímku, ale umožňuje lépe posoudit tvar bodových zdrojů v náhledu. Před samotnou expozicí je proto potřeba vrátit zobrazení do základního nastavení.

Velice důležitá bude pro fotografování samospoušť. Stisknutím spouště fotoaparátu totiž dojde k nechtěnému roztřesení telefonu, což vede k rozmazání snímku. Nastavení časovače na 3 až 5 sekund poskytne dostatek času, aby se přístroj opět ustálil.

Pokud telefon nabízí ještě další nastavení, vyzkoušejte, jaký vliv má jejich změna na výsledné snímky. Pro více informací bývá v aplikaci fotoaparátu k dispozici nápověda nejen pro Profesionální režim, ale i pro ostatní funkce fotoaparátu, viz obr. 5. Další podrobnosti lze podle potřeby dohledat na internetu.



Obr. 5: V některých modelech telefonů je k dispozici nápověda k funkcím fotoaparátu (zde pod symbolem otazníku vpravo nahoře). Takto vypadá nápověda k profesionálnímu režimu v telefonu Motorola Edge 30 Ultra.

Kromě vestavěné aplikace fotoaparátu lze samozřejmě využít i aplikace třetích stran, které mohou umožnit pokročilejší manuální nastavení fotoaparátu. V praxi se však často ukazuje, že zabudovaná aplikace fotoaparátu bývá nejspolehlivější. Alternativní programy nemusí fungovat zcela správně nebo mají omezené funkce. Zkušenost je taková, že co funguje jeden den, nemusí fungovat druhý, a naopak.

Pro systém Android se hodí zejména aplikace DeepSky Camera. Ta je vytvořená přímo pro astronomické focení, nabízí rozšířené možnosti nastavení expozičních parametrů (větší ISO nebo delší expozice), včetně sekvenčního snímání (automatické pořízení více snímků za sebou). Tato funkce je užitečná například pro tvorbu star trails nebo složení několika snímků k potlačení šumu. Sekvenční snímání umožňuje také aplikace Intervalometer, která je ovšem placená.

Kromě aplikací na fotografování je užitečné mít i nástroj, který pomůže s orientací na obloze. Asi nejrozšířenější aplikací tohoto typu je Stellarium. Jde o kapesní planetárium, které umožňuje identifikovat hvězdy, planety a další nebeské objekty. Díky zabudovanému kompasu stačí namířit telefon na oblohu a aplikace zobrazí, co se v daném směru nachází. Objekty lze i vyhledávat a zobrazit jejich polohu dokonce i v různých časech, a lze tak určit čas, kdy bude dané těleso viditelné.

Některé moderní telefony obsahují speciální nástroje určené přímo pro astrofotografii. Příkladem může být již zmíněný noční režim u telefonů od Applu.

Telefony Google Pixel mohou obsahovat přímo astrofotografický mód, který celý proces fotografování řídí automaticky. Nepořizuje jediný snímek, ale zachytí sérii fotografií, které následně skládá dohromady. Tím se potlačuje šum a zvyšuje kvalita výsledného snímku. Zajímavé je, že přístroj dokáže kompenzovat pohyb hvězd během dlouhé expozice tak, aby na finální fotografii zůstaly jako bodové objekty. Obvykle se podobné skládání snímků provádí až na počítači ve specializovaném softwaru.

Je však dobré mít na paměti, že podobné automatické režimy často využívají pokročilé algoritmy zpracování obrazu, včetně prvků umělé inteligence, které snímek upravují s cílem dosáhnout vizuálně atraktivního výsledku. Takový postup může vést k nezamýšleným zásahům do obrazu a v některých případech ke zkreslení fyzikální reality zaznamenané scény.

Fotíme!

Velmi užitečnou pomůckou při focení je stativ, do kterého lze telefon uchytit. Nemusí být ani příliš velký. Postačí, aby pevně držel telefon a umožnil mu mířit vzhůru na oblohu. Cena takových stativů se pohybuje v řádu nižších stovek korun. Pokud takový stativ není k dispozici, lze improvizovat. Telefon je možné položit na stabilní podložku nebo jej opřít o batoh či jiný pevný předmět. Lze si také sestavit stativ ze stavebnic typu Lego či Merkur.

Astrofotografie je pochopitelně velmi závislá na počasí. Při focení je důležité se teple obléct a vzít si také nějakou baterku, jelikož telefon bude používán k fotografování. Ideální je baterka s červeným světlem, které minimálně ovlivňuje adaptaci očí na tmou. Z noční oblohy si lze zvolit libovolnou část podle vlastních preferencí a podle ročního období, kdy budou viditelná různá souhvězdí a další vesmírné objekty.

Ohledně doporučených nastavení musíme začít s časovačem spuštění fotoaparátu v rozmezí 3 až 5 sekund. Dobu expozice nastavíme maxi-

málně půl minuty, raději však do 20 sekund. Podle toho zvolíme hodnotu ISO, která se doporučuje obvykle 800 nebo 1 600. Rozhodně se ale vyplatí zkoušet různé parametry a nastavení vhodná pro konkrétní zařízení a pro konkrétní světelné podmínky. Při focení ve městě, kde je silné světelné znečištění, bude zapotřebí zvolit jiné nastavení než ve volné přírodě.

Může být poměrně překvapivé, že na snímku je vidět mnohem více detailů než pouhým okem. Dlouhá expozice totiž umožňuje snímači sbírat světlo delší dobu a ještě jej následně digitálně zesílit. Objevíme tak nebeská tělesa, která by jinak zůstala ukrytá.

Fotografie noční oblohy je často působivá sama o sobě, ale ještě lepší dojem vyvolá, pokud ji na snímku zachytíme i s pozemským objektem. Tento prvek dodává snímku hloubku a pomáhá divákovi lépe se orientovat v prostoru. Ve fotografii se tomu říká *kompozice*. Je potřeba si vybrat zajímavý objekt v popředí hvězdné oblohy, jako strom, skálu, věž nebo jiný výrazný prvek. Jednoduchým řešením kompozice může být jen telefon položený v trávě.

Někdy se může stát, že je krajina na fotografii příliš tmavá nebo přexponovaná. Tmavé objekty v popředí lze krátce osvětlit baterkou, aby na snímku více vynikly. Příliš světlé objekty můžeme zkusit potlačit snížením hodnoty ISO nebo zkrácením expozičního času. Mnoho detailů lze doladit později v grafických editorech, které umožní vyrovnat jas a kontrast různých částí snímku.

Zásadní roli hraje v astrofotografii zpracování získaných dat. Běžná úprava fotografie spočívá v korekcích kontrastu, jasu či barev. Úpravy pořízených snímků, tzv. *postprocessing*, lze tedy jedinečně doporučit. Jednoduše v telefonu lze takové úpravy provést pomocí aplikace Snapseed, která je k dispozici zdarma a obsahuje širokou škálu nástrojů. Náročnější úpravy lze provádět i na počítači.

Například již zmíněné obrázky 1 a 2 byly pořízeny ve formátu RAW a následně upraveny přímo na telefonu v programu Snapseed. Před úpravou je většina hodnot nastavena na nulu. Tyto konkrétní snímky byly zvýrazněny nastavením expozice na 1,20 EV, světla na -40, kontrastu a stínů na hodnotu 20, struktura byla nastavena na 15 a sytost na 10. Aby u zmenšených obrázků byly mezi fotografiemi v sérii viditelné rozdíly, použili jsme také nástroj křivky, kterým se pixelům s určitou světelností přiřadí nová světelnost. Některé parametry ovlivní výsledný obraz více, jiné méně. S nastavením si lze pohrát, aby se dosáhlo kýženého výsledku.

Za zmínku stojí, že astrofotografické zpracování dat jde mnohem dál za korekce několika základních parametrů. Využívá techniky jako skládání více snímků (stacking), které výrazně zvyšuje poměr signálu k šumu, a také korekční snímky, například dark frame pro odstranění teplotního šumu nebo flat frame pro potlačení nerovnoměrného osvětlení snímače. Tyto postupy umožňují získat z dat maximum detailů, které by při pouhé úpravě jednoho snímku nebylo možné vytáhnout.

V neposlední řadě pak lze chytrý telefon přichytit k okuláru dalekohledu a vyfotografovat obraz v něm. Dalekohled je schopen zachytit více světla, takže lze fotit detaily vesmírných objektů, které by jinak byly i při delší expozici fotoaparátu neviditelné. V takovém případě je ale potřeba zvolit zcela jiné nastavení fotoaparátu, v závislosti na tom, co přesně pozorujeme.

Shrnutí: Jak na to?

Uvedené informace lze shrnout do stručného přehledu základního postupu při fotografování noční oblohy mobilním telefonem.

- **Příprava a vybavení:** Vhodnou pomůckou je stativ nebo jiná stabilní podložka, aby byl telefon během expozice zcela nehybný. Hodí se také malá baterka, ideálně s červeným světlem, které méně narušuje adaptaci očí na tmu. Praktické může být mít po ruce také aplikaci v telefonu pro orientaci na obloze (např. Stellarium).
- **Místo a čas:** Nejlepší podmínky bývají mimo město, kde je menší světelné znečištění. Fotografování je vhodné plánovat na jasnou noc bez Měsíce nebo alespoň v době, kdy je Měsíc nízko nad obzorem. Výběr souhvězdí či části oblohy závisí na ročním období a aktuální viditelnosti objektů.
- **Základní nastavení fotoaparátu:** Pokud to telefon umožňuje, použije se manuální (PRO) režim. Expoziční čas se obvykle nastavuje přibližně na 10 až 20 sekund a hodnota ISO kolem 800 až 1600 podle světelných podmínek. Ostření je vhodné nastavit manuálně na nekonečno nebo na vzdálený světelný zdroj. Pro omezení roztřesení přístroje je vhodné použít samospoušť (dostačující může být 3 až 5 s). Při plánované následné úpravě snímku je vhodné fotografii ukládat ve formátu RAW (je-li tato možnost v telefonu k dispozici), protože uchovává více obrazových dat než běžný formát JPG.

- **Vhodné objekty k fotografování:** Pro první pokusy se hodí jasná souhvězdí nad horizontem, případně doplněná krajinou v popředí. Na tmavé obloze lze zkusit zachytit také Mléčnou dráhu. Další možností je pořídit sérii snímků určených pro vytvoření star trails (viz dále).

Pořízení fotografie je jen první krok. Snímky noční oblohy obvykle vyžadují alespoň základní úpravy. Ty lze provést například v aplikaci Snapseed přímo v telefonu nebo v jiném grafickém editoru. Konkrétní hodnoty nastavení závisí na kvalitě snímku a světelných podmínkách při fotografování, proto následující kroky představují pouze typický postup úprav bez přesně daných hodnot jednotlivých parametrů:

- **Vyvážení bílé:** Pokud má snímek nepřírozený barevný nádech (například vlivem světelného znečištění), lze nejprve upravit vyvážení bílé (WB), aby barevné podání oblohy působilo přirozeněji.
- **Úprava jasu:** Na začátku editování snímku se často mírně zvýší jas, aby na snímku lépe vynikly hvězdy a struktura oblohy. Dlouhá expozice sice zachytí velké množství světla, ale výsledný obraz může být na první pohled poměrně tmavý.
- **Úprava světla, stínů a kontrastu:** Dalším krokem bývá doladění kontrastu a vyvážení světlých a tmavých částí obrazu. Tím lze zvýraznit hvězdy a zároveň zachovat detaily v krajině nebo v popředí snímku.
- **Doladění detailů a sytosti barev:** Některé nástroje umožňují zvýraznit jemné detaily nebo upravit barevnost snímku. Tyto úpravy je obvykle vhodné provádět spíše mírně, aby obraz nepůsobil nepřirozeně. Při silnějším zesvětlení snímku se navíc může zvýraznit obrazový šum, který vzniká například při vyšší citlivosti ISO. V některých editorech lze šum částečně potlačit pomocí nástrojů pro redukci šumu nebo mírnější úpravou kontrastu a detailů.
- **Křivky a jemné korekce:** Nakonec lze pomocí nástroje křivek nebo dalších jemných úprav doladit jas jednotlivých částí snímku a zvýraznit rozdíly mezi tmavou oblohou a jasnějšími objekty.

Smyslem úprav je především zvýraznit detaily zachycené dlouhou expozicí, které mohou být v původním snímku méně patrné.

Star trails

Vizuálně působivým typem fotografie jsou již zmíněné star trails (světelné dráhy hvězd). Ty vznikají složením mnoha fotografií na sebe (stackováním), čímž se zvýrazní pomalý pohyb objektů po obloze. Obzvláště impozantní a poučné je, namíříme-li fotoaparát na Polárku, která se nachází v těsné blízkosti severního nebeského pólu. To je takové místo na obloze, kterým prochází myšlená zemská osa, kolem které rotuje zeměkoule. Z toho důvodu kolem Polárky ostatní hvězdy zdánlivě kreslí kružnice, které budou na star trails vidět, viz obr. 6.



Obr. 6: Star trails vytvořená ze 300 snímků, pořízených mobilním telefonem namířeným na Polárku. Fotoaparát mobilního telefonu Motorola Edge 30 Ultra: Clona 1.9, Expoziční čas 16 sekund, ISO 800.

Pro vytvoření star trails je potřeba vyfotografovat velké množství snímků ze stejného místa a v pravidelných intervalech. Ruční pořizování jednotlivých fotografií by bylo nepraktické, proto je nutné využít sekvenční snímání. Ne všechny zabudované aplikace fotoaparátu tuto funkci podporují, takže může být nutné použít další aplikace, jako již zmíněnou DeepSky Camera nebo Intervalometer. Ten je sice placený, ale jeho výhodou je, že využívá již vyzkoušenou a uživatelsky známou aplikaci fotoaparátu, a v pravidelných intervalech pouze mačká tlačítko spouště.

Po pořízení fotografií je potřeba snímky složit do jednoho obrazu. To lze provést v různých programech na počítači, ale také přímo v telefonu pomocí aplikace Star Trails. Aplikace je zdarma, ale po shlédnutí reklamy lze dočasně odemknout i placenou verzi. V aplikaci stačí označit všechny pořízené fotografie (je možné je vybrat najednou tažením prstem), případně vyloučit ty, které se nepovedly. Star Trails aplikace pak v reálném čase ukáže, jak na sebe jednotlivé snímky skládá, takže se výsledná fotografie efektně tvoří přímo před našima očima.

Jak již bylo zmíněno, u některých moderních telefonů (např. Samsung či Huawei) je v nativní aplikaci fotoaparátu přímo režim star trails, který provede výše popsané kroky najednou. S tímto nastavením telefon automaticky pořídí sérii snímků a sám je spojí do výsledné fotografie, aniž by uživatel musel provádět sám další úpravy.

Ze stejné série snímků, ze které jsme vytvářeli star trails, lze vytvořit i časosběrné video, tzv. timelapse. Lidský mozek vnímá plynule promítané obrázky (např. 30 snímků za sekundu) jako video, což umožňuje zrychlené sledování dějů, které by jinak byly příliš pomalé, jako právě zdánlivý pohyb hvězd na obloze. K vytvoření takových videí lze použít aplikaci Timelapse Video Maker, která je sice zadarmo, ale prémiové funkce jsou již placené. Celá řada programů existuje i pro použití v počítači.

Zdánlivý pohyb hvězd na obloze je důsledkem rotace Země, která se otočí o 360° za přibližně 24 hodin. To odpovídá úhlové rychlosti zhruba 15° za hodinu, tedy přibližně $15''$ za sekundu. Při delších expozičních časech se proto hvězdy na snímku posouvají a místo bodů vytvářejí krátké čáry. Tento efekt omezuje maximální použitelnou délku expozice, má-li být obraz hvězd bodový.

Na počítači lze více snímků skládat pomocí specializovaných programů, které jednotlivé expozice automaticky zarovnají a zprůměrují, čímž se zvýší poměr signálu k šumu a potlačí náhodné rušivé artefakty.

Závěr

Astrofotografie chytrým telefonem je dostupný způsob, jak zachytit noční oblohu i bez profesionální techniky. Klíčové je pochopení základních expozičních parametrů, použití stativu a vhodné nastavení fotoaparátu či doplňkových aplikací. Kromě běžných snímků lze experimentovat s kompozicí, star trails nebo časosběrným videem. Další možnosti nabízí úprava snímků v aplikacích jako Snapseed nebo práce s RAW formátem. Astrofotografie tak propojuje vědu, technologii a kreativitu. Často jde

ale i o radost z objevování a o to, že díky fotoaparátu dokážeme zachytit detaily, které běžně nevidíme.

Literatura

- [1] Hložek, F.: *FyzWeb – Metodické materiály k výuce dalekohledů*. <https://fyzweb.cz/materialy/hlozek>.
- [2] *Astro.cz – Astronomický snímek dne*. <https://www.astro.cz/apod/>.
- [3] *Milujeme fotografii – Pronikněte do tajů expozice: Expoziční trojúhelník*. <https://www.milujemefotografii.cz/proniknete-do-taju-expozice-expozicni-trojuhelnik>.
- [4] Hložek, F., Houfková, J.: *Astronomické kroužky a kurzy, pro nejmenší ale i pro dospělé. Československý časopis pro fyziku*, roč. 95 (2023), č. 1, s. 208–211.
- [5] *Mapotic – Říše hvězd*. www.mapotic.com/rise-hvezd.

* * * * *



Z přednášky „Matematika v žonglování / Žonglování s matematikou“ na akci *Matematika pro život 2026*

Matematika pro život 2026

Ľubomíra Dvořáková a Jan Vybíral (organizátoři akce)

Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská ve spolupráci s Pedagogickou fakultou Univerzity Karlovy pořádala 9. ledna 2026 již poosmé jednodenní akci s názvem Matematika pro život. Na programu kurzu byly ukázky aplikací matematiky v neurovědě, optice, architektuře a umělé inteligenci. Posluchači zejména z řad středoškolských profesorů matematiky dorazili v již tradičně vysokém počtu (kolem stovky účastníků), se zájmem naslouchali přednáškám a po každé z nich následovala živá diskuze, a to na místě i v průběhu kávových přestávek. Posluchárna byla plná po celý den.

Zazněly tyto přednášky:

- Mgr. Michal Zamboj, Ph.D., PedF UK, Praha: *Matematika v žonglování / Žonglování s matematikou.*
- prof. Ing. Jiří Mikyška, Ph.D., FJFI ČVUT v Praze: *Když plamen nehoří: matematika a termodynamika směsí na Čertově mlýně.*
- doc. Ing. Roman Mouček, Ph.D., Fakulta aplikovaných věd, ZČU v Plzni: *Od signálu k pohybu: když matematika pomáhá mozku.*
- Mgr. Luděk Spíchal, Ph.D., Česká lesnická akademie Trutnov: *Jak se mění délka dne: propojení goniometrických funkcí a derivace s reálným přírodním jevem.*
- prof. RNDr. Radek Kučera, Ph.D., Katedra matematiky a deskriptivní geometrie, VŠB–TU Ostrava: *Řešení velkých soustav rovnic.*
- RNDr. Světlana Tomiczková, Fakulta aplikovaných věd, ZČU v Plzni: *Můžeme věřit svým očím?*
- RNDr. Dana Kolářová, Ph.D., Fakulta architektury, ČVUT v Praze: *Geometrie nosné konstrukce historických mostů.*
- Ing. Karel Klouda, Ph.D., Fakulta informačních technologií, ČVUT v Praze: *Velké jazykové modely: technické detaily a trocha poezie.*

Byly pořízeny kvalitní záznamy přednášek, které jsou k dispozici na YouTube kanálu:

<https://www.youtube.com/@matematikaprozivot4615/playlists>

Více informací je k dispozici na stránce akce:

<https://fjfi.cvut.cz/cz/matematika-pro-zivot>

Dvacet let Fyziklání – z jedné posluchárny na světovou soutěž

Klára Matějková

Týmová fyzikální soutěž Fyziklání letos slaví dvacet let své existence. Z malé akce pro několik desítek českých studentů se během dvou desetiletí stala mezinárodní soutěž, která každoročně přivádí do Prahy stovky středoškoláků z celého světa. Přestože se soutěž výrazně rozrostla, její základní princip zůstává stejný – žákovské týmy společně řeší originální fyzikální úlohy.

Fyziklání vzniklo v roce 2006 jako česká obdoba soutěže Fyzikální Náboj. První ročník tehdy proběhl v jedné místnosti na Matematicko-fyzikální fakultě Univerzity Karlovy a zúčastnilo se ho 104 žáků ve 21 týmech. Soutěž byla tehdy známá jako „FYKOSí Fyziklání“ a organizovali ji studenti ze semináře FYKOS. Zatímco na začátku se jednalo o pouhých 17 organizátorů, dnes průběh soutěže zajišťuje více než 120 dobrovolníků. Ve vedení soutěže se postupně vystřídali Jan Prachař, Aleš Podolník, Jan Humplík, Tomáš Bárta, Daniel Dupkala a Vojtěch David.



Organizátoři Fyziklání 2009

Už během prvních let bylo patrné, že je o soutěž mezi středoškoláky velký zájem: počet účastníků rychle rostl a v roce 2010 soutěž poprvé překročila hranici 200 soutěžících. S rostoucím zájmem bylo třeba hledat

větší prostory. Soutěž se postupně přesouvala z univerzitních učeben do větších budov v Praze, z původní jedné posluchárny na Karlově nejprve do budovy Matfyzu na Malé Straně, poté na hotel Duo a později do Top Hotelu Praha. Od roku 2022 se koná ve velké hale v PVA Expo Praha.



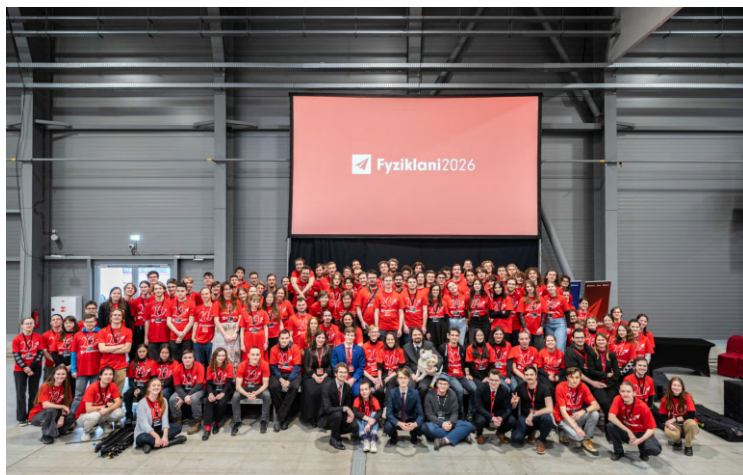
Fyziklání 2017

Soutěž se zároveň začala otevírat účastníkům ze zahraničí. Významným momentem byl rok 2018, kdy soutěž poprvé proběhla i v angličtině. Díky tomu se mohly zapojit týmy z mnoha dalších zemí a Fyziklání začalo přitahovat žáky z celé Evropy i dalších kontinentů. V roce 2021 musela soutěž kvůli pandemii covidu-19 proběhnout online. I přes náročné podmínky se ukázalo, že je komunita okolo soutěže silná – do Fyziklání se zapojilo 1900 středoškoláků z 36 zemí světa. Další ročníky už mohly probíhat prezenčně a od roku 2023 se soutěže pravidelně účastní více než tisíc soutěžících z mnoha zemí světa.

Od roku 2012 je součástí Fyziklání i doprovodný program. Ten začal jako víkendové setkání s deskovými hrami, postupně se však rozrostl o přednášky, exkurze, panelové diskuse i společenské akce pro české a později i zahraniční účastníky.

Základem Fyziklání jsou fyzikální úlohy. Organizátoři jich na každý ročník soutěže připravují více než padesát. Přestože se soutěž rozrostla z jedné posluchárny do obrovské haly, princip řešení úloh zůstává téměř stejný jako na začátku.

Dvacet let po svém vzniku je Fyziklání jednou z největších týmových fyzikálních soutěží pro středoškoláky na světě. Každoročně přivádí do Prahy stovky mladých nadšenců do fyziky, kteří zde nejen soutěží, ale také se setkávají, navazují přátelství a sdílejí svou vášeň pro vědu. Budeme rádi, když se s námi potkáte i na Fyziklání 2027, kterým soutěž vstoupí do své třetí dekády.



Organizátoři Fyziklání 2026

Týden vědy na Jaderce – týden, který tě vtáhne do světa skutečné vědy

Věra Krajčová, FJFI ČVUT, Praha

Chceš si na vlastní kůži vyzkoušet, jaké to je být vědcem? Nejen poslouchat ve třídě, ale opravdu objevovat, měřit, zkoumat a prezentovat vlastní výsledky? Pak je Týden vědy na Jaderce přesně akce pro tebe. Každý rok se na Fakultě jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT setká více jak sto středoškoláků, kteří mají chuť poznávat svět kolem sebe do hloubky. A právě tady dostanou jedinečnou příležitost zažít vědu tak, jak ji zažívají skuteční odborníci.

Proč se přihlásit?

Protože tohle není obyčejná školní akce. Týden vědy je v podstatě „zrychlená verze“ práce vědce – během pár dnů si projdeš celým procesem od nápadu až po prezentaci výsledků.

- Vyzkoušíš si skutečnou vědeckou práci v reálném prostředí
- Potkáš vědce, vysokoškolské učitele i studenty
- Podíváš se na špičková pracoviště v Praze a okolí
- Získáš zkušenosti, které se ti budou hodit i do budoucna

Co tě čeká?

Program je nabitý a pestrý. Každý den přináší něco nového a zajímavého. Můžeš se těšit například na:

- Miniprojekty – budeš ve skupině pracovat na konkrétním vědeckém tématu a řešit reálný problém
- Přednášky odborníků – dozvíš se o aktuálních tématech z fyziky, matematiky, informatiky nebo chemie
- Exkurze – navštívíš špičková vědecká pracoviště a laboratoře
- Diskuze a setkání – můžeš se ptát, diskutovat a poznat lidi, které věda opravdu baví
- Závěrečná konference – svůj projekt odprezentuješ stejně jako skuteční vědci
- Hry a kulturní zážitky – nejen vědou je vědec živ – připraveny jsou i zážitky mimo laboratoře, i když většinou také s nádechem vědy.

Celý týden tak připomíná malou vědeckou konferenci, kde nejsi jen posluchač, ale aktivní účastník.

Přijď to zažít

Týden vědy na Jaderce není jen o učení. Je to zážitek, který tě vtáhne, nadchne a možná i nasměruje do budoucna. Čeká tě spousta nových poznatků, inspirativních lidí a momentů, na které jen tak nezapomeš. Jestli tě baví objevovat, ptát se „proč?“ a hledat odpovědi, tohle je akce, kterou si rozhodně nesmíš nechat ujít.

Více informací o Týdnu vědy na Jaderce i dalších zajímavých akcích na Jaderce najdete na webových stránkách: <https://fjfi.cvut.cz/cz/uchazeci/akce-pro-stredoskolaky>.

Na tomto odkazu najdeš několik fotek z týdnů vědy.

Vydává Jednota českých matematiků a fyziků
tel.: 222 090 708-9, e-mail: jcmf@math.cas.cz
za podpory MFF UK Praha a FJFI ČVUT Praha



Vycházejí 4 čísla v kalendářním roce

Obálku navrhl Bohuslav Šír

Sazbu programem $\text{\TeX}$ připravil RNDr. Miloslav Závodný

Adresa redakce: MFF UK, V Holešovičkách 2, 182 00 Praha 8–Troja
e-mail: rozhledy@jcmf.cz

Internetové stránky časopisu: <https://rozhledy.jcmf.cz/>

Vytiskla Tiskárna Matula, Olomoucká 27, 618 00 Brno

Distribuci pro předplatitele provádí v zastoupení vydavatele
MediaCall, s. r. o.

Vídeňská 546/55, 639 00 Brno

tel.: +420 532 165 165, e-mail: export@mediacall.cz

web: www.zahranicnitisk.com

ISSN 0035-9343

MK ČR E4691

© Jednota českých matematiků a fyziků, Praha 2026

Redakční rada

Vedoucí redaktorka:

doc. Ing. Lubomíra Dvořáková, Ph.D., FJFI ČVUT Praha

Redaktorka pro matematiku:

doc. Ing. Lubomíra Dvořáková, Ph.D., FJFI ČVUT Praha

Redaktor pro fyziku:

RNDr. Věra Krajčová, Ph.D., FJFI ČVUT Praha

Členové redakční rady:

prof. RNDr. Vlastimil Dlab, DrSc., F.R.S.C., Praha

doc. RNDr. Zdeněk Drozd, Ph.D., MFF UK Praha

RNDr. Petr Hanuš, FSv ČVUT Praha

doc. RNDr. Jaroslav Hora, CSc., FPE ZČU Plzeň

prof. RNDr. Ivo Kraus, DrSc., FJFI ČVUT Praha

doc. RNDr. Jan Kříž, Ph.D., PřF UHK Hradec Králové

prof. RNDr. Miroslav Lávička, Ph.D., FAV ZČU Plzeň

RNDr. Pavel Pokorný, Ph.D., VŠCHT Praha

RNDr. Miroslav Randa, Ph.D., PdF ZČU Plzeň

RNDr. Filip Studnička, Ph.D., PřF UHK Hradec Králové

doc. RNDr. Jan Šlégr, Ph.D., PřF UHK Hradec Králové

prof. RNDr. Pavel Tlustý, CSc., PedF JU České Budějovice

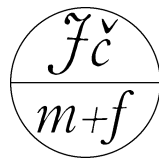
doc. RNDr. Pavel Töpfer, CSc., MFF UK Praha

RNDr. Vladimír Wagner, CSc., ÚJF AV ČR Řež

ROZHLEDY

matematicko-fyzikální

Ročník 101 (2026), číslo 1



OBSAH

V. Dlab: Několik slov k zobecnění, a tedy porozumění, Pythagorově větě	1
M. Škorpilová: Anguli per animalia	4
L. Spíchal: Řešení extrémálních úloh podle Fermata	8
Matematické oříšky: Součet prvočísel	23
P. Pokorný: Průměrná rychlost nerovnoměrného pohybu	26
L. Šlégrová, J. Šlégr: Věda vs. konspirace: Má vůbec smysl diskutovat?	31
F. Hložek: Astrofotografie s chytrým telefonem	41
E. Dvořáková, J. Vybíral: Matematika pro život 2026	56
K. Matějková: Dvacet let Fyziklání – z jedné posluchárny na světovou soutěž	57
V. Krajčová: Týden vědy na Jaderce – týden, který tě vtáhne do světa skutečné vědy	59

Pokyny pro autory

Příspěvky dodávejte na adresu redakce v elektronické podobě. Nejlépe napsané ve formátu $\text{\LaTeX}$, přijatelný je i formát Plain $\text{\TeX}$, je akceptovatelný i text připravený editorem Word či podobným.

Pokud jde o obrázky, je žádoucí, aby byly připraveny v reprodukovatelné podobě. Každý obrázek nechtě je v samostatném souboru, nejlépe ve formátu pdf nebo eps. Přípustná je též bitmapa v dostatečném rozlišení.

Ke každému zasílanému příspěvku (ne u soutěží, zpráv a recenzí) přiložte krátkou anotaci v českém jazyce. Dále je žádoucí, aby u každého příspěvku byla uvedena literatura, na kterou je v textu odkazováno.