

# ROZ HLEDY

**MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ**

ČASOPIS PRO ZÁJEMCE O MATEMATIKU, FYZIKU A INFORMATIKU

ROČNÍK 101 (2026) • ČÍSLO 2

## Technika a náhoda: pravděpodobnostní úlohy pro studenty středních škol

*Jan Fiala, Tomáš Roskovec, Vladimíra Petrášková*  
*Pedagogická fakulta, Jihočeská univerzita, České Budějovice*

**Abstrakt.** Příspěvek se věnuje řešení úloh z pravděpodobnosti, které tematicky vycházejí z oblasti techniky. Na vybraných příkladech z technické praxe ukazujeme, jak lze tyto problémy efektivně řešit pomocí pravděpodobnostních metod. Článek připomíná význam paralelního a sériového zapojení součástek jako užitečného modelu ve výuce pravděpodobnosti. Rozmanitost předložených úloh dokládá, že technicky zaměřené příklady představují silný motivační prvek ve výuce pravděpodobnosti na středních i vysokých školách.

### Úvod

Motivací tohoto textu je potřeba zpřesnit matematické modely tam, kde deterministické modely nestačí, v tomto příspěvku v oborech techniky i fyziky. Deterministické jevy jsou takové, které nepodléhají náhodě a jsou předurčeny k pevnému výsledku, naopak nahodilé či stochastické jevy jsou takové, které mohou při opakováních přinést různé výsledky a popisujeme je pravděpodobnostmi výsledků, které mohou nastat.

Pravděpodobnostní úvahy hrály po celou dobu moderních dějin ve vývoji fyzikálních teorií vždy významnou roli. Především je potřeba zmínit objev principu neurčitosti a kvantovou teorii. Zavedení nedeterministických modelů se setkalo s velkým odporem, samotný Albert Einstein (1879–1955), teoretický fyzik a nositel Nobelovy ceny za fyziku z roku 1921, nesouhlasil s tím, aby byla kvantová teorie založena na náhodnosti, tedy na hypotéze, že se věci dějí nahodile. Ostře se vymezil vůči užití náhody na popis pohybu částic hmoty. Výstižný a celosvětově známý je například jeho výrok, podle kterého odmítá věřit, že Bůh hraje v kostky s vesmírem [8].

Obdobná situace nastává v technických oblastech, ve kterých se obecně usiluje o popis deterministických procesů, ale praxe ukazuje, že to není zcela dosažitelné. Typické úvahy a úlohy se týkají spolehlivosti, tedy výpočtu pravděpodobnosti, že stroj nebo proces neselže a vyrobí produkt, případně nedojde k poruše. Tyto výpočty jsou klíčové pro odhady počtu

vadných výrobků stejně jako pro odhad rizik poruchy technického zařízení. Disciplína, která se podobnými problémy zabývá, se nazývá teorie spolehlivosti. Anděl [1, s. 130–134] blíže vysvětluje, jak pomocí sériově-paralelního uspořádání jednotlivých součástí stroje zvýšit jeho celkovou spolehlivost.

Cílem dalšího textu je ukázat některá využití teorie pravděpodobnosti při řešení technických problémů a motivovat ke zvýšení atraktivity pravděpodobnosti jako aplikované matematické disciplíny. Kapitoly úloh jsou řazeny dle náročnosti.

## 1. Základní pojmy z pravděpodobnosti

Následující kapitola obsahuje přehled definic nejdůležitějších pojmů z teorie pravděpodobnosti. Čtenáři znalí pojmů mohou kapitolu přeskočit a přejít ke kapitole 2. Podrobnější představení základních pojmů z pravděpodobnosti je provedeno například v publikaci Plockého a Tlustého [7] či Litschmannové [4].

Uvažujme množinu  $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_s\}$  všech možných výsledků náhodného pokusu a tzv. rozdělení pravděpodobnosti  $p$  jako reálnou funkci, která každému prvku  $\omega_i \in \Omega$  přiřazuje právě jedno nezáporné číslo  $p(\omega_i)$  tak, že  $p(\omega_1) + \dots + p(\omega_s) = 1$ . Index  $s$  označuje počet možných výsledků, které mohou nastat. Dvojici  $(\Omega, p)$  nazýváme diskrétní pravděpodobnostní prostor.<sup>1)</sup>

Libovolnou podmnožinu množiny  $\Omega$  pravděpodobnostního prostoru  $(\Omega, p)$  nazýváme náhodný jev. Množina všech podmnožin množiny  $\Omega$  se nazývá množina náhodných jevů v uvedeném pravděpodobnostním prostoru. Dva náhodné jevy  $A$  a  $B$  nazýváme disjunktní (neslučitelné), jestliže  $A \cap B = \emptyset$ .

Nechť  $A$  je libovolný jev v pravděpodobnostním prostoru  $(\Omega, p)$ . Pravděpodobností jevu  $A$  nazveme číslo  $P(A)$ :

$$P(A) = \begin{cases} 0, & \text{když } A = \emptyset, \\ p(\omega), & \text{když } A = \{\omega\}, \\ p(\omega_{j_1}) + \dots + p(\omega_{j_k}), & \text{když } A = \{\omega_{j_1}, \dots, \omega_{j_k}\}. \end{cases}$$

Tento vztah vyjadřuje, že pravděpodobnost jevu zahrnujícího určité výsledky je součet pravděpodobností těchto výsledků. Protože nemůže

---

<sup>1)</sup>Vzhledem k jednoduchosti řešených úloh postačí konečný diskrétní pravděpodobnostní prostor, s konečným množstvím výsledků  $s$ .

nastat případ, kdy nastane zároveň více z těchto výsledků – neexistuje překryv těchto pravděpodobností a při nastoupení jevu nastane právě jeden z výsledků. Proto platí aditivita.

Pro výpočet pravděpodobnosti sjednocení dvou libovolných jevů  $A, B$  platí

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Jsou-li jevy  $A, B$  disjunktní (neslučitelné, tj. jejich průnikem je prázdná množina), pak

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

Pro jev  $A$  definujeme tzv. doplňkový jev  $\bar{A}$ , pro který platí  $A \cup \bar{A} = \Omega$ ,  $A \cap \bar{A} = \emptyset$ , který označuje případ, kdy nenastane jev  $A$ , platí

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A).$$

Intuitivní přístup ke klasickému pravděpodobnostnímu prostoru je pravděpodobnost jako podíl úspěšných pokusů z celkového počtu pokusů. Tímto způsobem ji budeme počítat, nebude-li uvedeno jinak, protože uvažujeme, že všechny výsledky pokusu jsou shodně pravděpodobné. Například pokud  $|\Omega| = 13$  a  $|A| = 3$ , pak pravděpodobnost  $P(A) = \frac{3}{13}$ .<sup>2)</sup>

### 1.1. Stochastická nezávislost jevů

Jsou-li  $A$  a  $B$  dva jevy prostoru  $(\Omega, p)$  a  $P(B) > 0$ , nazýváme podíl  $\frac{P(A \cap B)}{P(B)}$  podmíněnou pravděpodobností jevu  $A$  za podmínky, že nastal jev  $B$ , a označujeme ji  $P(A|B)$ .

Pro jev  $A$ ,  $P(A) > 0$ , a jev  $B$ ,  $P(B) > 0$ , platí

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) = P(B) \cdot P(A|B).$$

Pokud  $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ , pak dvojici jevů  $A, B$  nazýváme (stochasticky) nezávislé jevy. To je ekvivalentní tomu, že zda nastal jev  $A$ , nemá vliv na to, zda nastal jev  $B$ , tedy  $P(B|A) = P(B)$ .

Nezávislost pro větší počet jevů než dvojici zavedeme následovně. Jevy  $A_1, A_2, \dots, A_k$  nazveme stochasticky nezávislé jevy, pokud pro libovolnou množinu (výběr)  $\{B_1, B_2, \dots, B_j\} \subseteq \{A_1, A_2, \dots, A_k\}$  platí

$$P(B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_j) = P(B_1) \cdot P(B_2) \cdot \dots \cdot P(B_j).$$

---

<sup>2)</sup> Značení  $|X| = x$  říká, že počet prvků množiny  $X$  je číslo  $x$ . Počtu prvků množiny také říkáme mohutnost množiny.

Povšimněme si, že nezávislost množiny jevů implikuje, že libovolná dvojice jevů v množině je nezávislá. Platí také, že pokud jsou jevy nezávislé, jsou nezávislé i doplňkové jevy k nim. Nezávislost jevů je rovněž symetrický vztah.

Název nezávislost koresponduje s intuitivní představou: nezávislé jevy na sobě nezávisí v tom smyslu, že nelze z jednoho predikovat druhý, například výsledek hodu kostkou nesouvisí s počasím.

## 2. Pravděpodobnostní úlohy kmenového učiva inspirované technickou praxí

**Úloha 1.** Stroj vyrobí 1000 stejných součástek za hodinu. Z nich 40 má výrobní vadu, ale jen 20 % součástek s vadou je dále nepoužitelných. Kontrolor náhodně vybere a) jeden, b) čtyři ze série výrobků. S jakou pravděpodobností je tato náhodně vybraná součástka, resp. jsou všechny čtyři součástky dále nepoužitelné? ([2, s. 118])

*Řešení.* Označíme  $A$  jev „náhodně vybraná součástka je nepoužitelná“ a jev  $B$  „náhodně vybrané čtyři součástky jsou nepoužitelné“. Počet dále nepoužitelných dopočteme jako 20 % z 40, tj. 8. Pak

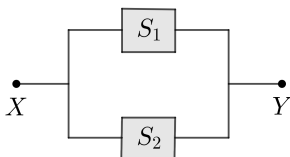
$$\text{a) } P(A) = \frac{\binom{8}{1}}{\binom{1000}{1}} = \frac{8}{1000} = 0,008,$$

$$\text{b) } P(B) = \frac{\binom{8}{4}}{\binom{1000}{4}} = \frac{70}{41\,417\,124\,750} \doteq 1,69 \cdot 10^{-9}.$$

U této úlohy lze uvažovat i otázku na počet nepoužitelných výrobků menší než počet kontrolovaných, pak se náročnost úlohy zvyšuje a vyžaduje kombinatorické úvahy.

### 2.1. Technická zapojení součástek

Již na základní škole se žáci v rámci výuky fyziky seznamují s různými druhy zapojení elektronických součástek v elektrickém obvodu.



Obr. 1: Paralelní zapojení součástek  $S_1$  a  $S_2$

Tzv. paralelní zapojení je zapojení elektrotechnických součástí v elektrickém obvodu „pod sebou“, nebo také „vedle sebe“ (obr. 1). V paralelním zapojení se nacházejí tzv. uzly, tj. místa, v nichž se přírodní vodič rozděluje do tzv. větví, aby se za součástkami umístěnými na jednotlivých větvích tyto opět spojily v jeden vodič.

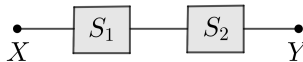
Připomeňme některé fyzikální skutečnosti platné pro paralelní zapojení. Elektrický proud procházející jednotlivými větvemi může být různý a závisí na odporu součástí ve větvích. Z Ohmova zákona plyne, že  $I_i = \frac{U}{R_i}$ , kde  $I_i$  je elektrický proud v  $i$ -té větvi a  $R_i$  je odpor součástky na  $i$ -té větvi. Celkový elektrický proud  $I$  (měřený například mezi  $X$  a sousedním uzlem rozdělujícím větvě) se rovná součtu proudů v jednotlivých větvích obvodu. Není bez zajímavosti, že paralelním obvodem může protékat proud vyšších hodnot než u sériového zapojení (viz níže). Elektrické napětí  $U$  je mezi dvěma uzly v paralelním zapojení stejné pro všechny větve. Převrácená hodnota výsledného elektrického odporu  $R$  je rovna součtu převrácených hodnot odporů  $R_1, R_2, \dots, R_n$  jednotlivých součástí:

$$I = I_1 + I_2 + \dots + I_n,$$

$$\frac{U}{R} = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} + \dots + \frac{U}{R_n},$$

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n}.$$

Tzv. sériové zapojení součástí je jejich zapojení v elektrickém obvodu tzv. „za sebou“, tzn. mezi každými dvěma přímo sousedícími sériově zapojenými součástkami vede jediný vodič (obr. 2). Přerušeni sériového obvodu v kterémkoli místě má za následek přerušeni celého obvodu. Sériové zapojení se využívá např. v pojistkách, jističích a spotřebičích, kde problém v části musí vyřadit celý přístroj.



Obr. 2: Sériové zapojení součástí  $S_1$  a  $S_2$

Studenti na sériovém obvodu zkoumají vlastnosti řady fyzikálních veličin, jako např. elektrický proud se mezi jednotlivé součástky nerozděluje, naopak je ve všech místech sériového obvodu stejný. Naopak elektrické napětí je mezi svorkami jednotlivých součástí různé a závisí na odporu

každé ze součástí. Z Ohmova zákona plyne, že  $U_i = R_i \cdot I$ , kde  $U_i$  je napětí na  $i$ -té součástce,  $R_i$  je elektrický odpor  $i$ -té součástky a  $I$  je elektrický proud v obvodu. Celkové elektrické napětí  $U$  se rovná součtu napětí na jednotlivých součástkách, tudíž celkový elektrický odpor  $R$  v sériovém obvodu se rovná součtu odporů jednotlivých součástí:

$$R = R_1 + \dots + R_n.$$

## 2.2. Paralelní a sériové zapojení z pohledu matematiky

Na výše uvedená zapojení součástí lze nahlížet také z pohledu uživatele či spotřebitele, který se zajímá o spolehlivost (nebo naopak poruchovost) takového zapojení. Otázky typu „Které zařízení je spolehlivější – to, které obsahuje sériové, nebo to, které obsahuje paralelní zapojení svých součástí?“ apod. řeší matematická pravděpodobnost, konkrétně pravděpodobnost nezávislých jevů, se kterou by se měli studenti seznamovat již na středních školách v rámci výuky matematiky.<sup>3)</sup> Do vysokoškolských kurzů pravděpodobnosti a statistiky však často vstupují studenti s velmi různým porozuměním.

Princip paralelního a sériového zapojení je analogický případu odporů. Pokud zapojujeme součástky do série, pravděpodobnost neprůchodnosti roste, podobně jako narůstá odpor, naopak paralelní zapojení snižuje šanci na neprůchodnost, podobně jako snižuje odpor. Tato intuice je přirozená a aplikuje se například v dopravě či chirurgii, kde pojem „bypass“ označuje přidanou objížďku či alternativní cestu, jejímž zařazením zvýšíme průchodnost systému či snížíme riziko ucpání a neprůchodnosti systému. Tento efekt lze pozorovat například při řešení úloh 2 a 4.

Zároveň lze pozorovat analogii s výrokovou logikou, kdy zapojení do série odpovídá konjunkci (aby fungoval systém, musí fungovat veškeré součástky) a paralelní zapojení odpovídá disjunkci (aby fungoval systém, musí fungovat alespoň některá jeho součást). Toto propojení lze využít k vizualizaci Booleovy algebry pomocí elektrických obvodů, nikoli nutné ve spojitosti s pravděpodobností, viz např. [6, s. 88–103].

## 2.3. Technická zapojení v pravděpodobnostních úlohách

**Úloha 2.** Uvažujme dvě paralelně zapojené součástky  $S_1$  a  $S_2$  (obr. 1). Jaká je pravděpodobnost, že „zařízení složené z paralelně zapojených

---

<sup>3)</sup>Zařazení učiva o pravděpodobnosti není jednotné a do velké míry závisí na rozhodnutí a zkušenosti učitele.

součástek  $S_1$  a  $S_2$  bude funkční“, jestliže pravděpodobnost poruchy součástky  $S_1$  je 0,01 a pravděpodobnost poruchy součástky  $S_2$  je 0,025.<sup>4)</sup>

*Řešení.* Zařízení bude jako celek funkční, jestliže bude funkční aspoň jedna ze součástek  $S_1$ ,  $S_2$ , tj. z místa  $X$  do místa  $Y$  poteče proud, což se stane tehdy, když proud poteče jen větví se součástkou  $S_1$ , nebo jen větví se součástkou  $S_2$ , nebo oběma větvemi najednou.

Označme  $A_1$  jev „součástka  $S_1$  je funkční, tj. proud poteče větví se součástkou  $S_1$ “, a  $A_2$  jev „součástka  $S_2$  je funkční, tj. proud poteče větví se součástkou  $S_2$ “, označme  $A$  sjednocení těchto jevů, tedy kdykoli proud poteče alespoň jednou z větví. Funkčnost součástek na sobě nijak nezávisí, tj. jevy  $A_1$  a  $A_2$  považujeme za náhodné jevy na sobě nezávislé. Pak  $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2)$ , přičemž  $P(A_1) = 0,99$ ,  $P(A_2) = 0,975$ . Pravděpodobnost jevu  $A$  spočteme z pravděpodobností jevů  $A_1$  a  $A_2$ :

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2) = \\ &= P(A_1) + P(A_2) - P(A_1) \cdot P(A_2) = \\ &= 0,99 + 0,975 - 0,99 \cdot 0,975 = 0,99975. \end{aligned}$$

Proud poteče zařízením s pravděpodobností 0,99975, neboli poruchovost zařízením je  $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 0,00025$ .

Alternativním řešením je uvědomit si, že neprůchodnost odpovídá situaci, kdy selžou obě součástky. Pro tuto úvahu je podstatné, že při nezávislosti jevů  $A_1$  a  $A_2$  jsou nezávislé i jevy k nim doplňkové. Spočítáme  $\bar{A} = \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2$ , což zjednoduší výpočet na

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - (P(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2)) = 1 - (1 - P(A_1)) \cdot (1 - P(A_2)).$$

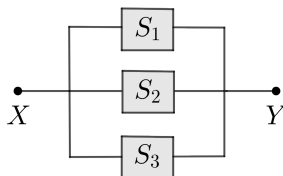
**Úloha 3.** Uvažujme dvě sériově zapojené součástky  $S_1$  a  $S_2$  (obr. 2). Jaká je pravděpodobnost, že „zařízení složené ze sériově zapojených součástek  $S_1$  a  $S_2$  bude funkční“ (jev  $A$ ), jestliže pravděpodobnost poruchy součástky  $S_1$  je 0,01 a pravděpodobnost poruchy součástky  $S_2$  je 0,025.

*Řešení.* Zařízení bude funkční, jestliže z místa  $X$  do místa  $Y$  poteče proud, což se stane tehdy, když proud poteče přes součástku  $S_1$  a současně přes součástku  $S_2$ , tedy když fungují bezporuchově obě součástky  $S_1$  i  $S_2$  najednou. Označme  $A_1$  náhodný jev „součástka  $S_1$  je funkční“ a  $A_2$  náhodný jev „součástka  $S_2$  je funkční“. Pak  $P(A_1) = 1 - 0,01 = 0,99$

<sup>4)</sup>Není-li v zadání uvedeno jinak, vždy uvažujeme, že funkčnost součástek (resp. výskyt poruchy) jsou navzájem nezávislé jevy.

a  $P(A_2) = 1 - 0,025 = 0,975$ . Protože se jedná o dva navzájem nezávislé jevy, pravděpodobnost jevu  $A$ , tedy že obě součástky fungují, je součin  $P(A) = P(A_1) \cdot P(A_2) = 0,965\ 25$ , tj. zařízení je spolehlivé asi na 96,5 %, neboli poruchovost zařízení je 3,475 %.

**Úloha 4.** Uvažujme tři paralelně zapojené součástky  $S_1, S_2$  a  $S_3$  (obr. 3). Jaká je pravděpodobnost, že „zařízení složené z paralelně zapojených součástek  $S_1, S_2$  a  $S_3$  bude funkční“ (jev  $A$ ), jestliže pravděpodobnost poruchy součástky  $S_1$  je 0,01, pravděpodobnost poruchy součástky  $S_2$  je 0,025 a pravděpodobnost poruchy součástky  $S_3$  je 0,03.



Obr. 3: Paralelní zapojení tří součástek  $S_1, S_2$  a  $S_3$

*Řešení.* V této úloze máme možnost postupovat jako v úloze 2, ale přímý výpočet vede k úvaze  $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ , kde  $A_i$  označuje jev, kdy součástka  $S_i$  neselže, tedy je funkční. Vhodnější je uvažovat doplňkové jevy a počítat ze vztahu  $\bar{A} = \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3$ . Zařízení tedy bude funkční s pravděpodobností

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - (1 - P(A_1)) \cdot (1 - P(A_2)) \cdot (1 - P(A_3)) = \\ = 1 - (0,01 \cdot 0,075 \cdot 0,03) = 0,999\ 977\ 5.$$

Pracnější, ale zajímavou alternativou řešení je využít modifikaci principu inkluze a exkluze (viz např. [5, s. 99–105]). Stručně připomeňme, že pro tři jevy platí

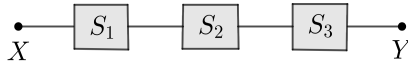
$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - \\ - |A_1 \cap A_2| - |A_2 \cap A_3| - |A_1 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|.$$

Toto pravidlo můžeme vyslovit a dokázat s pravděpodobnostmi jevu místo mohutnosti množiny ve formě:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - \\ - P(A_1 \cap A_2) - P(A_2 \cap A_3) - P(A_1 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3).$$

Pravděpodobnosti průniků jevů pak dopočteme jako součiny díky nezávislosti jevů.

**Úloha 5.** Uvažujme tři sériově zapojené součástky  $S_1$ ,  $S_2$  a  $S_3$  (obr. 4). Jaká je pravděpodobnost, že „zařízení složené ze sériově zapojených součástek  $S_1$ ,  $S_2$  a  $S_3$  bude funkční“ (jev  $A$ ), jestliže pravděpodobnost poruchy součástky  $S_1$  je 0,01, pravděpodobnost poruchy součástky  $S_2$  je 0,025 a pravděpodobnost poruchy součástky  $S_3$  je 0,03.



Obr. 4: Sériové zapojení součástek  $S_1$ ,  $S_2$  a  $S_3$

*Řešení.* Zařízení bude funkční, jestliže mezi místy  $X$  a  $Y$  budou v sériovém zapojení funkční všechny tři součástky. Označme  $A_1$  (resp.  $A_2$ ,  $A_3$ ) náhodné jevy „součástka  $S_1$  (resp.  $S_2$ ,  $S_3$ ) je funkční“. Pravděpodobnost jevu  $A$  je pravděpodobností průniku jevů  $A_1$ ,  $A_2$  a  $A_3$ . Jevy  $A_1$ ,  $A_2$  a  $A_3$  jsou nezávislé, proto

$$P(A) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) = 0,99 \cdot 0,975 \cdot 0,97 \doteq 0,936.$$

Zařízení bude funkční s pravděpodobností přibližně 0,936, poruchovost zařízení je přibližně 0,064.

**Úloha 6.** Každé ze dvou sériově zapojených čerpadel (podobně jako na obr. 2) pracuje nezávisle na druhém bez závad s pravděpodobností 0,95. Jaký údaj smí výrobce uvést na etiketu o pravděpodobnosti bezproblémového chodu celé soustavy čerpadel? ([2, s. 127])

*Řešení.* Zařízení pracuje bez problémů, pokud obě čerpadla fungují, tedy s pravděpodobností  $P = 0,95^2 = 0,9025$ .

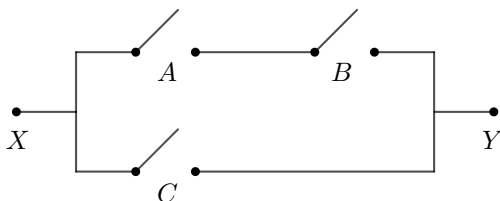
**Úloha 7.** Pumpa se skládá z šesti na sobě navzájem nezávislých součástí, z nichž každá přestane pracovat s pravděpodobností 0,05. Když přestane pracovat aspoň jedna součást, vypadne pumpa z provozu. Jak velká je pravděpodobnost, že „zůstane pumpa stát“ (jev  $A$ )? ([2, s. 136])

*Řešení.* Postupujeme úvahou jako v úloze 5. Sériové zapojení vyplývá ze zadání úlohy, že pro funkčnost celého zařízení musí být funkční všechny jeho součásti. Označme náhodný jev  $A_i$  „ $i$ -tá součást pumpy je funkční“, pak  $P(A_i) = 0,95$ . Hledaná pravděpodobnost jevu  $A$  je

$$P(A) = 1 - P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \dots \cdot P(A_6) = 1 - 0,95^6 \doteq 0,2649.$$

Pumpa zůstane stát s pravděpodobností přibližně 0,265, zatímco bude funkční s pravděpodobností přibližně 0,735.

**Úloha 8.** Každý ze spínačů  $A$ ,  $B$ ,  $C$  ve schématu na obr. 5 je zapnutý nebo vypnutý nezávisle na ostatních s pravděpodobností 0,5. Proud prochází obvodem, jestliže prochází aspoň jednou větví schématu. S jakou pravděpodobností prochází proud z  $X$  do  $Y$ ?



Obr. 5: Schéma zapojení spínačů

*Řešení.* Pro jednoduchost označme sepnutí spínače  $A$  jevem  $A$ , analogicky sepnutí  $B$  a  $C$  jevy  $B$  a  $C$ , jevem  $D$  pak označme průchodnost obvodu. Řešme nejprve, zda je horní větev průchozí, tedy nastane  $A$  a zároveň  $B$ ,

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0,5 \cdot 0,5 = 0,25.$$

Dolní větví poteče proud s  $P(C) = 0,5$ . Jednodušší je spočítat pravděpodobnost neprůchodnosti obvodu, tedy neprůchodnosti obou větví

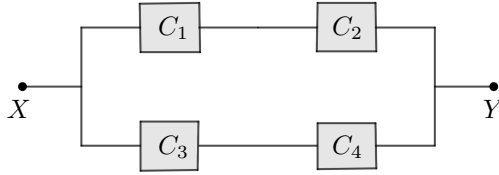
$$P(\overline{D}) = P(\overline{A \cap B}) \cdot P(\overline{C}) = (1 - 0,25) \cdot (1 - 0,5) = 0,375,$$

proto  $P(D) = 1 - 0,375 = 0,625$ . Alternativně můžeme  $P(D)$  spočítat přímo ze vzorce pro sjednocení jevů, kterými je průchodnost jednotlivých větví:

$$\begin{aligned} P(D) &= P((A \cap B) \cup C) = P(A \cap B) + P(C) - P(A \cap B \cap C) = \\ &= 0,25 + 0,5 - 0,125 = 0,625. \end{aligned}$$

Z  $X$  do  $Y$  prochází proud s pravděpodobností 0,625.

**Úloha 9.** Každá část  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  a  $C_4$  přístroje ve schématu na obr. 6 má nezávisle na ostatních různou pravděpodobnost poruchy: část  $C_1$  0,1, část  $C_2$  0,15, část  $C_3$  0,18 a část  $C_4$  0,12. S jakou pravděpodobností zařízení nefunguje?



Obr. 6: Schéma zapojení

*Řešení.* Každá z větví funguje jen tehdy, když správně fungují současně obě její části ( $C_1$  a  $C_2$ , resp.  $C_3$  a  $C_4$ ). Příklad funguje, pokud funguje aspoň jedna z jeho paralelně zapojených větví. Označme  $A_1$  (resp.  $A_2$ ) náhodný jev, že „funguje větev s částmi  $C_1$  a  $C_2$ “, a jev  $A_2$ , že „funguje větev s částmi  $C_3$  a  $C_4$ “. Pak

$$P(A_1) = (1 - 0,1) \cdot (1 - 0,15) = 0,9 \cdot 0,85 = 0,765.$$

Podobně pro druhou větev

$$P(A_2) = (1 - 0,18) \cdot (1 - 0,12) = 0,82 \cdot 0,88 = 0,7216.$$

Pak  $P(\overline{A_1}) = 0,235$  a  $P(\overline{A_2}) = 0,2784$ . Celý přístroj nefunguje (jev  $C$ ), pokud selžou obě větve:  $P(C) = 0,235 \cdot 0,2784 \doteq 0,0654$ . Příklad nefunguje s pravděpodobností přibližně 0,065.

Při výpočtu však můžeme postupovat také takto: Označme  $N_1$  jev „nepracuje část  $C_1$ “, podobně jevy  $N_2, N_3, N_4$  pro části po řadě  $C_2, C_3, C_4$ ; dále označme  $\overline{A_1}$  nefunkčnost horní větve,  $\overline{A_2}$  nefunkčnost spodní větve a  $C$  nefunkčnost celého přístroje.  $P(N_1) = 0,1, P(N_2) = 0,15, P(N_3) = 0,18, P(N_4) = 0,12$ , dle pravidla pro pravděpodobnost sjednocení nastane selhání větví s pravděpodobností

$$\begin{aligned} P(A_1) &= P(N_1 \cup N_2) = P(N_1) + P(N_2) - P(N_1 \cap N_2) = \\ &= 0,1 + 0,15 - 0,015 = 0,235, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(A_2) &= P(N_3 \cup N_4) = P(N_3) + P(N_4) - P(N_3 \cap N_4) = \\ &= 0,18 + 0,12 - 0,0216 = 0,2784. \end{aligned}$$

Stroj nepracuje, jestliže nepracují obě větve zároveň, tedy

$$P(C) = P(\overline{A_1} \cap \overline{A_2}) = P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2}) = 0,235 \cdot 0,2784 = 0,065424.$$

Hledaná pravděpodobnost je  $P(C) \doteq 0,065$ .

### 3. Úlohy rozšiřujícího učiva z technické praxe

Nyní přejdeme k pravděpodobnostním úlohám, které vyžadují hlubší znalosti či úvahy.

**Úloha 10.** Výrobní linka zpracovává dohromady dva polotovary: první polotovar dodává přístroj A a druhý polotovar jeden ze dvou přístrojů B. Linka se zastaví, pokud některý z polotovarů nebude dodán (pokud ale spoň jeden z přístrojů B funguje, druhý polotovar je k dispozici). Pravděpodobnost zastavení A je 0,001, pravděpodobnost zastavení celé linky je 0,005. Spočítejte pravděpodobnost zastavení přístroje B za předpokladu, že oba přístroje B mají shodnou pravděpodobnost zastavení a tyto jevy i zastavení přístroje A jsou nezávislé.

*Řešení.* Nejprve si uvědomíme, že k celkovému zastavení (jev  $C$  s pravděpodobností  $P(C) = 0,005$ ), je třeba zastavení buď A (jev  $A$  s pravděpodobností  $P(A) = 0,001$ ) nebo obou přístrojů B (jev  $X$  s pravděpodobností  $P(X) = P(B)^2$ , kde  $P(B)$  je hledaná pravděpodobnost zastavení přístroje B). Tedy  $C = A \cup X$ , a proto

$$P(C) = P(A) + P(X) - P(A \cap X) = P(A) + P(X) - P(A) \cdot P(X).$$

Po dosazení dostaneme:

$$0,005 = 0,001 + P(B)^2 - (0,001 \cdot P(B)^2).$$

Z toho plyne  $P(B) \doteq 0,0633$ .

Můžeme využít také alternativní postup výpočtu pomocí doplňkového jevu

$$P(\overline{C}) = P(\overline{A \cup X}) = P(\overline{A}) \cdot P(\overline{X}),$$

tedy

$$1 - 0,005 = (1 - 0,001) \cdot (1 - P(B)^2),$$

odtud shodně dostáváme  $P(B) \doteq 0,063$ .

**Úloha 11.** Hlavní zdroj elektřiny vypadne během směny s pravděpodobností 0,005. Nouzový zdroj elektřiny se nepodaří spustit s pravděpodobností 0,02, ale lze připravit více takových zdrojů. Kolik nouzových zdrojů má být připraveno, aby pravděpodobnost výpadku všech zdrojů byla nižší než  $10^{-k}$ ? Parametr  $k$  je přirozené číslo, v závislosti na kterém počítáme (považujme výpadky zdrojů za nezávislé jevy).

*Řešení.* Při řešení úlohy je vhodné si uvědomit, že přidáním více náhradních zdrojů se celková pravděpodobnost selhání všech zdrojů najednou snižuje, proto pro parametr  $k$  spočítáme, kolik zdrojů je zapotřebí bez ohledu na neceločíselnost výsledku, a použijeme horní celou část. Systém selže (jev  $S$ ), pokud vypadne nejen hlavní zdroj, ale zároveň  $x$  náhradních zdrojů, tedy  $P(S) = 0,005 \cdot 0,02^x$ , odtud  $10^{-k} \geq 0,005 \cdot 0,02^x$ ,

$$x \geq \frac{-k - \log(0,005)}{\log(0,02)}.$$

Počet potřebných náhradních zdrojů je pak horní celá část z  $x$ , pokud vyjde nezáporná, jinak 0 (při nízkých nárocích stačí hlavní zdroj).

**Úloha 12.** Výrobek je vadný s pravděpodobností 0,02. Kontrolní tým prochází všechny výrobky a bezvadný produkt uzná za vadný s pravděpodobností 0,05, vadný produkt uzná za bezvadný s pravděpodobností 0,02. Jaký je podíl vadných výrobků mezi uznanými za bezvadné při práci jedné kontroly? Jaký je tento podíl při práci dvou nezávisle fungujících kontrol, jestliže k vyřazení stačí nesouhlas jedné kontroly? Jaký je podíl, pokud první kontrola projde vše, ale druhá kontrola prochází pouze výrobky vyhodnocené prvním týmem jako vadné a uznává do prodeje ty, které považuje za bezvadné?

*Řešení.* Tuto úlohu lze řešit pomocí takzvané Bayesovy věty (viz např. [4]), ale my ji budeme řešit úvahou. Označme  $P_1$  pravděpodobnost výroby vadného výrobku a  $P_2$  pravděpodobnost označení bezvadného za vadný a  $P_3$  označení vadného za bezvadný. Z dávky výrobků (například o  $Q$  kusech, toto číslo nebude hrát roli) označíme po kontrolách části: počet bezvadných za bezvadné označené  $Q_1$  a počet vadných považovaných za bezvadné  $Q_2$ . Pravděpodobnost, že vadný výrobek bude mezi označenými za bezvadné je poměr  $P = Q_2 / (Q_1 + Q_2)$ .

Zbývající část řešení závisí na systému a počtu kontrol, nejprve uvažujme jedinou kontrolu. Bezvadné výrobky označené za bezvadné jsou v počtu  $Q_1 = Q \cdot (1 - P_1) \cdot (1 - P_2)$ , první násobení znamená, že nejsou vadné, druhé, že prošly kontrolou. Naopak vadné, uznané za bezvadné jsou v počtu  $Q_2 = Q \cdot P_1 \cdot P_3$ , kde první násobení znamená, že jsou vadné, násobení  $P_3$  pak chybu kontroly.  $Q$  se ve zlomku zkrátí, tedy evidentně pravděpodobnost nezávisí na velikosti výrobní dávky. Po dosazení za  $Q_1$  a  $Q_2$  dostáváme

$$P = \frac{Q_2}{Q_1 + Q_2} \doteq 0,000\,429\,5.$$

Při dvou kontrolách se při výpočtu počtu kusů musí obě kontroly shodnout, proto se členem vyjadřujícím názor kontroly násobí dvakrát, tedy

$$Q_1 = Q \cdot (1 - P_1) \cdot (1 - P_2) \cdot (1 - P_2),$$

analogicky

$$Q_2 = Q \cdot P_1 \cdot P_3 \cdot P_3.$$

Hledaná pravděpodobnost je tedy

$$P = \frac{Q_2}{Q_1 + Q_2} = \frac{Q \cdot P_1 \cdot P_3 \cdot P_3}{Q \cdot (1 - P_1) \cdot (1 - P_2) \cdot (1 - P_2) + Q \cdot P_1 \cdot P_3 \cdot P_3}.$$

Po zkrácení  $Q$ , dosazení hodnot za  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  a zaokrouhlení dostáváme  $P \doteq 0,000\,009\,05$ .

Třetí otázka je složitější,  $Q_1$  musíme počítat jinak, jde o součet dvou neslučitelných jevů, buď první kontrola bezvadný výrobek schválí a druhá ho již nekontroluje, nebo první kontrola výrobek vyřadí, ale druhá ho schválí, tedy

$$Q_1 = Q \cdot (1 - P_1) \cdot (1 - P_2 + P_2 \cdot (1 - P_2)).$$

Naopak  $Q_2$  vychází ze dvou neslučitelných jevů: buď první kontrola označí vadný výrobek za bezvadný, nebo první kontrola vadný výrobek vyřadí, ale druhá jej považuje za bezvadný a zvrátí jeho vyřazení, tedy

$$Q_2 = Q \cdot P_1 \cdot (P_3 + (1 - P_3) \cdot P_3).$$

Po dosazení dostáváme

$$P = \frac{Q \cdot P_1 \cdot (P_3 + (1 - P_3) \cdot P_3)}{Q \cdot (1 - P_1) \cdot (1 - P_2 + (1 - P_2) \cdot P_2) + Q \cdot P_1 \cdot (P_3 + (1 - P_3) \cdot P_3)}$$

a po vyčíslení a zaokrouhlení  $P \doteq 0,000\,81$ .

V řešení si všimněme, že třetí strategie přináší výrazně větší chybu, ale firma ji může preferovat, protože objem práce druhé kontroly se oproti druhé variantě řádově sníží a protože nepočítáme počet vyřazených bezvadných výrobků, který je v prvním a zejména druhém případě vyšší. Jinými slovy, při snižování podílu zmetků, jako například v druhé strategii, provedeme obrovské množství kontrol a bude vyřazeno mnoho bezvadných výrobků, což samozřejmě přináší výrobcí dodatečné náklady. Tyto aspekty lze přidat do příkladu, pokud bychom chtěli uvést problém ekonomicky a nikoli technicky.

**Úloha 13.** Starší vůz je třeba opravit. Mechanik může provést opravu originálními díly a snížit riziko poruchy v následujícím období na 0,005 za 17 000 Kč, nebo repasovanými díly sníží riziko poruchy na 0,02 za 2 000 Kč. Při jaké škodě vzniklé případnou poruchou se vyplatí která oprava (uvažujeme, že v případě poruchy vznikne shodná škoda nezávisle na dílech)?

*Řešení.* Celkové náklady jsou v obou případech náklady na opravu sečtené s očekávanými škodami případné poruchy, což je škoda násobená pravděpodobností poruchy. Očekávané náklady při dražší opravě jsou tedy

$$C_1 = 17\,000 + 0,005 \cdot x,$$

kde  $x$  jsou škody. Obdobně pro levnější opravu

$$C_2 = 2\,000 + 0,02 \cdot x.$$

Ověřujeme, kdy se vyplatí dražší oprava, tedy

$$C_1 < C_2,$$

$$17\,000 + 0,005 \cdot x < 2\,000 + 0,02 \cdot x,$$

$$1\,000\,000 < x.$$

Pokud by porucha způsobila škodu přes 1 milion korun, vyplatí se nyní dražší oprava. Pokud by byla hrozící škoda nižší, vyplatí se levnější oprava. Nutno dodat, že finanční rozvahu opravář obvykle počítat nebude, ale způsob opravy bude zvažovat podle aktuální ceny vozu.

**Úloha 14.** Dodavatel chystá výrobu, při které garantuje pravděpodobnost zmetků menší než 0,02. Bohužel se ukáže, že linka je poškozena a vyrábí 0,05 vadných výrobků. Dodavatel má možnost nechat výrobky zkontrolovat (uvažujeme, že kontrola určí vadnost spolehlivě), ale kontrola je nákladná. Jak velkou část vyrobené sady má nechat zkontrolovat, aby dosáhl cílového výskytu do 0,02 zmetků? Kolik by musel zkontrolovat, pokud by kontrola místo naprosté spolehlivosti dělala chybu u 0,005 kontrolovaných výrobků?

*Řešení.* Musíme snížit podíl zmetků mezi výrobky pod 0,02. Velikost celkové dodávky označme  $Q$ , podobně jako v úloze 12 by tato neměla hrát roli. Označme  $P_1$  neznámou pravděpodobnost, že výrobek byl zkontrolován,  $P_2 = 0,05$  pravděpodobnost, že nezkontrolovaný výrobek je zmetek. Zmetků zůstavších po kontrole je  $Q \cdot P_2 \cdot (1 - P_1)$ , počet výrobků násobíme

pravděpodobností, že jde o zmetek, a dále pravděpodobností, že nebyl kontrolován. Počet celkových výrobků je z  $Q$  snížen o počet zmetků, které byly kontrolovány  $Q \cdot P_2 \cdot P_1$ , tedy řešíme

$$0,02 > \frac{Q \cdot P_2 \cdot (1 - P_1)}{Q - Q \cdot P_2 \cdot P_1},$$

dopočítáme

$$P_1 > \frac{30}{49} \doteq 0,6122.$$

Je tedy třeba zkontrolovat přes 61,2 % výrobků z celkové várky.

Pokud uvažujeme chybovost kontroly, neodhalených zmetků je navíc  $Q \cdot P_2 \cdot P_1 \cdot 0,005$  – vadných, zkontrolovaných, ale nevyřazených díky chybě kontroly. Celkový počet nevyřazených výrobků bude zvýšen o tyto přidané zmetky, ale snížen o chybně vyřazené zkontrolované bezvadné výrobky, kterých je  $Q \cdot (1 - P_2) \cdot P_1 \cdot 0,005$ , tedy řešíme

$$0,02 > \frac{Q \cdot P_2 \cdot (1 - P_1) + Q \cdot P_2 \cdot P_1 \cdot 0,005}{Q - Q \cdot P_2 \cdot P_1 + Q \cdot P_2 \cdot P_1 \cdot 0,005 - Q \cdot (1 - P_2) \cdot P_1 \cdot 0,005},$$

dopočítáme

$$P_1 > \frac{125}{184} \doteq 0,6793.$$

Je tedy třeba zkontrolovat přes 67,93 % výrobků.

### 3.1. Úplná pravděpodobnost a Bayesova věta

Poslední úlohy využívají větu o úplné pravděpodobnosti a Bayesovu větu.

Věta o úplné pravděpodobnosti říká: *Mějme systém jevů  $A_1, A_2, \dots, A_n$  splňující  $A_i \cap A_j = \emptyset$  pro všechna  $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $i \neq j$ . Pokud  $B = \bigcup_{i=1}^n (B \cap A_i)$ , pak platí  $P(B) = \sum_{i=1}^n P(B|A_i) \cdot P(A_i)$ . Idea věty je v rozdělení jevu  $B$  na situace, kdy musel nastat právě jeden z jevů  $A_i$ . Toto aplikujeme v následujících úloze.*

**Úloha 15.** Dva stroje vyrábí týž výrobek. První stroj vyrobí 60 % a druhý 40 % celkové produkce. Pravděpodobnost vyrobení zmetku u obou strojů je po řadě 0,05 a 0,03. Jaká je pravděpodobnost, že „náhodně vybraný výrobek z produkce je zmetek“ (jev  $A$ )? ([3, s. 64–65])

*Řešení.* Necht'  $A_1$  (resp.  $A_2$ ) je jev „náhodně vybraný výrobek pochází z prvního (resp. druhého) stroje“. Při nalezení poškozeného výrobku víme, že tento výrobek musel vyrobit některý z přístrojů, ale žádný výrobek nepochází o obou najednou, což splňuje podmínky věty o úplné pravděpodobnosti. Pak  $P(A_1) = 0,4$ ,  $P(A_2) = 0,6$ ,  $P(A|A_1) = 0,05$ ,  $P(A|A_2) = 0,03$ . Z věty o úplné pravděpodobnosti dostáváme

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A_1) \cdot P(A|A_1) + P(A_2) \cdot P(A|A_2) = \\ &= 0,6 \cdot 0,05 + 0,4 \cdot 0,03 = 0,042. \end{aligned}$$

Bayesova věta či Bayesův vzorec je důsledek věty pro úplnou pravděpodobnost: *Mějme systém jevů  $A_1, A_2, \dots, A_n$  splňující  $A_i \cap A_j = \emptyset$  pro všechna  $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}, i \neq j$ . Pokud  $B = \bigcup_{i=1}^n (B \cap A_i)$ , pak platí*

$$P(A_j|B) = \frac{P(B|A_j) \cdot P(A_j)}{\sum_{i=1}^n P(B|A_i) \cdot P(A_i)}.$$

Větu budeme aplikovat v následujícím příkladu.

**Úloha 16.** V dílně pracuje deset strojů, každý za směnu vyrobí stejný počet výrobků. Pět strojů ve skupině A vyrobí 95 % výrobků v požadované kvalitě, skupina B tří strojů 80 % kvalitních výrobků a skupina C dvou starších strojů jen 75 % výrobků. Ze všech výrobků uložených ve skladu jsme náhodně vybrali jeden výrobek, který měl požadovanou kvalitu. Jaká je pravděpodobnost, že ho vyrobil některý ze strojů ve skupině A?

*Řešení.* Označme  $A$  náhodný jev, že „vybraný výrobek vyrobil některý ze strojů ve skupině A“,  $B$  náhodný jev „vybraný výrobek vyrobil stroj ze skupiny B“,  $C$  náhodný jev „vybraný výrobek vyrobil stroj ze skupiny C“ a  $N$  náhodný jev „vybraný výrobek je požadované kvality“. Pak  $P(A) = \frac{5}{10} = 0,5$ ,  $P(N|A) = 0,95$ ,  $P(B) = \frac{3}{10} = 0,3$ ,  $P(N|B) = 0,8$ ,  $P(C) = \frac{2}{10} = 0,2$  a  $P(N|C) = 0,75$ . Dále dosazením do Bayesova vzorce vypočítáme:

$$\begin{aligned} P(A|N) &= \frac{P(A) \cdot P(N|A)}{P(A) \cdot P(N|A) + P(B) \cdot P(N|B) + P(C) \cdot P(N|C)} = \\ &= \frac{0,5 \cdot 0,95}{0,5 \cdot 0,95 + 0,3 \cdot 0,8 + 0,2 \cdot 0,75} \doteq 0,549. \end{aligned}$$

## Závěr

Příspěvek na příkladu učiva pravděpodobnosti poukázal na mezipředmětové vztahy mezi matematikou a fyzikou a nabídl řešení úloh obsahově zaměřených na technickou praxi. Úlohy mohou učitelé matematiky a fyziky využít ve své výuce nebo je se žáky řešit v hodinách zájmové matematiky.

## Poděkování

Autoři příspěvku děkují anonymní recenzentce a Pavlu Tlustému za řadu připomínek a oprav, které pomohly srozumitelnosti i faktické správnosti textu.

## Literatura

- [1] Anděl, J.: *Matematika náhody*. 3. upr. vyd., Matfyzpress, Praha, 2007.
- [2] Baum, M., Brandt, D., Lind, D., Riemer, W., Zimmermann, P.: *Lambacher Schweizer Mathematik für Gymnasien 5*. Ernst Klett Verlag, Stuttgart, 2007.
- [3] Cihlář, J., Pelikán, Š.: *Pravděpodobnost – cvičení*. Pedagogická fakulta v Ústí nad Labem, Ústí nad Labem, 1984.
- [4] Litschmannová, M.: *Vybrané kapitoly z pravděpodobnosti*. VŠB-TU, Ostrava, 2011. [https://mi21.vsb.cz/sites/mi21.vsb.cz/files/unit/vybrane\\_kapitoly\\_pravdepodobnost.pdf](https://mi21.vsb.cz/sites/mi21.vsb.cz/files/unit/vybrane_kapitoly_pravdepodobnost.pdf).
- [5] Matoušek, J., Nešetřil, J.: *Kapitoly z diskrétní matematiky*. 3. upr. a dopl. vyd., Karolinum, Praha, 2007.
- [6] Odvárko, O.: *Booleova algebra*. Škola mladých matematiků, ÚV MO v nakl. Mladá fronta, Praha, 1973. Dostupné z: <https://dml.cz/handle/10338.dmlcz/403763>.
- [7] Płocki, A., Tlustý, P.: *Pravděpodobnost a statistika pro začátečníky a mírně pokročilé*. Prometheus, Praha, 2007.
- [8] Stewart, I.: *Hraje Bůh kostky? Nová matematika chaosu*. Dokořán, Praha, 2009.

## Parabola jako most mezi průměry a funkcemi

*Luděk Spíchal, Česká lesnická akademie, Trutnov*

V matematice není nijak neobvyklé, že se zdánlivě odlišné oblasti jako geometrie, algebra či teorie čísel často překvapivě prolínají. Jedním z příkladů je možnost konstruovat parabolu pomocí prostředků, které mají svůj původ v aritmetice, konkrétně ve studiu průměrů. Tento přístup otevírá prostor k hlubšímu porozumění nejen vlastnostem paraboly, ale i širším souvislostem mezi Pythagorejskými průměry, kvadratickým průměrem a geometrickou konstrukcí křivek.

Parabola, jedna ze tří klasických kuželoseček, je geometrickým útvarem, který na sebe od starověku poutá pozornost matematiků i vědců mnoha dalších oborů. Její příběh se začíná psát ve starověkém Řecku, v době, kdy se geometrie rozvíjela spíše jako teoretická věda, než jako nástroj pro řešení praktických problémů. Právě tehdy, ve 3. století př. n. l., systematicky studoval kuželosečky řecký matematik Apollónios z Pergy (asi 240 p. n. l.–asi 190 p. n. l.). Ve svém osmisvazkovém díle *Kónika – Pojednání o kuželosečkách* nejenže definoval pojem paraboly, ale společně s elipsou a hyperbolou je odlišil pomocí řezů rotačního kužele různě orientovanou rovinou.<sup>1)</sup> Apollóniovo dílo představovalo vrchol řecké geometrie a ovlivnilo matematiku po následujících téměř dvacet století [1, 4].

I když byly paraboly původně popsány geometricky, jejich skutečný význam se začal projevovat až s příchodem analytické geometrie, kterou v 17. století rozvinul René Descartes (1596–1650). Ten převedl studium geometrických útvarů do podoby algebraických rovnic, čímž umožnil přesné vyjádření paraboly pomocí rovnice druhého stupně. Tento přístup otevřel cestu k dalšímu hlubokému propojení mezi geometrií a algebrou.

Mezitím však parabola sehrála klíčovou roli i ve fyzice. Galileo Galilei (1564–1642), otec moderní mechaniky, v 17. století experimentálně prokázal, že dráha tělesa vrženého šikmo v gravitačním poli Země (bez odporu vzduchu) má tvar paraboly. Tímto způsobem se geometrie paraboly poprvé přímo propojila s reálným světem a začala se uplatňovat v popisu pohybu.

---

<sup>1)</sup>Zachovalo se pouze 7 dílů, 4 díly v řeckém originálu, 3 v arabských překladech. Osmý díl je považován za ztracený.

V následujících staletích se parabola stala běžným nástrojem v celé řadě matematických disciplín, kde se uplatňuje ve stereometrii, lineární algebrae, komplexních číslech i matematickém modelování.

Určité představy odpovídající aritmetickému či geometrickému průměru se objevily již v Mezopotámii a starověkém Egyptě. Mezopotámci při obchodování nebo astronomii používali prostřední hodnoty, které odpovídají aritmetickému nebo geometrickému průměru. Egypťané při praktických výpočtech (např. při odhadech ploch polí nebo objemů sýpek) nahrazovali nepravidelné tvary jednoduššími (obdélníky, lichoběžníky) a používali přibližné hodnoty rozměrů, což často odpovídá využití průměrných hodnot délek nebo průřezů.

Pythagoras (asi 570 př. n. l.–asi 510 př. n. l.) a jeho následovníci (pythagorejci) ve starém Řecku byli první, kdo průměry pojmenovali a systematizovali. Průměry tvořily důležitý prvek v rámci jejich učení o číslech a harmonii. Ve snaze vyjádřit rovnováhu a proporcí definovali tři základní typy průměrů mezi dvěma kladnými čísly: aritmetický, geometrický a harmonický. Tyto průměry byly nejen matematickým nástrojem, ale i výrazem pythagorejské víry v uspořádaný a číselně vyjádřitelný vesmír [2, 3, 5].

Pro potřeby článku nyní připomeňme formulaci *aritmetického* ( $\mathcal{A}$ ), *geometrického* ( $\mathcal{G}$ ) a dále ještě *kvadratického* ( $\mathcal{Q}$ ) průměru kladných reálných čísel  $a, b$ , které definujeme následujícím způsobem<sup>2)</sup>

$$\mathcal{A}(a, b) = \frac{a + b}{2}, \quad \mathcal{G}(a, b) = \sqrt{ab}, \quad \mathcal{Q}(a, b) = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}.$$

Na obr. 1 (vlevo) si můžeme všimnout, že  $\mathcal{G} \leq \mathcal{A} \leq \mathcal{Q}$ .

---

<sup>2)</sup>Pro harmonický průměr platí

$$\mathcal{H}(a, b) = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = \frac{2ab}{a + b}.$$

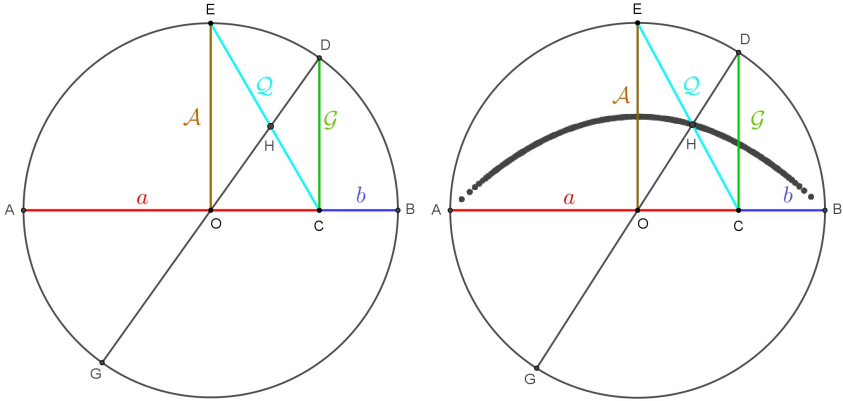
Řecký matematik Eudoxos z Knidu (asi 408 př. n. l.–asi 355 př. n. l.) doplnil základní typy průměrů o tzv. *kontraharmonický průměr*, pro který platí

$$\mathcal{C}(a, b) = \frac{a^2 + b^2}{a + b}.$$

Snadno lze ukázat, že

$$\mathcal{H}(a, b) + \mathcal{C}(a, b) = a + b.$$

Kvadratický průměr je také označován jako „RMS“ (root mean square) a je běžně využíván v elektrotechnice pro výpočet efektivní hodnoty střídavého napětí.



Obr. 1: Konstrukce aritmetického ( $\mathcal{A}$ ), geometrického ( $\mathcal{G}$ ) a kvadratického ( $\mathcal{Q}$ ) průměru kladných reálných čísel  $a, b$  (vlevo). Stopa, kterou opisuje bod  $H$  jako průsečík kvadratického ( $\mathcal{Q}$ ) průměru a průměru kružnice  $DG$  (vpravo).

V další části článku budeme uvažovat kružnici s průměrem o délce  $a + b$  (obr. 1, vlevo), ve které provedeme konstrukci aritmetického ( $\mathcal{A}$ ), geometrického ( $\mathcal{G}$ ) a kvadratického ( $\mathcal{Q}$ ) průměru. Zaměříme se na rovnici a vlastnosti křivky, kterou získáme sledováním stopy bodu  $H$  (průsečík kvadratického průměru a průměru kružnice  $DG$ ) v případě, že budeme pohybovat bodem  $C$  podél průměru kružnice (obr. 1, vpravo).

### Odvození rovnice křivky

Při odvození rovnice křivky, kterou jsme získali výše uvedenou konstrukcí, budeme vycházet z obr. 2, kde kružnice  $c$  je určena rovnicí

$$x^2 + y^2 = \mathcal{A}^2.$$

Pokud dále zavedeme parametr  $t = |OC|$ , pak přímka  $OD$  má rovnici

$$y = \mathcal{A} - \frac{\mathcal{A}}{t}x, \tag{1}$$

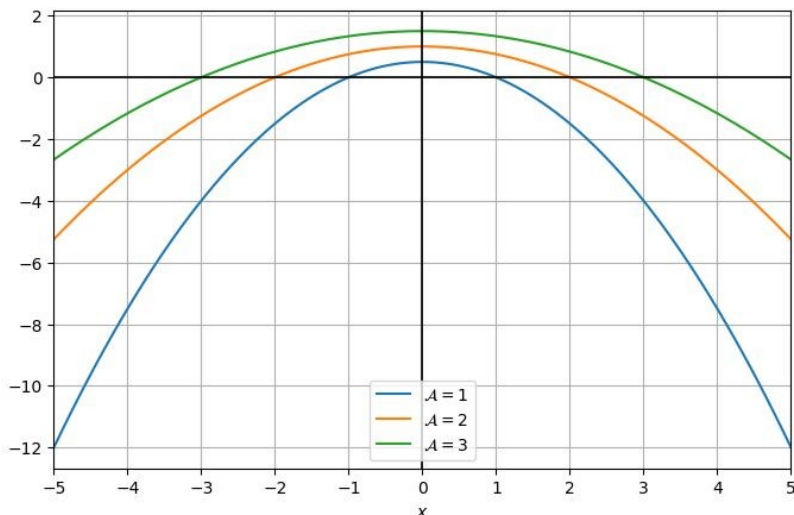
a přímka  $EC$  rovnici

$$y = \frac{\sqrt{\mathcal{A}^2 - t^2}}{t}x. \tag{2}$$

Parametr  $t$  odstraníme tak, že z rovnice přímky (1) vyjádříme

$$t = \frac{\mathcal{A}x}{\mathcal{A} - y},$$





Obr. 3: Křivky reprezentující funkci určenou rovnicí  $y = \frac{1}{2A}(A^2 - x^2)$  pro  $A = 1, 2, 3$

V astronomii se parabola objevuje ve výpočtech drah některých kosmických těles a ve statistice i informatice je využívána při aproximacích a optimalizacích.

Parabola tak představuje dokonalý příklad matematického objektu, který propojuje starověkou geometrii, renesanční fyziku, moderní výpočty a technickou praxi. Její tvar je nejen esteticky působivý, ale zároveň matematicky bohatý a funkčně užitečný.

#### Literatura

- [1] Spíchal, L.: Jednotková parabola, zlatý řez a parabolické  $\pi$ . *Rozhledy matematicko-fyzikální*, roč. 96 (2021), č. 1, s. 8–17.
- [2] Spíchal, L.: The geometric constructions of the Greek means. *Symmetry: Culture and Science*, roč. 34 (2023), č. 4, s. 407–416.
- [3] Spíchal, L.: Pythagorejské průměry, kontraharmonický průměr a zlatý řez v pravoúhlém trojúhelníku. *Rozhledy matematicko-fyzikální*, roč. 99 (2024), č. 3, s. 1–12.
- [4] Wikipedia, The Free Encyclopedia. Parabola. <https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Parabola&oldid=1291646408>.
- [5] Wikipedia, The Free Encyclopedia. Pythagorean means. [https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Pythagorean\\_means&oldid=1287732965](https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Pythagorean_means&oldid=1287732965).

# Implicitní funkce v rovině

*David Cichra*

**Abstrakt.** Zabýváme se rovnicemi tvaru  $F(x, y) = 0$ , které v rovině popisují křivky. Taková rovnice nemusí určovat hodnotu  $y$  jednoznačně jako funkci proměnné  $x$ . Ukážeme však, že v okolí vhodně zvoleného bodu může lokálně vzniknout funkce  $y = f(x)$ . Na příkladu kružnice vysvětlíme rozdíl mezi globálním a lokálním pohledem, zavedeme pojem implicitní funkce a formulujeme větu o její existenci. Text je určen především středoškolským studentům se zájmem o rozšiřující matematiku a předpokládá znalost funkcí jedné proměnné, limit, spojitosti a základních pravidel pro derivování.

## 1. Explicitní a implicitní zadání vztahu v rovině

Vyjdeme ze známého explicitního zadání funkce a postupně přejdeme k rovnicím v rovině. U nich nás nebude zajímat jen křivka jako celek, ale také její chování v okolí konkrétního bodu. Ukáže se, že tatáž křivka může v okolí jednoho bodu určovat proměnnou  $y$  jednoznačně jako funkci proměnné  $x$ , zatímco v okolí jiného bodu nikoli. Právě v takové lokální situaci budeme mluvit o implicitní funkci. Struktura úvodní části je inspirována textem [1].

Funkci jedné reálné proměnné na množině  $D \subset \mathbb{R}$  rozumíme předpis  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ , který každému  $x \in D$  přiřazuje právě jedno reálné číslo  $f(x)$ . Často takovou funkci zapisujeme jako

$$y = f(x). \tag{1}$$

Toto zadání nazýváme *explicitní*, protože proměnná  $y$  je přímo vyjádřena pomocí proměnné  $x$ . Např. rovnice  $y = x^2 - 4$  přímo určuje hodnotu  $y$  pro každou hodnotu  $x$ .

Podstatná vlastnost explicitního zápisu tedy spočívá v tom, že každému přípustnému  $x$  přiřazuje právě jednu hodnotu  $y$ . Rovnice v rovině však mohou nejprve popisovat pouze podmínku, kterou mají dvojice  $[x, y]$  splňovat. Teprve potom se ptáme, zda tato podmínka určuje  $y$  jednoznačně jako funkci proměnné  $x$ , alespoň v okolí některého bodu. Takový obecnější vztah budeme zapisovat rovnicí

$$F(x, y) = 0. \tag{2}$$

Takové zadání nazýváme *implicitní*. Proměnné  $x$  a  $y$  jsou v něm svázané společnou podmínkou, ale proměnná  $y$  nemusí být přímo vyjádřena pomocí proměnné  $x$ . Jestliže rovnice  $F(x, y) = 0$  v okolí zvoleného bodu skutečně určuje  $y$  jako funkci  $x$ , budeme mluvit o implicitní funkci.

Abychom mohli rovnice tvaru (2) přesně popisovat, budeme pracovat s funkcemi dvou reálných proměnných.

**Definice 1.** Nechť  $D \subset \mathbb{R}^2$ . Funkcí dvou reálných proměnných na množině  $D$  rozumíme předpis  $F: D \rightarrow \mathbb{R}$ , který každému bodu  $[x, y] \in D$  přiřazuje právě jedno reálné číslo  $F(x, y)$ .

Množinu  $\mathbb{R}^2$  budeme chápat jako souřadnicovou rovinu. Její body budeme zapisovat ve tvaru  $[x, y]$ . Rovnice  $F(x, y) = 0$  potom popisuje množinu těch bodů roviny, ve kterých má funkce  $F$  hodnotu nula.

## 2. Implicitní zadání na příkladu kružnice

Uvažujme funkci

$$F(x, y) = x^2 + y^2 - 1. \quad (3)$$

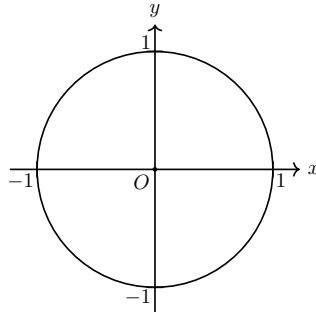
Rovnice  $F(x, y) = 0$  má tedy tvar

$$x^2 + y^2 - 1 = 0. \quad (4)$$

Množina jejích řešení je

$$M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 1 = 0\}.$$

Jde o jednotkovou kružnici se středem v počátku, znázorněnou na obr. 1.



Obr. 1: Množina bodů daná rovnicí  $x^2 + y^2 - 1 = 0$ , tedy jednotková kružnice

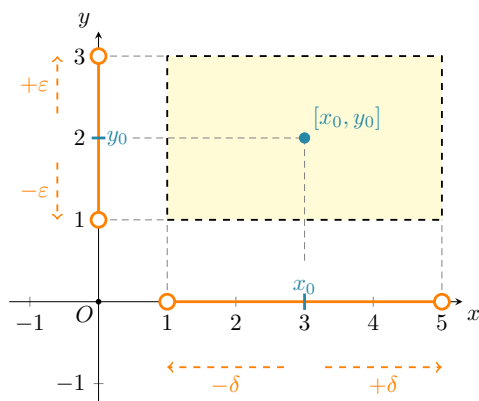
Je množina  $M$  grafem nějaké funkce  $y = f(x)$ ? Globálně nikoli. Pro každé  $x \in (-1, 1)$  totiž existují dvě různé hodnoty  $y$ , které rovnici (4) splňují. Jedna odpovídá horní půlkružnici a druhá dolní. Není tedy splněna podmínka jednoznačnosti, kterou u funkce požadujeme.

Přesto může být kružnice v okolí vhodně zvoleného bodu grafem funkce. Například v okolí bodu na horní půlkružnici vidíme pouze horní větev, zatímco v okolí bodu na dolní půlkružnici vidíme pouze dolní větev. Rozhodující tedy není jen celá křivka, ale také bod, v jehož okolí ji zkoumáme. Takový pohled nazýváme *lokální*.

Abychom tuto myšlenku mohli přesně formulovat, připomeňme nejprve pojem okolí bodu.

**Definice 2.** Nechť  $x_0 \in \mathbb{R}$  a  $\delta > 0$ . *Okolím bodu*  $x_0$  rozumíme otevřený interval  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ . Nechť  $[x_0, y_0] \in \mathbb{R}^2$  a nechteť  $\delta > 0$ ,  $\varepsilon > 0$ . *Obdélníkovým okolím bodu*  $[x_0, y_0]$  rozumíme množinu

$$(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \times (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon).$$



Obr. 2: Obdélníkové okolí bodu  $[x_0, y_0]$  v rovině

Nyní můžeme zavést pojem implicitní funkce.

**Definice 3.** Nechť  $F: D \rightarrow \mathbb{R}$  je funkce definovaná na množině  $D \subset \mathbb{R}^2$  a bod  $[x_0, y_0] \in D$  splňuje  $F(x_0, y_0) = 0$ . Řekneme, že rovnice  $F(x, y) = 0$  určuje v okolí bodu  $[x_0, y_0]$  implicitní funkci  $y = f(x)$ , jestliže existují kladná čísla  $\delta$  a  $\varepsilon$  taková, že  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \times (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon) \subset D$ , a pro každé  $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  existuje právě jedno  $y \in (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$  splňující  $F(x, y) = 0$ . Tím je určena funkce  $f: (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \rightarrow (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$ , pro niž platí  $f(x_0) = y_0$  a  $F(x, f(x)) = 0$  pro všechna  $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ .

Vraťme se ke kružnici dané rovnicí (4). Z této rovnice dostáváme

$$y^2 = 1 - x^2,$$

tedy

$$y = \sqrt{1 - x^2} \quad \text{nebo} \quad y = -\sqrt{1 - x^2}.$$

První předpis popisuje horní větev kružnice, druhý větev dolní. Nejprve budeme uvažovat body kružnice, pro které  $x_0 \in (-1, 1)$ . Krajní body  $[-1, 0]$  a  $[1, 0]$  pak probereme samostatně.

Začneme konkrétním bodem  $A \left[ \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right]$ , který leží na horní větvi. Podle definice 3 chceme najít takové obdélníkové okolí bodu  $A$ , ve kterém bude pro každé uvažované  $x$  existovat právě jedna hodnota  $y$  splňující rovnici kružnice.

Zvolme  $\varepsilon = \frac{\sqrt{3}}{4}$ ,  $\delta = \frac{1}{4}$ . Pak dostáváme obdélníkové okolí

$$\left( \frac{1}{4}, \frac{3}{4} \right) \times \left( \frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{3\sqrt{3}}{4} \right).$$

Druhá souřadnice všech bodů tohoto okolí je kladná. Dolní větev kružnice má naopak záporné hodnoty  $y$ . Průnik tohoto okolí s kružnicí tedy neobsahuje žádný bod dolní větve.

Zbývá ověřit, že příslušná část horní větve ve zvoleném obdélníkovém okolí skutečně leží. Pro každé  $x \in \left( \frac{1}{4}, \frac{3}{4} \right)$  platí

$$\frac{\sqrt{3}}{4} < \frac{\sqrt{7}}{4} < \sqrt{1 - x^2} < \frac{\sqrt{15}}{4} < \frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

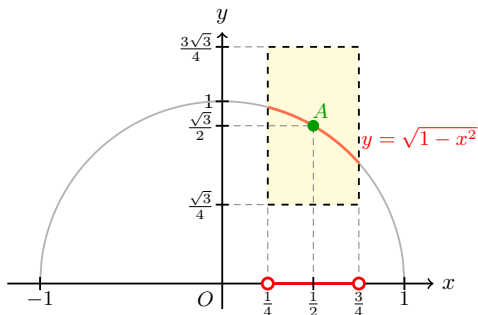
Ukázali jsme, že pro každé  $x \in \left( \frac{1}{4}, \frac{3}{4} \right)$  existuje právě jedna hodnota  $y \in \left( \frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{3\sqrt{3}}{4} \right)$  splňující rovnici kružnice. Touto hodnotou je  $y = \sqrt{1 - x^2}$ . Podle definice 3 tedy rovnice kružnice určuje v okolí bodu  $A$  implicitní funkci

$$f(x) = \sqrt{1 - x^2}.$$

Situace je znázorněna na obr. 3.

Obecně postupujeme stejně. Pro bod  $[x_0, y_0]$  na horní větvi s  $x_0 \in (-1, 1)$  platí  $y_0 > 0$ . Volbou  $\varepsilon = \frac{y_0}{2}$  dostáváme interval

$$(y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon) = \left( \frac{y_0}{2}, \frac{3y_0}{2} \right),$$



Obr. 3: Lokální existence implicitní funkce v okolí bodu  $A \left[ \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right]$

který obsahuje pouze kladné hodnoty  $y$ . Hodnoty  $y$  na dolní větvi jsou záporné, a proto v tomto intervalu neleží. Poté zvolíme  $\delta > 0$  tak malé, aby pro všechna  $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  zůstala hodnota  $\sqrt{1 - x^2}$  v uvedeném intervalu pro  $y$ .<sup>1)</sup> Pro každé  $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  je pak ve zvoleném intervalu pro  $y$  právě jedno řešení rovnice kružnice, a to  $y = \sqrt{1 - x^2}$ . Podle definice 3 zde tedy rovnice  $x^2 + y^2 - 1 = 0$  určuje implicitní funkci

$$f(x) = \sqrt{1 - x^2}.$$

Případ bodu na dolní větvi se ověří obdobně. Interval pro hodnoty  $y$  zvolíme celý pod osou  $x$ , čímž vyloučíme horní větev. V okolí takového bodu vzniká funkce

$$g(x) = -\sqrt{1 - x^2}.$$

Podrobné ověření ponecháváme čtenáři jako cvičení.

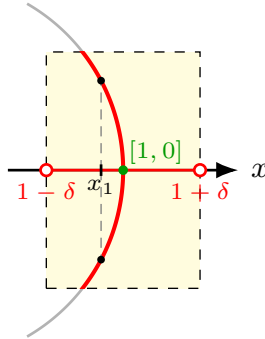
Zbývá posoudit krajní body  $[-1, 0]$  a  $[1, 0]$ . Uvažujme například bod  $[1, 0]$ . Obr. 4 naznačuje, že v žádném obdélníkovém okolí tohoto bodu nelze dosáhnout jednoznačnosti hodnoty  $y$ . Pro hodnoty  $x < 1$  dostatečně blízké jedničce totiž dostáváme dvě hodnoty  $y$ , jednu kladnou a

<sup>1)</sup>Například lze vzít  $\delta = \min \left\{ \frac{1 - |x_0|}{2}, \frac{y_0^2}{4} \right\}$ . Pak z  $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  plyne  $x \in (-1, 1)$ . Položíme-li  $s = \sqrt{1 - x^2}$ , pak  $s + y_0 \geq y_0$  a zároveň  $|x + x_0| < 2$ . Proto

$$|s - y_0| = \frac{|x^2 - x_0^2|}{s + y_0} \leq \frac{|x - x_0| |x + x_0|}{y_0} < \frac{2\delta}{y_0} \leq \frac{y_0}{2}.$$

Odtud plyne  $s \in \left( \frac{y_0}{2}, \frac{3y_0}{2} \right)$ .

druhou zápornou, přičemž obě splňují rovnici kružnice.<sup>2)</sup> Podmínka jednoznačnosti z definice 3 zde selhává. Rovnice  $x^2 + y^2 - 1 = 0$  proto v okolí bodu  $[1, 0]$  neurčuje implicitní funkci  $y = f(x)$ . Stejný závěr platí i v bodě  $[-1, 0]$ .



Obr. 4: Selhání implicitního zadání v okolí krajního bodu  $[1, 0]$

Kružnici jsme mohli rozdělit na dvě větve díky tomu, že umíme rovnici  $x^2 + y^2 - 1 = 0$  vyřešit vzhledem k proměnné  $y$ . U obecné rovnice  $F(x, y) = 0$  to však často možné není. Uvažujme například rovnici

$$xe^y + ye^x - 1 = 0. \tag{5}$$

Není zřejmé, jak z ní proměnnou  $y$  vyjádřit elementárními prostředky. Přesto bychom rádi rozhodli, zda v okolí daného bodu určuje nějakou funkci  $y = f(x)$ . K tomu budeme potřebovat větu o existenci implicitní funkce. Před její formulací zavedeme dva pojmy pro funkce dvou proměnných, a to parciální derivaci a spojitost.

### 3. Parciální derivace a spojitost funkcí dvou proměnných

U funkce jedné proměnné derivace popisuje, jak se mění hodnota funkce při malé změně vstupní hodnoty. U funkce dvou proměnných můžeme měnit buď proměnnou  $x$ , nebo proměnnou  $y$ . Tím dostáváme dvě parciální derivace.

<sup>2)</sup>Přesněji, nechť  $\delta > 0$  a  $\varepsilon > 0$  jsou zvoleny libovolně. Dále zvolme  $0 < h < \min \left\{ \delta, \frac{\varepsilon^2}{2}, 1 \right\}$  a položíme  $x_1 = 1 - h$ . Potom  $x_1 \in (1 - \delta, 1 + \delta)$ . Pro  $y_1 = \sqrt{1 - x_1^2}$  platí

$$y_1^2 = 1 - (1 - h)^2 = 2h - h^2 < 2h < \varepsilon^2,$$

tedy  $0 < y_1 < \varepsilon$ . Hodnoty  $y_1$  i  $-y_1$  leží v intervalu  $(-\varepsilon, \varepsilon)$  a obě splňují rovnici kružnice.

**Definice 4.** Nechť je funkce  $F$  definována v okolí bodu  $[x_0, y_0]$ . Řekneme, že funkce  $F$  má v bodě  $[x_0, y_0]$  *parciální derivaci podle proměnné  $x$* , jestliže existuje limita

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x_0 + h, y_0) - F(x_0, y_0)}{h}.$$

Tuto limitu značíme

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0).$$

Analogicky, funkce  $F$  má v bodě  $[x_0, y_0]$  *parciální derivaci podle proměnné  $y$* , jestliže existuje limita

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x_0, y_0 + h) - F(x_0, y_0)}{h}.$$

Tuto limitu značíme

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0).$$

Při výpočtu parciální derivace podle jedné proměnné považujeme druhou proměnnou za konstantu a používáme stejná pravidla jako při derivování funkcí jedné reálné proměnné.

**Příklad 1.** Určete parciální derivace funkce

$$F(x, y) = 3x^4y^2 - e^{2x}.$$

*Řešení.* Při derivaci podle  $x$  považujeme  $y$  za konstantu. Dostáváme

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = 12x^3y^2 - 2e^{2x}.$$

Při derivaci podle  $y$  považujeme  $x$  za konstantu. Dostáváme

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = 6x^4y.$$

Pro formulaci věty o existenci implicitní funkce budeme potřebovat také spojitost funkcí dvou proměnných.

**Definice 5.** Nechť je funkce  $F$  definována v okolí bodu  $[x_0, y_0]$ . Řekneme, že  $F$  je *spojitá v bodě  $[x_0, y_0]$* , jestliže platí

$$\lim_{[x, y] \rightarrow [x_0, y_0]} F(x, y) = F(x_0, y_0).$$

Intuitivně to znamená totéž jako u funkce jedné proměnné. Malé změny vstupních hodnot  $x$  a  $y$  vedou k malým změnám hodnoty funkce. U funkcí dvou proměnných je však třeba mít na paměti, že k bodu  $[x_0, y_0]$  se můžeme v rovině přibližovat různými směry.

V dalším textu budeme využívat základní pravidla pro spojitost. Součet, rozdíl a součin spojitých funkcí jsou spojité. Podíl spojitých funkcí je spojitý v těch bodech, v nichž jmenovatel není nulový, a složení spojitých funkcí je spojité všude tam, kde je definováno. Spolu se spojitostí běžných elementárních a souřadnicových funkcí tak můžeme snadno ověřovat spojitost mnoha funkcí dvou proměnných.

Například funkce

$$F(x, y) = xe^y + ye^x - 1$$

je spojitá na celé rovině  $\mathbb{R}^2$ . Podrobnější výklad spojitosti funkcí více proměnných lze najít například v [2].

#### 4. Věta o existenci implicitní funkce

Vraťme se k rovnici (5). Neumíme z ní jednoduše vyjádřit proměnnou  $y$ , ale přesto můžeme za určitých podmínek zaručit, že v okolí daného bodu funkce  $y = f(x)$  existuje. Tyto podmínky popisuje následující věta.

**Věta 1 (o existenci implicitní funkce).** *Nechť  $D \subset \mathbb{R}^2$  obsahuje okolí bodu  $[x_0, y_0]$  a nechť  $F: D \rightarrow \mathbb{R}$  je funkce. Dále předpokládejme, že*

1.  $F(x_0, y_0) = 0$ ,
2. funkce  $F$  je spojitá v okolí bodu  $[x_0, y_0]$ ,
3. parciální derivace  $\frac{\partial F}{\partial y}$  existuje a je spojitá v okolí bodu  $[x_0, y_0]$ ,
4.  $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$ .

*Pak existuje okolí bodu  $[x_0, y_0]$ , ve kterém rovnice  $F(x, y) = 0$  určuje spojitou implicitní funkci  $y = f(x)$  ve smyslu definice 3.*

Větu lze číst takto: stačí ověřit čtyři relativně snadné podmínky – bod leží na křivce, funkce  $F$  je rozumně hladká, parciální derivace podle  $y$  existuje a je spojitá, a v daném bodě není nulová. Pokud to vše platí, máme jistotu, že se křivka v okolí tohoto bodu „chová jako graf funkce“ aniž bychom museli  $y$  explicitně vyjadřovat nebo ručně konstruovat okolí jako u kružnice.

Důkaz věty 1 zde neuvádíme, protože přesahuje rámec tohoto článku. Lze jej najít například v [3]. V následující poznámce projdeme jednotlivé předpoklady věty a na příkladech ukážeme, co se může stát, pokud některý z nich není splněn.

**Poznámka 1.** Věta 1 je postačujícím kritériem pro existenci spojitě implicitní funkce. Splnění všech jejích předpokladů tuto existenci zaručuje. Pokud některý předpoklad splněn není, věta sama o sobě žádný závěr nedává a situaci je třeba posoudit jinak. V následujících bodech proto ukážeme, jaká potíž může nastat při vypuštění jednotlivých předpokladů.

1. *Bod musí ležet na křivce.*

Podmínka

$$F(x_0, y_0) = 0$$

říká, že bod  $[x_0, y_0]$  skutečně leží na křivce popsané rovnicí  $F(x, y) = 0$ . Jestliže  $F(x_0, y_0) \neq 0$ , pak tato křivka daným bodem neprochází a nemá smysl mluvit o implicitní funkci procházející bodem  $[x_0, y_0]$ .

2. *Spojitosť funkce F.*

Předpoklad spojitosti funkce  $F$  souvisí se spojitostí výsledné implicitní funkce. Bez něj může rovnice  $F(x, y) = 0$  sice lokálně určovat  $y$  jednoznačně jako funkci proměnné  $x$ , ale tato funkce nemusí být spojitá.

Uvažujme například bod  $[0, 0]$  a funkci

$$F(x, y) = \begin{cases} y - x, & x \leq 0, \\ y - x + 1, & x > 0. \end{cases}$$

Platí  $F(0, 0) = 0$  a parciální derivace podle  $y$  existuje, přičemž

$$\frac{\partial F}{\partial y}(0, 0) = 1 \neq 0.$$

Funkce  $F$  však není spojitá v bodě  $[0, 0]$ . Rovnice  $F(x, y) = 0$  v okolí bodu  $[0, 0]$  určuje funkci

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0, \\ x - 1, & x > 0, \end{cases}$$

ta ale není spojitá v bodě  $x = 0$ . Příklad ukazuje, že bez spojitosti funkce  $F$  nelze zaručit spojitost implicitně určené funkce.

3. **Existence parciální derivace podle  $y$ .**

Předpoklad existence parciální derivace podle  $y$  také nelze vypustit. Uvažujme funkci

$$F(x, y) = |y| - x.$$

V bodě  $[0, 0]$  je tato funkce spojitá a platí  $F(0, 0) = 0$ . Podle definice by parciální derivace podle  $y$  v tomto bodě musela být dána limitou

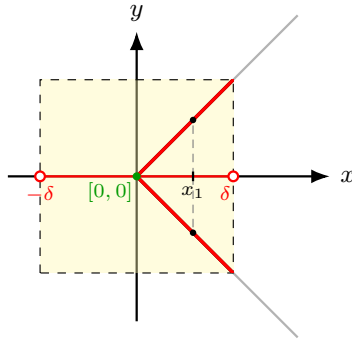
$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(0, h) - F(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h|}{h}.$$

Tato limita však neexistuje, protože pro  $h > 0$  je podíl roven 1, zatímco pro  $h < 0$  je roven  $-1$ .

Z rovnice  $F(x, y) = 0$  dostáváme vztah  $|y| = x$ . Pro každé kladné  $x$  dostatečně blízké nule existují dvě různé hodnoty

$$y = x \quad \text{a} \quad y = -x.$$

Proměnná  $y$  tedy v okolí bodu  $[0, 0]$  není určena jednoznačně jako funkce proměnné  $x$ . Situace je znázorněna na obr. 5.



Obr. 5: Křivka  $|y| = x$ ; v okolí bodu  $[0, 0]$  vznikají pro kladná  $x$  dvě hodnoty  $y$

4. **Nenulovost parciální derivace podle  $y$ .**

Navážeme na již dříve zkoumanou funkci

$$F(x, y) = x^2 + y^2 - 1.$$

Funkce  $F$  je spojitá v okolí bodu  $[1, 0]$  a platí  $F(1, 0) = 0$ . Parciální derivace podle  $y$  existuje a je dána předpisem

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = 2y,$$

tedy

$$\frac{\partial F}{\partial y}(1, 0) = 0.$$

Selhává tedy podmínka nenulovosti parciální derivace. Jak jsme již odůvodnili při rozboru krajních bodů kružnice, v okolí bodu  $[1, 0]$  rovnice  $F(x, y) = 0$  implicitní funkci  $y = f(x)$  neurčuje. Tato situace je znázorněna na obr. 4.

Předchozí poznámka ukazuje, proč nelze předpoklady věty při jejím použití jednoduše vypouštět. Zároveň je však důležité, že jde pouze o postačující kritérium. Nesplnění některého předpokladu tedy samo o sobě neznamená, že implicitní funkce neexistuje.

Následující poznámka to ukazuje na podmínce

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0,$$

která pro samotnou existenci implicitní funkce není nutná.

**Poznámka 2.** Uvažujme rovnici

$$y^3 - x = 0$$

a položme

$$F(x, y) = y^3 - x.$$

V bodě  $[0, 0]$  platí  $F(0, 0) = 0$  a

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = 3y^2, \quad \frac{\partial F}{\partial y}(0, 0) = 0.$$

Podmínka nenulovosti parciální derivace podle  $y$  tedy splněna není. Přesto z rovnice přímo dostáváme funkci  $y = \sqrt[3]{x}$ , která je definována a spojitá na celé reálné ose. Implicitní funkce tedy existuje, i když ji věta 1 v tomto bodě nezaručuje.

V následujícím příkladu se vrátíme k rovnici (5). S užitím věty 1 ukážeme, že tato rovnice v okolí daného bodu určuje implicitní funkci.

**Příklad 2.** Ukažte, že rovnice

$$xe^y + ye^x - 1 = 0$$

v jistém okolí bodu  $[1, 0]$  určuje spojitou implicitní funkci  $y = f(x)$ .

*Řešení.* Položme

$$F(x, y) = xe^y + ye^x - 1.$$

Ověříme předpoklady věty 1. Funkce  $F$  je spojitá, protože vzniká ze součtů, součinů a skládání spojitých funkcí. Dále platí

$$F(1, 0) = 1 \cdot e^0 + 0 \cdot e^1 - 1 = 0.$$

Bod  $[1, 0]$  tedy leží na křivce  $F(x, y) = 0$ .

Parciální derivace podle  $y$  má tvar

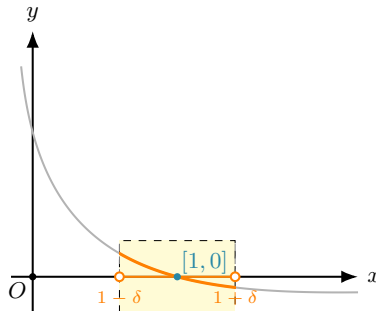
$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = xe^y + e^x.$$

Tato parciální derivace je spojitá. V bodě  $[1, 0]$  dostáváme

$$\frac{\partial F}{\partial y}(1, 0) = 1 + e \neq 0.$$

Všechny předpoklady věty 1 jsou splněny. Existuje proto okolí bodu  $[1, 0]$ , ve kterém daná rovnice určuje právě jednu spojitou implicitní funkci  $y = f(x)$ .

Situace z předchozího příkladu je znázorněna na obr. 6.



Obr. 6: Křivka  $xe^y + ye^x - 1 = 0$  v okolí bodu  $[1, 0]$ ; v tomto okolí ji lze chápat jako graf spojitě funkce  $y = f(x)$

Následující úlohy slouží k samostatnému procvičení postupu z předchozího příkladu.

**Příklad 3.** Ukažte, že každá z následujících rovnic v jistém okolí uvedeného bodu určuje spojitou implicitní funkci  $y = f(x)$ .

- a)  $x^2 + xy + y^2 - 3 = 0$  v okolí bodu  $[1, 1]$ ,
- b)  $x^2 + \sin y - 1 = 0$  v okolí bodu  $[1, 0]$ ,
- c)  $\ln(1 + y^2) + y - x = 0$  v okolí bodu  $[0, 0]$ .

### Závěr

V článku jsme se zabývali rovnicemi tvaru  $F(x, y) = 0$ , které v rovině popisují křivky. Na příkladu jednotkové kružnice jsme viděli, že taková křivka nemusí být globálně grafem funkce  $y = f(x)$ , ale v okolí vhodně zvoleného bodu může proměnnou  $y$  určovat jednoznačně jako funkci proměnné  $x$ .

Tento lokální pohled vedl k definici implicitní funkce a k větě o její existenci. Tato věta poskytuje postačující podmínky, za nichž rovnice  $F(x, y) = 0$  v okolí daného bodu určuje spojitou funkci  $y = f(x)$ . Pokud některý předpoklad splněn není, je třeba situaci posoudit samostatně.

V navazujícím článku se budeme zabývat otázkou, jak určit derivaci implicitní funkce, aniž bychom proměnnou  $y$  museli z rovnice explicitně vyjádřit.

### Literatura

- [1] Kreml, P., Vlček, J., Volný, P., Krček, J., Poláček, J.: *Matematika II*. VŠB – Technická univerzita, Ostrava, 2007.
- [2] Ghorpade, S. R., Limaye, B. V.: *A course in multivariable calculus and analysis*. Springer, New York, 2010.
- [3] Hájková, O., Johanis, M., John, O., Kalenda, O., Zelený, M.: *Matematika*. Matfyzpress, Univerzita Karlova, Praha, 2012.

## Pythagorejské trojice a některé jejich vlastnosti

*José Marcial Nájares Romero, ZŠ Gutova, Praha 10*

*Hana Kadlecová, 1. Základní škola, Masarykovo nám., Říčany*

Pythagorejská trojice je trojice přirozených čísel  $(a, b, c)$ , která splňuje rovnost

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Jestliže jsou navíc čísla  $a, b, c$  po dvou nesoudělná, nazýváme takovou trojici *primitivní pythagorejská trojice*.<sup>1)</sup>

Takové trojice velmi úzce souvisejí s Pythagorovou větou.

**Pythagorova věta.** Mějme trojúhelník o stranách délek  $a, b, c$ , přičemž  $c$  je nejdelší strana. Trojúhelník je pravoúhlý, právě když  $a^2 + b^2 = c^2$ .

V práci se budeme zabývat některými vlastnostmi těchto trojic. Např. budeme zkoumat, jestli může být rozdíl největšího členu a jiného členu této trojice libovolné prvočíslo. Je známo, že pro každou pythagorejskou trojici platí, že alespoň jeden člen musí být dělitelný třemi (podobně je alespoň jeden člen dělitelný čtyřmi a alespoň jeden dělitelný pěti), viz [2]. V této práci se podíváme blíže na případ dělitelnosti třemi, zaměříme se zejména na ostatní členy trojice a jejich zbytky po dělení třemi.

### Základní poznatky

Pythagorejskou trojici  $(3, 4, 5)$  znali již staří Egypťané. Babyloňané používali trojici  $(5, 12, 13)$ . Dnes je matematikům znám způsob, jak popsat všechny primitivní pythagorejské trojice. My ho uvádíme níže jako větu 1.

Z Pythagorovy věty plyne, že každá pythagorejská trojice určuje pravoúhlý trojúhelník, který se rovněž nazývá *pythagorejský*. Největší číslo této trojice  $c$  je délkou přepony v daném trojúhelníku a hodnoty  $a, b$  představují délky odvěsen. V dalším textu budeme proto členy pythagorejské trojice  $a, b$  nazývat délka odvěsen a  $c$  délka přepony.

Následující věta ukazuje, jak získat všechny primitivní pythagorejské trojice. Důkaz věty lze najít např. v [2].

---

<sup>1)</sup> Stačí ověřit nesoudělnost jedné z dvojic  $a, b$  nebo  $b, c$  nebo  $a, c$  a nesoudělnost zbylých dvou už z toho plyne.

**Věta 1.** Jestliže  $m, n$  jsou dvě nesoudělná přirozená čísla různé parity,  $m > n$ , pak platí, že  $(2mn, m^2 - n^2, m^2 + n^2)$  je primitivní pythagorejská trojice. I naopak platí, že pro každou primitivní pythagorejskou trojici  $(a, b, c)$  existuje dvojice přirozených čísel  $m, n$  splňující předchozí předpoklady taková, že  $c = m^2 + n^2$  a  $a = 2mn, b = m^2 - n^2$ , nebo  $a = m^2 - n^2, b = 2mn$ .

### Rozdíl mezi délkou přepony a délkou jedné z odvěsen

Pokud je  $(a, b, c)$  primitivní pythagorejská trojice, pak  $c$  je liché přirozené číslo a právě jedno z čísel  $a, b$  je rovněž liché přirozené číslo, viz [2]. Nejprve budeme řešit otázku, zda existují primitivní pythagorejské trojice, pro které platí, že rozdíl mezi délkou přepony a delší odvěsny je jedna. K tomuto účelu budeme uvažovat rozdíl druhých mocnin dvou přirozených po sobě jdoucích čísel, tedy  $(k + 1)^2 - k^2 = 2k + 1$ .

Protože existuje nekonečně mnoho lichých přirozených čísel, která jsou druhou mocninou jiného přirozeného čísla, tedy  $2k + 1 = d^2$ , kde  $d$  je přirozené číslo, lze najít nekonečně mnoho primitivních pythagorejských trojic  $(\sqrt{2k + 1}, k, k + 1)$ , pro něž platí, že rozdíl mezi délkou přepony a delší odvěsny je 1.

Podívejme se, jak získat primitivní pythagorejské trojice, kde rozdíl mezi délkou přepony a odvěsny je 2. Položme ve větě 1  $n = 1$  a  $m$  ať je libovolné sudé přirozené číslo. Pak trojice  $(2m, m^2 - 1, m^2 + 1)$  je primitivní pythagorejská trojice, pro niž platí, že rozdíl mezi délkou přepony a jedné z odvěsen je 2.

Nyní se podíváme, co platí v případě, kdy je rozdíl mezi délkou přepony a odvěsny roven 3. Pak zobecníme tento výsledek na libovolné liché prvočíslo. Následně ukážeme, které liché hodnoty mohou být rozdílem délky přepony a odvěsny.

**Tvrzení 1.** *Neeexistuje primitivní pythagorejská trojice, pro kterou platí, že rozdíl délek přepony a jedné z odvěsen je roven třem.*

*Důkaz.* Nechť  $(a, b, c)$  je pythagorejská trojice, kde  $c = b + 3$ , pak

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= c^2 = (b + 3)^2 = b^2 + 6b + 9 \\ 6b &= a^2 - 9. \end{aligned}$$

Levá strana je dělitelná 6, proto je zřejmé, že  $a$  musí nutně být liché přirozené číslo větší než tři a zároveň násobkem 3. Pak je ale pravá strana dělitelná devíti, tudíž  $b$  musí být násobkem 3. Proto tato trojice není primitivní.  $\square$

**Věta 2.** *Neexistuje primitivní pythagorejská trojice, pro kterou by platilo, že rozdíl délek přepony a jedné z odvěsen je roven  $p$ , kde  $p$  je liché prvočíslo.*

*Důkaz.* Postupujeme podobně jako v důkazu tvrzení 1:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 = c^2 &= (b + p)^2 = b^2 + 2pb + p^2 \\ 2pb &= a^2 - p^2. \end{aligned}$$

Opět snadno nahlédneme, že  $a$  musí být liché přirozené číslo větší než  $p$  a musí být násobkem  $p$ , pak ale nutně i  $b$  je násobkem  $p$ . Proto tato trojice není primitivní.  $\square$

**Věta 3.** *Nechť  $d$  je liché přirozené číslo. Pak existuje primitivní pythagorejská trojice, kde rozdíl mezi délkou přepony a délkou jedné z odvěsen je  $d^2$ .*

*Důkaz.*

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 = c^2 &= (b + d^2)^2 = b^2 + 2bd^2 + d^4 \\ 2d^2b &= a^2 - d^4. \end{aligned}$$

Nutně  $a = ed$ , kde  $e$  je liché a nesoudělné s  $d$ , navíc  $e > d$ .

$$b = \frac{a^2 - d^4}{2d^2} = \frac{e^2d^2 - d^4}{2d^2} = \frac{e^2 - d^2}{2}.$$

Zbývá dokázat nesoudělnost  $a, b$ . Předpokládejme pro důkaz sporem, že  $a, b$  mají společného dělitele  $p > 1$ , kde  $p$  je prvočíslo. Protože  $p$  dělí  $a$ , musí dělit buď  $d$ , nebo  $e$ . Předpokládejme, že  $p$  dělí  $e$ . Jak snadno nahlédneme z rovnice

$$2b = e^2 - d^2,$$

$p$  musí nutně dělit i  $d^2$ , tudíž  $p$  dělí i  $d$ , jelikož dělí  $b$ . To je spor, protože  $e$  je nesoudělné s  $d$ .

Obdobně postupujeme v případě, kdy předpokládáme, že  $p$  dělí  $d$ . Proto jsou  $a, b$  nesoudělná, a tím pádem je tato pythagorejská trojice primitivní.  $\square$

**Úloha 1 pro čtenáře.** Pro jaká všechna přirozená čísla  $k$  může být rozdíl mezi délkou přepony a některé z odvěsen roven  $k$ ?

## Pythagorejské trojice a jejich dělitelnost třemi

Jak je známo, v každé pythagorejské trojici je alespoň jedno číslo dělitelné 3. My toto tvrzení dokážeme, viz tvrzení 2. Následně se budeme věnovat otázkám, co platí pro zbývající čísla a jaký je jejich zbytek po dělení třemi. Je možné, aby jedno číslo mělo zbytek jedna a druhé dva? Mohou mít obě čísla stejný zbytek po vydělení třemi? Při hledání odpovědí budeme vycházet ze známého způsobu generování pythagorejských trojic  $(2mn, m^2 - n^2, m^2 + n^2)$ , který jsme ukázali ve větě 1.

**Lemma 1.** *Nechť  $n$  je přirozené číslo, které není dělitelné třemi, pak  $n^2 \bmod 3 = 1$ .*

*Důkaz* Je ponechán čtenáři.

**Tvrzení 2.** *V každé pythagorejské trojici je alespoň jedno číslo dělitelné třemi. Navíc v každé primitivní pythagorejské trojici je právě jedna z délek odvěsen dělitelná třemi a délka přepony ani délka druhé z odvěsen není dělitelná třemi.*

*Důkaz.* Předpokládejme, že ani jedno z čísel  $a, b, c$  není dělitelné třemi. Pak podle lemmatu 1 je levá strana rovnosti  $a^2 + b^2 = c^2$  modulo 3 rovna 2, zatímco pravá strana je rovna 1, což je spor. Pokud uvažujeme primitivní pythagorejskou trojici a pokud by bylo pouze  $c$  dělitelné třemi, pak v levé straně rovnosti modulo 3 dostaneme 2 a pravá strana je zřejmě rovna nule, což nelze. Proto nutně musí být buď  $a$ , nebo  $b$  dělitelné 3. Tím je důkaz tvrzení hotový.  $\square$

**Tvrzení 3.** *Existuje nekonečně mnoho primitivních pythagorejských trojic  $(a, b, c)$  takových, že  $a \bmod 3 = 0$ ,  $b \bmod 3 = 1$  a  $c \bmod 3 = 2$ .*

*Důkaz.* Položme  $m = 3k + 2$ ,  $n = 3k + 1$ , kde  $k$  je celé nezáporné číslo, pak zřejmě  $m, n$  jsou nesoudělná a různé parity a navíc  $m$  je větší než  $n$ . Podle lemmatu 1 platí

$$m^2 - n^2 \bmod 3 = 0, \quad m^2 + n^2 \bmod 3 = 2.$$

Dokažme, že  $2mn \bmod 3 = 1$  a položme  $a = m^2 - n^2$ ,  $b = 2mn$  a  $c = m^2 + n^2$ . Tím bude náš důkaz hotov.

$$2mn = 2(3k + 2)(3k + 1) = 18k^2 + 18k + 4 = 3(6k^2 + 6k + 1) + 1,$$

tedy  $b$  má po vydělení třemi skutečně zbytek 1.  $\square$

Příklady: Podívejme se na několik trojic, které dostaneme z tvrzení 3.

$$a = (3k + 2)^2 - (3k + 1)^2 = 6k + 3$$

$$b = 2(3k + 2)(3k + 1)$$

$$c = (3k + 2)^2 + (3k + 1)^2$$

|         | $a$ | $b$ | $c$ |
|---------|-----|-----|-----|
| $k = 0$ | 3   | 4   | 5   |
| $k = 1$ | 9   | 40  | 41  |
| $k = 2$ | 15  | 112 | 113 |

**Tvrzení 4.** *Existuje nekonečně mnoho primitivních pythagorejských trojic  $(a, b, c)$  takových, že  $a \bmod 3 = 0$ ,  $b \bmod 3 = 2$  a  $c \bmod 3 = 1$ .*

*Důkaz.* Položme  $m = 3k + 3$ ,  $n = 3k - 2$  pro přirozené číslo  $k$ . Pak zřejmě platí, že  $a = 2mn = 6(k + 1)(3k - 2)$  je dělitelné 3,

$$b = m^2 - n^2 = 9k^2 + 18k + 9 - 9k^2 + 12k - 4 = 30k + 5 = 3(10k + 1) + 2,$$

tedy  $b \bmod 3 = 2$ ,

$$\begin{aligned} c &= m^2 + n^2 = 9k^2 + 18k + 9 + 9k^2 - 12k + 4 = 18k^2 + 6k + 13 = \\ &= 3(6k^2 + 2k + 4) + 1, \end{aligned}$$

proto  $c \bmod 3 = 1$ .

Zřejmě  $m$  a  $n$  jsou různé parity, jejich rozdíl je 5,  $m$  je vždy dělitelné 3 a  $n$  nikoliv. Ovšem  $m$  a  $n$  mohou být dělitelné 5, ale určitě existuje nekonečně mnoho  $k$  tak, že  $n$  a  $m$  jsou nesoudělná. Například stačí zvolit  $k = 5h$ , kde  $h$  je libovolné přirozené číslo.  $\square$

Příklady.

$$a = 6(k + 1)(3k - 2)$$

$$b = 3(10k + 1) + 2$$

$$c = 3(6k^2 + 2k + 4) + 1$$

|         | $a$ | $b$ | $c$ |
|---------|-----|-----|-----|
| $k = 1$ | 12  | 35  | 37  |
| $k = 2$ | 72  | 65  | 97  |
| $k = 3$ | 168 | 95  | 193 |

**Tvrzení 5.** *Existuje nekonečně mnoho primitivních pythagorejských trojic  $(a, b, c)$  takových, že  $a \bmod 3 = 0$ ,  $b \bmod 3 = c \bmod 3 = 1$ .*

*Důkaz.* Položme  $m = 3k + 1$  a  $n = 3k$ , kde  $k$  je přirozené, pak zřejmě  $m$ ,  $n$  mají různou paritu, jsou nesoudělná a  $m$  je větší než  $n$ . Definujme  $a = 2mn$ ,  $b = m^2 - n^2$  a  $c = m^2 + n^2$ . Pak podle lemmatu 1 je  $b \bmod 3 = c \bmod 3 = 1$  a zřejmě  $a \bmod 3 = 0$ .  $\square$

## MATEMATIKA

Příklady:

$$a = 2(3k + 1)3k$$

$$b = (3k + 1)^2 - 9k^2 = 6k + 1$$

$$c = (3k + 1)^2 + 9k^2$$

|         | $a$ | $b$ | $c$ |
|---------|-----|-----|-----|
| $k = 1$ | 24  | 7   | 25  |
| $k = 2$ | 84  | 13  | 85  |
| $k = 3$ | 180 | 19  | 181 |

**Tvrzení 6.** *Existuje nekonečně mnoho primitivních pythagorejských trojic  $(a, b, c)$  takových, že  $a \bmod 3 = 0$ ,  $b \bmod 3 = c \bmod 3 = 2$ .*

*Důkaz.* Položme  $m = 3k + 4$  a  $n = 3k + 1$ . Jistě jsou  $m, n$  nesoudělná. Zvolme  $a = m^2 - n^2$ ,  $b = 2nm$  a  $c = m^2 + n^2$ . Podle lemmatu 1 je  $a \bmod 3 = 0$ ,  $c \bmod 3 = 2$  a nakonec

$$2mn = 2(3k + 4)(3k + 1) = 2(9k^2 + 3k + 12k + 4) = 3(6k^2 + 10k + 2) + 2.$$

Tedy  $b \bmod 3 = 2$ , což jsme měli dokázat.  $\square$

Příklady:

$$a = (3k + 4)^2 - (3k + 1)^2 = 18k + 15$$

$$b = 2(3k + 4)(3k + 1)$$

$$c = (3k + 4)^2 + (3k + 1)^2 = 18k^2 + 30k + 17$$

|         | $a$ | $b$ | $c$ |
|---------|-----|-----|-----|
| $k = 0$ | 15  | 8   | 17  |
| $k = 1$ | 33  | 56  | 65  |
| $k = 2$ | 51  | 140 | 149 |

**Úloha 2 pro čtenáře.** Označme si  $A_{011}$  množinu všech primitivních pythagorejských trojic, kde  $a \bmod 3 = 0$ ,  $b \bmod 3 = 1$ ,  $c \bmod 3 = 1$ . Podobně si označme  $A_{012}$ ,  $A_{021}$ ,  $A_{022}$ . Dokázali jsme, že všechny tyto množiny jsou nekonečné. Snadno nahlédneme, že množinu všech primitivních pythagorejských trojic dostaneme jako sjednocení těchto množin. Tyto množiny jsou navíc zřejmě disjunktní. Pro zajímavost si čtenáři mohou zkusit vyšetřit, jak přesně množiny vypadají, když uvažujeme délku přepony maximálně  $N$ , tj.  $c \leq N$ , kde  $N$  je přirozené číslo, které si čtenář zvolí. Třeba se vám podaří vykukat i přesný popis takových množin.

## Dělitelnost čtyřmi

Nyní se velice krátce podíváme na případ dělitelnosti čtyřmi. Víme, že v každé pythagorejské trojici je alespoň jedno číslo dělitelné 4. Stejně jako v případě dělitelnosti třemi lze dokázat, že číslo dělitelné 4 v primitivním pythagorejském trojúhelníku je délka jedné z odvěsen, viz [2]. Uvedená tvrzení nebudeme dokazovat, uvedeme pouze návody. Formální důkazy přenecháme čtenářům, stejně jako zkoumání dělitelnosti dalšími čísly.

**Tvrzení 7.** *Existuje nekonečně mnoho primitivních pythagorejských trojic  $(a, b, c)$  takových, že  $a \bmod 4 = 0$ ,  $b \bmod 4 = c \bmod 4 = 1$ .*

*Návod.* Položme  $a = 2mn$ ,  $b = m^2 - n^2$  a  $c = m^2 + n^2$ . Zvolme  $m = p$ , kde  $p$  je liché prvočíslo a  $n = 2$ .

**Tvrzení 8.** *Existuje nekonečně mnoho primitivních pythagorejských trojic  $(a, b, c)$  takových, že  $a \bmod 4 = 0$ ,  $b \bmod 4 = 3$ ,  $c \bmod 4 = 1$ .*

*Návod.* Jako v předchozím případě stačí položit  $a = 2mn$ ,  $b = m^2 - n^2$ ,  $c = m^2 + n^2$  a poté zvolit  $n = 2k - 1$  a  $m = 2k$ , kde  $k$  je libovolné přirozené číslo.

## Závěr

V tomto článku jsme se seznámili s některými vlastnostmi primitivních pythagorejských trojic. Dozvěděli jsme se například, že rozdíl délek přepony a jedné z odvěsen nemůže být liché prvočíslo. Naopak pokud liché přirozené číslo  $k$  je druhá mocnina jiného přirozeného čísla, pak existuje primitivní pythagorejská trojice, kde rozdíl mezi délkou přepony a jedné z odvěsen je roven  $k$ . V další části jsme se věnovali studiu primitivních pythagorejských trojic z pohledu dělitelnosti třemi. Zjistili jsme například, že jedna z odvěsen má délku dělitelnou třemi a délky zbylé odvěsny a přepony mohou nabývat 1 i 2 jako zbytek po dělení třemi. Dále jsme zformulovali úlohy pro čtenáře a budeme rádi, když čtenáři vymyslí i další vlastní otázky a o svých zjištěních nám napíší.

## Literatura

- [1] Sierpiński, W.: *Pythagorean Triangles*. Dover Publications, Inc., Mineola, N.Y., 2003.
- [2] Sláma, M.: *Pythagorejské trojúhelníky*. Bakalářská práce, PedF UK, Praha, 2015. [https://dspace.cuni.cz/bitstream/handle/20.500.11956/72716/BPTX\\_2014\\_2\\_11410\\_0\\_320762\\_0\\_164175.pdf](https://dspace.cuni.cz/bitstream/handle/20.500.11956/72716/BPTX_2014_2_11410_0_320762_0_164175.pdf)

## Exotická posloupnost

Uvažujme následující netradičně definovanou posloupnost přirozených čísel  $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ . Její první člen je  $g_1 = 290$ . Abychom vyrobili následující člen, tak prvně přepíšeme naše číslo ve dvojkové soustavě následujícím způsobem:

$$g_1 = 290 = 2^8 + 2^5 + 2.$$

Kdykoli se ve dvojkovém zápisu některého exponentu objeví exponent větší než 2, i tento exponent nahradíme jeho dvojkovým zápisem. Pokračujeme, dokud nedostaneme výraz obsahující pouze číslice 1 a 2. Získáme tudíž následující výraz

$$g_1 = 290 = 2^{2^2+1} + 2^{2^2+1} + 2.$$

Nyní vezměme všechny výskyty čísla 2 v tomto zápisu, přepíšme je na 3 a od výsledku odečteme 1. Tím získáme druhý člen naší posloupnosti:

$$g_2 = 3^{3^3+1} + 3^{3^3+1} + 3 - 1 \doteq 4,43 \cdot 10^{38}.$$

Abychom získali  $g_3$ , vezmeme  $g_2$ , přepíšeme do trojkové soustavy, nahradíme všechny 3 za 4 a od výsledku odečteme 1.

$$\begin{aligned} g_2 &= 3^{81} + 3^{28} + 2 = 3^{3^3+1} + 3^{3^3+1} + 2, \\ g_3 &= 4^{4^{4+1}} + 4^{4^4+1} + 2 - 1 \doteq 3,23 \cdot 10^{616}. \end{aligned}$$

Další členy  $g_i$  generujeme analogicky. Vždy přepíšeme naše původní  $g_{i-1}$  v soustavě  $i$  (včetně všech exponentů a exponentů exponentů atd.) a následně všechny instance  $i$  nahradíme za  $i + 1$  a od tohoto výsledku odečteme 1.

Je patrné, že tato posloupnost nabývá hodně vysokých hodnot opravdu rychle. Ale jak je to s jejím limitním chováním? K jaké hodnotě se blíží, když  $n$  roste nade všechny meze? Je to nekonečno? A to je právě úkol pro čtenáře:

### Úloha

*Spočítejte limitu posloupnosti  $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ .*

Úloha z minulého čísla zněla:

*Jaký je součet všech prvočísel, která jsou menší než 1 000? Napovíme, že jich je 168 a že 25 z nich je menších než 100.*

- a) 14 865
- b) 54 382
- c) 76 127
- d) 81 994
- e) 126 668

*Řešení podle José Marciala Nájarese Romera* Při řešení budeme postupovat tak, že nejdříve určíme paritu součtu, poté využijeme znalost prvočísel menších než 30 a pak odhadneme zdola tento součet.

*Určení parity:* Prvočísla jsou lichá až na prvočíslu 2. Jelikož podle zadání víme, že máme celkem 168 prvočísel, z nichž pouze jedno je sudé, pak nutně jejich součet musí být liché číslo. (Sečteme 167 lichých prvočísel a přičteme prvočíslu 2, což je celkově liché číslo.) Tím vyloučíme z daných možností sudá čísla a zůstanou jako možné výsledky 14 865 a 76 127.

*Odhad součtu zdola:* Opět podle zadání víme, že  $168 - 25 = 143$  prvočísel v našem seznamu je větších než 100. Součet těchto 143 prvočísel je větší než  $143 \cdot 101 = 14\,443$ . Dále již ze základní školy známe prvočísla menší než 30, je jich deset: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 a jejich součet je 129. Nakonec využijeme, že  $25 - 10 = 15$  prvočísel je větších než 30 a menších než 100, proto jejich součet je větší než  $31 \cdot 15 = 465$ .

Nyní nejdříve sečteme prvočísla menší než 30, pak dolní odhad součtu prvočísel větších než 30 a menších než 100 a nakonec dolní odhad součtu prvočísel větších než 100 a menších než 1 000 a dostaneme:

| prvočísla                       | součet   |
|---------------------------------|----------|
| menší než 30                    | 129      |
| větší než 30 a menší než 100    | > 465    |
| větší než 100 a menší než 1 000 | > 14 443 |
| celkem                          | > 15 037 |

Což je více než možnost a) 14 865. Proto součet všech prvočísel menších než 1 000 je nutně 76 127.

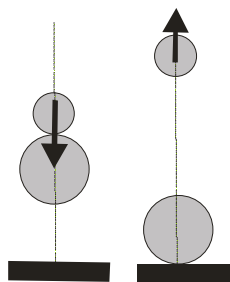
## Niekoľko námetov na spestrenie a spresnenie vyučovania fyziky

*Ivan Turek, Žilina, Slovensko*

Tým spestrením sú (a majú byť) najmä demonštrácie. Pretože umožňujú vidieť javy, ktorým je príslušná časť učebnej látky venovaná, takže prepájajú abstrakciu slovného popisu s realitou. A to, že ... *pôsobia na všetky zmysly* zdôrazňuje, že demonštrované súvislosti (zákony) nie sú vymyslené, že sú vlastnosťou reality, prírody.

Skutočnosť, že výsledok demonštrácie sa málokedy do všetkých detailov zhoduje s teoretickým popisom predvádzaného javu, priamo nabáda na hľadanie príčin nezhody, čo umožňuje vidieť, ako je priebeh predvádzaného javu ovplyvnený okolitým prostredím, takže núti vidieť javy vo vzájomnej súvislosti.

### Demonštrácie rázov



Nechajme padať dve lopty rôznych hmotností tesne za sebou tak, že tá „spodná“ je ťažšia. Po ich odraze môže tá ľahšia lopta vyletieť nad úroveň, z ktorej boli lopty spustené, a ťažšia lopta zostať nehybne na zemi.

Ak by to boli dokonale pružné lopty, tak vysvetlenie je jednoduché: Prvá lopta po odraze od zeme sa odrazí s rovnakou rýchlosťou, akú získala voľným pádom, a vzápätí sa zrazí s ľahšou loptou, ktorá sa pohybuje smerom dole rovnako veľkou rýchlosťou (lebo padali z rovnakej výšky). Vypočítať rýchlosti, ktoré tie lopty budú mať po zrážke, môžeme zo zákonov zachovania hybnosti a energie

$$m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = m_1 \cdot u_1 + m_2 \cdot u_2,$$

$$\frac{1}{2}m_1 \cdot v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 \cdot v_2^2 = \frac{1}{2}m_1 \cdot u_1^2 + \frac{1}{2}m_2 \cdot u_2^2,$$

kde rýchlosti pred zrážkou sú označené písmenami  $v$ , rýchlosti po zrážke písmenami  $u$ . Ako si tie lopty rozdelia celkovú hybnosť závisí od toho,

aké sú ich hmotnosti. To, že ťažšie teleso zmení svoju rýchlosť menej ako ľahšie teleso, asi netreba pripomínať. No a my sa zaujíname o to, pri akom pomere hmotností tých lôpt si energiu tej „sústavy dvoch lôpt“ odnesie ľahšia lopta (a energia ťažšej bude nulová). Číže, koľko krát musí byť tá väčšia lopta ťažšia, aby po zrážke bola jej rýchlosť rovná nule. Takže máme riešiť rovnice:

$$m_1 \cdot v_1 - m_2 \cdot v_2 = 0 + m_2 \cdot u_2,$$

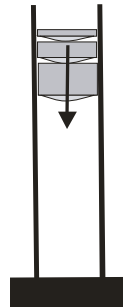
$$m_1 \cdot v_1^2 + m_2 \cdot v_2^2 = 0 + m_2 \cdot u_2^2,$$

v ktorých rýchlosť dohora považujeme za kladnú. Riešením tých rovníc dostaneme, že sa tak stane, keď  $m_1 = 3m_2$ . Vtedy je energia tých lôpt štyri krát väčšia ako energia tej ľahšej. Takže by tá ľahšia lopta mala vyletieť do štvornásobnej výšky. To sa však pri takom pokuse ťažko odmeria, pretože je ťažké spustiť lopty tak, aby sa ľahšia lopta odrazilo rovno dohora (aby zrážka bola „čelná“).

Preto sme urobili „zvislú rampu“, v ktorej sme spúšťali valcovité telieska opatrené gumovými „nárazníkmi“. Navyše nám tá rampa umožní spúšťať tri telieska (aký má byť pomer hmotnosti druhého a tretieho telieska, sa vypočíta podobne, ako sme uviedli vyššie, ale s tým rozdielom, že tretie teliesko sa zráža s druhým telieskom, ktorého rýchlosť je väčšia ako tretieho telieska.

*Avizované „spravenie“: Na prvý pohľad môžete byť porovnaním pokusu a výpočtu sklamaní – teliesko vyletí do menšej výšky, než akú sme vypočítali. Nebolo to chybou výpočtu, ani chybou zákona zachovania energie. Chybou bolo predpokladať, že sa zachová súčet kinetickej a potenciálnej energie ( $\frac{1}{2}mv^2 + mgh$ ). Pretože časť tejto mechanickej energie sa pri deformácii tých „pružných nárazníkov“ (a možno aj trením v rampe a odporom vzduchu) zmení na teplo. (Napriek tomu to tretie teliesko vyletí až po strop i pri „rampe“ dlhej iba pol metra.)*

To, že sme „pružnosť“ tých teliesok „zvalili“ na tie nárazníky a ich hmotnosť sme pripísali samotným telieskam, pomáha predstaviť si, ako tie rázy fungujú: V priebehu dopadu prvého telieska to teliesko stláča jeho „nárazník“ akousi silou. Ale zároveň (zákon akcie a reakcie) nárazník pôsobí rovnakou silou na to teliesko a tým ho spomaľuje. V okamihu keď teliesko zastalo, je nárazník najviac stlačený a na teliesko pôsobí najväčšou silou, urýchľuje ho do opačného smeru (zákon sily) a takže



tomu teliesku „odovzdá“ energiu, ktorá sa „použila“ na stlačenie nárazníka. Rovnako sa odohráva odovzdávanie hybnosti (a energie) premenou kinetickej energie na deformačnú energiu medzi ostatnými telieskami.

Tie premeny kinetickej a deformačnej („potenciálnej“) energie sú mechanizmom aj pri zrážkach teliesok „bez nárazníkov“. Pretože všetky pevné látky sú pružné, takže sa v nich deje to, čo sme popísali pomocou pružných nárazníkov.<sup>1)</sup>

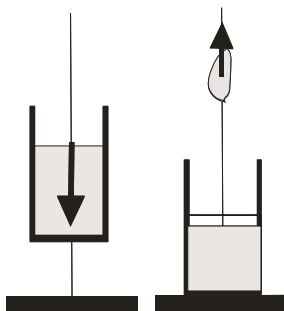
Ešte je vhodné upozorniť, že v tých rovniciach nevystupuje čas. To môže budiť dojem, že ten „odraz“ sa deje okamžite. Nie je to tak – stlačanie nárazníkov preda sa nejakú chvíľu trvá. Čas v tých rovniciach nevystupuje preto, lebo sme sa „matematiky“ opýtali na *výsledok* zrážok (aká bude rýchlosť *po* zrážke) a nie na *proces* zrážky.

Podobné odovzdávanie hybnosti medzi časťami prostredia sa odohráva i v kvapalinách. Ilustruje to demonštrácia dopadu nádoby s kvapalinou. Ak nádoba dopadne s dostatočnou rýchlosťou, tak časť tej kvapaliny sa „oddeliť“ a vyletí z nádoby.

Ale ako tá kvapalina „vie“, kde sa má rozdeliť? Samozrejme nevie, to určujú zákony zachovania hybnosti a energie a tlaková vlna, ktorá sa vyvolá zastavením kvapaliny pri dne nádoby. Po dopade nádoby tlak v tej vlne narastá, podobne ako narastá rýchlosť teliesok po dopade na dno rampy. A v mieste, v ktorom je rozdiel tlakov pripadajúci na vzdialenosť molekúl väčší, ako sú príťažlivé sily medzi molekulami (kapilárne sily), tam sa tá kvapalina rozdelí. Takže rázy nám čosi môžu povedať i o kvapalinách. A nie len o kvapalinách.<sup>2)</sup>

Na výpočet toho, aká bude tá tlaková vlna, už treba vedieť vyššiu matematiku, než akú sme použili pri tých loptách. A aj tak sa tá kvapalina rozdelí presne tam, kde to „matematika vypočíta“. Ako keby tá kvapalina (príroda) „rešpektovala“ matematiku. Ale je to naopak – matematika rešpektuje prírodu!

Matematika a fyzika sú vedy „odpozorované“ od prírody. Na fyzike to priamo vidieť. Napríklad: Galileo Galilei odpozoroval, že telesá padajú



<sup>1)</sup> Domnievame sa, že takýto „urozprávaný výklad“ je dôležitý. Pretože fyzika nie je (len) o rovniciach. Fyzika je hlavne o procesoch, o dejoch.

<sup>2)</sup> Tu nám „rázy“ povedali, že Pascalov zákon (že prírastok tlaku v kvapaline spôsobený vonkajšou silou je všade rovnaký) v obecnosti neplatí. Platí iba v „ustátenom stave“ (keď sa nemenia vzájomné vzdialenosti elementov kvapaliny).

s konštantným zrýchlením, ktoré je vyvolané silou, ktorou na tie telesá pôsobí zemská príťažlivosť. A potom Izák Newton prišiel na to, že to, čo Galileo odpozoroval, to je zvláštny prípad obecnějšího tvrdenia – že každé zrýchlenie je vyvolané silou, ktorá na teleso pôsobí.

A tak to je so všetkými fyzikálnymi zákonmi. A to, že tie odpozorované pravidlá (zákony) sa dajú vyjadriť matematikou, to je vlastnosť prírody. A základy tej matematiky (logika) sa do „myslenia“ zabudovali vtedy, keď sa v ľuďoch vytváralo myslenie. Pretože sa vytváralo pod vplyvom toho, aký je svet. I keď si niektorí ľudia myslia, že matematika je „vymyslená veda“.

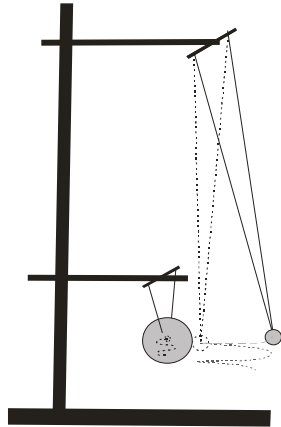
### *Demonštrácia rázu 2 gúľ rôznych hmotností na „V“ závesoch*

„V“ závesy sú tu použité preto, aby sa tie gule pohybovali v jednej rovine. Tie závesy urobme tak, aby dĺžka závesu ťažšej gule bola štvrtina dĺžky závesu ľahšej. Pri takých dĺžkach je doba kyvu ťažšej gule polovica doby kyvu ľahšej. A zavesíme ich tak, aby sa v kľude práve dotýkali.

Keď ľahšiu guľku vychýlime a necháme ju dopadnúť na ťažšiu, tak sa od nej odrazí a vráti sa do takmer takej výchylky, z akej sme ju spustili. Iba „skoro“ do tej výchylky preto, lebo pri odraze od ťažkej malú časť svojej energie odovzdá ťažšej. Do svojej maximálnej výchylky sa vráti za polovicu periódy jej kyvadlového pohybu. Za ten čas ťažšia guľka vykoná pohyb zodpovedajúci celej perióde – lebo jej perióda je polovica periódy ľahkej guľky. (Na obrázku sú tie pohyby od okamihu zrážky schematicky zakreslené).

Pri ďalšom pohybe tých guľiek sa takéto zrážky opakujú, až kým ľahšia guľka neodovzdá celú jej energiu ťažšej. A potom sa odovzdávanie energie opakuje opačným smerom, od ťažšej k ľahšej.

Všimnite si, že pri takých zrážkach veľká guľka nikdy nenadobudne takú rýchlosť, akú nadobúda ľahšia. A čím je rozdiel hmotností tých gúľ väčší, tým je väčší i rozdiel ich (priemerných) rýchlostí.<sup>3)</sup>

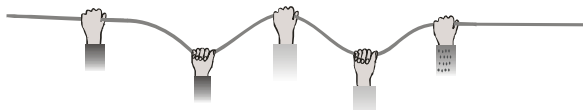


<sup>3)</sup> Platí to nie len pre takto zavesené gule. Aj pre molekuly plynu. V plynoch sa molekuly navzájom zrážajú a pri tých zrážkach sa ovplyvňujú ich rýchlosti. Keď sa jedná o zmes plynov s rôzne ťažkými molekulami (napríklad vo vzduchu) je stredná rýchlosť ľahkých molekúl väčšia ako molekúl ťažších. Tak ako pri zrážkach gúľ s rôznymi hmotnosťami.

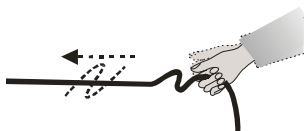
## Demonštrácie vln

### Vlny v jednorozmernom prostredí

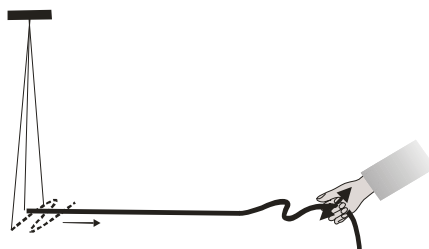
Pomerne často sa pri výklade vln demonštruje vlna na pružnom lane (alebo gumenej hadici) tak, že sa jedným koncom lana „zakmitá“. Je to názorná demonštrácia, ku ktorej by som odporučil pridať „spravenie“ tým, že sa ukáže „vznik“ vlny vytvorením deformácie časti prostredia bez udelenie rýchlosti. Napríklad tak, že niekoľko študentov pridrží lano v rôznych polohách a naraz, na povel „tri, dva, jeden, *teraz*“ otvoria dlane bez toho, aby udelili lanu nejakú rýchlosť. Ak to lano uvoľnia vo všetkých miestach naraz, tak sa prostredím bude na obe strany od oblasti, v ktorej bolo lano deformované, šíriť vlna, ktorej tvar odpovedá tvaru vyvolanej deformácie.



Takáto demonštrácia by mohla byť doplnená i generáciou vlny udeľením rýchlostí elementom prostredia s nulovou výchylkou, napríklad súčasnými údermi lana na miestach odpovedajúcich tvaru predchádzajúcej demonštrácie. Demonštrácia by tak zodpovedala plnému zneniu vety o počiatočných podmienkach.



Zaujímavou je i demonštrácia odrazu vln na „pevnom“ konci pružného lana, ktoré niekto „pevne“ drží v ruke. Keď vlna dôjde na koniec lana, tou rukou trochu pohne. Znamená to, že lano pôsobilo na ruku silou a teda i tá ruka pôsobila na lano silou. A táto sila v lane vyvolá vlnu – „odrazenú vlnu“. (Na obrázku je nakreslená bodkovane.)



Ešte pôsobivejšia (a „nepochopiteľnejšia“) je demonštrácia odrazu vln na voľnom konci. Dá sa realizovať na lane, ktorého jeden koniec je zavesený na tenkej (ľahkej) nitke a lano je vodorovne. Pri takom upevnení je koniec lana (pre vlnu s výchylkou kolmo na lano vo vodorovnom smere) „voľným koncom“, pretože ten záves dovoľuje pohyb vo vodorovnej rovine.

Pre vysvetlenie vzniku takto odrazenej vlny si najprv všimnime pohyb elementu prostredia mimo konca lana. Na taký element prostredia pôsobia sily z oboch strán. Sila zo strany, z ktorej vlna prichádza, *vyvoláva* pohyb toho elementu a sila z druhej strany ten pohyb *brzdí*. Na voľnom konci prostredia táto brzdiaca sila chýba. To, že nejaká sila chýba, má rovnaký účinok, ako keby tam bola „zvonku pridaná“ rovnako veľká sila opačného smeru. Tá „pridaná“ sila by vytvorila vlnu „odrazenú“ na voľnom konci. Lebo „chýbajúca sila“ je rovnocenná tej „zvonku pridanej“ sile.

### ***Vlny vo viacrozmernom prostredí***

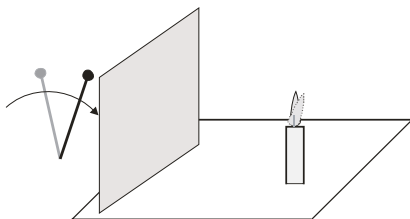
V skutočnosti každé prostredie je trojrozmerné. Ale je vo zvyku hovoriť o jednorozmernom prostredí vtedy, keď sa jedná o prostredie, ktorého hrúbka a šírka je menšia ako vlnová dĺžka vlny, ktorá sa tým prostredím šíri. A rovnako to je s „dvojrzmerným prostredím“. Je ním napríklad tenká pružná blana (bubon), alebo „povrch kvapaliny“. Dôležité je, že podstata vln v dvoj a troj rozmerných prostrediach je rovnaká ako vln jednorozmerných: „odovzdávanie“ energie susedným elementom prostredia. Rozdiel je v tom, že to odovzdávanie sa nemusí diať iba v jednom smere. A nemusí to byť vzájomná premena deformačnej a kinetickej energie. Môže to byť napríklad vzájomná premena energie elektrického poľa na energiu magnetického poľa (rádiové vlny, svetlo, röntgenové vlny, ...). Vo vlnách v plynch (akustické vlny) sa navzájom mení energia stlačeneho plynu a jeho kinetická energia.

Vo vlnách na hladine kvapalín to je najzložitejšie. Tam prichádzajú do úvahy vzájomné premeny kinetickej, polohovej (potenciálnej) a povrchovej (kapilárnej) energie. Tá zložitosť sa mimo iné prejavuje tým, že rýchlosť vln na povrchu kvapalín závisia od ich vlnovej dĺžky a od ich amplitúdy. U vln s veľkou vlnovou dĺžkou a veľkou amplitúdou (vlny na mori) sú kapilárne sily zanedbateľné voči silám gravitačným (voči váhe objemu vody, ktorá sa hýbe), zatiaľ čo u vlniek v akváriu sú kapilárne sily (povrchové napätie) rozhodujúce.

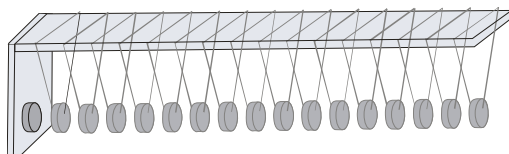
Ako to je v pevných látkach sme popísali pri popise vln v jednorozmernom prostredí (keď sme popisovali vlnu v pružnom (gumenom) lane).

Vlnenie prostredia znamená, že sa v prostredí niečo mení. U mechanických vln, že sa to prostredie (tam kde je tá vlna) pohybuje. Nasledujúca demonštrácia ukazuje, že i vo vlne, ktorá sa šíri vzduchom, sa ten vzduch pohybuje: stačí pred zapálenou sviečkou vyvolať dostatočne

silnú akustickú vlnu (napríklad basovým reproduktorom alebo úderom na plechovú dosku) a o pohybe vzduchu nás presvedčí pohyb plamienka sviečky.



Šírenie sa vln nie je obmedzené iba na pružné prostredia, vodu, alebo vzduch. Môžeme „vymýšľať“ i exotické „prostredia“, v ktorých sa vlny môžu šíriť. Napríklad „prostredie“, ktoré je tvorené radom rovnakých „spriahnutých kyvadiel“, ktoré sa navzájom ovplyvňujú.



Že aj v takom „prostredí“ sa môže šíriť vlna, dokazuje ďalšia demonštrácia: vlna v rade menších feritiek na V-závesoch, rozmiestnených v rovnakých vzdialenostiach a orientovaných tak, že susedné feritky sú opačne polarizované. Ak feritku na začiatku toho radu vychýlime smerom k jej susedke, zväčší sa sila, ktorou sa odpudzujú, a to spôsobí, že prvá sa zastaví a druhá preberie jej kinetickú energiu. Odovzdávanie výchylky bude pokračovať až k poslednej zavesenej feritke – tým radom feritiek prejde „vlna“. Ten rad môže byť zakončený upevnenou feritkou, od ktorej sa vlna odrazí a prejde na začiatok radu. Tam bude síce o niečo slabšia, ale ak počiatočná výchylka bola dosť veľká uvidíme, že sa vlna od voľného konca odrazí a znovu bude tým „prostredím“ postupovať. Ale v každom prípade vlna po viacnásobnom prechode zanikne.

Avšak po zániku vlny (po zániku usporiadaného pohybu feritiek) si môžeme všimnúť, že feritky sa neprestali pohybovať. Pohybujú sa drobným „neusporiadaným“ pohybom, ktorý je akýmsi „zvyškom“ energie, ktorú sme sústave dodali rozkmitaním prvej feritky.

Hovoríme o tom preto, že presne to, čo sa dá vidieť na tom rade feritiek, sa odohráva pri šírení sa mechanickej vlny v každom materiáli.

Lebo každý materiál pozostáva z prvkov (z atómov), ktoré sa navzájom nedotýkajú rovnako ako tie feritky.

A podoba medzi „vlnou“ v rade feritiek a v rade atómov je i v tom, že na pokles amplitúdy vln v oboch prípadoch má vplyv porušenie periodicity usporiadania prvkov prostredia (atómov), a i v tom, že feritky aj atómy „zánikom vlny“ energiu vlny „odovzdajú“ tomu neusporiadanému pohybu.

Tento pohyb po zániku vlny vo „feritkovom prostredí“ vidíme – v skutočnom telese ho po zániku (absorpcii) vlny môžeme cítiť ako teplo. Samozrejme vlastnými zmyslami by sme to cítili iba vtedy, keby sa absorbovala veľmi silná mechanická vlna. Ale odmerať to môžeme.

### ***Demonštrácia interferencie vln***

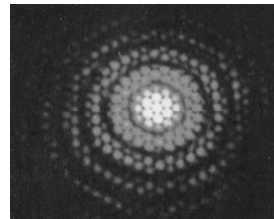
Interferencia („sčítovanie“) vln vo vzduchu (akustických vln) sa dá jednoducho urobiť dvomi reproduktormi napojenými na jeden generátor harmonického priebehu napätia. Napríklad keď pripojenie jedného z tých reproduktorov na zdroj je prepólované. (Vhodná frekvencia je niekoľko málo kHz.) Ak je vzdialenosť tých reproduktorov značne menšia, ako je vlnová dĺžka generovaného zvuku, tak zakrytím jedného reproduktora generovaný zvuk nezoslabne, ale sa zosilní.

Zväčšením vzdialenosti tých reproduktorov na päť až desať násobok vlnovej dĺžky (vhodná vzdialenosť závisí od veľkosti miestnosti) sa vytvorí interferenčné pole, ktorého maximá a minimá zúčastnení môžu malým pohybom hlavy nájsť (pri tom je výhodné mať jedno ucho zakryté).

Pri nižších frekvenciách a dostatočnom počte poslucháčov je možné „efektne zobraziť interferenčné pole“ tým, že účastníkov požiadame premiestniť sa do miest, v ktorých je maximum interferencie.

### ***Demonštrácia difrakcie vln***

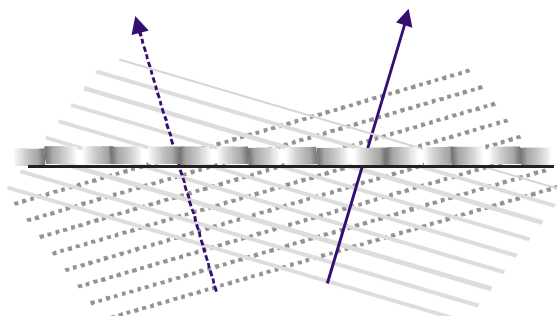
Difrakciou vln rozumieme fakt, že „stranové obmedzenie“ vln (napríklad pri prechode vlny nejakým otvorom) vyvolá to, že časť tej vlny sa odkloní od pôvodného smeru. A nemusí to byť iba malá časť vlny. Pri prechode komplikovanejšími otvormi môže dôjsť k celkom zaujímavým zmenám. Napríklad keď rovinná vlna „prejde“ cez tri malé kruhové otvory blízko seba, rozdelí sa do smerov, ktoré vytvoria rozloženie svetla uvedené na priloženom obrázku.<sup>4)</sup>



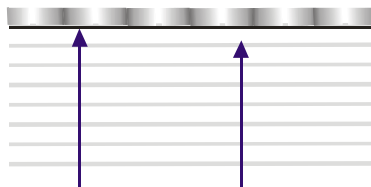
<sup>4)</sup>Tie otvory boli vytvorené tenkou ihlou v alobale. Doporučujeme ihlu pri tom medzi prstami otáčať a „vŕtať“ striedavo z oboch strán.

Ďalším príkladom difrakcie je prechod vlny (optickou) mriežkou, čiže radom medzier medzi nepriehľadnými (alebo čiastočne nepriehľadnými) prekážkami uloženými v jednej rovine. Prečo sa vlna prechodom cez mriežku „rozloží“ do rôznych smerov, je spôsobené tým, že tá prekážka zmení rozloženie výchylky prostredia (alebo rozloženie intenzity elektrického poľa, ak sa jedná o elektromagnetické vlny). A to zmenené rozloženie určuje ďalší priebeh vlnenia.

Najnázornejšie to je vidieť na prechode vlny „mriežkou“. Myslíme si preto, že jednou rovinou (rovinou budúcej mriežky) prechádzajú dve rovinné vlny, ktoré sa šíria rôznymi smermi. A v tejto rovine urobme „filter“, ktorého priepustnosť je maximálna (úplná) v miestach, v ktorých tie rovinné vlny majú rovnakú fázu (ich výchylky sa sčítujú), a v miestach, kde majú opačné, je jeho priepustnosť minimálna (nulová). Tak ako je nakreslené na priloženom obrázku.

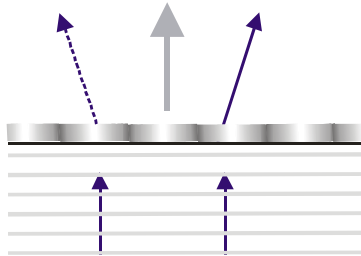


Potom, keď necháme cez takýto „filter“ prejsť rovinnú vlnu, ktorá prichádza kolmo na ten filter (na tú mriežku), tak na druhej strane mriežky bude taký vlnový stav, aký tam bol pri interferencii tých dvoch šikmých rovinných vln. A to určuje, že prechodom kolmej vlny cez mriežku, sa musia vytvoriť také vlny, ako boli tie dve vlny, podľa ktorých sme tú mriežku vytvorili.



Keby modulácia priepustnosti tej mriežky nebola stopercentná (keby časť vlny prešla aj najčernejšími miestami, alebo sa pohlcovala i v ma-

ximálnej priepustnosti), tak mimo tých šikmých („difragovaných“) vln mriežkou prejde aj časť primárneho lúča.



Takýmto „vytvorením nových okrajových podmienok“ sa difrakcia realizuje vždy. Aj pri prechode cez jednotlivé „diery“ v tienitku. Len nie vždy sa to dá tak jednoducho nakresliť a vysvetliť. Ale podstata je tá istá.

Ešte dve pripomienky: Uhol odklonu difragovaných lúčov závisí od pomeru vlnovej dĺžky tých vln a vzdialenosti tých „prekážok“ (od mriežkovej konštanty) či veľkosti otvorov, ktorými vlna prechádza. Čím je vlnová dĺžka väčšia a otvory menšie, tým viac sa tie lúče odklonia od pôvodného smeru. Vďaka tomu sa optické mriežky používajú na analýzu „farebného“ zloženia svetelných lúčov. A druhá pripomienka, že k ohybu (difrakcii) dochádza pri všetkých vlnách, nie len u optických vln.

### ***Demonštrácie rekonštrukcie vln***

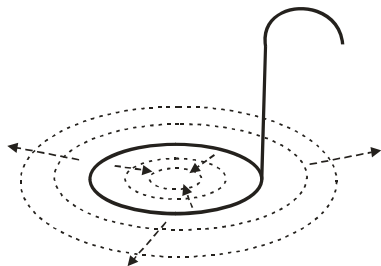
Všetky vlny sa dajú vytvoriť zadaním počiatočných podmienok. U mechanických vln zadaním výchylky (deformácie) a rýchlostí všetkých elementov prostredia v jednom čase. U elektromagnetických vln zadaním rozloženia intenzity elektrického a magnetického poľa. Samozrejme stačí udať hodnoty v miestach, kde sú odlišné od nuly – ale treba povedať i to, že v ostatných miestach sú tie hodnoty nulové.

Napríklad: pridaním kvapky na kľudnú hladinu kvapaliny by sme „deformovali“ hladinu a tým by sme vytvorili vlnu. Pretože povrch kvapaliny by nezostal zakrivený, vyrovnával by sa a tým by vyvolával pohyb susedných miest prostredia. Keď je tá vlna vytvorená v jednom mieste, tak to bude kruhová vlna, pretože rýchlosť šírenia sa vlny je vo všetkých smeroch rovnaká. Pri tom amplitúda vytvorenej vlny sa bude so vzdialenosťou od miesta vzniku znižovať, pretože energia sa musí rozdeliť na postupne sa zväčšujúci obvod toho kruhu.<sup>5)</sup>

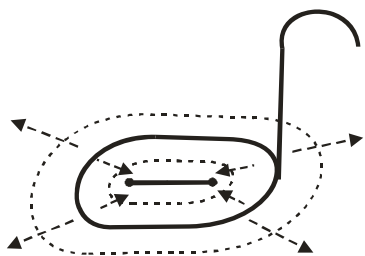
<sup>5)</sup> Pozor! V niektorých materiáloch, napríklad u krištáľoch, rýchlosť šírenia sa mechanických vln závisí od smeru, v ktorom sa vlny šíria.

### Rekonštrukcia vln zadaním počiatocných podmienok

Keby sme chceli „rekonštruovať“ napríklad vlnu vyvolanú dopadom kvapky, ale videli by sme iba kruhové vlny neskôr, ako kvapka dopadla, mohli by sme podľa tvaru vlnoplochy v jednom okamžiku zistiť, kedy a kde bola tá vlna vytvorená. Stačí na to z primerane hrubého drôtu vymodelovať teliesko, ktorého tvar je tvarom a veľkosťou zhodný (alebo aspoň blízky) tej vlnoplochy, ktorú sme videli (a zaznamenali jej tvar a veľkosť). Keď sa tým telieskom dotkneme kludnej hladiny, vytvorí sa vlna, ktorá je opakovaním pôvodnej vlny od okamžiku záznamu. A zároveň sa vytvorí vlna, ktorá sa šíri smerom „späť“, ktorá je opakovaním pôvodnej vlny pred okamžikom, v ktorom bol „záznam“ vytvorený. (Akoby čas plynul opačným smerom.) Tá spätná vlna v jednom okamžiku „zobrazí“ pôvodnú vlnu v okamžiku jej vzniku.<sup>6)</sup>



Takto môžeme vytvárať rekonštrukciu nie len kruhových vln. Ak na hladinu necháme dopadnúť napríklad zápalku, vytvorí sa vlna s tvarom oválu. Takže pre rekonštrukciu takej vlny treba použiť teliesko s tvarom oválu. I v tomto prípade sa vytvorí rekonštrukcia pôvodnej vlny „po okamžiku“ vytvorenia zoznamu a „spätná vlna“, ktorá je opakovaním pôvodnej vlny pred vytvorením záznamu. Tá spätná vlna v jednom okamžiku vytvorí „vlnový obraz zápalky“ (vytvorí stav blízky stavu v okamžiku vzniku pôvodnej vlny).



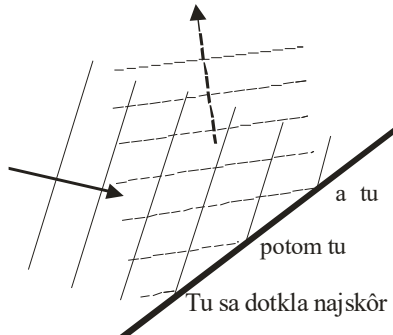
Ale „obraz“ vytvorený takýmto rekonštrukčným telieskom nebude celkom verný. Je to spôsobené tým, že „rekonštrukčné teliesko“ sme neurobili dobre: v kruhovej časti to teliesko malo byť tenšie ako v rovinnej časti, pretože v kruhovej časti sa zápalkou vytvorená vlna „rozbieha“ a jej amplitúda so vzdialenosťou klesá, zatiaľ čo v rovinnej časti nie. Preto je amplitúda „vlnového obrazu zápalky“ na okrajoch väčšia (ako by zápalka mala dve hlavičky).

<sup>6)</sup> Pri demonštrovaní pre väčší počet ľudí je vhodné použiť akvárium so skleneným dnom a spodné osvetlenie. Osvedčili sa „spätné projektory“.

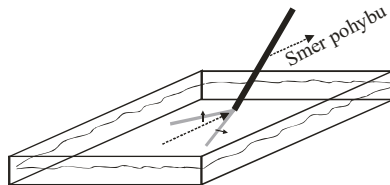
Pozorované rozdiely a ich vysvetlenie dokumentuje, že uvedený popis rekonštrukcie vln je v zhode s procesmi, ktoré sa v tom prostredí odohrávajú.

### **Rekonštrukcia vln odrazom vln**

Odraz vln na okraji prostredia sa uskutočňuje tak isto ako odraz na konci jednorozmerného prostredia: výchylka odrazenej vlny je v každom čase a v každom mieste taká istá ako vlny dopadajúcej. Rozdiel je v tom, že vo viac rozmernom prostredí sa odrazy v rôznych miestach nemusia konať súčasne a výchylka a fáza vlny v rôznych miestach odrazovej plochy je odlišná. Preto sa odrazená vlna šíri (spravidla) iným smerom ako vlna dopadajúca a tvar vlnoplôch nie je jednoznačne určený tvarom vlnoplôch dopadajúcej vlny – závisí i od tvaru odrazovej plochy. Ale vždy platí, že fáza odrazenej vlny je v každom mieste odrazu zhodná s fázou dopadajúcej vlny. Jednoduchý príklad odrazu rovinnej vlny na rovinnom okraji prostredia (alebo rovinné prekážke) je na priloženom obrázku.



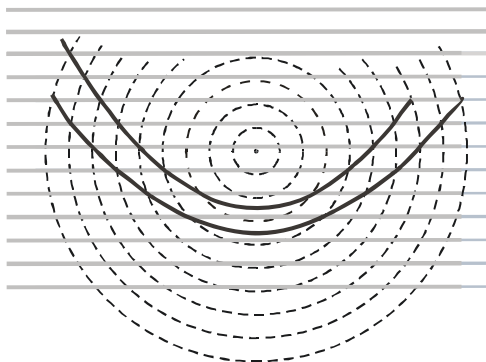
K pochopeniu súvislosti meniacej sa fázy na odrazovej ploche a smeru šírenia sa odrazenej vlny môže pomôcť demonštrácia generácie vlny vytvorenej pohybujúcim sa predmetom na povrchu kvapaliny.



Tá analógia spočíva v tom, že miesto, do ktorého vlna príde na odrazovú plochu, sa posúva rovnako ako tyčka, ktorá vyvoláva vlnu na ob-

rázku. A zároveň to demonštruje, že uhol dopadu sa rovná uhlu odrazu: tie šikmé vlny vytvorené pohybom tyčky sú na obe strany odklonené rovnako.

Trochu zložitejší (ale zaujímavejší) je odraz na krivej prekážke. Zaujímavejší je tým, že odrazená vlna nemusí mať taký istý tvar ako vlna dopadajúca. Ten fakt umožňuje napríklad pýtať sa, či existuje taký tvar odrazovej plochy, na ktorej by sa (napríklad) rovinná vlna zmenila na kruhovú. Pri hľadaní toho tvaru, môže využiť to, čo sme videli pri odraze rovinatej vlny na rovinnom rozhraní – že fáza dopadajúcej a odrazenej vlny je v každom mieste odrazovej plochy rovnaká. Že taká plocha, na ktorej fáza rovinatej a kruhovej vlny existuje, je vidieť z priloženého obrázku. Prerušovanými čiarami (kružnicami) sú na tom obrázku zakreslené miesta, v ktorých kruhová vlna (v istom čase) nadobúda maximálnu hodnotu. A plnými sivými čiarami sú zakreslené miesta, v ktorých (v tom istom čase) tá rovinná vlna nadobúda maximálnu hodnotu.

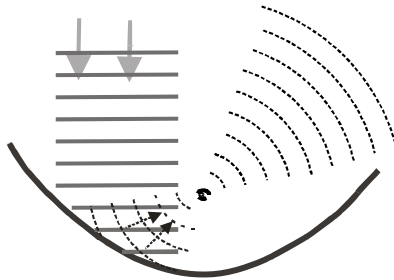


Takže tam, kde sa tie čiary (tie vlnoplochy kruhovej a rovinatej vlny) pretínajú, tam tie vlny majú rovnakú fázu (kmitajú naraz). Že taká plocha, na ktorej fáza rovinatej a kruhovej vlny existuje, je vidieť z priloženého obrázku. Prerušovanými čiarami (kružnicami) sú na tom obrázku zakreslené miesta, v ktorých kruhová vlna (v istom čase) nadobúda maximálnu hodnotu. A plnými sivými čiarami sú zakreslené miesta, v ktorých (v tom istom čase) tá rovinná vlna nadobúda maximálnu hodnotu. Takže tam, kde sa tie čiary (tie vlnoplochy kruhovej a rovinatej vlny) pretínajú, tam tie vlny majú rovnakú fázu (kmitajú naraz) a tými miestami prechádzajú tie plné čierne čiary, ktoré určujú, aký tvar má mať plocha, na ktorej sa bude rovinná vlna odrážať tak, že z nej bude vlna kruhová

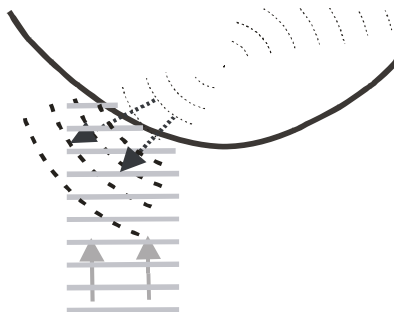
(v 3D guľová). V tomto prípade (vlny v 2D) tým tvarom je parabola. (Vyplýva to z definície paraboly a definície kružnice). V trojrozmernom prostredí by to bol paraboloid. Z uvedeného obrázku je vidieť aj to, že takých plôch je veľa.

A teraz nechajme na teleso, ktorého povrch má tvar paraboly, dopadať rovinnú vlnu, ktorá sa šíri v smere osi tej paraboly. V takom prípade sa odrazom tej rovinnéj vlny vytvorí kruhová zbiehajúca vlna, ktorej stred je v ohnisku tej paraboly.

Tá odrazená vlna bude kruhovou vlnou, pretože tá rovinná vlna tam v každom mieste vytvorila rozloženie výchylky, aké prislúcha tej kruhovej vlne (mali tam rovnakú fázu) a sa šíri sa na opačnú stranu (tak isto ako vlna odrazená od rovinného rozhrania.)



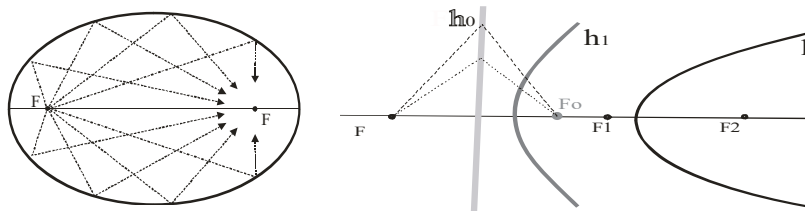
Keby sme na tú parabolu nechali dopadať kruhovou vlnu so stredom v ohnisku paraboly, tak by sa vytvorila rovinná vlna, ktorá sa šíri v smere osi tej paraboly.



A keby sme tú rovinnú vlnu nechali na parabolu dopadať z jej opačnej strany, tak odrazená vlna bude opäť kruhová vlna, ale bude to rozbiehavá kruhová vlna.

O tom, že rovinná vlna sa na parabolickom zrkadle odráža do ohniska paraboly, je známe už viac ako tisícročie (Archimedove štíty, astronómické zrkadlá). Ale taká premena tvaru vlny odrazom na plochách, na ktorých majú dve vlny rovnakú fázu, môže byť zaujímavá, pretože taká transformácia vln odrazom sa nedeje iba na parabolách a umožňuje to „vysvetliť“ podstatu funkcie rôznych vlnových procesov. A nie len mechanických vln. Dokonca i podstatu holografie.

Takéto obrázky ilustrujúce odraz vln na kužeľosečkách môžu ilustrovať (pre niekoho prekvapivý) súvis matematiky a fyziky: Tak, ako sme videli, že na paraboloidoch sa rovinná vlna transformuje na guľovú (a naopak guľová na rovinnú), tak na elipsoide sa guľová vlna vychádzajúca z jedného ohniska transformuje na zbiehavú guľovú vlnu so stredom v druhom ohnisku elipsy a na hyperbole sa guľová vlna vychádzajúca z jedného ohniska hyperboly transformuje na rozbiehavú vlnu so stredom v druhom ohnisku hyperboly.

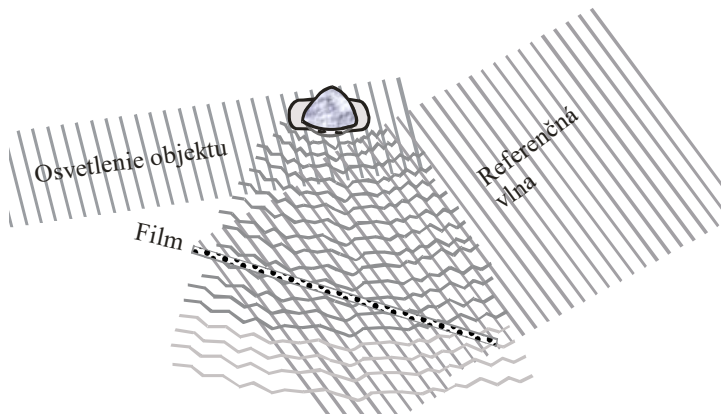


Z faktu že hyperboly sú tým menej zakrivené čím je menší rozdiel ich vzdialeností od ohnísk vyplýva prekvapivý dôsledok: keď je ten rozdiel nulový hyperbola je úplne rovná – je „degenerovaná“ – stane sa priamkou kolmou k ose hyperboly ktorá je rovnako vzdialená od jej ohnísk. A takáto „hyperbola“ je identická s obvyčajným rovinným zrkadlom. Rozbiehavú kruhovú (v 3D guľovú) vlnu transformuje na rozbiehavú kruhovú vlnu so stredom rovnako vzdialeným od zrkadla ale na druhej strane zrkadla. Je to pekne. Však?

Keď v popise transformácie rovinné vlny na kruhovú (ktorý sme uviedli v predchádzajúcich odstavcoch) označíme tú kruhovú vlnu ako „objektovú vlnu“ a rovinnú vlnu by sme označili ako „referenčnú vlnu“, tak popis toho ako sa tie vlny premenili je v zhode s definíciou holografie: Hologram je záznam interferenčného poľa objektivej vlny a referenčnej vlny ktorá je koherentná s objektovou vlnou. Pri odraze alebo prechode rekonštrukčnej vlny (ktorá musí byť zhodná s použitou referenčnou vlnou) cez hologram sa vytvorí rekonštrukcia objektivej vlny.

### Holografická rekonštrukcia

Optický hologram sa samozrejme nevytvára z drôťikov alebo parabol pretože vlnové dĺžky svetla nie sú centimetre, alebo milimetre ale zlomky mikrometra. Ale aj tak sa dá ten záznam vytvoriť, napríklad vo fotografickej emulzii. Osvetlením takej emulzie sa v nej vytvárajú drobné (zlomok mikrometra veľké) zrníčka striebra. Keďže ich množstvo závisí od intenzity osvetlenia v danom mieste, tak sa v maximách interferencie objektovej a referenčnej vlny tých zrníčok vytvorí viac.



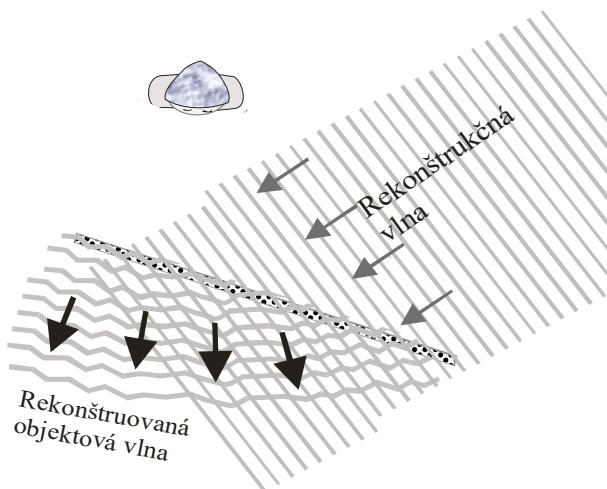
Keby objektová vlna bola guľovou vlnou a referenčná rovinnou vlnou, tak by sa tých zrn vytvorilo najviac na parabole. Ale objektová vlna je súčtom miliardy guľových vln vytvorených z osvetľovacej vlny odrazom do rôznych smerov a s rôznymi fázami (pretože sa vytvárajú v rôznych vzdialenostiach od zdroja), takže objektová vlna je skoro vždy veľmi nepravidelná „hrboľatá“ vlna.

Ale špeciálny film s dostatočne malými zrnami striebra dokáže zaznamenať, kde boli maximá osvetlenia (kde objektová a referenčná vlna mali rovnakú fázu). To je „spoločný základ“ holografie a rekonštrukcie vln odrazom.

Rozdiel medzi rekonštrukciou vln odrazom na vhodných plochách a holografie je i v tom, že holografická rekonštrukcia sa nemusí vytvárať odrazom. Môže sa vytvárať i difrakciou, „čiastočným prechodom“ cez hologram, pretože hologram nie je kompaktné teleso a tak rekonštrukčná vlna môže prejsť cez „medzery“ medzi zrnami striebra

Takým prechodom sa tá vlna samozrejme mení. Ale ľahko sa dá predstaviť, že vlna ktorá sa vytvorí odrazom na zhlukoch striebra je taká

istá ako vlna ktorá by prešla „dierami“ ktoré by boli práve tam kde sú v zázname maximá. A ešte ľahšie sa to dá predstaviť keby tá vlna prechádzala „negatívom“ pôvodného záznamu.



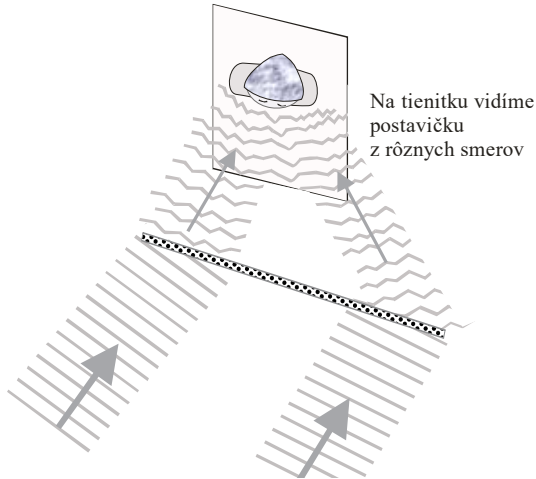
A tak, keď cez hologram necháme prechádzať rekonštrukčnú vlnu zhodnú s referenčnou vlnou, vytvorí sa rekonštrukcia objektovej vlny, ktorá v našich očiach sprostredkuje „priestorový vnem“ zaznamenaného objektu (pretože je identická s pôvodnou objektovou vlnou prostredníctvom ktorej objekty vidíme). To, že tie vlny sú identické sa prejaví napríklad i tým, že rekonštruovaná vlna umožňuje vidieť ako ďaleko je ten objekt od hologramu.<sup>7)</sup>

### Živý hologram

Keby sme holografický záznam objektovej vlny tej figúrky osvetlili rekonštrukčnou vlnou z druhej stany, tak by sa vytvorila rekonštrukcia objektovej vlny ktorá by sa šírila opačným smerom, smerom k miestu v ktorom objekt v priebehu zoznamu bol. Takže v mieste kde bol ten objekt by sa na tienidlo vytvoril obraz zaznamenaného objektu. Keď to tienidlo bude „presne“ v mieste v ktorom bol objekt, vytvorený obraz bude „zaostrený“.

<sup>7)</sup>Na uvedených obrázkoch je „objektom“ malá figúrka a je nakreslená pri pohľade „zhora“ takže je nakreslená iba hlava a časť ramien. Preto, to vyplynie z ďalšieho textu.

Pri tom stačí osvetliť malú časť hologramu (napríklad laserovým ukazovátkom) a vytvorí sa obraz „celého objektu“. A nezávisí to od toho, ktorú časť hologramu by sme osvetlili.<sup>8)</sup>



Obrazy vytvorené z rôznych miest hologramu však nebudú celkom rovnaké – budú to obrazy toho, čo by sme videli, keby sme sa na objekt dívali z rôznych miest (z tých miest ktoré sme pri rekonštrukcii osvetlili).

Takže: keď pri vytváraní rekonštrukcie objektovej vlny budeme premiestňovať miesto v ktorom hologram osvetľujeme, na rekonštrukcii sa to prejaví ako by sa objekt trochu pootáčal – akoby sme hologram „oživilí“.

Demonštráciou „oživeného hologramu“ končia tieto námety na spestrenie výuky fyziky a snáď neprekročil hranicu medzi veľa a príliš. A tým, ktorí prípadne niektoré z predložených námetov použijú sa ospravedlňujem za príliš podrobný výklad – ten výklad bol určený študentom, ktorí by prípadne článok čítali bez možnosti tie demonštrácie vidieť.

Z podobného dôvodu v príspevku nie je (takmer) žiadne matematické spracovanie. Nie je tam preto, že *účelom demonštrácií je zaujať a vytvoriť predstavu* o podstate demonštrovaných javov. A predstava musí predchádzať matematickému popisu. Matematický popis toho o čom nemáme predstavu je zbytočný.

<sup>8)</sup>Keby vlnová dĺžka svetla (farba) použitého na rekonštrukciu bola odlišná od svetla použitého pro tvorbe hologramu, prejavilo by sa to „zväčšením“ (prípadne umenšením) obrazu objektu.

## BYL POD PŘÍSAHOU

Významný americký fyzik Henry Rowland (1848–1901), žák Röntgenův, je znám svými pracemi v oblasti elektrodynamiky, nauky o teple, optiky a spektroskopie. Zdokonalil difrační mřížky a techniku jejich výroby, sestavil atlas slunečního spektra.

Nejnámější je experiment nesoucí jeho jméno, jímž lze dokázat, že rotující nabitě těleso vytváří magnetické pole týchž vlastností jako elektrický proud protékající vodivou smyčkou.

O Rowlandovi se vypráví, že byl jednou předvolán jako expert svědčit při nějakém soudním procesu. Státní zástupce mu při této příležitosti položil otázku: „Kdo je dnes nejvýznamnějším americkým fyzikem?“, načež Rowland bez uzardění odpověděl: „To jsem já.“

Když se později sešel s jedním ze svých přátel, ten mu dal jemně najevo, že taková odpověď nesvědčí zrovna o přílišné skromnosti. Rowland to zkroušeně uznal, ale namítl: „Co jsem mohl dělat, vždyť jsem vypovídal pod přísahou!“

## ZPĚVÁK

Walter Nernst (1864–1941), laureát Nobelovy ceny a jeden ze zakladatelů fyzikální chemie, je znám mnoha objevy v termodynamice a fyzice pevných látek.

Jednou byl požádán, aby předvedl pruskému císařskému dvoru použití radiouln. Umístil tedy radiový přijímač v císařském zámku a sám vysílal z fyzikálního ústavu gramofonový záznam koncertu slavného italského zpěváka Enrica Carusa.

Po produkci byl pozván do zámku a císařovna mu gratulovala: „Vážený pane profesore, neměli jsme tušení, že jste tak znamenitý zpěvák!“

Ivan Štoll: Hrátky matematiků a fyziků

Vydává Jednota českých matematiků a fyziků  
tel.: 222 090 708-9, e-mail: jcmf@math.cas.cz  
za podpory MFF UK Praha a FJFI ČVUT Praha



Vycházejí 4 čísla v kalendářním roce

Obálku navrhl Bohuslav Šír

Sazbu programem  $\text{\TeX}$  připravil RNDr. Miloslav Závodný

Adresa redakce: MFF UK, V Holešovičkách 2, 182 00 Praha 8–Troja  
e-mail: rozhledy@jcmf.cz

Internetové stránky časopisu: <https://rozhledy.jcmf.cz/>

Vytiskla Tiskárna Matula, Olomoucká 27, 618 00 Brno

Distribuci pro předplatitele provádí v zastoupení vydavatele  
MediaCall, s. r. o.

Vídeňská 546/55, 639 00 Brno

tel.: +420 532 165 165, e-mail: [export@mediacall.cz](mailto:export@mediacall.cz)

web: [www.zahranicnitisk.com](http://www.zahranicnitisk.com)

ISSN 0035-9343

MK ČR E4691

© Jednota českých matematiků a fyziků, Praha 2026

---

## Redakční rada

Vedoucí redaktorka:

doc. Ing. Lubomíra Dvořáková, Ph.D., FJFI ČVUT Praha

Redaktorka pro matematiku:

doc. Ing. Lubomíra Dvořáková, Ph.D., FJFI ČVUT Praha

Redaktor pro fyziku:

RNDr. Věra Krajčová, Ph.D., FJFI ČVUT Praha

Členové redakční rady:

prof. RNDr. Vlastimil Dlab, DrSc., F.R.S.C., Praha

doc. RNDr. Zdeněk Drozd, Ph.D., MFF UK Praha

RNDr. Petr Hanuš, FSv ČVUT Praha

doc. RNDr. Jaroslav Hora, CSc., FPE ZČU Plzeň

prof. RNDr. Ivo Kraus, DrSc., FJFI ČVUT Praha

doc. RNDr. Jan Kříž, Ph.D., PřF UHK Hradec Králové

prof. RNDr. Miroslav Lávička, Ph.D., FAV ZČU Plzeň

RNDr. Pavel Pokorný, Ph.D., VŠCHT Praha

RNDr. Miroslav Randa, Ph.D., PdF ZČU Plzeň

RNDr. Filip Studnička, Ph.D., PřF UHK Hradec Králové

doc. RNDr. Jan Šlégr, Ph.D., PřF UHK Hradec Králové

prof. RNDr. Pavel Tlustý, CSc., PedF JU České Budějovice

doc. RNDr. Pavel Töpfer, CSc., MFF UK Praha

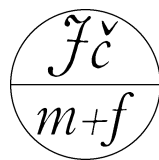
RNDr. Vladimír Wagner, CSc., ÚJF AV ČR Řež



# ROZHLEDY matematicko-fyzikální

Ročník 101 (2026), číslo 2

---



## OBSAH

|   |    |
|---|----|
| J. Fiala, T. Roskovec, V. Petrášková: Technika a náhoda:<br>pravděpodobnostní úlohy pro studenty středních škol . . . . . | 1  |
| L. Spíchal: Parabola jako most mezi průměry a funkcemi . . . . .  | 19 |
| D. Cichra: Implicitní funkce v rovině . . . . .   | 24 |
| J. M. Nájares Romero, H. Kadlecová: Pythagorejské trojice a některé<br>jejich vlastnosti . . . . .                        | 37 |
| Matematické oříšky: Exotická posloupnost . . . . .  | 44 |
| I. Turek: Niekoľko námetov na spestrenie a spresnenie vyučovania<br>fyziky . . . . .                                      | 46 |

---

## Pokyny pro autory

Příspěvky dodávejte na adresu redakce v elektronické podobě. Nejlépe napsané ve formátu  $\text{\LaTeX}$ , přijatelný je i formát  $\text{PlainTeX}$ , je akceptovatelný i text připravený editorem Word či podobným.

Pokud jde o obrázky, je žádoucí, aby byly připraveny v reprodukovatelné podobě. Každý obrázek nechť je v samostatném souboru, nejlépe ve formátu pdf nebo eps. Přípustná je též bitmapa v dostatečném rozlišení.

Ke každému zasílanému příspěvku (ne u soutěží, zpráv a recenzí) přiložte krátkou anotaci v českém jazyce. Dále je žádoucí, aby u každého příspěvku byla uvedena literatura, na kterou je v textu odkazováno.