

ROZ HLEDY

MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ

ČASOPIS PRO ZÁJEMCE O MATEMATIKU, FYZIKU A INFORMATIKU

ROČNÍK 101 (2026) • ČÍSLO 3

Důkaz větší než nekonečno, který končí u nuly

Jakub Kuchařík, Gymnázium Karla Čapka, Dobříš

Abstrakt. Tento článek se zabývá takzvanými Goodsteinovými posloupnostmi. Může se zdát, že tyto posloupnosti rostou do nekonečna, ale je dokazatelné, že všechny skončí v nule. Už to samo o sobě by byl velmi zajímavý fakt, ale co jej dělá ještě zajímavějším, je způsob jeho důkazu, který se nevyhnutelně obrací k ordinálním číslům. Přibližně polovina tohoto textu je věnována ne zcela formálnímu seznámení s ordinálními čísly. Jedná se o náročné téma, které je podstatnou součástí tzv. teorie množin. Čtenářům, kteří se s nimi nikdy nesetkali, radíme nezoufat, pokud bude text těžko stravitelný; snad poslouží alespoň pro přibližnou představu.

Goodsteinovy posloupnosti

Na začátku se podíváme na to, o čem se vlastně budeme bavit. Jako Goodsteinovy posloupnosti (čteme: [gudstajnovy]) označujeme různé posloupnosti generované poměrně složitým rekurzivním způsobem. Jednotlivé členy posloupnosti nazvěme $g_1, g_2, g_3, \dots$. Jako g_1 můžeme zvolit libovolné přirozené číslo. Pro názornost uvažujme $g_1 = 290$. Abychom vygenerovali g_2 , přepíšme naše číslo do dvojkové soustavy následujícím způsobem:

$$g_1 = 290 = 2^8 + 2^5 + 2^1.$$

Potom přepíšme všechny vzniklé exponenty stejným způsobem, tedy tak, aby byly vyjádřeny ve dvojkové soustavě. Dále postupujeme obdobně: objeví-li se v exponentu číslo větší než 2, pak i tento exponent rozepíšeme ve dvojkové soustavě. To opakujeme, dokud se výsledný výraz nebude skládat pouze z číslic 1 či 2.

$$g_1 = 290 = 2^{2^{2+1}} + 2^{2^{2+1}} + 2^1.$$

Nyní vezmeme všechny výskyty čísla 2 v tomto zápisu, přepíšme je na 3 a od výsledku odečteme 1. Tím získáme druhý člen naší posloupnosti:

$$g_2 = 3^{3^{3+1}} + 3^{3^{3+1}} + 3^1 - 1 \doteq 4,43 \cdot 10^{38}.$$

Abychom získali g_3 , vezmeme g_2 , přepíšeme do trojkové soustavy, nahradíme všechny 3 za 4 a od výsledku odečteme 1.

$$\begin{aligned} g_2 &= 3^{81} + 3^{28} + 2 = 3^{(3^{3+1})} + 3^{(3^3+1)} + 2, \\ g_3 &= 4^{(4^{4+1})} + 4^{(4^4+1)} + 2 - 1 \doteq 3,23 \cdot 10^{616}. \end{aligned}$$

Další členy g_i generujeme analogicky. Vždy přepíšeme naše původní g_{i-1} v soustavě o základu i (včetně všech exponentů, exponentů exponentů atd.) a následně všechny instance čísla i nahradíme za $i + 1$ a od tohoto výsledku odečteme 1.

Je patrné, že tato posloupnost nabývá velmi vysokých hodnot opravdu rychle, ale může se stát, že by klesala? Snadno si uvědomíme, že například $g_4 < g_3$ právě tehdy, když zápis g_3 ve čtyřkové soustavě nebude obsahovat žádnou čtyřku. Lze si rozmyslet, že toto nutně implikuje, že $g_3 < 4$. Obecně platí, že $g_{n+1} < g_n$ právě tehdy, když $g_n < n + 1$. Může toto vůbec někdy nastat?

Vidíme přece, že posloupnost na začátku roste extrémně rychle. Zdá se tedy nepravděpodobné, že růst časem zpomalí natolik, aby platilo $g_n < n + 1$. Pan Reuben Goodstein ovšem dokázal, že pro libovolnou volbu $g_1 \in \mathbb{N}$ toto vždy nastane. Každá Goodsteinova posloupnost tedy po konečně mnoha krocích skončí v nule – a to vše díky nepatrnému členu -1 . [3]

Do nekonečna a ještě dál!

Abychom mohli pochopit Goodsteinův důkaz, musíme se nejprve seznámit s neintuitivním konceptem ordinálních čísel. Ordinální čísla jsou rozšířením přirozených, podobně jako komplexní čísla jsou rozšířením reálných nebo racionální jsou rozšířením celých. Motivace zavedení ordinálních čísel (ordinálů) je srovnatelná s motivací pro zavádění komplexních čísel: když matematiky trápilo, že polynom $a^2 + 1$ nemá žádný reálný kořen, tak si představili nový objekt – imaginární jednotku, která by tuto „díru“ vyplnila. Z tohoto jednoho předpokladu (existence imaginární jednotky) lze následně odvodit vše o novém systému komplexních čísel, z čehož plyne mnoho nových metod pro řešení zdánlivě nesourodých problémů (které často mohou působit jako řešitelné čistě v $\mathbb{N}$ či $\mathbb{R}$).

Jakou „díru“ tedy vyplňují ordinální čísla? ω , nejmenší z nekonečných ordinálů, slouží jako objekt splňující nerovnost $\omega > n$ pro všechna přirozená čísla n . Odtud plyne i definice tohoto objektu.

Definice 1. ω je nejmenší objekt (ordinál), pro který platí nerovnost $\omega > n$ pro libovolné $n \in \mathbb{N}$.

Tato definice může působit tak, že ω je jediným ordinálem. To však nemůže být dál od pravdy – je to pouze jeden člen „množiny“¹⁾ všech ordinálních čísel, jejíž „podmnožinou“ jsou mimochodem i všechna čísla přirozená.

„Množina“ ordinálních čísel splňuje dvě klíčové vlastnosti:

- 1) Pro každý ordinál α existuje následník, který se značí $\alpha+1$ a splňuje $\alpha+1 > \alpha$. (Přičemž žádný menší ordinál β nesplňuje $\beta > \alpha$.)
- 2) Pro každou množinu ordinálů existuje ordinál větší než všechny ordinály z této množiny.

Z vlastnosti 2) přímo plyne, že nějaké číslo jako ω musí existovat. Pokud budeme totiž chtít ordinál větší než všechna přirozená čísla, pak sáhneme právě po ω (z definice je to nejmenší takový ordinál). Budeme-li chtít ordinál, který je větší než všechna přirozená čísla a ω , tak můžeme použít $\omega+1$ apod.

Dále je důležité podotknout, že ačkoliv každý ordinál musí mít následníka, ne každý ordinál musí mít předchůdce (viz např. ω). Těmto ordinálům říkáme *limitní ordinály*, protože představují jakýsi limitní skok do „nových výšin“ ordinálů (např. ω je skok z přirozených čísel do ordinálů tvaru $\omega+n$). Ostatní ordinály přirozeně nazýváme *následnické*, neboť jsou přímým následníkem jiného ordinálu.

Na rozdíl od reálných či komplexních čísel ordinální čísla neužíváme pro jejich početní vlastnosti, ale k zachycení struktury uspořádání a zobrazení principu matematické indukce tak, aby fungoval i pro jiné dobře uspořádané množiny než přirozená čísla. Této zobecněné matematické indukci říkáme *transfinitní indukce* a bude to hlavní nástroj, kterým dokážeme, že Goodsteinovy posloupnosti nakonec musí klesat.²⁾

Jeden ze způsobů, jak si představovat ordinály a především ω , je pomocí pořadí (odkud také vychází slovo *ordinální*). Uvažujme množinu objektů, přičemž každému z těchto objektů můžeme přiřadit nějaké (při-

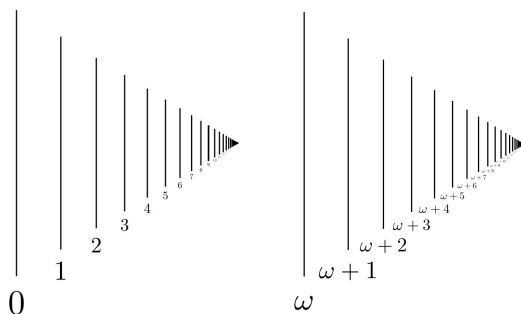
¹⁾Přísně vzato je ordinálů tolik, že se do žádné množiny nevejdou. Správné označení této struktury tedy není množina, ale třída (což je zobecnění množiny). Detaily toho, z jakých důvodů toto platí, jsou nad rámec tohoto článku. Pro účely zjednodušení budeme, ne zcela přesně, tvrdit, že ordinály dohromady tvoří „množinu“ (v textu bude odlišena uvozovkami).

²⁾Transfinitní indukci můžeme kromě Goodsteinovy věty například ukázat, že existuje podmnožina kartézské roviny $\mathbb{R}^2$, která protíná každou přímku této roviny právě ve dvou bodech.

rozené) pořadové číslo³⁾. Pro lepší znázornění si můžeme namísto abstraktních objektů představovat čáry. Například $\mathbb{N}$ si představíme jako levou polovinu obr. 1, neboť ke každé čáře můžeme jednoznačně přiřadit jedno přirozené číslo.

Důležitou strukturou, kterou chceme v naší množině mít, je tzv. *dobré uspořádání*. Dobré uspořádání je speciální druh uspořádání množiny, který vyžaduje, aby dle tohoto uspořádání měla každá neprázdná podmnožina dané množiny nejmenší⁴⁾ prvek.

Je třeba si uvědomit, že ne každé uspořádání je dobré. Budeme-li uvažovat např. standardní uspořádání celých čísel: $\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$, pak vidíme, že jistě není dobré (například množina všech záporných celých čísel nemá nejmenší prvek). Celá čísla lze ovšem dobře uspořádat například podle absolutní hodnoty, kdy budeme střídát znaménka, následujícím způsobem: $0, 1, -1, 2, -2, \dots$. V tomto uspořádání má každá podmnožina celých čísel svůj nejmenší prvek a uspořádání je tedy *dobré*.



Obr. 1: Schéma představující přirozená čísla a ordinály tvaru $\omega + k$, pro $k \in \mathbb{N}$, jako množinu čar

Co se stane, pokud přidáme v našem schématu jednu další čáru za všechny ostatní? Celkový počet čar se nezmění⁵⁾, z čehož bychom mohli usuzovat, že ani jejich očíslování se nezmění. Jaké číslo však přiřadíme poslední čáře tak, abychom zachovali jejich uspořádání? Rozhodně jí ne-

³⁾Všude v článku považujeme 0 za přirozené číslo.

⁴⁾Slovem nejmenší zde není myšleno klasické porovnávání čísel, ale porovnávání v rámci tohoto uspořádání.

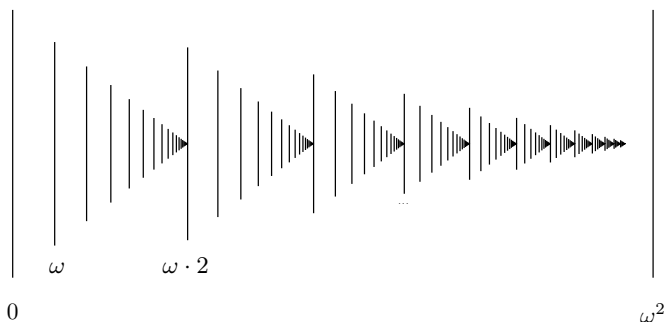
⁵⁾Všechny čáry můžeme přejmenovat z n na $n+1$ a naší nové čáře přiřadit pozici 0, tudíž se bavíme pořád o stejné velikosti nekonečna, jako jsou přirozená čísla. O dvou množinách A, B říkáme, že jsou stejně velké (*mají stejnou kardinalitu*) právě tehdy, když existuje bijekce (vzájemně jednoznačné zobrazení) A na B .

můžeme dát žádné přirozené číslo – všechna jsou již zabraná. Musíme jí tedy přiřadit nějaký index, jehož hodnota je větší než libovolné přirozené číslo. Inu, nezbyvá nám nic jiného než ji očíslovat ω , neboť podle předchozí definice je právě ω nejmenší vyhovující číslo. Naše čára potom bude ležet na ω -té pozici, jak je ukázáno na obr. 1.

Jak bychom vyřešili přidání další čáry? Vypadá to, že nám opět došla čísla, ale my ji jednoduše můžeme pojmenovat $\omega + 1$ ⁶⁾ (jak plyne ze značení v definici). Analogicky můžeme k ω přičíst libovolné přirozené číslo, čímž dostáváme další a další následníky. Nyní jsme jakýmsi způsobem zavedli přičítání k ordinálům, pojďme se tedy podívat, jak je to s násobením a mocněním.

Násobení přirozeným číslem je relativně snadné. Chceme-li $\omega \cdot 2$, pak ho lze najít jako limitní ordinál množiny všech přirozených čísel a všech čísel tvaru $\omega + n$ pro $n \in \mathbb{N}$. Graficky si to představíme přidáním další čáry za obr. 1. Tento postup lze triviálně zobecnit na $\omega \cdot n$ pro $n \in \mathbb{N}$.

Pakliže chceme v našem schématu umocňovat, pak formálně hledáme limitní ordinál všech ordinálů tvaru $\omega \cdot m + n$ pro $m, n \in \mathbb{N}$. Z grafického hlediska musíme užít rekurzi. Vezměme si naše původní schéma, kde jsou jen přirozená čísla, a každou čáru v něm nahraďme kopií celého tohoto schématu. Tím vyčerpáme všechny možné násobky $\omega \cdot n$ pro $n \in \mathbb{N}$ (a potažmo i jejich následníky). Pokud tedy přidáme jednu další čáru, musíme nahradit původní n za ω , a tím získáme $\omega \cdot \omega$ neboli ω^2 , jak je zobrazeno na obr. 2.



Obr. 2: Schéma představující několik skupin ordinálů v závislosti na jejich limitním ordinálu (ω , $\omega \cdot 2$, $\omega \cdot n$, ω^2 , ...) jako množiny čar

⁶⁾Se sčítáním (ani násobením) to bohužel ve skutečnosti není tak jednoduché, neboť sčítání ordinálů není komutativní. Výrazy $\omega + 1$ a $1 + \omega$ jsou tedy odlišné. U odčítání (a dělení) pak nastávají ještě další problémy, a proto je zde vůbec nedefinujeme.

Je asi představitelné, že obdobným způsobem je možné definovat i ω^3 , ω^4 atd. Dále můžeme definovat ω^ω jako nejmenší ordinál větší než všechna ω^n pro přirozená n . To zdaleka není všechno, ale pro hrubou představu o tom, jak se definuje násobení a umocňování ordinálů, to stačí. Podstatné bude především to, že výrazy jako $\omega^{19} + \omega^7 \cdot 6 + \omega \cdot 69$, ω^ω , $\omega^{\omega^3 + \omega \cdot 2}$ atd. jsou v ordinálních číslech dobře definované.

Zpět na zem

Se znalostí ordinálů se můžeme vrátit zpět ke Goodsteinovým posloupnostem. Nejprve si zavedme notaci pro jednodušší vysvětlování.

Definice 2. Necht' $G_b^a(n)$ je funkce, která přepíše $n \in \mathbb{N}$ do b -soustavy tak, aby každé číslo v jejím zápisu bylo vyjádřeno v této soustavě. Následně všechny výskyty základu b přepíše na a .

S touto funkcí můžeme formálně definovat Goodsteinovu posloupnost.

Definice 3. *Goodsteinova posloupnost* je posloupnost členů $(g_k)_{k=1}^\infty$ taková, že $g_1 \in \mathbb{N}$ a všechna vyšší $g_i := G_i^{i+1}(g_{i-1}) - 1$.

Intuici, proč může tak nepatrný člen, jakým je -1 , něco udělat s giganty, jako jsou členy Goodsteinovy posloupnosti, získáme pohlédnutím na několik členů této posloupnosti zapsaných pomocí obecné soustavy o základu a . Vyberme například $g_1 = 5$ a vypíšeme několik členů do následující tabulky:

g_i	hodnota	zápis v odpovídající soustavě	abstraktní zápis v a^7)
g_1	5	$2^2 + 1$	$a^a + 1$
g_2	27	3^3	$a^a + 0$
g_3	255	$3 \cdot 4^3 + 3 \cdot 4^2 + 3 \cdot 4 + 3$	$a^3 \cdot 3 + a^2 \cdot 3 + a \cdot 3 + 3$
g_4	467	$3 \cdot 5^3 + 3 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5 + 2$	$a^3 \cdot 3 + a^2 \cdot 3 + a \cdot 3 + 2$
$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
g_6	1197	$3 \cdot 7^3 + 3 \cdot 7^2 + 3 \cdot 7$	$a^3 \cdot 3 + a^2 \cdot 3 + a \cdot 3 + 0$
g_7	1751	$3 \cdot 8^3 + 3 \cdot 8^2 + 2 \cdot 8 + 7$	$a^3 \cdot 3 + a^2 \cdot 3 + a \cdot 2 + 7$
$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
g_{14}	10830	$3 \cdot 15^3 + 3 \cdot 15^2 + 2 \cdot 15$	$a^3 \cdot 3 + a^2 \cdot 3 + a \cdot 2 + 0$
g_{15}	13087	$3 \cdot 16^3 + 3 \cdot 16^2 + 16 + 15$	$a^3 \cdot 3 + a^2 \cdot 3 + a + 15$
$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$

⁷⁾Koeficienty ve výrazech píšeme až za mocniny a kvůli nekomutativitě ordinálů, kterými za chvíli výrazy s obecným a nahradíme.

Ačkoliv hodnota g_i roste s rostoucím i , „struktura“ tohoto čísla z pohledu Goodsteinových posloupností klesá. Zde je mnohem patrnější, jakou roli vlastně naše -1 sehrává: mění „strukturu“ celého tohoto čísla, i když neuvěřitelně pomalu [2].

Díky ordinálním číslům můžeme tuto myšlenku „struktury“ vcelku jednoduše vyjádřit. V definici naší funkce $G_b^a(n)$ nás nic nenutí, aby $a, b \in \mathbb{N}$. Představme si, že zvolíme $a = \omega$. Tím přepíšeme naše čísla do jakési „ ω -soustavy“, která plní stejnou roli jako abstraktní zápis v a soustavě, jenž je v tabulce. Víme totiž, že $\omega > b$, a proto musí platit $G_b^\omega(n) \geq G_b^{b+1}(n)$, čímž se zbavíme potřeby sledovat skutečnou velikost čísla. Namísto toho budeme sledovat jeho „strukturní velikost“.

Do karet nám však hraje i to, že při pohlédnutí na „strukturní velikost“ tohoto čísla spatříme, že ostře klesá. Toto klesání „strukturní velikosti“ probíhá i přes to, že Goodsteinova posloupnost jako taková roste. Tvrdíme tedy, že:

$$G_2^\omega(g_1) > G_3^\omega(g_2) > \dots > G_{n+1}^\omega(g_n).$$

Než se vrhneme na důkaz tvrzení monotónního klesání této posloupnosti, rozmysleme si následující vztah pro $a < b < c$:

$$G_a^c(x) = G_b^c(G_a^b(x)), \quad (1)$$

který zřejmě platí, neboť nahradíme-li v zápisu čísla x cifry a za b a následně b za c , dostaneme stejný výsledný výraz, jako kdybychom nahradili rovnou cifry a za c .

Vrátíme-li se zpět k monotónnímu klesání, pak chceme ukázat, že platí nerovnost $G_{n+1}^\omega(g_n) > G_{n+2}^\omega(g_{n+1})$ pro libovolné $n \in \mathbb{N}$. Z definice víme, že $g_{n+1} = G_{n+1}^{n+2}(g_n) - 1$, což můžeme dosadit do dokazované nerovnosti, a tím dostáváme: $G_{n+1}^\omega(g_n) > G_{n+2}^\omega(G_{n+1}^{n+2}(g_n) - 1)$. Dále z rovnosti (1) můžeme za $G_{n+1}^\omega(g_n)$ dosadit výraz $G_{n+2}^\omega(G_{n+1}^{n+2}(g_n))$ ⁸⁾. Nakonec tedy získáme následující tvar dokazované nerovnosti:

$$G_{n+2}^\omega(G_{n+1}^{n+2}(g_n)) > G_{n+2}^\omega(G_{n+1}^{n+2}(g_n) - 1). \quad (2)$$

Pro zjednodušení zápisu zavedme substituci $N := G_{n+1}^{n+2}(g_n)$. N vnímejme jako libovolné přirozené číslo. Když usedne prach po našem dosazování, vznikne z nerovnosti (2)

$$G_{n+2}^\omega(N) > G_{n+2}^\omega(N - 1).$$

⁸⁾V tomto případě jsme v (1) volili $a = n + 1$, $b = n + 2$, $c = \omega$.

Tato nerovnost již platit musí, neboť větší číslo má nutně větší „strukturní velikost“, mají-li stejný základ. Alternativně bychom tato čísla mohli porovnávat, jako by byla v soustavě o základu ω , tj. můžeme porovnávat cifry obou čísel v ω soustavě zleva doprava tak, jak jsme zvyklí u soustav s konečným základem.

Pád od ∞ k 0

Tímto jsme ukázali, že $G_2^\omega(g_1) > \dots > G_{n+1}^\omega(g_n)$. Jak nám ovšem má při zkoumání Goodsteinových posloupností pomoci fakt, že máme ostře klesající posloupnost čísel, která se početně chovají jako nekonečno? My chceme ukázat, že naše posloupnost se po konečně mnoha krocích dostane k nule, ne že zůstane v nekonečnu.

$$\begin{array}{ccccccc} G_2^\omega(g_1) & > & G_3^\omega(g_2) & > & G_4^\omega(g_3) & > & \dots \\ \parallel? & & \parallel? & & \parallel? & & \\ \infty & > & \infty & > & \infty & > & \dots \end{array}$$

Zde přichází má oblíbená část důkazu: ukážeme, že všechny ostře klesající posloupnosti ordinálních čísel jednou musí klesnout k 0.

Věta 1. *Každá ostře klesající posloupnost ordinálů je konečná.*

Důkaz. Tento důkaz povedeme takzvanou transfinitní indukcí. Obdobně jako u běžné indukce ukážeme, že naše tvrzení platí pro nějaký prvek (základní krok). Dále ukážeme, že pokud tvrzení platí pro všechna $\beta < \alpha$, pak platí i pro α , což lze rekurzivně aplikovat na libovolný ordinál.⁹⁾

Tvrzení, které se snažíme dokázat, je, že ostře klesající posloupnost $\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 > \dots$ je pro libovolný počáteční ordinál α_1 konečná¹⁰⁾.

Jako základní krok zvolme $\alpha_1 = 0$, pro který naše tvrzení triviálně platí. Dále uvažujme ordinál α_1 a předpokládejme, že tvrzení platí pro všechny ordinály menší než α_1 . Vezměme libovolnou ostře klesající posloupnost $\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 > \dots$. Díky indukčnímu předpokladu je $\alpha_2 > \alpha_3 > \dots$ konečná (protože α_2 je menší než α_1). Pak je ale konečná

⁹⁾ V klasické transfinitní indukci často výrok dokazujeme zvlášť pro následnické a zvlášť pro limitní ordinály, ale v tomto případě nám stačí předpoklad, že tvrzení platí pro všechny menší ordinály, což pokryje oba případy.

¹⁰⁾ Tímto dokážeme, že Goodsteinovy posloupnosti jednou klesnou k nule, neboť jejich „strukturní“ podoba bude stále klesat alespoň o 1.

i původní posloupnost, která vznikne přidáním jediného členu (jmenovitě α_1). Z toho již plyne, že všechny ostře klesající posloupnosti ordinálů jsou konečné. $\square$

Konečně se můžeme vrátit úplně na začátek, kdy jsme tvrdili, že máme jakousi „strukturu“ čísla v Goodsteinově posloupnosti, a tu jsme schopni vyjádřit pomocí soustavy o základu ω . Také jsme tvrdili, že vyjádříme-li tento tvar pomocí oné soustavy, musí být menší než naše původní číslo, což, jak jsme ukázali, nelze opakovat nekonečně. Zjistili jsme tedy, že po konečně mnoha krocích se náš tvar mění na 0, což ovšem znamená, že jsme potvrdili i naši původní hypotézu. Můžeme tedy již s jistotou vyslovit tzv. Goodsteinovu větu, pro kterou máme nyní důkaz.

Věta 2 (Goodsteinova). *Každá Goodsteinova posloupnost se po konečně mnoha krocích dostává do 0.*

Posledních pár detailů

Je patrné, že náš důkaz užívá docela nestandardního postupu, což přišlo zvláštní i jiným lidem. V roce 1982 se matematikům Kirbymu a Parisovi povedlo dokázat, že tato věta může být celá popsána systémem peanovské aritmetiky, ale nikdy v něm nemůže být dokázána¹¹⁾. Je tedy zvláštní, že tuto větu, která jistě v tomto systému platí, nelze pomocí něj nijak dokázat [1, 4].

O tom, že věta v peanovské aritmetice platí, se můžeme paradoxně přesvědčit tím, že ji v ní částečně dokážeme. My totiž dle Goodsteinovy věty víme, že každá z těchto posloupností musí být konečná. To znamená, že bychom mohli vyčíslit posloupnost pro libovolnou volbu počátečního členu g_1 a po konečném (neuvěřitelně gigantickém) počtu kroků bychom se dostali ke kýžené nule. Tento fakt jistě musí platit pro libovolné přirozené číslo – konečnost libovolné posloupnosti v peanovské aritmetice tedy dokázat lze. Co ovšem v peanovské aritmetice dokázat nelze, je, že tento výrok platí pro všechna přirozená čísla zároveň.

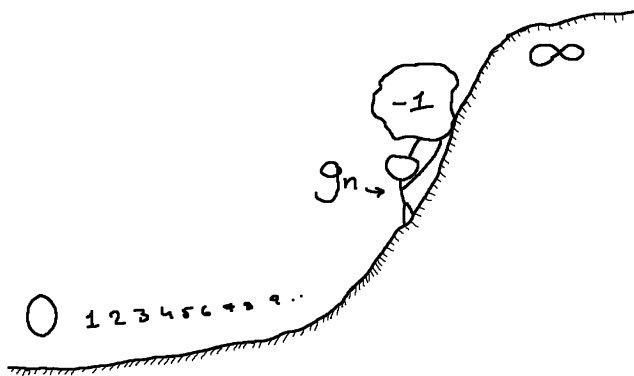
Vidíme tedy, že i zdánlivě „neužitečné“ úlohy a „zvláštní“ matematické objekty mohou mít ve výsledku velmi hluboké implikace.

Plyne tedy z tohoto článku nějaké ponaučení? Možná ano – při jeho psaní jsem si členy této posloupnosti představoval trochu jako slavného Sisyfa, hrdinu z řeckých bájí. Ten byl odsouzen bohy, aby do nekonečna

¹¹⁾ Peanovská aritmetika je v podstatě základ pro práci a definování všech číselných struktur tak, jak je známe. Patří do ní definice čísel a operací mezi nimi.

valil obrovský kámen do kopce, ale těsně předtím, než se na něj dostal, se mu kámen svalil dolů. Členy Goodsteinovy posloupnosti jsou docela podobné: také už už to vypadá, že porostou nekonečně, a nakonec je porazí titěrná -1 .

Z toho může plynout ponaučení značné: i ty nejmenší změny mohou mít na výsledek ten největší efekt. Anebo taky ne, ale dovolil jsem si svou sisýfovskou idealizaci vyobrazit na ilustraci níže.



Obr. 3: Goodsteinův Sisyfos

Poděkování

Velmi děkuji za podrobné komentáře recenzentovi. Díky nim článek získal na matematické přesnosti, aniž by ztratil na čtivosti.

Literatura

- [1] *The Mindblowing Goodstein Sequences*. Online. Rising Entropy. <https://risingentropy.com/the-mindblowing-goodstein-sequences/>, 2020.
- [2] *Solving a finite number problem using infinities* [Sheafification of G]. Online. <https://www.youtube.com/watch?v=fDt0Ub9E2GI>, 2024.
- [3] Goodstein, R. L.: On the restricted ordinal theorem. *The Journal of Symbolic Logic*, roč. 9 (1944), č. 2, s. 33–41.
- [4] Kirby, L., Paris, J.: Accessible independence results for Peano arithmetic. *Bulletin of the London Mathematical Society*, roč. 14 (1982), č. 4, s. 285–293.

Korespondenční seminář M&M

Pavla Šimová a Jakub Suchánek za M&M

Milá čtenářko, milý čtenáři, rádi bychom ti představili časopis M&M! Je určený pro středoškoláky a podílí se na něm (nejen) studenti MFF UK. Pravidelně se v něm dočteš o různých zajímavých oblastech matematiky, fyziky a informatiky. Zároveň k daným tématům najdeš vždy i úlohy na procvičení a problémy nabádající k dalšímu samostatnému zkoumání.

V prvním čísle letošního ročníku najdeš třeba tématka o programovacím jazyce Python, kombinatorice a grafech, operačních systémech nebo obecné teorii relativity.

Tvá sepsaná řešení lze poté odevzdat prostřednictvím našeho webu <https://mam.mff.cuni.cz>, do časopisu můžeš přispět dokonce i vlastním článkem. Podporujeme i řešení úloh a psaní článků ve skupině, takže můžeš řešit třeba dohromady s kamarádem.

Došlá řešení obodujeme a pošleme k nim zpětnou vazbu. Za body potom získáš různé ceny – třeba ponožky, knihy, hry, nebo dort za nejlepší článek. Kromě toho ti za body promineme přijímačky na Matfyz nebo tě pozveme na týdenní soustředění plné kamarádů, her, přednášek a vědeckého bádání!

Na ukázkou zde uvádíme tématko o rozměrové analýze od Kuby S. z prvního čísla aktuálního 33. ročníku časopisu M&M.

Téma 4 – Rozměrová analýza

Díl 1: Odhadování vztahů bez pochopení fyziky

Jak poznáte, který návrh zaoceánské lodi je nejlepší, když nemáte počítačové simulace a nemůžete si dovolit postavit tucet drahých plavidel v plné velikosti a zkoušet je na moři? Překvapivě daleko se dostanete jenom tím, že pečlivě hlídáte jednotky. Metoda, které se říká *rozměrová analýza*, z „uhádnutí“ dělá skoro exaktní disciplínu – a navíc přesně určí, v jakém režimu musí běžet zmenšený model, aby se choval jako skutečnost.

Rozměrová analýza se fundamentálně používá na dvě věci:

- Uhodnutí fyzikálního vztahu.
- Navržení experimentu, kde se budou relevantní jevy chovat stejně, což nám umožní změřit všechny konstanty v uhodnutém vztahu.

Ty spolu velmi souvisí, jelikož často dostaneme trochu jinou podobu vztahu, než je standardní, protože všechny konstanty musí být bezrozměrné, a tato podoba je nejvíce užitečná pro návrh experimentů v praktičtějším měřítku.

Rozměrovou analýzou se nejprve z proměnných poskládají bezrozměrné skupiny.¹⁾ V modelu nastavujeme volně proměnné, aby celkem bezrozměrná skupina vycházela stejně jako v reálné verzi. V nádrži se vlečený model lodi proto vláčí znatelně pomaleji, v jiném experimentu létají modely letadel ve vzduchu o teplotě -160°C . Hlavní reálné využití rozměrové analýzy je tedy škálování modelů pro jevy, které nejdou spočítat, ale je potřeba simulovat. V současnosti NASA stále používá kryogenní hypersonický větrný tunel.

Jak rychle chodíte?

Cílem tu pro nás bude:

1. najít vztah mezi rychlostí chůze a proměnnými popisujícími nohu,
2. prověřit ten vztah v praxi.

Co všechno by rychlost chůze v mohlo ovlivnit?

Než začneme počítat, zastavme se u téhle otázky. Napnutá noha se chová jako kyvadlo: v kyčli je zavěšená k tělu a chodidlo opisuje oblouk. Pohodlná (energeticky nejlevnější) rychlost chůze v (m/s) bude souviset s tím, jak rychle toto kyvadlo dokáže přehazovat nohu z jedné strany na druhou.

Napišme co nejdelší rozumný seznam kandidátů na proměnné a u každého jeho rozměr v základních SI jednotkách:

¹⁾Bezrozměrná skupina je součin několika veličin v nějakých mocninách, kde se všechny rozměry vykrátí. Například to může být něco jednoduchého jako $l^{-1} \cdot d$, kde l i d mají rozměr v metrech, takže $\text{m}^{-1} \cdot \text{m} = \text{m}^0 = 1$. Nebo to může být složitější jako $Q^2 \cdot \rho^{-2} \cdot g^{-1} \cdot D^{-5}$. Rozepíšeme rozměry a postupně krátime:

$$\begin{aligned}
 & (\text{kg/s})^2 \cdot (\text{kg/m}^3)^{-2} \cdot (\text{m/s}^2)^{-1} \cdot \text{m}^{-5} \\
 & \rightarrow \text{kg}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{kg}^{-2} \cdot \text{m}^6 \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^2 \cdot \text{m}^{-5} \\
 & \rightarrow \cancel{\text{kg}^2} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \cancel{\text{kg}^{-2}} \cdot \text{m}^6 \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^2 \cdot \text{m}^{-5} \\
 & \rightarrow \text{s}^{-2} \cdot \text{m}^6 \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^2 \cdot \text{m}^{-5} \\
 & \rightarrow \cancel{\text{s}^{-2}} \cdot \text{m}^6 \cdot \text{m}^{-1} \cdot \cancel{\text{s}^2} \cdot \text{m}^{-5} \\
 & \rightarrow \text{m}^6 \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{m}^{-5} \\
 & \rightarrow \text{m}^{6-1-5} = \text{m}^0 = 1.
 \end{aligned}$$

- délka nohy l (m),
- výška těžiště nohy nad zemí h (m),
- průměr nohy d (m),
- hmotnost nohy m (kg),
- tíhové zrychlení g (m s^{-2}).

Ted' pozorujeme dvě věci.

Hmotnost musí vypadnout.

m je jediná proměnná, která má v sobě rozměr kg. Výsledná rychlost má rozměr m/s; kilogramy v odpovědi nemáme čím „umazat“, takže se hmotnost v rozměrově správném vztahu nesmí objevit. (Fyzikálně se to dalo tušit: kyvadlo v tíhovém poli je stejně jako padající kámen na hmotnosti nezávislé.)

Délky můžeme zjednodušit na jednu.

Délky l , h , d mají stejný rozměr m. To se dá vyřešit ve dvou případech: ty 3 délky na sobě nejsou nezávislé, nebo dokážeme říci, jak je složit dohromady. Naštěstí u většiny lidí i kráčejících zvířat jsou v přibližně konstantních poměrech. Takže platí, že jsou závislé. Ten druhý případ uvidíme v úloze 1.7 na konci tématka. Nahradíme tedy h za $c_1 \cdot l$ a d za $c_2 \cdot l$. Bezrozměrné konstanty můžeme všechny složit dohromady při skládání rovnice, takže zbude jediná nezávislá délka l .

Zbyly nám jen l a g . Ted' nějak potřebujeme poskládat bezrozměrné skupiny – součin/podíl mocnin našich proměnných, kde se všechny rozměry vyškrtají. Jelikož máme akorát o jednu proměnnou (l , g , v) víc, než máme jednotek (m, s), tak víme, že budeme mít právě jednu bezrozměrnou skupinu $l^a \cdot g^b \cdot v^c$. Vychází to z toho, že když vezmeme do jedné skupiny právě dva rozměry, tak třetí rozměr zůstane ve skupině samotný a nemůže se vykrátit. Z jedné skupiny můžeme rovnici udělat triviálně:

$$1 = \text{konst} \cdot l^a \cdot g^b \cdot v^c.$$

Abychom vykrátili proměnné, stačí nám 2 neznámé exponenty, a jelikož nás zajímá vztah pro v , můžeme nastavit $c = 1$ a přeskádat rovnici na

$$v = \text{konst} \cdot l^a \cdot g^b.$$

Dalším krokem je porovnání jednotek:

$$\text{m} \cdot \text{s}^{-1} = \text{m}^a \cdot (\text{m} \cdot \text{s}^{-2})^b = \text{m}^{a+b} \cdot \text{s}^{-2b}.$$

Porovnáním exponentů²⁾ u metru a sekundy dostaneme

$$a + b = 1, \quad -2b = -1,$$

odkud

$$b = \frac{1}{2}, \quad a = \frac{1}{2}.$$

Výsledkem je

$$v = \xi \cdot \sqrt{g \cdot l},$$

kde ξ je bezrozměrná konstanta. Tu rozměrová analýza neprozradí, ale stačí ji odhadnout z jediného měření. Ekvivalentně: kombinace

$$\xi = v / \sqrt{g \cdot l}$$

je u chůze univerzální bezrozměrné číslo pro všechny chodící tvory.

Úloha [2b]

Stopkami a metrem změřte rychlost pohodlné chůze několika co nejvíc různě vysokých kamarádů a délku jejich nohy (od kyčle k zemi). Vyneste v proti $\sqrt{l}$. Vyjde přímka? Odhadněte z ní konstantu ξ .

Úloha [1b]

Na Měsíci je g přibližně šestkrát menší než na Zemi. Jakou rychlostí byste tam chodili? Srovnajte s tím, co popisovali měsíční astronauti – proč „normální“ chůze na Měsíci nefungovala a raději přešli na charakteristické poskakování?

Problém. Najděte rychlost pohodlné chůze a délku nohy pro co nejvíce zvířat (slon, kráva, pes, kočka, kuře, ...). Vyneste do grafu v proti $\sqrt{g \cdot l}$ a ověřte, zda body leží na společné křivce (nebo přímce na log-log grafu). Pozor: do datasetu patří jen zvířata, která *skutečně kráčejí* (rovná, svisle stojící noha během opory) – ne ta, která skáčou, cválají nebo chodí s nohama horizontálně jako někteří plazi. Pasuje to?³⁾

Problém. Proč je běh rychlejší než chůze, když náš vztah pro kyvadlo dává jedinou „přirozenou“ rychlost?

Nápověda: Co dělá běžčova noha v okamžiku, kdy se vrací dopředu – změnila se efektivní délka? Jaké dva efekty ovlivňuje délka a který byl ovlivněn?

²⁾ Jelikož proměnné násobíme, tak exponenty můžeme sčítat.

³⁾ Srovnávací dataset rychlostí chůze a rozměrů končetin u savců najdete např. v Alexander, R. McN.: *Principles of Animal Locomotion* (Princeton UP, 2003), graf 7.1.

Postup v rozměrové analýze

Co jsme právě udělali, se dá zformulovat jako návod:

1. **Sepište pravděpodobné proměnné.** Radši víc než méně.
2. **Zapište rozměry všech proměnných** v základních jednotkách (metr, sekunda, kilogram).
3. **Vyřaďte proměnné s unikátními rozměry.** Není možné je s ničím vykrátit pro tvorbu bezrozměrných skupin.
4. **Zkuste najít vztahy mezi veličinami se stejným rozměrem.** Někdy se jich můžeme zbavit úplně jako v prvním příkladě, jindy se nám povede najít mezi nimi vztah případně obsahující bezrozměrnou konstantu (uvidíme v posledním příkladě).
5. **Sestavte skupiny, které splňují počet proměnných = počet rozměrů + 1.**
6. **Spočítejte exponenty, aby skupiny byly bezrozměrné.** Porovnáním rozměrů se mocniny doladí tak, aby se exponenty každého rozměru sečetly na nulu.
7. Pokud máte pouze jednu bezrozměrnou skupinu, můžete triviálně sestavit rovnici $1 = \xi \cdot \{S\}$. Pokud více, tak to potřebujete dořešit jinak než rozměrovou analýzou.

Tuhle kostru teď uvidíme na příkladu, kde seznam veličin není hned zřejmý.

Vlny na hladině

Podívejme se teď na jiný systém, kde se stejný rozměrový trik hodí. Hodíte kamínek do dostatečně hlubokého rybníka a sledujte kružnice, které se rozběhnou od místa dopadu. Jakou rychlostí c se takové vlny šíří?

Omezíme se na hluboké vlny (tedy na situaci, kdy je hloubka vody větší než půlka vlnové délky) a na vlny delší než 5 cm (protože v menších dělá velký efekt povrchové napětí).

Co může rychlost c ovlivnit? Kamínek hladinu vychýlí z rovnováhy a gravitace ji tlačí zpět dolů; setrvačnost rozhýbané vody rozkmit udržuje. Sepišme kandidáty:

- vlnová délka λ s rozměrem m ,
- tíhové zrychlení g s rozměrem $m \cdot s^{-2}$,
- hustota vody ρ s rozměrem $kg \cdot m^{-3}$.

A teď se stane něco povědomého. Hustota musí vypadnout. Proměnná ρ je jediná, která v sobě nese kilogramy; rychlost c kilogramy neobsahuje, takže ρ nemá čím své kilogramy zkrátit a musí se objevit s nulovým exponentem. Je to přesně stejný krok jako u chůze, kde ze stejného důvodu vypadla hmotnost. Fyzikálně to dává smysl: obnovující síla na vlnu škáluje s ρ (tíha vychýleného sloupce vody) a setrvačnost rozkmitané vody taky s ρ , takže se v poměru, který určuje rychlost, vykrátí – stejně jako se u kyvadla vykrátí hmotnost.

Zbyly nám tři proměnné c , λ , g a dva rozměry (m, s), tedy jedna bezrozměrná skupina. Hledáme $c = \text{konst} \cdot \lambda^a \cdot g^b$. Srovnáním rozměrů:

$$\text{m} \cdot \text{s}^{-1} = \text{m}^a \cdot (\text{m} \cdot \text{s}^{-2})^b = \text{m}^{a+b} \cdot \text{s}^{-2b}.$$

Z exponentu u sekundy $-2b = -1$, tedy $b = 1/2$; z exponentu u metru $a + b = 1$, tedy $a = 1/2$. Vychází

$$c = \varphi \cdot \sqrt{g \cdot \lambda},$$

kde φ je bezrozměrná konstanta.

Vyšlo nám, že dlouhé vlny utíkají před krátkými – tomuhle jevu se říká disperze a je to důvod, proč se z neuspořádaného šplouchnutí časem rozjede úhledný vlnový balík: dlouhé komponenty běží napřed, krátké se opožďují.

Problém. Ověřte vztah $c = \varphi \cdot \sqrt{g \cdot \lambda}$ experimentálně a najděte φ . Najděte si klidnou vodní hladinu – rybník, okraj jezera, bazén nebo velkou vanu – s hloubkou alespoň 10 cm. Ideálně bez větru a vln, ať jsou vaše vlny vidět. Hod'te do vody hladký oblázek (průměr zhruba 1–5 cm) ze zvolené výšky mezi 20 cm a 1 m a natočte dopad zpomaleným videem na mobilu. Potřebujete nějak určit měřítko – buď umístíte pravítko poblíž dopadu, nebo si změříte vzdálenost mobilu od dopadu a spočítáte velikost pixelu. Vyzkoušejte několik kombinací kamínků a výšek, vyberte si, v jakých případech jsou rozbíhající se vlny dobře vidět. Rychlost vlny bude záležet pouze na vlnové délce a každý hod vytvoří několik vln o různých vlnových délkách. Z videí odečtěte pro několik různých hřebenů jejich vlnovou délku λ (vzdálenost mezi sousedními hřebeny) a jejich rychlost c (vzdálenost uraženou mezi dvěma snímky dělenou časem mezi nimi). Vyneste c^2 proti λ na lineárních osách a změřte sklon. Z toho spočítejte φ . Odevzdejte taky fotky, videa, případně s anotacemi.



Vibrace struny

Představte si napnutou strunu – třeba strunu kytary, gumičku přes krabičku od sirek nebo prádelní šňůru. Má lineární hmotnost μ (v kg/m) a je napnutá silou T (v $\text{N} = \text{kg m s}^{-2}$). Cvrnknete do ní příčně a po struně se rozběhne vlna – podobně jako se v předchozím experimentu rozbíhaly vlnky po hladině, akorát teď jednodimenzionálně. Seznam proměnných je tentokrát krátký, postup ale zůstává stejný jako u kapilárních vlnek: sepište kandidáty, запиšte jejich rozměry, slepte bezrozměrnou kombinaci a přečtěte odpověď.

Úloha [3b]

Jakou rychlostí v se rozběhnou vlny po prádelní šňůře? Předpokládejte, že gravitace se dá zanedbat, jelikož je napnutí struny dost silné.

Když jsou faktory dva

Rozměrová analýza bývá nejzajímavější tam, kde se jeden jev rozpadá na dva nezávislé škálovací zákony. Zpět k parníku z úvodu: loď při pohybu vodou táhne dvě odlišné se škálující složky odporu: *vlnový odpor* (loď si na hladině vytváří soustavu vln, jejichž energie mizí za záďí) a *třecí odpor* (tenká vrstva vody u trupu se pohybuje s lodí, vzniká viskózní tření po celé smáčené ploše). Každá má vlastní bezrozměrnou kombinaci: vlnový odpor škáluje s $v/\sqrt{g \cdot L}$ (rychlost lodi, gravitační zrychlení, délka lodi), třecí odpor na jiné kombinaci rychlosti, délky a vlastností vody. Obě kombinace nelze na zmenšeném modelu dodržet současně.

Jedno řešení, co se nabízí, je naškálovat jeden model, aby byl vlnový odpor zanedbatelný a třecí správně, druhý model, aby byl třecí odpor zanedbatelný, ale vlnový správně. Problém je, že abychom třecí odpor naškálovali správně, natož zanedbatelně, tak potřebujeme kapaliny řádově méně viskózní než vodu, a takové kapaliny se špatně hledají.

Druhé řešení, které v tomto případě je nutno využít, je, že třecí odpor se vlastně dá docela dobře spočítat. Vlnový odpor je ten složitý, který velmi záleží na přesném tvaru lodi. Takže naškálujeme model, aby vlnový odpor odpovídal (loď jede patřičně pomaleji, aby byly vlny geometricky podobné), od změřeného odporu odečteme třecí odpor pro model, a zbylý vlnový odpor naškálujeme. Tento postup se používal pro vývoj lodí od druhé půlky 19. století.

Modelování síla

Zemědělské silo, dávkovač léků nebo obyčejná slánka – všechno to jsou úlohy o tom, jak rychle vypadává sypký materiál otvorem dole. Jelikož je silo velká stavba, je to příklad, kde se rozměrová analýza používala v praxi pro pochopení chování z vhodného modelu. Budeme se snažit zjistit, jaký hmotnostní průtok Q (v kg/s) vyteče kruhovou aperturou o průměru D .

Nejprve si ale povíme o sypkých materiálech. Sypká hmota se chová jinak než kapalina. Zrna se o sebe opírají a přenášejí si zatížení přes *silové řetězce* – náhodné řetězy bodových dotyků, po kterých většina tíhy sloupce neputuje rovnou dolů, ale šikmo v těch směrech, kde je více opory.

- **Proč výška náplně nehraje roli.** Jakmile se nad otvorem vytvoří krátká klenba (zrnka se dočasně zaklíní do klenby), proudí materiál jen rychlostí, jakou se tato klenba hroutí. Svislé napětí ve sloupci se s hloubkou navíc saturuje – přestává růst, protože tíhu přebírají boční stěny přes tření. Tlak u dna nezávisí na tom, jak vysoko je silo naplněné (proto je v hromadě obilí spodní zrno rozdrcené méně, než by člověk naivně čekal). Průtok otvorem tedy nezávisí na výšce náplně – rozhoduje jen lokální geometrie kolem otvoru.
- **Sypná hmotnost.** U sypké hmoty je dobré rozlišovat dvě veličiny. Hustota materiálu zrna (třeba křemen u písku $\approx 2650 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$) popisuje, z čeho je jedno zrno udělané. Pro proudění ze síla ale potřebujeme sypnou hmotnost (někdy též sypnou hustotu) ρ – hmotnost volně nasypané hmoty na celkový objem, který zaujímá, včetně dutin mezi zrny. Typicky je 50–65 % hustoty pevného zrna. Toto je ta veličina, kterou chcete použít pro hustotu. Pokud ji budete potřebovat měřit, tak porovnáváte objem sypkého materiálu včetně dutin a jeho hmotnost, musíte si tedy změřit objem v odměrce.

Úloha [4b]

Pomocí rozměrové analýzy odvoďte vztah pro hmotnostní průtok Q . Dospějte k formuli v uzavřeném tvaru (až na 2 bezrozměrné konstanty).

Nápověda: Jsou tam dvě relevantní délkové proměnné – průměr otvoru D a velikost zrna d . Jelikož velikost zrna zmenšuje efektivní otvor, stačí tyto dvě proměnné používat pouze ve tvaru $(D - \theta \cdot d)$, kde θ je bezrozměrná konstanta.

Problém. Sestavte si doma vlastní malé silo a ověřte škálování z úlohy 4. Chcete docela rovné dno a možnost měnit velikost díry nebo několik sil s různě velkými dírami, cca mezi 3 mm a 3 cm. Sypejte různé materiály – mouku (ale ne hladkou, tam už příliš působí molekulární síly), krystalový cukr, kuskus, čočku, cizrnu nebo cokoli jiného, co se sype alespoň jednou z dírek.

Pro každou kombinaci změřte, za jak dlouho vyteče známé množství materiálu, a spočítejte Q . Q bude docela konstantní, než sypká hmota v silu začne docházet. Vyneste $\log Q$ proti $\log D$ a porovnejte sklon s teoretickou předpovědí (používáme log-log graf, protože z x^a se stane přímka ax' a je tedy mnohem snazší změřit proměnnou a z grafu). Odhadněte obě bezrozměrné konstanty a diskutujte odchylky. Pro jeden zvolený otvor navíc ověřte, že Q nezávisí na výšce náplně. Odevzdejte taky fotky, videa, případně s anotacemi.

Další témátka z časopisu M&M i odevzdávátka na řešení úloh najdete na <https://mam.mff.cuni.cz/>.

BRněnský KOrespondenční Seminář

Adéla Heroudková (za organizátory semináře)

BRKOS je matematický korespondenční seminář určený pro všechny středoškolačky a středoškoláky (a klidně i základoškolačky a základoškoláky), kteří mají rádi matematiku a řešení netradičních problémů. Soutěž je organizována za podpory Ústavu matematiky a statistiky Přírodovědecké fakulty Masarykovy univerzity.

Jak soutěž probíhá?

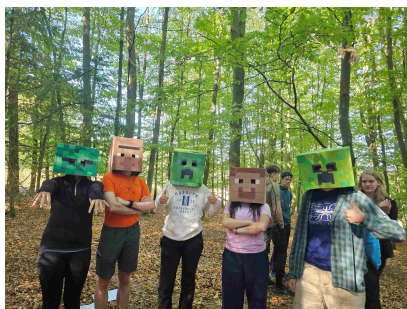
V průběhu roku Vám budeme postupně zadávat příklady k řešení. Budou rozděleny do 5 sérií po 8 příkladech. První čtyři příklady z každé série budou vždy tematicky zaměřené a často k nim je i studijní text. Snažíme se vybírat zajímavé příklady z různých oblastí matematiky. Některé příklady jsou ve stylu matematické olympiády, ale najdete i příklady inspirované naším studiem na vysoké škole.

Pokud nespočítáte všechno, nemusíte být smutní, klidně můžete poslat řešení jediného příkladu. Náš bodovací systém zvyhodňuje zejména mladší řešitele oproti starším a také ty, kteří pilně posílají hodně sérií, ač s malým množstvím správně vyřešených příkladů. Navíc ke každému příkladu dostanete zpětnou vazbu, takže pokud vydržíte, určitě se budete postupně zlepšovat. První série bývá na téma důkazy, aby se každý mohl dozvědět ve studijním textu základní dokazovací techniky a následně si je procvičit na tematických úlohách.

Co děláme dál

MathRace: MathRace je matematická týmová online soutěž určená primárně studentům středních škol, nicméně v nesoutěžních týmech (v kategorii Underground) se může zúčastnit kdokoliv. Soutěží společně dvoučlenné až čtyřčlenné týmy středoškoláků z České i Slovenské republiky, mající za úkol během 3 hodin vyřešit 45 úloh. Příští MathRace se bude konat již ve čtvrtek 26. listopadu 2026.

Soustředění: Dvakrát ročně (v létě a v zimě) pořádáme týdenní matematické soustředění. V jeho průběhu se střídají bloky přednášek na různá témata (od olympiádních úloh přes vysokoškolskou matematiku až po popularizační matematiku) a akční hry v táborovém duchu. Skvělou atmosféru na soustředění si můžete přiblížit na fotografiích z posledních ročníků.



Příklady

Pro větší motivaci k řešení úloh naší soutěže přikládáme několik příkladů z první série, s termínem odevzdání 26. 10.

Příklad 1. Máme krychli $ABCDEFGH$, ve které je bod X její střed (průsečík tělesových úhlopříček). Okolím bodu K nazveme množinu bodů uvnitř krychle, které mají od bodu K menší vzdálenost než od ostatních pojmenovaných bodů. Určete poměr objemů okolí bodu A ku okolí bodu X .

Příklad 2. Dokažte, že neexistuje konečně mnoho racionálních čísel $x_1, x_2, \dots, x_n$ takových, že libovolné racionální číslo q jde napsat ve tvaru

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n,$$

kde $a_1, \dots, a_n$ jsou přirozená čísla.

Příklad 3. O čísle n řekneme, že jde o ciferný podsoučin čísla x , pokud jde o součin několika jeho cifer, nejméně jedné a nejvýše všech. Např. pro číslo 743 jsou všechny jeho ciferné podsoučiny $84 = 7 \cdot 4 \cdot 3$, $28 = 7 \cdot 4$, $21 = 7 \cdot 3$, $12 = 4 \cdot 3$, 7, 4, 3. Dokažte, že libovolné přirozené číslo je větší nebo rovno součtu všech jeho ciferných podsoučinů, a určete, kdy nastává rovnost.

Zbýlé příklady můžete najít na stránce <https://brkos.math.muni.cz>.



Rotationally Multiplicative Integers

Daniel Dlab, Sardinia, Italy

1 Introduction

On the eve of Christmas 1949, the polymath Jacob Bronowski posed an intriguing numerical puzzle: find the smallest positive integer such that moving its leading digit to the end yields a new number exactly one and a half times the original [1]:

$$\frac{3}{2} \times 1\,176\,470\,588\,235\,294 = 1\,764\,705\,882\,352\,941.$$

In the February 1955 issue of *The Mathematical Gazette*, D. E. Littlewood provided an elegant derivation of the solution [2]. In that same issue, E. J. F. Primrose took the problem further [3]. Rather than fixing the ratio at $\frac{3}{2}$, Primrose asked which pairs (p, q) admit a solution at all—that is, for which rational numbers $\frac{p}{q}$ does there exist an integer whose digit rotation produces a number exactly $\frac{p}{q}$ times the original, observing that many pairs render the puzzle insoluble. That question of realizability is not the one we settle here; we mention it because it shows how quickly the puzzle opens out once the ratio is allowed to vary.

A few years later, in *The Gentle Art of Mathematics*, Daniel Pedoe revisited Bronowski's puzzle, offering a concrete solution and systematic method [4]. Pedoe showed that the problem can be understood by analyzing how cyclic digit shifts correspond to multiplication by fractions whose decimal expansions are repeating. Yet Pedoe himself was dismissive of the puzzle's mathematical standing, remarking that “the problem itself is one which most mathematicians would call *trivial*, because it leads nowhere, and does not fit into a general theory” [4, p. 16]. It is precisely this qualification that we wish to gently contest: as the sections below demonstrate, the puzzle is in fact an instance of a general theory of digit rotations driven by repeating decimal expansions, one that admits a clean algebraic formulation and extends naturally to composite divisors and arbitrary offsets.

Variants of such rotational multiplication puzzles appear in earlier recreational works, notably Henry Ernest Dudeney's *Amusements in*

Mathematics (1917) [5], suggesting that the underlying idea predates Bronowski's formulation.

Although often introduced as recreational puzzles, these problems have a natural algebraic structure: rotating the digits of a repeating block is exactly what happens when the *Euclidean division* (that is, integer division with remainder) producing that block is restarted one step further along, so the whole question is governed by the cycle of remainders that the division runs through. In this paper, we examine the problem in greater depth and present several generalizations along with notable findings.

We believe the material is elementary enough—requiring nothing beyond division and careful bookkeeping of its remainders—to be a worthwhile addition to mathematics at primary and secondary school level.

2 From Remainders to Rotations

We begin by defining the function $\rho(x)$, which reorders the digits of a positive integer x by moving its leftmost digit to the rightmost position, effectively performing a left rotation (or cyclic shift) of the number's digits. Bronowski's puzzle is therefore asking for the smallest x such that $\rho(x) = \frac{3}{2}x$, or equivalently, $2\rho(x) = 3x$.

There is nothing special about the value $\frac{3}{2}$. Let us give a few examples of numbers x for which $\rho(x) = \frac{1}{k} \times x$ for $k = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ and 9 .

Dividing the number 10^{19} by 19 gives

$$\frac{10^{19}}{19} = 526\,315\,789\,473\,684\,210.\overline{526\,315\,789\,473\,684\,210}$$

and the digits after the decimal point never settle: they repeat forever in blocks of eighteen. Such a repeating block is called the *repetend* (sometimes also the *period*) of the division, and it is the repetend itself that interests us here. Taking it as our number

$$x = 526\,315\,789\,473\,684\,210,$$

we can readily check that $\rho(x) = \frac{1}{2} \times x$. Every example below is obtained the same way, as the repetend of the division of a suitable dividend by a specified divisor; the process is examined in detail in the rest of this section.

The dividend decides only where we enter the repetition. Dividing 10^{18} by 19 instead gives

$$\frac{10^{18}}{19} = 52\,631\,578\,947\,368\,421.\overline{052\,631\,578\,947\,368\,421},$$

the very same eighteen digits in the very same order, but read from one step earlier. Notice that this block opens with a zero. A repetend may perfectly well begin with 0, and it is worth being alert to this from the outset; Remark 3 returns to the difference it makes when we wish to read such a block as an integer.

Similarly, dividing 24×10^{28} by 29, we obtain the repetend

$$x = 8\,275\,862\,068\,965\,517\,241\,379\,310\,344,$$

satisfying $\rho(x) = \frac{1}{3} \times x$.

Dividing 12×10^6 by 13, 16×10^6 by 39, or 4×10^6 by 39, we obtain the repetends $x = 923\,076$, $x = 410\,256$ and $x = 102\,564$ respectively, all three satisfying $\rho(x) = \frac{1}{4} \times x$. The last of the three shows the same thing from the other side: its rotation $\rho(102\,564) = 025\,641$ is a block beginning with a zero. The repetend $x = 714\,285$, obtained from the division $\frac{5 \times 10^6}{7}$, satisfies $\rho(x) = \frac{1}{5} \times x$.

Dividing 54×10^{58} by 59, we obtain the repetend

$$x = 9\,152\,542\,372\,881\,355\,932\,203\,389\,830\,508\,474 \\ 576\,271\,186\,440\,677\,966\,101\,694,$$

satisfying $\rho(x) = \frac{1}{6} \times x$. The two repetends

$$x = 9\,130\,434\,782\,608\,695\,652\,173 \quad \text{and} \quad x = 7\,101\,449\,275\,362\,318\,840\,579,$$

resulting from the division of 21×10^{22} by 23 and of 49×10^{22} by 69 respectively, both satisfy $\rho(x) = \frac{1}{7} \times x$.

Finally, dividing 64×10^{13} by 79 results in the repetend

$$x = 8\,101\,265\,822\,784,$$

for which $\rho(x) = \frac{1}{8} \times x$, while dividing 81×10^{44} by 89 yields the repetend

$$x = 91\,011\,235\,955\,056\,179\,775\,280\,898\,876\,404\,494\,382\,022\,471,$$

satisfying $\rho(x) = \frac{1}{9} \times x$.

Let us point out that the examples above use five of the nine primes p smaller than 100 whose repetends have length $p - 1$. The remaining four are $p = 17$, $p = 47$, $p = 61$ and $p = 97$.

Our focus will be on characterizing those integers x that exhibit a scaled rotational symmetry; that is, integers for which a digit rotation satisfies

$$B \times \rho(x) = A \times x,$$

where A and B are positive integers with $A \neq B$.

To understand the structure underlying such numbers, we begin by examining the division of natural numbers, paying particular attention to the appearance of repeating decimal blocks. As a first example, consider

$$\frac{1\,000\,000}{7} = 142\,857.\overline{142\,857}.$$

Again the quotient repeats, here with a repetend of six digits. Writing out the division explicitly

$$\begin{array}{r} 1000000 : 7 = 142857 \\ -7 \\ \hline 30 \\ -28 \\ \hline 20 \\ -14 \\ \hline 60 \\ -56 \\ \hline 40 \\ -35 \\ \hline 50 \\ -49 \\ \hline 1 \end{array}$$

We eventually obtain a remainder of 1, so the division process must repeat, producing the six-digit repetend 142857. The intermediate remainders

$$3, 2, 6, 4, 5, 1$$

are not incidental; they encode the rotational structure. Writing each step of the division, we have

$$\begin{array}{ll} 10 = 1 \times 7 + 3 & 3 \times 10 = 4 \times 7 + 2, \\ 2 \times 10 = 2 \times 7 + 6 & 6 \times 10 = 8 \times 7 + 4, \\ 4 \times 10 = 5 \times 7 + 5 & 5 \times 10 = 7 \times 7 + 1. \end{array} \quad (1)$$

We can also take each remainder as being the start of a new number dividend, so we can generate a series of interesting equations

$$\begin{array}{l} 3 \times 1\,000\,000 = 428\,571 \times 7 + 3, \\ 2 \times 1\,000\,000 = 285\,714 \times 7 + 2, \\ 6 \times 1\,000\,000 = 857\,142 \times 7 + 6, \\ 4 \times 1\,000\,000 = 571\,428 \times 7 + 4, \\ 5 \times 1\,000\,000 = 714\,285 \times 7 + 5, \\ 1 \times 1\,000\,000 = 142\,857 \times 7 + 1, \end{array}$$

hence, subtracting each remainder from both sides and dividing by 7,

$$\frac{428\,571}{3} = \frac{285\,714}{2} = \frac{857\,142}{6} = \frac{571\,428}{4} = \frac{714\,285}{5} = \frac{142\,857}{1}.$$

This leads us to several equations of the desired format

$$\begin{array}{l} 3 \times 285\,714 = 2 \times 428\,571, \\ 2 \times 857\,142 = 6 \times 285\,714, \\ 6 \times 571\,428 = 4 \times 857\,142, \\ 4 \times 714\,285 = 5 \times 571\,428, \\ 5 \times 142\,857 = 1 \times 714\,285. \end{array}$$

We can now clearly see that the factors A and B are determined by consecutive remainders. An integer read off from one full period of a repeating block in this way—142 857, 428 571, 285 714 and the other three above—will be called a *repetend integer*.

3 Offsets and t -Rotations

As a further step, we can look at jumps of two or more, where each factor is determined not by immediately adjacent remainders but by those separated by a fixed *offset*.

We define the function $\rho_t(x)$ on an integer x as the operation that rotates its digits to the left by t positions. A single such step is the rotation we started with, so ρ_1 is the function ρ of Section 2, and we use the two names interchangeably from here on.

So by taking the remainders 3 and 6, for example, with a remainder offset of 2, we isolate these two ratios from above

$$\frac{428\,571}{3} = \frac{857\,142}{6},$$

to get

$$3 \times 857\,142 = 6 \times 428\,571 \quad \Rightarrow \quad 1 \times \rho_2(428\,571) = 2 \times 428\,571.$$

We can describe all possible offset-ratio combinations in Table 1 below. To use it, locate the column corresponding to your chosen starting remainder, then look down to the row for your desired offset. The cell gives the ratio $\frac{A}{B}$ such that $B \times \rho_t(x) = A \times x$, where x is the repetend integer associated with that remainder. The topmost row records, for each remainder r , the leading digit $\lfloor \frac{10r}{7} \rfloor$ of its repeating block—read left to right, these digits spell out the repetend 142857 itself. For example, starting at remainder 3 with offset 2, we read off ratio 2, confirming the equation

$$1 \times \rho_2(428\,571) = 2 \times 428\,571$$

derived above.

Repetend Digit	1	4	2	8	5	7
Intermediate Remainder	1	3	2	6	4	5
Offset 1	3	2/3	3	2/3	5/4	1/5
Offset 2	2	2	2	5/6	1/4	3/5
Offset 3	6	4/3	5/2	1/6	3/4	2/5
Offset 4	4	5/3	1/2	1/2	1/2	6/5
Offset 5	5	1/3	3/2	1/3	3/2	4/5

Table 1: Offset-Ratio Table for Divisor 7

Entries with bold figures represent the special cases where either $A = 1$ or $B = 1$.

Remark 1. Note that $p - 1 = 6$ is exactly the number of nonzero remainders that division by 7 can leave, and that these six remainders—1, 3, 2, 6, 4, 5 in cycle order—are precisely the “Intermediate Remainder” row of Table 1, with none left over. That is, the single cycle traced out by repeatedly multiplying by 10 and keeping the remainder on division by 7 is as long as it could possibly be: it visits every nonzero remainder, leaving none outside it. Consequently any two remainders in the cycle can serve as the starting pair—each such pair already appears somewhere in the table, at some offset.

It is worth noting what happens when we begin with a different starting dividend $R \times 10^n$. Provided the remainder left by dividing R by 7 is nonzero, this simply enters the same remainder cycle seen in (1) at a different point; the cyclic structure is a robust property of the divisor itself. (For $d = 7$ specifically, this excludes $R = 7$, which instead gives an initial remainder of 0 and hence a terminating, rather than repeating, division.)

4 Algebraic Formulation

Now that we understand the basics we can describe this formally. Before giving a definition, we agree to write an integer

$$x = \sum_{i=0}^k c_i 10^i$$

simply as a sequence of $k + 1$ digits $x = c_k c_{k-1} \dots c_1 c_0$.

Here, all numbers c_i , $0 \leq i \leq k$ are digits, i.e., natural numbers $0 \leq c_i \leq 9$, with the requirement that $c_k \neq 0$ (ensuring the representation has exactly $k + 1$ digits).

This notation will make what follows much easier to read.

Definition 1. Let r and d be natural numbers with $0 < r < d$ and $\gcd(r, d) = 1$, where d is a multiple of neither 2 nor 5. A natural number $x = c_k c_{k-1} \dots c_1 c_0$ with $c_k \neq 0$ is called the *minimal repetend* of the fraction $\frac{r}{d}$ if:

1. The equation

$$r \times 10^{k+1} = d \times x + r \tag{2}$$

holds, and

2. The length $k+1$ is minimal, i.e., there is no smaller positive integer $m < k+1$ and no natural number x' with m digits such that $r \times 10^m = d \times x' + r$.

Remark 2. We use the term *rotation* throughout, though this can equivalently be described as moving the first digit to the end of the number.

Remark 3. Definition 1 is what makes the repetend integers of Section 2 precise: the requirement $c_k \neq 0$ is what allows a repeating block to be read as an integer of exactly $k+1$ digits, and the minimality condition pins it to a single period. The distinction is worth drawing, because the repeating block of $\frac{r}{d}$ can itself begin with 0—for instance $\frac{1}{13} = 0.\overline{076923}$. Such a block is a valid repeating *digit string*, but it is not a minimal repetend. Every cycle of remainders nonetheless contains at least one remainder whose block has a nonzero leading digit—for the $\frac{1}{13}$ cycle, $\frac{10}{13} = 0.\overline{769230}$ —and it is such a remainder that supplies the repetend integer we multiply.

This fixes our notation for the rest of the paper. An integer is never written with a leading zero: the digit string 042 857 is not a notation for the number 42 857. A repeating block, by contrast, is a digit string of the fixed length $k+1$, and it may perfectly well begin with 0. Rotation acts on such a block as a string of $k+1$ digits, and reading the result as a number discards any leading zeros—so a rotation of a repetend integer need not itself be one. Wherever we multiply, then, the multiplicand is a repetend integer in the sense of Definition 1, its leading digit c_k nonzero, while the rotated result is allowed to carry leading zeros.

Now let's write out the division steps in (1) using similar notation. For convenience we number our 6 steps from 5 to 0 as our repetend digits come out left to right.

In general at each step i we have

$$r_i \times 10 = c_i \times d + r_{i-1}. \quad (3)$$

Here the indices of r (and, throughout, of c) are understood cyclically: they run $k, k-1, \dots, 1, 0$ and then begin again at k . So when $i=0$ the symbol r_{i-1} is to be read as r_k , the step wrapping back around to where it started.

Now let's formalize the results from our offset-ratio combinations table.

Theorem 4. *Using the notation in (3) for a repetend $x = c_k c_{k-1} \dots c_1 c_0$ as defined in (2), then for any $0 \leq i \leq k$,*

$$c_{i-1} c_{i-2} \dots c_1 c_0 c_k \dots c_{i+1} c_i = \left(\frac{r_{i-1}}{r_i} \right) (c_i c_{i-1} \dots c_1 c_0 c_k \dots c_{i+1}). \quad (4)$$

Proof. By (2) we have $r_i \times 10^{k+1} = d \times (c_i c_{i-1} \dots c_1 c_0 c_k \dots c_{i+1}) + r_i$ and $r_{i-1} \times 10^{k+1} = d \times (c_{i-1} c_{i-2} \dots c_1 c_0 c_k \dots c_{i+1} c_i) + r_{i-1}$.

Hence

$$c_i c_{i-1} \dots c_1 c_0 c_k \dots c_{i+1} = \frac{r_i(10^{k+1} - 1)}{d}$$

and

$$c_{i-1} c_{i-2} \dots c_1 c_0 c_k \dots c_{i+1} c_i = \frac{r_{i-1}(10^{k+1} - 1)}{d}.$$

Therefore

$$c_{i-1} c_{i-2} \dots c_1 c_0 c_k \dots c_{i+1} c_i = \left(\frac{r_{i-1}}{r_i} \right) (c_i c_{i-1} \dots c_1 c_0 c_k \dots c_{i+1}),$$

as required. □

Theorem 4 can be extended by generalizing the offset-ratio combinations we discussed above, applying (4) repeatedly to obtain the following.

Extension 5. *For any $1 \leq t \leq k$,*

$$c_{i-t} c_{i-t-1} \dots c_1 c_0 c_k \dots c_{i-t+1} = \left(\frac{r_{i-t}}{r_i} \right) (c_i c_{i-1} \dots c_1 c_0 c_k \dots c_{i+1}),$$

where the indices of c and r are again understood cyclically, as in (3).

Taking $t = 1$ recovers (4) exactly. We are now in a position to say something about the question Primrose raised [3], mentioned in the Introduction: which ratios can be obtained at all?

Corollary 6. *Suppose there exist arbitrarily large primes p whose repetends have length $p - 1$. Then*

- (i) *every ratio $\frac{u}{v}$ of two natural numbers u and v with $u \neq v$ and $\frac{u}{v} < 10$ can be obtained by the procedure described in Extension 5, the multiplicand being a repetend integer as in Definition 1; and*
- (ii) *if the multiplicand is allowed to be a repeating block with leading zeros, then every ratio $\frac{u}{v}$ with $u \neq v$ whatsoever can be obtained.*

The bound $\frac{u}{v} < 10$ in part (i) cannot be dropped, and the convention of Remark 3 is exactly what makes it true. A repetend integer x of $k+1$ digits satisfies $x \geq 10^k$, while any rotation of it is at most $10^{k+1} - 1$, so the ratio of a rotation to x itself is always smaller than 10. If the leading digit is permitted to be 0, the argument fails at its very first step, and part (ii) is what results instead.

This is also why the tables that follow carry entries such as 16 and 19. An entry is $\frac{r_{i-t}}{r_i}$, and it reaches 10 or more only if $r_{i-t} \geq 10r_i$; since $r_{i-t} \leq d-1$, this forces $10r_i < d$, which says precisely that the leading digit $\lfloor 10r_i/d \rfloor$ of the block at position i is 0. Conversely, when that leading digit is 0 we have $r_{i-1} = 10r_i$ exactly, so the offset-1 entry of that column is 10. Such a remainder is starred in the tables that follow: its column is the one whose block begins with 0, so by Remark 3 the identities read off there hold between digit strings of fixed length rather than between integers, and it is exactly there that an entry of 10 or more can appear.

The supposition, on the other hand, is not something we can discharge. Whether there are arbitrarily large primes whose repetends attain the full length $p-1$ is a long-standing open question, a special case of a conjecture of Artin; see [6] for a survey.

5 Composite Divisors

Neither the Definition of a minimal repetend nor the Theorem in Section 4 assumed that d was prime; both require only that $\gcd(r, d) = 1$ and that d be a multiple of neither 2 nor 5. The example built around $d = 7$ was simple in a particular way: all six nonzero remainders $1, \dots, 6$ are automatically coprime to a prime d , and they happened to form a single cycle under repeated multiplication by 10, so every one of them was a rotation of the same repetend, 142857. For composite d this need not happen.

Consider $d = 21$. There are 12 remainders coprime to 21, and under repeated multiplication by 10, keeping the remainder on division by 21 at each step, they split into two disjoint cycles of length 6:

$$\{4, 19, 1, 10, 16, 13\} \quad \text{and} \quad \{5, 8, 17, 2, 20, 11\}.$$

These give two genuinely different repetend integers, neither a rotation of the other:

$$\frac{4}{21} = 0.\overline{190476} \quad \text{and} \quad \frac{5}{21} = 0.\overline{238095}.$$

Let us point out that these two cycles do not exhaust the twenty nonzero remainders. Setting aside for a moment the requirement that r be coprime to d , the division $\frac{3}{21} = 0.142857$ gives yet another repetend of length six, namely 142857, with remainders $\{3, 9, 6, 18, 12, 15\}$ —and one we have already met, since $\frac{3}{21} = \frac{1}{7}$. Thus $d = 21$ has three repetends of length six; the remaining two repetends, $\frac{7}{21} = 0.\overline{3}$ and $\frac{14}{21} = 0.\overline{6}$, are of length one.

Table 2 works out the offset-ratio combinations for the first cycle exactly as Table 1 did for $d = 7$; the second cycle has its own, independent table of the same shape, built from 238095 instead. For example, starting at remainder 19 with offset 1, we read off ratio $\frac{1}{19}$, confirming $19 \times \rho_1(904761) = 904761$.

Repetend Digit	1	9	0	4	7	6
Intermediate Remainder	4	19	1*	10	16	13
Offset 1	19/4	1/19	10	8/5	13/16	4/13
Offset 2	1/4	10/19	16	13/10	1/4	19/13
Offset 3	5/2	16/19	13	2/5	19/16	1/13
Offset 4	4	13/19	4	19/10	1/16	10/13
Offset 5	13/4	4/19	19	1/10	5/8	16/13

Table 2: Offset-Ratio Table for Divisor 21 (Cycle Containing Remainder 4). The starred column’s repeating block, 047619, begins with 0; see Remark 3.

This splitting is not tied to primality: $d = 13$ is prime and still splits into two cycles of length 6 (repetends 769230 and 153846), while $d = 17$ is prime and stays as a single cycle of length 16—what matters is whether the remainders coprime to d happen to fall into one cycle or into several, as they fall into one for $d = 7$ and $d = 17$ but not for $d = 13$ or $d = 21$. A prime p whose remainders form a single cycle—necessarily of the greatest length available, $p - 1$ —is called a *full repetend prime* (or *long prime*).

6 Further Divisors

We work out two more divisors in full, chosen to sit at opposite ends of the range just described: $d = 13$, a prime that still splits into multiple cycles, and $d = 17$, a prime whose single cycle is the longest we have seen yet.

$d = 13$

There are 12 remainders coprime to 13, splitting into two cycles of length 6:

$$\{10, 9, 12, 3, 4, 1\} \quad \text{and} \quad \{2, 7, 5, 11, 6, 8\}.$$

$$\frac{10}{13} = 0.\overline{769\,230} \quad \text{and} \quad \frac{2}{13} = 0.\overline{153\,846}.$$

Table 3 works out the first cycle. For example, starting at remainder 9 with offset 2, we read off ratio $\frac{1}{3}$, confirming $3 \times \rho_2(692\,307) = 692\,307$.

Repetend Digit	7	6	9	2	3	0
Intermediate Remainder	10	9	12	3	4	1*
Offset 1	9/10	4/3	1/4	4/3	1/4	10
Offset 2	6/5	1/3	1/3	1/3	5/2	9
Offset 3	3/10	4/9	1/12	10/3	9/4	12
Offset 4	2/5	1/9	5/6	3	3	3
Offset 5	1/10	10/9	3/4	4	3/4	4

Table 3: Offset-Ratio Table for Divisor 13 (Cycle Containing Remainder 10). The starred column's repeating block, 076 923, begins with 0; see Remark 3.

$d = 17$

Here 17 is a full repetend prime, so all sixteen remainders coprime to 17 form a single cycle:

$$\{2, 3, 13, 11, 8, 12, 1, 10, 15, 14, 4, 6, 9, 5, 16, 7\},$$

$$\frac{2}{17} = 0.\overline{1\,176\,470\,588\,235\,294}.$$

Table 4 gives the full offset-ratio grid—all 15 nonzero offsets against all 16 remainders. For example, starting at remainder 2 with offset 10, we read off ratio 2, confirming

$$1 \times \rho_{10}(1\,176\,470\,588\,235\,294) = 2 \times 1\,176\,470\,588\,235\,294.$$

This divisor also settles the puzzle we began with. Bronowski asked for an integer whose single left rotation is exactly $\frac{3}{2}$ times itself, which

in the notation of Section 3 is an entry of $\frac{3}{2}$ in the offset-1 row. Table 4 has one immediately, at remainder 2:

$$2 \times \rho_1(1\,176\,470\,588\,235\,294) = 3 \times 1\,176\,470\,588\,235\,294,$$

that is, $\rho_1(x) = 1\,764\,705\,882\,352\,941 = \frac{3}{2}x$.

Repetend Digit	1	1	7	6	4	7	0	5	8	8	2	3	5	2	9	4
Intermediate Remainder	2	3	13	11	8	12	1*	10	15	14	4	6	9	5	16	7
Offset 1	3/2	13/3	11/13	8/11	3/2	1/12	10	3/2	14/15	2/7	3/2	3/2	5/9	16/5	7/16	2/7
Offset 2	13/2	11/3	8/13	12/11	1/8	5/6	15	7/5	4/15	3/7	9/4	5/6	16/9	7/5	1/8	3/7
Offset 3	11/2	8/3	12/13	1/11	5/4	5/4	14	2/5	2/5	9/14	5/4	8/3	7/9	2/5	3/16	13/7
Offset 4	4	4	1/13	10/11	15/8	7/6	4	3/5	3/5	5/14	4	7/6	2/9	3/5	13/16	11/7
Offset 5	6	1/3	10/13	15/11	7/4	1/3	6	9/10	1/3	8/7	7/4	1/3	1/3	13/5	11/16	8/7
Offset 6	1/2	10/3	15/13	14/11	1/2	1/2	9	1/2	16/15	1/2	1/2	1/2	13/9	11/5	1/2	12/7
Offset 7	5	5	14/13	4/11	3/4	3/4	5	8/5	7/15	1/7	3/4	13/6	11/9	8/5	3/4	1/7
Offset 8	15/2	14/3	4/13	6/11	9/8	5/12	16	7/10	2/15	3/14	13/4	11/6	8/9	12/5	1/16	10/7
Offset 9	7	4/3	6/13	9/11	5/8	4/3	7	1/5	1/5	13/14	11/4	4/3	4/3	1/5	5/8	15/7
Offset 10	2	2	9/13	5/11	2	7/12	2	3/10	13/15	11/14	2	2	1/9	2	15/16	2
Offset 11	3	3	5/13	16/11	7/8	1/6	3	13/10	11/15	4/7	3	1/6	10/9	3	7/8	4/7
Offset 12	9/2	5/3	16/13	7/11	1/4	1/4	13	11/10	8/15	6/7	1/4	5/3	5/3	14/5	1/4	6/7
Offset 13	5/2	16/3	7/13	2/11	3/8	13/12	11	4/5	4/5	1/14	5/2	5/2	14/9	4/5	3/8	9/7
Offset 14	8	7/3	2/13	3/11	13/8	11/12	8	6/5	1/15	5/7	15/4	7/3	4/9	6/5	9/16	5/7
Offset 15	7/2	2/3	3/13	13/11	11/8	2/3	12	1/10	2/3	15/14	7/2	2/3	2/3	9/5	5/16	16/7

Table 4: Offset-Ratio Table for Divisor 17. The starred column’s repeating block, 0588235294117647, begins with 0; see Remark 3.

7 Where This Leads

The general theory the puzzle belongs to rests on three things: a single division, the cycle of remainders it runs through, and the observation that rotating a repetend is only that division restarted one step further along. Bronowski’s number is then one entry in one row of one table, and the same table names every other ratio that divisor will support. What lies past the edge of these tables is the question of which ratios can be obtained at all, taking every divisor together. That is what Primrose asked in 1955, and Corollary 6 answers it only as far as an unproved conjecture allows.

Appendix: Generating Offset Tables

Every offset-ratio table in this paper (Tables 1–4) can be produced by tedious calculation from the sequence of remainders left by a suitable division. We produced ours with a short program instead, which will

do the same for any divisor d coprime to 10. Its source code is publicly available [7], and this appendix describes how it works.

Given d , the program partitions the remainders coprime to d into cycles, each step carrying a remainder r to the remainder left by dividing $10r$ by d —the relation behind (3)—reading off each step’s repetend digit as it goes, exactly as Section 5 does by hand for $d = 21$. Nothing in this process assumes d is prime, so composite divisors fall out of the same code path as prime ones, splitting into as many independent cycles as the remainders require. For each cycle, the program builds its offset-ratio table from the relation in Theorem 4 and expands every entry into the corresponding equation $B \times \rho_t(x) = A \times x$ by rotating the cycle’s actual digit string, so every table and equation in this paper can be checked mechanically.

As the output grows past successive size thresholds, the program writes the table to a file instead of the console, then eventually reports only each cycle’s repetend digits, avoiding a table that would run to gigabytes.

Bibliography

- [1] Bronowski, J.: Mathematical puzzle. *New Statesman and Nation*, roč. 38 (1949), č. 981, 761. https://archive.org/details/sim_new-statesman_1949-12-24_38_981.
- [2] Littlewood, D. E.: 2494. On Note 2298: A digital puzzle. *Math. Gazette*, roč. 39 (1955), č. 327, 58. <https://www.jstor.org/stable/3611102>.
- [3] Primrose, E. J. F.: 2495. A digital puzzle. *Math. Gazette*, roč. 39 (1955), č. 327, s. 58–59. <https://www.jstor.org/stable/3611103>.
- [4] Pedoe, D.: *The Gentle Art of Mathematics*, Macmillan, London, 1959. <https://archive.org/details/gentleartofmathe0000pedo>.
- [5] Dudeney, H. E.: *Amusements in Mathematics*, Thomas Nelson and Sons, London, 1917, Problem 126. <https://archive.org/details/amusementsinmath00dude>.
- [6] Moree, P.: Artin’s primitive root conjecture – a survey. *Integers*, roč. 12 (2012), č. 6, s. 1305–1416. <https://guests.mpim-bonn.mpg.de/moree/surva.pdf>.
- [7] Dlab, D.: *RotationallyMultiplicativeIntegers*. 2026, software, <https://github.com/delta42/RotationallyMultiplicativeIntegers>.

Úloha.

Uvažujte libovolné nejvýše čtyřmístné číslo, které má alespoň dvě různé číslice. (Pokud má méně než 4 číslice, doplňte ho nulami zepředu.) Číslice uspořádejte vzestupně, poté sestupně a odečtete menší číslo od většího. Proces opakujte a opakujte a opakujte... Např. $5560 \rightarrow 6550 - 556 = 5994 \rightarrow 9954 - 4599 = 5355 \dots$ Otázka zní: *Co se stane?*

Úloha z minulého čísla.

Uvažujme následující netradičně definovanou posloupnost přirozených čísel $(g_n)_{n=1}^\infty$. Její první člen je $g_1 = 290$. Abychom vyrobili následující člen, tak prvně přepíšeme naše číslo ve dvojkové soustavě následujícím způsobem: $g_1 = 290 = 2^8 + 2^5 + 2$.

Kdykoli se ve dvojkovém zápisu některého exponentu objeví exponent větší než 2, i tento exponent nahradíme jeho dvojkovým zápisem. Pokračujeme, dokud nedostaneme výraz obsahující pouze číslice 1 a 2. Získáme tudíž následující výraz $g_1 = 290 = 2^{2^2+1} + 2^{2^2+1} + 2$.

Nyní vezmeme všechny výskyty čísla 2 v tomto zápisu, přepíšeme je na 3 a od výsledku odečteme 1. Tím získáme druhý člen naší posloupnosti: $g_2 = 3^{3^3+1} + 3^{3^3+1} + 3 - 1 \doteq 4,43 \cdot 10^{38}$.

Abychom získali g_3 , vezmeme g_2 , přepíšeme do trojkové soustavy, nahradíme všechny 3 za 4 a od výsledku odečteme 1.

$$g_2 = 3^{81} + 3^{28} + 2 = 3^{3^3+1} + 3^{3^3+1} + 2,$$

$$g_3 = 4^{4^4+1} + 4^{4^4+1} + 2 - 1 \doteq 3,23 \cdot 10^{616}.$$

Další členy g_i generujeme analogicky. Vždy přepíšeme naše původní g_{i-1} v soustavě i (včetně všech exponentů a exponentů exponentů atd.) a následně všechny instance i nahradíme za $i+1$ a od tohoto výsledku odečteme 1.

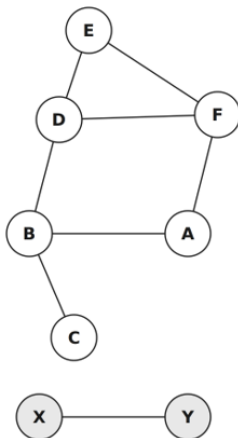
Je patrné, že tato posloupnost nabývá hodně vysokých hodnot opravdu rychle. Ale jak je to s jejím limitním chováním? K jaké hodnotě se blíží, když n roste nade všechny meze? Je to nekonečno? A to je právě úkol pro čtenáře: *Spočítejte limitu posloupnosti $(g_n)_{n=1}^\infty$.*

Odpověď najdete v článku Jakuba Kuchařka: *Důkaz větší než nekonečno, který končí u nuly*. Autor ukáže, že posloupnost $(g_n)_{n=1}^\infty$ se dostane po konečně mnoha krocích do nuly. A kdybychom pokračovali odečítáním jedničky, bude tedy limita $-\infty$.

Nikdy nevíte, k čemu vám bude matematika za dvacet let

Tomáš Jandík

Na obr. 1 je osm lidí. Čára mezi dvěma z nich znamená, že se znají.



uzel	stupeň	blížkost	mezilehlost	vlastní vektor
A	2	0,469	0,100	0,358
B	3	0,536	0,450	0,408
C	1	0,341	0,000	0,161
D	3	0,536	0,300	0,516
E	2	0,417	0,000	0,401
F	3	0,469	0,150	0,502
X	1	0,250	0,000	0,000
Y	1	0,250	0,000	0,000

Obr. 1: Síť osmi lidí. Čára znamená vzájemnou vazbu. „Důležitost“ v síti lze měřit různými způsoby: počtem přímých vazeb, průměrnou vzdáleností od ostatních, četností výskytu na nejkratších cestách nebo napojením na jiné dobře propojené osoby. Podle zvolené definice vychází jiný „nejdůležitější“ uzel. Dvojice X a Y je od zbytku sítě odříznutá. Příklad vychází z [1].

Zkuste si položit otázku, která zní jednoduše: kdo z nich je v této síti nejdůležitější?

Nejpřirozenější je spočítat přímé sousedy. Po třech je mají B, D a F, takže máme remízu. Můžeme se ale zeptat jinak. Kdo je v průměru nejbliž všem ostatním? Tam vedou B a D. Kdo nejčastěji leží na nejkratší cestě mezi dvěma jinými lidmi, a může tedy nejvíc ovlivňovat tok informací? Tam jednoznačně vede B. A kdo je napojen hlavně na lidi, kteří jsou sami dobře propojeni? Tam vychází nejvýš D.

Čtyři rozumné definice „důležitosti“ a tři různé vítězové. V síti tedy nestačí říct, že je někdo důležitý. Musíme říct, jakým způsobem.

Tenhle malý příklad pochází z výzkumu, do kterého jsme se pustili kolem roku 2010. Bylo mi čtyřicet, deset let jsem působil jako profesor financí na University of Arkansas a měl jsem už docela ustálenou představu o tom, co ze svého matematického vzdělání skutečně používám: statistiku, ekonometrii, programování, matematické modelování a schopnost rozložit složitý problém na menší části.

Teorie grafů v tom seznamu nebyla. Ne proto, že bych ji podceňoval. Měl jsem ji ve čtvrtém ročníku, někdy v roce 1991, na Fakultě jaderné a fyzikálně inženýrské Českého vysokého učení technického v Praze (FJFI), které studenti s láskou přezdívali „Jaderka“. Učila ji Edita Pelantová, dnes profesorka na katedře matematiky. Teorie grafů patřila k předmětům, které mě bavily nejvíc, a hodně na tom měla zásluhu právě profesorka Pelantová. Jen mě nikdy nenapadlo, že by zrovna tohle mohlo jednou nést kus mé kariéry. Byla to pro mě krásná matematika, u které je člověk rád, že ji zná.

A pak jsem s jednou ze svých doktorandek seděl nad sítí čtvrt milionu manažerů a lámal si hlavu, jak změřit, kdo je v ní vlivný.

Vždyť tohle znám. Tohle je teorie grafů.

Jak se člověk dostane od matematického inženýrství v Praze k tomu, že o dvacet let později pomocí grafů měří vliv generálních ředitelů amerických firem?

Začneme od začátku.

„Sbohem, pane Jandíku“

Vyrostl jsem ve Svitavách, ve městě s asi dvaceti tisíci obyvateli. Na místním gymnáziu jsem patřil k těm studentům, kterým škola šla snadno: matematické a chemické olympiády, šachy, samé jedničky. Byl jsem zvyklý být jedním z nejlepších.

Na Jaderce jsem rychle zjistil, že skoro každý kolem mě byl na své předchozí škole také jedním z nejlepších.

K tomu je dobré dodat, jak tvrdý byl tehdejší začátek studia. U řady předmětů měla zkouška písemnou a ústní část a projít bylo nutné oběma. Na každý předmět měl student tři pokusy, a kdo je vyčerpал, končil na fakultě. V mém ročníku nastupovalo na fakultu přibližně sto šedesát studentů, k promoci se jich dostalo něco přes šedesát a velká část těch ostatních odpadla během prvních dvou let.

V prvním semestru jsme měli matematickou analýzu a cvičení vedl profesor Alois Apfelbeck, jedna z legendárních postav matematiky na FJFI, pověstný mimořádnou náročností. Můj první semestr ho zjevně nepřesvědčil.

Před zkouškovým obdobím se loučil s jednotlivými studenty.

„Na shledanou.“

„Na shledanou.“

„Na shledanou.“

Pak přišel ke mně.

„Sbohem, pane Jandíku.“

Byl přesvědčený, že mě na jaře už neuvidí.

Analýzou jsem nakonec prošel s odřenýma ušima. Dostal jsem trojku, která mi tehdy připadala jako obrovské vítězství. Na jaře byl profesor Apfelbeck docela překvapený, když mě znovu viděl. Do konce prvního ročníku jsem se s novým prostředím srovnal a zase začal dostávat jedničky. Nakonec jsem Jaderku dokončil s červeným diplomem, i když k tomu bylo podle tehdejších pravidel potřeba onu zatracenou první trojku administrativně vyškrtnout.

Byla to užitečná lekce. Nezhloupł jsem přes léto. Jen jsem se poprvé ocitl mezi lidmi, kteří byli doma také „ti nejlepší“. Talent a snadnost nejsou totéž. To, že vám první semestr na opravdu dobré škole dá pořádně zabrat, nemusí být důkaz, že jste si vybrali špatně.

Matematika s účelem

Matematika mě bavila vždycky, ale nikdy jsem ji nechtěl studovat jen kvůli ní samotné. Už jako středoškolák jsem měl silnou potřebu neuzavřít se příliš brzy do jedné úzké profesní cesty. Chvilí jsem uvažoval například o biochemii, protože mě lákala představa chemie využitě v medicíně.

U matematiky jsem hledal totéž. Nakonec mě zaujal už samotný název oboru Matematické inženýrství. Přeložil jsem si ho pro sebe jako „matematiku s účelem“: matematiku jako nástroj pro řešení skutečných problémů.

Během studia jsem proto hledal, kde se matematické modely dají opravdu použít. Nějakou dobu jsem se pohyboval kolem projektu matematického modelování činnosti lidského srdce a jeho možného využití v diagnostice. Jiné cesty vedly k energetice, letectví nebo fyzikálním modelům.

A pak přišel listopad 1989. Najednou se dramaticky rozšířila nejen společnost kolem nás, ale i množina problémů, na které se dala matematika použít.

Slovník, tabule a druhé místo

Začal jsem chodit na ekonomické přednášky na Fakultě sociálních věd Univerzity Karlovy a rychle zjistil, že analýza, algebra, optimalizace a statistika nejsou jen předměty, které bylo potřeba na Jaderce zvládnout. V ekonomii se z nich stávaly nástroje.

Krátce po revoluci se v Praze začal formovat doktorandský program ekonomie západního typu, dnešní CERGE-EI. Za jeho vznikem stáli mimo jiné Jan Švejnar, dnes profesor na Columbia University, a Josef Zieleniec, pozdější ministr zahraničních věcí České republiky. Do Prahy přijížděli učit špičkoví profesori ze zahraničních univerzit. Pro studenta v Praze na začátku devadesátých let to byla mimořádná příležitost. Měl jsem jen jeden problém. Program byl kompletně v angličtině.

Když se mě Josef Zieleniec zeptal, jestli anglicky rozumím, odpověděl jsem bez sebemenšího zaváhání: „Ano, samozřejmě.“ Ve skutečnosti jsem rozuměl velmi málo.

Anglicky jsem se začal vážněji učit až během studentské stávky v listopadu 1989. Univerzity byly zavřené a já během těch týdnů prošel učebnicí angličtiny pro samouky od první do poslední kapitoly. To ovšem člověka nepřipraví na přednášku amerického profesora z mikroekonomie.

V přípravném semestru jsem proto používal jednoduchou metodu. Co profesor napsal na tabuli, to jsem co nejpřesněji opsal. Doma jsem pak se slovníkem rekonstruoval, o čem přednáška vlastně byla. Učebnice jsem četl rychlostí asi pět nebo šest stran za hodinu a měl jsem upřímnou radost pokaždé, když se na stránce objevila rovnice nebo graf. Těm jsem rozuměl bez slovníku. Matematika mi tehdy fungovala jako společný jazyk. Angličtinu jsem musel rychle dohnat, ale rovnice, důkazy a logika platily stejně v Praze jako v Americe.

O místa v programu soutěžilo zhruba sedmdesát až osmdesát studentů a pokračovat jich mělo asi dvacet až pětadvacet. Spal jsem něco přes čtyři hodiny denně.

Skončil jsem druhý. Dodnes to považuji za jedno z největších vítězství svého studentského života. Ne kvůli samotnému pořadí, ale proto, že na začátku semestru jsem někdy sotva rozuměl otázce, kterou profesor položil.

Tohle vítězství mě ovšem trochu uvrátilo do složitější práce. Díky individuálnímu studijnímu plánu jsem nakonec v posledních dvou ročnících na Jaderce studoval dva programy současně: matematické inženýrství a doktorandský program ekonomie.

Rozhodnutí ve čtyřiaadvaceti

A znovu se objevila stejná otázka jako na gymnáziu: co z toho všeho vlastně chci dělat?

Matematický základ mi otevíral mnoho dveří. Bavila mě mikroekonomie i teorie her, statistika ze mě udělala velmi silného studenta ekonometrie. Chvilí jsem vážně uvažoval i o čistě teoretických směrech.

Čistá ekonometrie mě ale nakonec nelákala, a to přesně z důvodu, který jsem znal už ze střední školy. Nechtěl jsem vytvářet nové metody odhadu. Chtěl jsem je používat na skutečné problémy a skutečná data.

„Matematika s účelem“ se tak po několika letech objevila znovu, jen na vyšší úrovni.

Postupně mi došlo, že mě nejvíc přitahují finance. Na CERGE se tehdy prakticky neučily a zároveň jsem si uvědomil, že jádrem doktorátu není absolvování skvělých kurzů. Je jím disertace a dlouhodobá práce s lidmi, kteří vás vedou.

Ve čtyřiaadvaceti jsem proto udělal to, čemu jsem se do té doby dlouho vyhýbal: vybral jsem si jednu profesní cestu. Odjel jsem do Spojených států na doktorát z financí na University of Pittsburgh.

Matematická a ekonomická průprava z Prahy mi tam znovu výrazně pomohla. Ekonometrii jsem měl natolik silnou, že jsem ji nemusel opakovat, finanční teorie byla postavená na matematickém modelování a v teorii her jsem mohl stavět na tom, co jsem se naučil už dříve.

Jedním z mých profesorů teorie her byl Alvin Roth, který později získal Nobelovu cenu za ekonomii. V jedné jeho zkoušce jsem našel nejednoznačnost v zadání a vyřešil úlohu oběma možnými způsoby. Za zkoušku jsem nakonec jako jediný dostal více než sto procent bodů. S trochou nadsázky proto dodnes tvrdím, že jsem jednou našel chybu v testu budoucího nositele Nobelovy ceny.

Specializoval jsem se na podnikové finance a empirický výzkum, tedy na hledání odpovědí pomocí reálných dat. Po doktorátu jsem se stal

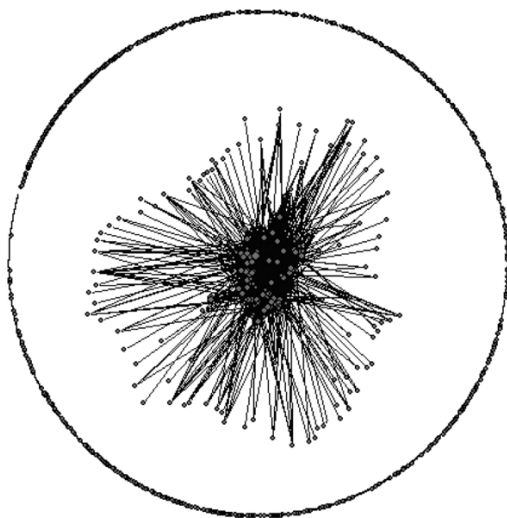
profesorem financí na University of Arkansas. Postupně jsem zkoumal kapitálovou strukturu firem, fúze a akvizice, corporate governance a další témata. Profesní cesta mě zavedla i k věci, které bych jako středoškolák určitě nepředvídal, například ke konzultační práci spojené s bankrotem hokejového klubu Pittsburgh Penguins.

A tím se vracíme k síti z úvodu.

Čtvrt milionu lidí

Databáze BoardEx obsahuje životopisné informace o manažerech a členech správních rad: kde studovali, kde pracovali a v jakých radách působili. Z těchto údajů lze vytvořit síť profesních vazeb.

V našem výzkumu měla síť pro rok 2006 celkem 275 080 lidí propojených téměř 9,8 milionu vazeb. Přibližně 96 procent lidí patřilo do jediné obří propojené komponenty; zbytek tvořily malé skupiny bez napojení na hlavní síť, podobně jako dvojice X a Y na prvním obrázku.



Obr. 2: Síť 275 080 manažerů a členů správních rad v roce 2006, propojených téměř 9,8 milionu vazeb. Pro přehlednost jsou jednotlivci seskupeni do komunit. Vnější prstenec tvoří malé skupiny bez napojení na hlavní síť; hustá struktura uprostřed představuje hlavní propojenou komponentu. Zdroj: [1]

Do té doby se mnoho finančního výzkumu soustředilo na přímé vazby mezi dvěma lidmi. Nás zajímalo něco jiného: co když nezáleží jen na tom,

koho člověk zná, ale také na tom, jaké místo zaujímá v celé síti?

Právě tady se hodily různé druhy centrality z úvodního obrázku: počet přímých vazeb, vzdálenost k ostatním, četnost výskytu na nejkratších cestách a napojení na jiné dobře propojené lidi.

Ta poslední míra je matematicky asi nejhezčí. Chceme, aby důležitost člověka závisela na důležitosti lidí, na které je napojen. To zní kruhově: abych spočítal vaši důležitost, potřebuji znát důležitost vašich známých, k té ale potřebuji znát důležitost jejich známých.

V maticovém zápisu se problém elegantně uzavře. Označíme-li matici sousednosti sítě písmenem A , hledáme vektor x a číslo λ tak, aby

$$Ax = \lambda x.$$

Za míru centrality se bere vlastní vektor příslušný největšímu vlastnímu číslu matice A . U souvislé sítě je tento vlastní vektor jednoznačný až na násobek a lze ho zvolit tak, aby všechny jeho složky byly kladné, což je přesně to, co od míry důležitosti chceme. Vzorec je stejný pro osm uzlů i pro čtvrt milionu lidí. Mění se jen výpočetní náročnost: výpočet blízkosti pro jediný rok nám na počítači s 84 GB paměti běžel v roce 2011 zhruba týden.

Rozdíly v síťovém postavení mohou být obrovské. Steve Ballmer, tehdejší CEO Microsoftu, měl v roce 2006 v naší síti 792 přímých vazeb a k ostatním lidem se dostal v průměru na 3,2 kroku. Rodney Sacks, dlouholetý CEO Monster Beverage, měl přímých vazeb deset, k ostatním potřeboval v průměru 5,5 kroku a neležel na nejkratší cestě mezi žádnými dvěma jinými členy sítě.

Pak přišla finanční otázka.

Když firma kupuje jinou firmu, jde často o transakci v hodnotě miliard dolarů a hlavní rozhodnutí stojí na vedení kupující společnosti. Přirozeně jsme čekali, že velmi dobře propojený CEO bude mít lepší informace, a tedy bude dělat lepší akvizice.

Výsledek byl téměř opačný.

Výsoce centrální CEO skutečně dělali akvizice častěji. Posun centrality z 25. na 75. percentil souvisel s přibližně o 28 % vyšší pravděpodobností akvizice. Zároveň ale stejný posun souvisel s poklesem výnosu akcionářů kupující firmy o zhruba 3,4 procentního bodu.

Proč?

Protože síťové postavení nepřináší jen informace. Přináší také moc.

Velmi vlivného manažera je obtížnější kontrolovat. Má silnější pozici vůči správní radě, větší reputaci a více možností. Velké obchody mu

mohou přinést vyšší odměnu, větší firmu a publicitu, i když samotní akcionáři na obchodu nevydělají. V našem výzkumu vysoká centralita souvisela po akvizici také s přibližně o osm procent vyšší odměnou CEO.

Vraťme se k otázce z úvodu. Ptali jsme se, co znamená být v síti důležitý. Data odpovíděla nepříjemně: znamená to obojí najednou, lepší informace i větší moc. A ukázalo se, že ta druhá složka je silnější.

Samozřejmě jsem si po dvaceti letech neotevřel starý sešit z teorie grafů a nenašel v něm hotový výzkumný projekt. Musel jsem se znovu učit a proniknout mnohem hlouběji do analýzy sociálních sítí. Ale základ z Jaderky mi dal něco podstatného: poznal jsem, jaký typ problému mám před sebou, a věděl jsem, kde začít hledat.

Výzkum sociálních sítí se nakonec stal jednou z nejviditelnějších a nejcitovanějších částí mé vědecké práce.

V roce 2015 jsem po mnoha letech napsal profesorce Pelantové a poděkoval jí za to, co mě kdysi naučila. Přidal jsem radu, kterou jsem tehdy formuloval trochu jako vtip: až se vás studenti zeptají, k čemu ta teorie grafů vlastně je, řekněte jim, že nikdy nevědí, co budou dělat za dvacet let, a ať si schovají všechny poznámky.

Své poznámky mám po několika stěhováních dodnes.

Když jsem si v osmnácti vybíral vysokou školu, netušil jsem, že skončím jako profesor financí v Americe.

Když jsem kolem jednadvaceti studoval teorii grafů, bavila mě, ale nenapadlo mě, že právě ona o dvě desetiletí později otevře jednu z nejúspěšnějších oblastí mého výzkumu.

A ještě těsně před čtyřicítkou jsem si myslel, že už přesně vím, které části svého matematického vzdělání profesně používám.

Ve všech třech případech jsem se mýlil.

Nešlo přitom o to, že bych některý předmět podcenil. Šlo o to, že jsem nedokázal odhadnout, který z mnoha dobrých nástrojů se jednou ukáže jako mimořádně důležitý.

Nechci z toho dělat univerzální radu. Někteří lidé přesně vědí už v sedmnácti, čemu se chtějí věnovat, a udělají dobře, když se do toho pustí naplno.

Já jsem takový nebyl.

Věděl jsem dvě věci: že mě baví matematika a že ji chci používat k řešení skutečných problémů. A současně jsem si nechtěl příliš brzy zavřít dveře.

Matematické inženýrství mi dalo vzdělání dost široké na to, abych mohl přejít od matematiky k ekonomii, od ekonomie k financím a nakonec k oblasti, která v době mého studia ještě prakticky neexistovala.

Dnes se zabývám zase jinými otázkami, například strukturou dodavatelských řetězců, propojenými finančními skupinami nebo dopady sankcí na firmy. A ani teď nevím, kterou část matematiky, kterou jsem se učil před třiceti či pětatřiceti lety, budu ještě potřebovat.

Dobré vzdělání vám nemusí říct, čím máte být.

Někdy je jeho největší hodnotou právě to, že vám dovolí tu odpověď ještě dlouho nehledat.



Tomáš Jandík, profesor financí na University of Arkansas

Literatura

- [1] El-Khatib, R., Fogel, K., Jandik, T.: CEO Network Centrality and Merger Performance. *Journal of Financial Economics*, roč. 116 (2015), s. 349–382.

Jan Marek Marci (Johannes Marcus Marci)

*13. 6. 1595, †10. 4. 1667

Ivo Kraus a Štefan Zajac, FJFI ČVUT, Praha

V chronologickém výčtu českých fyziků má Jan Marek Marci místo nejpřednější, a výjimečný je také jako osobní lékař (fyzikus) českých králů Ferdinanda III. a Leopolda I.

Až do roku 1601 žil v rodném Lanškrouně, poté v Litomyšli, kde také získal základní vzdělání. Střední školu (jezuitské gymnázium) navštěvoval v Jindřichově Hradci (1608–1612), univerzitu v Olomouci a v Praze. Bylo mu jednadvacet, když se stal na olomouckém vysokém učení magistrem filozofie, a třicet, když na pražské lékařské fakultě obhájil doktorskou disertaci *Lékařská disputace o vrozeném temperamentu a čtveřici těžkých chorob, epilepsii, závratí, mrtvici a obrně*. (Stejně jako všechny další Marciho vědecké spisy byla i *Lékařská disputace* napsána latinsky.) Dílo vzbudilo značnou pozornost, protože jeho autor nehledal příčinu epilepsie v posedlosti zlým duchem nebo ďáblem ani ve zvláštní božské přízni, ale pojednal o ní jako o nervovém onemocnění.¹⁾

Český Hippokratés

V roce 1625 se z talentovaného absolventa pražské lékařské fakulty stal její profesor, nejdříve mimořádný, za dalších pět let řádný.²⁾ Později byl jako děkan několikrát v jejím čele, v roce 1662 řídil dokonce celou univerzitu. Zároveň s jmenováním profesorem převzal Marci také povinnosti zemského fyzika, tj. hlavního hygienika království. O náročnosti i nebezpečích takového úřadu za třicetileté války nemůže být nejmenších pochyb. Stačí si jen uvědomit, že při epidemiích moru, a ten v období 1625–1666 vypukl v Praze celkem devětkrát, černých neštovic, tyfu i dalších nemocí zůstávala tehdejší lékařská věda téměř bezmocná.

Jako lékař byl Marci na svou dobu velmi pokrokový; odmítal tehdy módní pouštění žilou, používání drastických projímadel, doporučoval pohyb a míčové hry na čerstvém vzduchu, dobře kořeněnou stravu i mnohé

¹⁾ Události neklidných let stavovského povstání, bělohorské porážky i následujících represí životní osudy Jana Marciho (jako katolíka) v období jeho pražského studia (1617–1625) nijak významně neovlivnily.

²⁾ V této době se oženil. Jeho životní družka pocházela z italské rodiny brusičů drahých kamenů. Měli pět dětí, tři syny a dvě dcery.

další radosti života. K jeho proslulosti neobyčejně přispělo i uzdravení známého českého jezuitského literáta, historika, zeměpisce a pedagoga Bohuslava Balbína (1621–1688) nakaženého roku 1655 černými neštovicemi. Marci, který navštívil pacienta v době, kdy se ostatní lékaři už vzdali jakékoliv naděje na vyléčení, použil prý jakýsi nový neznámý lék připravený ve vlastní lékárně a netradiční metody rekonvalescence. Když se slavný český učenec z těžké nemoci zotavil, věnoval svému zachránci děkovnou báseň a současníkům i příštím generacím spisek nazvaný *Přípomnutí lékařská hledící k udržení zdraví, sepsaná z rozprávek důvěrných držných s nejvýznamnějším lékařem svého věku a českým Hippokratem Markem Marcim*.



Obr. 1: Pamětní deska na domě U Zelené lípy v pražské Melantrichově ulici č. 12, kde Jan Marek Marci žil v letech 1635–1667; na desce jsou symbolicky zobrazeny jeho zájmy – studium duhy, kvadratury kruhu, krevního oběhu, rázu koulí aj. (foto I. Kraus)

Díky Balbínovi zůstaly uchovány i některé Marciho osobní gastronomické zkušenosti: „Už třicet let tomu bude, co se řídím tímto pravidlem: lačný se najím, dokud se řádně nenasytím, pak pohár vína ušlechtilého (neboť pivo nepiji) zvící jednoho pražského žejdlíku (0,35 litru) jedním douškem vyprázdním, až zaslzím. Po krátkém oddechu ještě půl poháru vypiji a po nějaké době doušek... Mezitím pak vzácný vína duch vze-stoupí a mozek poněkud zahřeje.“ Kromě poháru byla prý pravidelným Marciho společníkem také vodní dýmka. Tabák k holdování této tehdy ještě málo běžné neřesti získával od jezuitů, kteří jej do Evropy přiváželi ze svých jihoamerických misijních cest.

Úspěchy v lékařské praxi mu otevíraly dveře do šlechtických domů i na císařský dvůr. Za zásluhy při obléhání Prahy Švédy na konci třicetileté války, kdy pomáhal organizovat studentské ozbrojené oddíly a v Klementinu zřídil obvaziště, ve kterém ošetřoval zraněné z obou nepřátelských stran, byl dekretem císaře Ferdinanda III. prohlášen roku 1654 osobou stavu vladického a zemanského. Od té doby připojoval ke svému jménu přídomek z Kronlandu.³⁾

Díky pílí a výjimečné paměti mohl číst knihy psané česky, německy, italsky, francouzsky, španělsky, latinsky, řecky, hebrejsky a arabsky. Velice vzdělaný byl i ve filozofii, medicíně, matematice, fyzice, astronomii a dalších přírodních vědách. Svědectvím jeho encyklopedických znalostí je filozofický spis z roku 1662 *Vše ve všem aneb Obnovená stará filozofie*. Pojednává v něm o uspořádání vesmíru, podstatě rostlin a živočichů, o magnetismu, o přílivu a odlivu a jiných přírodních jevech, o nadpřirozených bytostech, lécích a jedech, léčení nemocí, životě a smrti aj.

Své nejvýznamnější lékařské dílo *Teorie tvůrčích idejí aneb předpoklad a odhalení oné skryté síly, která semena oplodňuje a z nich organická těla utváří* (1635) věnoval otázce podstaty života, rozmnožování živočichů, vývoji embrya a dědičnosti. Takové myšlenky byly ovšem v rozporu s oficiálním učením církve i antických autorit.



Obr. 2: Poštovní známka vydaná k pětistému výročí narození Jana Marka Marciho

Matematik a fyzik

Z problémů čistě matematických Marciho upoutala kvadratura kruhu, úloha zkonstruovat pomocí konečného počtu kroků pouze kružítkem a pravítkem (bez stupnice) čtverec o stejném obsahu, jaký má daný kruh. Dokud nebylo v roce 1882 dokázáno, že jenom s kružítkem a pravítkem se

³⁾Název *Kronland* vymyslel Jan Marcus Marci; jedná se o přesmyčku ze slova Landskron, novější verze jména Landskrone, které při svém založení ve druhé polovině třináctého století dostalo východočeské město Lanškroun.

tento problém řešit nedá, věnovali mu všichni slavní matematici mnoho úsilí. Marci se kvadraturou kruhu zabýval ve spisech *O úměrnosti pohybu přímočarých obrazců a kvadratuře kruhu na základě pohybu* (1648) a *Labyrint, v němž je předváděna cesta ke kvadratuře kruhu více způsoby* (1654). Jeho konstrukce byly založeny na tom, že plochu kruhu pokrýval obrazci, jejichž obsah lze určit.

Svou první knihu o fyzice věnoval Marci mechanice. Vyšla v roce 1639, má název *O úměrnosti pohybu* a je vůbec prvním českým fyzikálním dílem. Jeho nejdůležitější část se týká srážek koulí. Podle směru rychlostí koulí Marci rozlišuje ráz přímý a šikmý, podle materiálu, z něhož jsou koule zhotovené, ráz pružný, nepružný nebo křehký. Stejně rozdělení přenáší i do medicíny: kost se může po nárazu pružně restituovat, trvale deformovat, případně prasknout. Kromě obecných zákonitostí srážek koulí jsou v knize řešeny i takové úlohy, jako odraz míče od stěny, mnohonásobný odraz plochých kaménků na vodní hladině (žabky) nebo úloha karambolu, tj. splnění podmínek, za nichž jedna z koulí po nárazu do druhé stejné stojící koule zasáhne kouli třetí. Byl první, kdo dospěl k závěru, že při vzájemných srážkách dvou koulí nejsou podstatné jejich rozměry, ale hmotnost, rychlost a vlastnosti látky, z níž byly zhotoveny.

V roce Vestfálského míru 1648 vydala pražská Akademická tiskárna Marciho *Knihu o duze*. Není ovšem věnovaná jen vlastnostem duhy, ale i ohybu světla na malých otvorech, překážkách, drátku, hraně a mřížce; pojednává také o podstatě ohně, plamene, světla svatojánských mušek, o optických jevech v atmosféře, krystalizaci, barvířských technologiích a mnoha dalších více či méně optických problémech.⁴⁾ Díky tomuto spisu je Marci považován za jednoho ze zakladatelů spektroskopie. Škoda jen, že v době, kdy *Knihu o duze* vznikala, ještě neznal zákon lomu světla. O dva roky později (1650) dokončil astronomickou práci *O zeměpisné délce aneb rozdílu mezi dvěma poledníky a jejím určování podle skutečného pohybu Měsíce k danému pozorovacímu dni*; dílo je věnované španělskému králi Filipovi. Navržené metody byly však pro praktické využití při zámořských plavbách příliš komplikované.

Až po Marciho smrti se dočkaly vydání jeho spisy *Řád myslí aneb úvaha lékařská, filozofická a optická* (o podstatě, vzniku a příčinách epilepsie, vnímání, představivosti a paměti) a *Ortho-Sophia aneb Obecná*

⁴⁾V kapitole o barvě mýdlových bublin napsal: „Mohlo by se zdát, že zkoumání bublin je nehodné muže a že by spíše příslušelo malým chlapcům. Já jsem si však jistý, že nic není nehodno filozofa, co vede k poznání pravdy. Ignorovat příčiny je pak tím horší, čím se věc zdá prostší a všednější.“

nauka o nárazu, v níž jsou zevrubně vysvětleny podivuhodné vlastnosti vznikání, přírody, pokroku, sil, impulsu, jak u živočichů, tak i v tekutinách a v pevných tělesech; Ortho-Sophii připsal „k užitku a potěšení lékařům, matematikům a filozofům“.

Svá poslední léta strávil mezi knihami, v odloučenosti od veřejného života. Koncem roku 1666 se jeho zdravotní stav začal horšit, ztrácel zrak, až nakonec zcela oslepl. Za několik měsíců (10. dubna 1667) pobělohorský učenec splňující představy o renesanční všestrannosti a zároveň první autor českých fyzikálních monografií zemřel na mozkovou mrtvici. Pohřben byl v Klementinu; podle některých pramenů v kostele sv. Salvátora, podle jiných je místem jeho posledního odpočinku od 18. století barokní kostel sv. Klimenta.

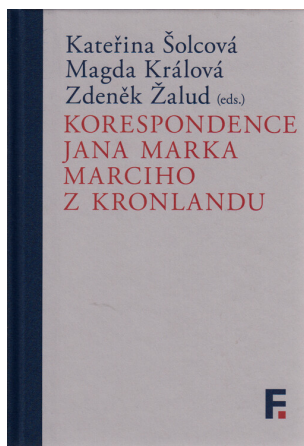
Přestože za třicetileté války evropští vědci mnoho příležitostí k navázání kontaktů mezi sebou neměli, jméno prvního českého fyzika nebylo za hranicemi naší země neznámé. S jistotou se dá tvrdit, že o jeho pracích věděli jak Galileo Galilei (1564–1642), tak nizozemský matematik a astronom Christiaan Huygens (1629–1695). A objevitel krevního oběhu Angličan William Harvey (1578–1657) se s ním dokonce setkal, když jako člen anglické diplomatické mise krále Karla I. Stuarta cestoval v roce 1636 přes Prahu do Vídně. Dochovala se rozsáhlá Marciho korespondence s významnými polyhistory 17. století, především s jezuitským učencem Athanasiem Kircherem (1602–1680) a španělským spisovatelem a diplomatem, členem cisterciáckého řádu Janem Caramuelem z Lobkovic (1606–1682).⁵⁾

V Anglii byl nazýván pražským Hippokratem a českým Platonem a je velmi pravděpodobné, že mu proslulá Královská společnost (RS, The Royal Society of London for Improving Natural Knowledge, zal. 1660) chtěla nabídnout své členství. Dokladem je vzpomínka anglického lékaře a cestovatele Edwarda Browna (1644–1708), který byl v roce 1667 pověřen sekretářem Královské společnosti Henrym Oldenburgem (1618 až 1677), aby se při své evropské cestě pokusil s Marcim navázat kontakt. Protože Brown dorazil do Prahy teprve v listopadu 1669, uložený úkol už splnit nemohl: „Za svého pobytu v Praze měl jsem velkou žádost pozdraviti slavné medicum a philosophum Johannem Marcum Marci a pohnouti jej, aby si s Královskou společností englickou dopisoval, než uslyšel jsem,

⁵⁾Překlad Marciho dochované učenecké korespondence z latiny do češtiny vyšel poprvé v roce 2024. Jedná se o soubor 61 dopisů z let 1640–1666, které obsahují většinou debaty o dobových tématech z oblasti fyziky, jazykovědy, alchymie a dalších disciplín.

že tomuto světu již vale dal k žalosti náramné učených mužů v této zemi i v jiných.“

Jako lékař si Marci vchoval řadu žáků; bohužel žádného, který by pokračoval ve fyzikálních výzkumech. Tak se stalo, že mnohé, na co přišel první, museli později znovu objevit Robert Boyle (1627–1691), Francesco Maria Grimaldi (1618–1663), Robert Hooke (1635–1703), Christiaan Huygens, Isaac Newton (1643–1727)⁶⁾ a další. Teprve ve dvacátém století začaly být zásluhy největšího českého pobělohorského fyzika znovu mezinárodně uznávány.



Obr. 3: Obálka překladu dochované učenecké korespondence Jana Marka Marciho (nakl. Filosofia, Praha 2024)

Prvenství Jana Marka Marciho v dějinách české fyziky už nikdo neohrozí. Přesto si zaslouží alespoň připomenout dvě jména světově uznávaných učenců, kteří využili možnosti uplatnit u nás svůj talent a ještě před Marcim posunuli hranici lidského poznání v přírodních vědách.

Georgius Agricola (1494–1555), původem ze západního Saska, po studiích v Itálii působil v letech 1526–1531 jako lékař a lékárník v krušnohorském Jáchymově. Intenzívně se zde rovněž zabýval geologií a vytvořil velký encyklopedický spis *Dvanáct knih o hornictví a hutnictví* (*De re*

⁶⁾Podle některých pramenů Marciho experimentální výsledek, že „při dopadu bílého, barvorodého paprsku na optické rozhraní se světlo zhušťuje a zředí, a tím vzniká barevné spektrum“, uvedený v *Knize o duze* (1648) převzal Newton bez udání zdroje do své *Optiky* (1704). Je třeba ale dodat, že Marci sice z bílého světla získal spektrum, složit z něj naopak bílé světlo se už nepokusil.

metallica libri XII, 1555), který byl přeložen do mnoha jazyků, v roce 1933 i do češtiny.

Legendární *Johannes Kepler* (1571–1630) přišel do Prahy také od našich německých sousedů. Zpočátku (1600–1601) spolupracoval se slavným dánským astronomem Tychonem Brahem, po jeho smrti byl až do roku 1612 císařským matematikem na dvoře Rudolfa II. Mezi vědeckými spisy, které během pražského pobytu dokončil, jsou nejen veledíla o astronomii (*Nová astronomie*, 1609) a optice (*Doplňky k Vitelliovi, v nichž je podána optická část astromie*, 1604; *Dioptrika*, 1611), ale i nevelké pojednání *Novoroční dárek aneb O hexagonálním sněhu*, 1611) považované za počátek dějin vědecké krystalografie.



Obr. 4: Jan Vilímek (1860–1938): Jan Marcus Marci, kresba z roku 1889

Literatura

- [1] Kraus, I.: *Česká stopa v dějinách fyziky*. Nakl. ČVUT, Praha, 2025.
- [2] Šolcová, K. (ed.): *Korespondence Jana Marka Marciho z Kronlandu*. Filozofia, Praha, 2024.
- [3] Štoll, I.: *Jan Marek Marci*. Prometheus, Praha, 2003.
- [4] Kolektiv: *Jan Marek Marci. Život, dílo, doba. Sborník přednášek k 400. výročí narození*. Nakl. Rosa, Lanškroun, 1995.

Proč se rázostroj přestává odrážet aneb synchronizace prostřednictvím nepružných srážek

Michal Růžek, INSA Lyon, Francie

Abstrakt. Přemýšleli jste někdy, proč se kuličky v rázostroji samovolně synchronizují? Podle fyziky by se přece měly pouze odrážet. Ve skutečnosti existuje jednoduchý fyzikální argument, který vysvětluje nevyhnutelnou synchronizaci tohoto pohybu. Čtete dál a odhalte, jaký mechanismus je skrytý za tímto chováním.

1. Úvod

Rázostroj je symbolem klasické mechaniky tak, jako je ozubené kolo symbolem inženýrství, zkumavka chemie, Petriho miska biologie nebo dalekohled astronomie. Jeho obraz zdobí titulní stránky učebnic fyziky a jeho modely stojí na stolech na univerzitách po celém světě. Toto malé zařízení, pojmenované v angličtině po Isaacu Newtonovi (Newton's cradle), pravděpodobně vynalezl jeho předchůdce, francouzský učenec Edme Mariotte (1620–1684). Jeho účelem bylo jasně ilustrovat zákony zachování hybnosti a kinetické energie.

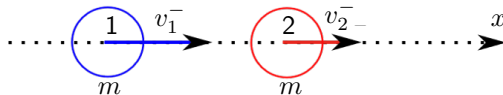
Pokud si koupíte nepříliš kvalitní rázostroj, nebo se jej pokusíte sami postavit jako autor tohoto článku, může vás čekat nepříjemné překvapení. Rázostroj se sice zpočátku chová tak, jak předpovídali slavní učenci 17. století, tzn. že kuličky si při každé srážce vyměňují své rychlosti, ale poměrně záhy dojde k nečekané změně – kuličky se od sebe přestanou odrážet. Místo toho se synchronizují, takže ke srážkám nedochází. Možná proto většina experimentů před zvědavým mladým publikem končí dříve, než k tomuto okamžiku dojde. Pokud přesto budete v experimentu pokračovat a pozorný student se zeptá: „Proč už kuličky neodsakují?“, tento článek by vám měl poskytnout odpověď.

2. Pružná a nepružná srážka¹⁾

Než se ponoříme do problému synchronizace, je vhodné připomenout několik známých faktů o rázu izolovaných koulí. Pro jednoduchost uvažujme koule o stejné hmotnosti m pohybující se po přímce orientované

¹⁾ Pozn. red.: V českém prostředí se rozlišuje „dokonale nepružná srážka“ pro pohyb spojených těles po srážce a „nedokonale pružná srážka“ pro případ popisovaný v článku.

podél osy x . Levá koule bude mít vždy index 1 a pravá index 2. Rychlosti koulí před srážkou budeme označovat v_1^- a v_2^- a po srážce v_1^+ a v_2^+ (obr. 1).



Obr. 1: Koule před srážkou

2.1 Pružná srážka

Dokonale pružná srážka se řídí dvěma zákony zachování: zákonem zachování hybnosti a zákonem zachování kinetické energie. Matematicky jsou vyjádřeny pomocí rychlostí před a po srážce takto pomocí rovnic (1) a (2).

Zákon zachování	Rovnice
hybnosti	$m(v_1^- + v_2^-) = m(v_1^+ + v_2^+)$ (1)
energie	$\frac{m}{2}((v_1^-)^2 + (v_2^-)^2) = \frac{m}{2}((v_1^+)^2 + (v_2^+)^2)$ (2)

Vyjádření v_2^+ z rovnice (1) a jeho dosazení do rovnice (2) vede po určité úpravě k následující kvadratické rovnici pro neznámou v_1^+ :

$$(v_1^+)^2 - v_1^+(v_1^- + v_2^-) + v_1^-v_2^- = 0. \quad (3)$$

Tato rovnice má dvě řešení (uvažujeme, že $v_1^- > v_2^-$, jinak ke srážce nedojde):

$$(v_1^+)_{1,2} = \frac{v_1^- + v_2^- \pm (v_1^- - v_2^-)}{2}.$$

Je uvažováno pouze jedno z těchto řešení, a sice $v_1^+ = v_2^-$. Po zpětném dosazení do (1) a výpočtu v_2^+ lze vyjádřit řešení problému srážky v maticovém tvaru takto:

$$\begin{bmatrix} v_1^+ \\ v_2^+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^- \\ v_2^- \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Rovnice (4) říká, že koule 1 a 2 si vyměňují rychlosti. Pokud je druhá koule v klidu, získá po srážce stejnou rychlost jako první, zatímco první se zastaví. Toto atraktivní chování rázostroje se také přibližně realizuje u rázu kulečnickových koulí. Co se ale stane, když srážka není zcela pružná?

2.2 Nepružná srážka

Během nepružné srážky se zachovává pouze hybnost (1), zatímco kinetická energie se nezachovává, ale zmenšuje se. Část se ztratí a převede do jiných forem energie.²⁾ Pro vyjádření nepružné povahy srážky byl vyvinut poloempirický zákon restituce. Soustava rovnic nyní zní (po vynechání hmotností m):

Konstantní hybnost	$v_1^- + v_2^- = v_1^+ + v_2^+ \quad (5)$
Zákon restituce	$e(v_1^- - v_2^-) = v_2^+ - v_1^+ \quad (6)$

kde e je koeficient restituce, jehož hodnota je menší než jedna. Tento koeficient závisí především na kvalitě srážejících se kuliček, jejich dokonalém zarovnání a dalších faktorech. Tento koeficient byl pro rázostroj experimentálně stanoven hned několika autory ([3, 4, 5]).

Stejnou metodou jako dříve, tj. kombinací rovnic (5) a (6), lze vyjádřit výsledné rychlosti po srážce jako lineární kombinaci rychlostí před nárazem v maticovém tvaru takto:

$$\begin{bmatrix} v_1^+ \\ v_2^+ \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 - e & 1 + e \\ 1 + e & 1 - e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^- \\ v_2^- \end{bmatrix} = \mathbf{M} \begin{bmatrix} v_1^- \\ v_2^- \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Všimněme si, že rovnice (7) se pro $e = 1$ stává rovnicí (4). Jinými slovy rovnicí pro pružnou srážku. Podívejme se nyní, jak tato malá úprava vede k synchronizaci rázostroje po několika následných nárazech.

3. Synchronizace rázostroje

3.1 Použití lineárního modelu srážky

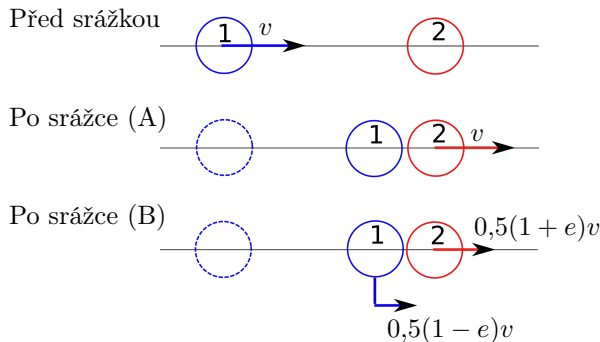
Uvažujme nyní typický začátek srážkového experimentu s rázostrojem. Necht' rychlost první kuličky je v ($v_1^- = v$), zatímco rychlost druhé kuličky je nulová ($v_2^- = 0$). Po první srážce se rychlosti kuliček liší v závislosti na uvažovaném případě (pružný vs. nepružný):

	Rychlost koule 1 po nárazu v_1^+	Rychlost koule 2 po nárazu v_2^+
Ráz pružný (A)	0	v
Ráz nepružný (B)	$0,5(1 - e)v$	$0,5(1 + e)v$

Tabulka 1: Rychlosti po prvním nárazu dle modelů

²⁾Například na trvalou deformaci, vibrace a teplo.

Rozdíl mezi těmito dvěma případy je schematicky znázorněn na obr. 2. V nepružném případě vidíme, že si první koule udržuje i po srážce malou dopřednou rychlost. Uvidíme, jak tato malá změna nevyhnutelně vede k synchronizaci rázostroje.



Obr. 2: Rychlosti po první srážce v případě pružného (A) a nepružného (B) rázu

Než ale budeme pokračovat, stanovme si hypotézu o nárazech, které následují po prvním. Pokud přijmeme aproximaci matematického kyvadla³⁾, pak k druhému nárazu dojde přesně na stejném místě, jako došlo k prvnímu, ovšem s obrácenými vektory rychlostí. Jestliže tedy vektory rychlosti směřují po první srážce doprava, budou směřovat před druhou srážkou doleva. V reálném experimentu to není úplně pravda, ale pro jednoduchost další analýzy tuto hypotézu zachovejme. Definujme tedy vektor $\begin{bmatrix} v_1^- \\ v_2^- \end{bmatrix}_i$ jako vektor rychlostí před i -tou srážkou a vektor $\begin{bmatrix} v_1^+ \\ v_2^+ \end{bmatrix}_i$ jako vektor po i -té srážce. S ohledem na hypotézu matematického kyvadla jsou následné vektory propojeny následovně:

$$\begin{bmatrix} v_1^- \\ v_2^- \end{bmatrix}_i = - \begin{bmatrix} v_1^+ \\ v_2^+ \end{bmatrix}_i. \quad (8)$$

Znaménko mínus značí již zmíněnou změnu orientace rychlosti v důsledku zpětného kývání kyvadla.

³⁾Matematické kyvadlo je idealizované kyvadlo tvořené hmotným bodem zavěšeným na nehmotném a neprotahitelném vlákně, které kmitá bez tření v homogenním tíhovém poli. Skutečné kyvadlo se mu blíží, jsou-li rozměry závaží malé ve srovnání s délkou závěsu a hmotnost závěsu zanedbatelná.

Jeden elegantní způsob, jak ukázat, že synchronizace musí nastat, je podívat se na vlastní čísla a vlastní vektory „kolizní“ matice $\mathbf{M}$ (definované rovnicí (7)). Po krátkém algebraickém výpočtu lze zjistit, že vlastní čísla a vlastní vektory jsou:

Vlastní číslo	$\lambda_1 = -e$	$\lambda_2 = 1$
Vlastní vektor	$\mathbf{q}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$	$\mathbf{q}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Tabulka 2: Vlastní čísla a vlastní vektory kolizní matice $\mathbf{M}$

Nyní tyto vlastní vektory a vlastní čísla použijme. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že před srážkou lze vektory rychlostí rozložit na prostor definovaný vlastními vektory takto:

$$\begin{bmatrix} v_1^- \\ v_2^- \end{bmatrix} = \alpha_1 \mathbf{q}_1 + \alpha_2 \mathbf{q}_2.$$

Rychlosti po srážce lze získat použitím rovnice (7) následovně:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} v_1^+ \\ v_2^+ \end{bmatrix}_1 &= \mathbf{M} \begin{bmatrix} v_1^- \\ v_2^- \end{bmatrix}_1 = \alpha_1 \mathbf{M} \mathbf{q}_1 + \alpha_2 \mathbf{M} \mathbf{q}_2 = \alpha_1 \lambda_1 \mathbf{q}_1 + \alpha_2 \lambda_2 \mathbf{q}_2 = \\ &= \alpha_1 (-e) \mathbf{q}_1 + \alpha_2 \mathbf{q}_2. \end{aligned} \quad (9)$$

Zde jsme použili vlastnosti vlastních čísel a vlastních vektorů matice $\mathbf{M}$, viz tabulka 2. U druhého rázu a s využitím rovnic (8) a (9) získáme:

$$\begin{bmatrix} v_1^+ \\ v_2^+ \end{bmatrix}_2 = \mathbf{M} \begin{bmatrix} v_1^- \\ v_2^- \end{bmatrix}_2 = -\mathbf{M} \begin{bmatrix} v_1^+ \\ v_2^+ \end{bmatrix}_1 = \alpha_1 (-e^2) \mathbf{q}_1 - \alpha_2 \mathbf{q}_2.$$

Podobně, pokud vezmeme v úvahu třetí srážku, dostaneme:

$$\begin{bmatrix} v_1^+ \\ v_2^+ \end{bmatrix}_3 = \dots = \alpha_1 (-e^3) \mathbf{q}_1 + \alpha_2 \mathbf{q}_2.$$

Konečně, pro n -tou srážku:⁴⁾

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} v_1^+ \\ v_2^+ \end{bmatrix}_n &= \dots = \alpha_1(-e^n)\mathbf{q}_1 + (-1)^{n+1}\alpha_2\mathbf{q}_2 \approx \\ &\approx \text{pro velké } n \approx (-1)^{n+1}\alpha_2\mathbf{q}_2 = (-1)^{n+1}\alpha_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (10)$$

Z rovnice (10) vidíme, že pokud $e < 1$, několikeré srážky potlačí pohyb související s vlastním vektorem $\mathbf{q}_1$. Pohyb podél vlastního vektoru $\mathbf{q}_2$ na druhou stranu není srážkami ovlivněn a z dlouhodobého hlediska se rázostroj synchronizuje podél tohoto vektoru. To znamená, že již nedochází k žádným nárazům, protože obě rychlosti mají stejnou amplitudu a orientaci. Co se nakonec stane s kinetickou energií? Evidentně se nesníží až na nulovou hodnotu. V našem případě s počátečními rychlostmi $\begin{bmatrix} v_1^- \\ v_2^- \end{bmatrix}_1 = \begin{bmatrix} v \\ 0 \end{bmatrix}_1$ platí, že rozklad do vlastních vektorů je následující $\alpha_1 = \alpha_2 = v/2$. Kinetické energie na začátku a při synchronizaci jsou dány v tabulce 3.

	Kinetická energie	
Začátek	$\frac{1}{2}mv^2$	(11)
Synchronizace	$\frac{1}{4}mv^2$	(12)

Tabulka 3: Kinetické energie na začátku a během synchronizovaného pohybu
Kinetická energie se tedy při synchronizaci sníží na polovinu.

Další propracovanější modely srážky a synchronizace jsou prezentovány v [1, 2], ale tento jednodušší model byl zvolen pro ilustraci základního konceptu tohoto jevu.

3.2 Použití Lagrangeových multiplikátorů

Existuje alternativní a poměrně jednoduchá metoda, která ukazuje, že k synchronizaci musí nakonec dojít, pokud uvažujeme nepružné srážky. Problém lze formulovat následovně. Najdeme rychlosti dvou koulí, které splňují zákon zachování hybnosti, ale minimalizují kinetickou energii systému. To je rozumný předpoklad, protože energie při nepružných srážkách může být pouze ztracena, takže by mělo existovat minimum (možná i nula), kam systém bude směřovat. Problém je matematicky definován

⁴⁾Důkaz této rovnice lze snadno provést matematickou indukcí.

takto:

Podmínka pro hybnost	$v_1 + v_2 = v$	(13)
Funkce pro minimalizaci (energie)	$F = v_1^2 + v_2^2 = 2E/m$	(14)

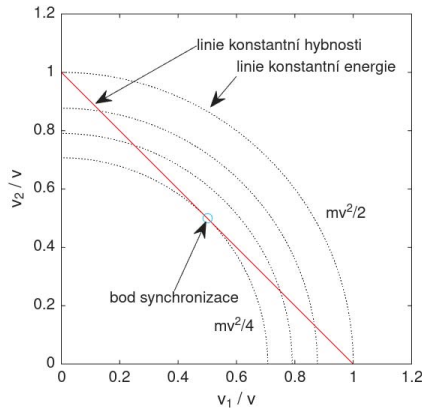
Nalezení extrému funkce $F(v_1, v_2)$ podrobené omezení (13) lze vyřešit tzv. Lagrangeovými multiplikátory. Místo hledání extrému funkce $F(v_1, v_2)$ hledáme extrém funkce

$$L(v_1, v_2, \lambda) = F(v_1, v_2) - \lambda(v_1 + v_2 - v). \quad (15)$$

Extrém funkce $L(v_1, v_2, \lambda)$ nalezneme tak, že najdeme bod, kde se všechny její parciální derivace rovnají nule:

$$\frac{\partial L}{\partial v_1} = 2v_1 - \lambda = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial v_2} = 2v_2 - \lambda = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = -v_1 - v_2 + v = 0. \quad (16)$$

Řešením soustavy rovnic (16) je opět náš předchozí výsledek synchronizovaného pohybu, tzn. $v_1 = v_2 = v/2$.⁵⁾



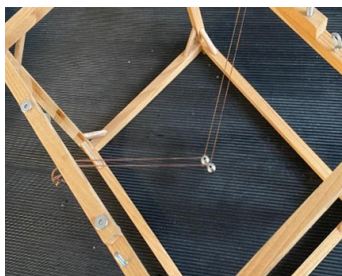
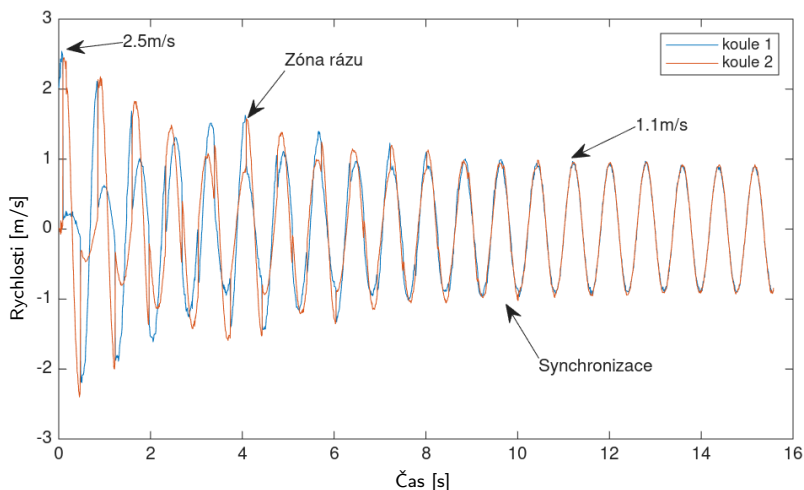
Obr. 3: Vysvětlení Lagrangeova multiplikátoru. Zde hledáme minimum funkce kinetické energie, přičemž řešení omezujeme konstantní hybností (červená čára). Bod znázorňuje extrém.

⁵⁾Pozn. redakce: V tomto jednoduchém případě vidíme, že platí $F = v_1^2 + v_2^2 = (v - v_2)^2 + v_2^2 = 2v_2^2 - 2vv_2 + v^2 = 2(v_2 - v/2)^2 + v^2/2$. Tudíž minima nabývá F pro $v_2 = v/2 = v_1$.

4. Experimentální studie

Otázkou zůstává, do jaké míry model odpovídá realitě – odpověď na ni dá jednoduchý experiment, který lze provést s jakýmkoli rázostrojem a moderním smartphonem.

Pomocí zpomaleného videa (slow motion) a volně dostupné aplikace (např. Tracker) je možné s dostatečnou přesností měřit polohu a rychlosti kuliček v čase. Obr. 4 ukazuje rychlosti kuliček od začátku experimentu. Nejdříve dochází k velkým srážkám, přičemž celková kinetická energie s každým nárazem klesá. Po pouhých 8 sekundách však dochází k téměř úplné synchronizaci. Obě kuličky mají stejnou rychlost, a i když se pohybují společně, jejich kinetická energie klesá jen velmi pomalu.



Obr. 4: Experimentálně naměřené rychlosti kyvadla na podomácku vyrobeném rázostroji. Lze pozorovat pokles přibližně o polovinu počáteční rychlosti.

5. Závěrem

Závěrem lze říci, že rázostrojem lze demonstrovat nejen zákony zachování hybnosti a kinetické energie, ale také synchronizaci dvou mechanických systémů. Synchronizace dynamických systémů je sama o sobě zajímavou disciplínou (další příklady viz [6]). Poněkud překvapivě je nelinearita (neideálnost) spolu s disipací energie dynamických systémů často nezbytnou podmínkou pro vznik synchronizace.

Nebuďte smutní, pokud se váš rázostroj neodráží donekonečna tak, jak jste si představovali. Není to vada, ale jen důsledek hlubšího vhledu do fyzikální podstaty mechanického rázu.

Literatura

- [1] Minseok, L., Seokchan, H.: *Synchronization Behavior of Newton's Cradle*. Online: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2401.16693>.
- [2] Jafari, F. A.: Investigation of parameters in oscillations of Newton's cradle. *Lat. Am. J. Phys. Educ.*, roč. 14 (2020), č. 3. Online: <https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/7587116.pdf>.
- [3] Cross, R.: Multiple collisions of two balls in a Newton's cradle. *Eur. J. Phys.*, roč. 39 (2018), č. 2. Online: <https://doi.org/10.1088/1361-6404/aa9163>.
- [4] Cross, R.: The effect of very small gaps in Newton's cradle. *Eur. J. Phys.*, roč. 42 (2021), č. 2. Online: <https://doi.org/10.1088/1361-6404/abc093>.
- [5] White, C.: A comparative study of two types of ball-on-ball collision. *Phys. Educ.*, roč. 52 (2017). Online: <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1361-6552/aa6d2a>.
- [6] Strogatz, H. S.: *Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*. CRC Press, 2015.

Co se děje v CERNu

Matěj Tonka, FJFI ČVUT

Evropská organizace pro jaderný výzkum CERN je jedna z nejprestižnějších institucí v oblasti výzkumu jaderné a částicové fyziky. Areál stojící na hranici dvou členských států, Francie a Švýcarska, v ženevském kantonu poblíž městečka Meyrin na švýcarské straně a na území obce Saint-Genis-Pouilly na straně francouzské, je výzkumné středisko zaměřené na výzkum v oblasti jaderné a částicové fyziky. I přes to, že je CERN organizace proslulá díky mediální a popkulturní přítomnosti, je dobré si připomenout několik základních informací o této Mekce současné vědy.

Myšlenka CERNu se zrodila v letech po 2. světové válce v hlavách evropských vědců. Díky odlivu mozků z Evropy ať už kvůli obavám z perzekuce nebo z nevole se účastnit ozbrojeného konfliktu, Evropa přišla o status vědeckého centra. Když v roce 1949 Louis de Broglie přišel s nápadem založit organizaci, která by soustřeďovala špičkový výzkum a mezinárodní spolupráci států v Evropě, měl se tento úpadek obrátit k lepšímu a znovu poskytnout Evropě ztracenou prestiž. Během následujících let se věci dávaly do pohybu, což vyvrcholilo v roce 1951 usnesením UNESCO, které dávalo stavbě a zřízení organizace pro jaderný výzkum zelenou. Nedlouho poté, v roce 1953, vzniklo usnesení, které mimo jiné zavazovalo členské státy k příspěvkům a podílu na výzkumu v nové organizaci. V roce 1955 byl konečně položen první stavební kámen, ale první práce na zařízení započaly o rok dříve.

V roce 1957 spustil CERN svůj první urychlovač, synchrociklotron. Ten je určen hlavně k urychlování iontů, pro lehké částice, jako jsou elektrony, není ideální. Do detailů nemusíme zabíhat, protože o pár let později, v listopadu roku 1959, byl spuštěn protonový synchrotron (PS). Další urychlovače přibývaly, v roce 1976 byl spuštěn super protonový synchrotron (SPS) a o 13 let později velký elektron-pozitron urychlovač (Large Electron-Positron collider LEP), synchrotron určený ke kolizím elektronů a pozitronů, v jehož tunelu dnes stojí velký hadronový urychlovač (Large Hadron Collider – LHC), který byl spuštěn v roce 2008.

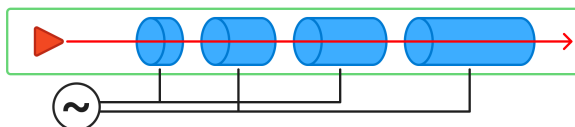
Součástí CERNu je několik experimentů, tedy skupin vědců čítajících několik tisíc osob z celého světa, kteří se podílejí na stejném výzkumném cíli. Některé experimenty jsou detektory na LHC, zkoumající stavy

hmoty po velkém třesku nebo produkci exotických částic, jako například toroidální detektor ATLAS (A Toroidal LHC ApparatuS), velký iontový experiment ALICE (A Large Ion Collider Experiment), LHC krása LHCb (LHC beauty) nebo CMS (Compact Muon Solenoid). Další experimenty se týkají ostřelování terčů jako například AMBER nebo experimenty pro výzkum antihmoty jako AEGIS. V CERNu se také nachází zařízení na testování detektorů a materiálů, například zařízení na cílené ozařování IRRAD, které využívá svazek protonů k ozařování vzorků nejrozličnějších materiálů.

Historie CERNu ale sahá dále, než by se mohlo na první pohled zdát. Rozmach jaderné a částicové fyziky v první polovině dvacátého století je hlavním důvodem, proč tato organizace byla založena. A potom nesmíme zapomenout na urychlovače, jejichž vývoj, díky stále přísnějším požadavkům výzkumu jader a částic, rychle pádlil kupředu. Svým způsobem započala cesta Evropské organizace pro jaderný výzkum už v roce 1944, kdy byl vyvinut první synchrotron, typ urychlovače, který využívá LHC v CERNu.

Urychlovače v CERNu

V CERNu je a v minulosti bylo mnoho různých typů urychlovačů. V současné době jsou pro CERN důležité dva typy; synchrotron a lineární urychlovač. Tyto dva typy dominují v oblasti částic, kterou se CERN zabývá.

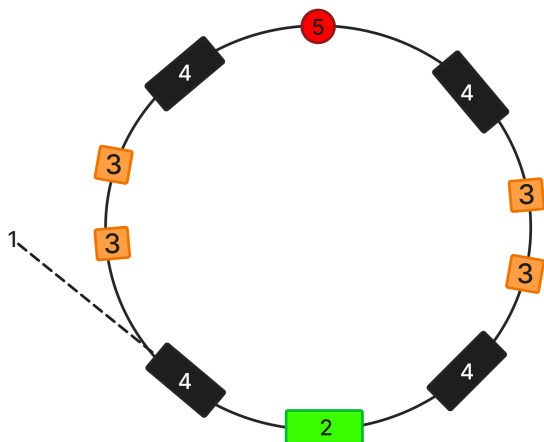


Obr. 1: Schéma nejjednoduššího lineárního urychlovače – oranžový trojúhelník reprezentuje zdroj částic, červená šipka potom svazek částic letící urychlovačem. Modré válce reprezentují jednotlivé trubice, které jsou připojené na vysokofrekvenční zdroj střídavého napětí. Celá aparatura je uzavřena ve vakuové komoře, reprezentované zeleným obdélníkem.

Lineární urychlovač je druh urychlovače, který využívá vysokofrekvenční zdroje k urychlení subatomárních částic. Aparatura sestává ze zdroje napětí a kovových trubic (modré válce na obr. 1), kterými svazek částic prolétá. Trubice jsou napojené na zdroj střídavého napětí tak, že ve chvíli, kdy se svazek nachází v prostoru mezi trubicemi, je jedna nabita kladně a druhá záporně a částice ve svazku je tím urychlována.

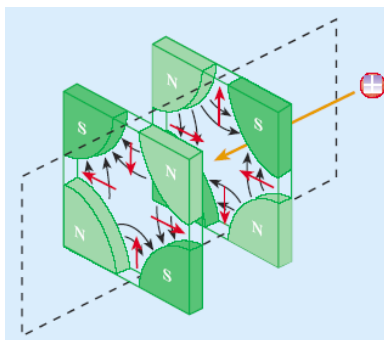
Uvnitř trubice je potom svazek stíněn od elektromagnetického pole, aby se částice vyhnula fázi urychlovacího napětí, ve které by byla zpomalována. Protože svazek postupně zrychluje, trubice se zvětšují, aby zůstal urychlovaný svazek ve fázi s napětím tak, že stále zrychluje. Prakticky si to lze představit na zrychlujícím autu projíždějícím tunelem. Aby auto vždy strávilo v tunelu stejnou dobu, musíme každý další tunel natahovat. V lineárním urychlovači jde o ten samý princip. Skutečné urychlovače v CERNu jsou komplikovanější, ale tento klíčový koncept zůstává stejný. Jediné, co je přidáno navíc, jsou radiofrekvenční dutiny. Trubice lineárního urychlovače od určité frekvence vysílají energii jako antény. Tato skutečnost vede ke ztrátám energie, které nejdou při vyšších energiích zanedbat. Tím, že celé zařízení dáme do dutiny, držíme energii uvnitř systému a při vhodné volbě frekvence lze tuto energii využít k urychlování. Lineární urychlovače používáme k prvotnímu urychlení částic z nízkých energií (a tedy i rychlostí).

Druhým typem urychlovače, který CERN využívá, jsou synchrotrony. Synchrotron je kruhový urychlovač určený k urychlování částic na relativistické rychlosti (rychlosti blízké rychlosti světla c). Tento urychlovač změnou magnetického pole drží částici na kruhové trajektorii o konstantním poloměru (obr. 2).



Obr. 2: Schéma synchrotronu. 1 reprezentuje příchozí částice, které jsou do urychlovače vstříkovány, 2 místo, kde jsou částice urychlovány, 3 kvadrupólové magnety, 4 dipólové magnety a 5 místo, kde jsou částice buď vynášeny ven nebo kde se mohou dva svazky srážet.

Protože například LHC dosahuje energií jednotek TeV (teraelektronvoltů, jeden teraelektronvolt je přibližně $1,6 \cdot 10^{-7}$ J), je potřeba vytvořit velice vysoké gradienty magnetického pole v magnetech, které fokusují svazek. Kromě dipólových magnetů (vyobrazených na obr. 2 jako 4), které slouží ohýbání, obsahuje synchrotron kvadrupólové magnety (na obr. 2 jako 3), interakční bod nebo kicker (na obr. 2 jako 5 – záleží na typu zařízení, obrázek je pouze zjednodušení) a místo, kde urychlujeme svazek (na obr. 2 vyobrazený jako 2). Částice je proto urychlována v jednom bodě na obvodu celého urychlovače a zbytek zařízení slouží k udržení svazku na kruhové dráze. Kvadrupólové magnety používáme k fokusaci svazku, čímž svazek držíme v příčném průřezu stále na kruhové trajektorii. Svazek nejsme schopni fokusovat v obou příčných směrech najednou, proto musí jít dva kvadrupólové magnety po sobě, abychom mohli fokusovat v obou směrech. Aby byla zajištěna fokusace v obou příčných směrech, musí magnety jdoucí po sobě být otočené vůči sobě tak, aby probíhala výsledná fokusace v obou směrech. Toto je zobrazeno na obr. 3.



Obr. 3: Dva po sobě jdoucí kvadrupólové magnety, které se používají v LHC. Černé šipky jsou magnetické indukční čáry a červené šipky reprezentují směr, kterým je svazek fokusován. Obrázek převzat z [1].

Situaci si lze představit jako používání hadice na zalívání květin. Pokud ústí hadice zmáčknete mezi dvěma prsty, hadice se ve směru, ve kterém mačkáme, zploští a ve směru kolmém na směr mačkání roztáhne. Voda potom vytvoří vějíř a proud se roztáhne do stran a smrští se ve směru mačkání. V urychlovačích takto mačkáme jak vertikálně tak horizontálně, aby proud pomyslné vody měl co nejmenší průřez. Urychlujeme pomocí radiofrekvenčních dutin, které fungují na stejném principu jako lineární urychlovač. Kicker slouží k plnění nebo vytahování (ex-

trakci) částic z urychlovače. Obvykle jsou synchrotrony doplněny o lineární urychlovač, který slouží k prvotnímu urychlení, protože synchrotrony nelze použít k urychlování takříkájíc od nuly.

Synchrotrony používají vědci pro dva účely. Prvním je zařízení zvané collider, kterým je například velký hadronový urychlovač. Jak už název napovídá, jedná se o synchrotron určený ke srážkám částic. V collideru máme dva svazky částic, které urychlujeme separátně a na určitém bodě v urychlovači jim umožňujeme interagovat na místě zvaném interaction point, který v collideru reprezentuje červený kruh na obr. 2. V tomto bodě pouštíme svazky proti sobě a snažíme se srazit co nejvíce částic. Částice v collideru nejsou urychlovány v jedné urychlovací dutině, ale jedná se o dva synchrotrony vedle sebe nebo na sobě. Vzhledem k tomu, o jak malých rozměrech mluvíme, trefíme se jenom malým množstvím celkového počtu částic ve svazku, při energiích jako na LHC to ale stačí. Další význam synchrotronu je storage ring, doslovně přeloženo jako uchovávací prstenec. Tento typ urychlovače slouží k tomu, když svazky nesrážíme, ale potřebujeme za nějakým účelem několik hodin držet svazek na určité energii. Díky tomu můžeme svazek postupně na cíl pouštět tak, jak potřebujeme. Částice potom odcházejí kickerem, který je na obr. 2 reprezentován červeným kruhem.

Oba typy urychlovačů se používají i v jiných odvětvích, například v medicíně pro protonovou terapii. Lze vidět, že urychlovače nejsou jen hříčkou hrstky vědců, ale pomáhají lidem v každodenním životě.

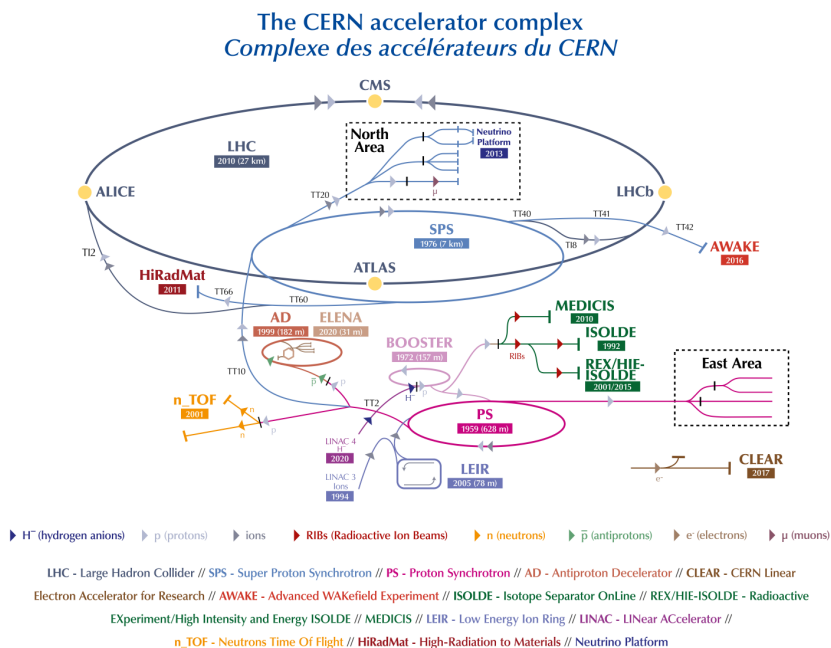
Kudy cestuje svazek

Pokud bychom v LHC chtěli urychlit proton, naše cesta započne v tlakové lahvi s vodíkem. Vžijeme se teď do situace, kdy můžeme jako pozorovatelé cestovat s jedním konkrétním protonem, i přes to, že tato modelová situace je díky zákonům mikrosvěta nerealizovatelná. Začínáme záporně nabitým iontem vodíku, který pomocí lineárního urychlovače Linac4 urychlíme na 160 MeV. Před dalším urychlováním očeseme z elektronového obalu všechny elektrony, čímž dostaneme kladně nabitý iont, což je proton. Odteď už používáme k urychlení jen synchrotrony. Tento proton vstoupí do Proton Synchrotron Boosteru (PSB), kde je urychlením na 2 GeV připraven na vstup do PS a urychlen na 26 GeV. Dalším krokem je urychlení v SPS, kde dosáhne svazek energií až 450 GeV. Poté protony vstoupí do LHC, kde jsou dva svazky urychlovány v opačných směrech, aby bylo možno provést srážku v interakčním bodě. V LHC dosahují protony energií až 7 TeV.

V CERNu se ovšem používají i jiná jádra než jenom jádra vodíku. Ke studiu kvark-gluonového plazmatu musí vědci používat jádra těžších prvků, např. olova. Jádra olova jsou produkována vypařováním a následným výbojem v plynu olova. Ionty produkované tímto způsobem jsou potom urychleny na Linac3 a v nízkonoenergetickém iontovém prstenci LEIR (Low Energy Ion Ring). Z tohoto urychlovače putují dále po stejné cestě jako protony.

Objemy dat z jedné srážky dosahují nepředstavitelných rozměrů. Díky tomu musí každý z detektorů používat systémy, které třídí data ihned po zaznamenání srážky a triggery, které rozhodují o tom, jaká srážka se zaznamená a jaká je vyhozená jako neplatná nebo nechtěná. Fyzicky k tomu slouží mnoho poddetektorů, které poskytují informace nezbytné pro učinění této volby. Celý systém potom funguje jako švýcarské hodinky.

Kompletní systém urychlovačů v CERNu je zobrazen na obr. 4.



Obr. 4: Komplex urychlovačů v CERNu. Obrázek převzat z [2].

K čemu je LHC dobré

Zatím jsme odpověděli na otázku jak, otázkou proč jsme se moc nezabývali. Cílem textu je informovat více o metodách než o cílech, obojí je ale stejně důležité. Co se tedy děje na LHC a proč je to dobré?

Na obr. 4 jsou vidět hlavní experimenty LHC, ALICE, ATLAS, CMS a LHCb. Každý z těchto experimentů slouží k jinému účelu, ale všechny pokrývají oblasti nejmodernějšího výzkumu v částicové fyzice od pochopení struktury vesmíru po velké třesky po studium temné hmoty. Kromě LHCb jsou všechny experimenty stavěny tak, že detektory obklopují celý bod, kde spolu dva svazky interagují.

ALICE využívá nejmodernějších způsobů detekce nabitých částic ke studiu kvark-gluonového plazmatu. Kvark-gluonové plazma odpovídá skupenství, ve kterém se nacházela hmota bezprostředně po velkém třesku, a to znamená, že na LHC kolizemi iontů olova studujeme podmínky a nahlížíme do minulosti vesmíru. Projekt zaznamenal první data z olovo-olovo (tak se označuje srážka dvou svazků tvořených jádry olova) srážky v roce 2010, od té doby učinil mnoho úspěchů ve studiu této oblasti fyziky.

Z trochu jiného soudku jsou ATLAS a CMS. Oba experimenty se zabývají studiem Higgsova bosonu, který byl potvrzen v roce 2012, nebo částicemi, které jsou kandidáty na temnou hmotu. Tyto experimenty se soustředí na studium produktů srážek svazků. Oba experimenty mají stejné cíle, ale jejich metody se liší stavbou nejdůležitější komponenty aparatury – magnetů, které ohýbají trajektorii nabitých částic vyprodukovaných ve srážce, z čehož lze určit charakter produktů srážky.

LHCb se také liší od ostatních svými cíli. LHCb se zabývá studiem konkrétního kvarku b , takzvaného krásného kvarku. Částice obsahující tento kvark jsou takzvaně půvabné a umožňují nám studovat, v jakých procesech je CP symetrie narušená nebo chování hmoty a antihmoty. Namísto obklopení celého bodu interakce jedním detektorem, v tomto experimentu se vědci zaměřují na produkci částic ve směru svazku. Částice při kolizi nejsou produkovány jen okolo bodu srážky, ale i ve směru, ve kterém přilétají. Studujeme tedy pasažéry uvnitř částic, kteří nebyli připoutaní a vyletěli během srážky ven z nabitě částice.

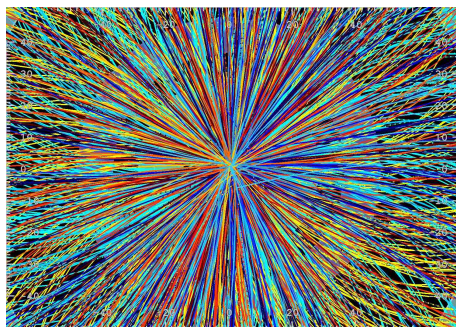
Všechny tyto experimenty i mnoho dalších a hlavně vědci se zázemím v CERNu přispěli svými objevy vědecké komunitě i široké veřejnosti. Objevy přenašečů slabé interakce $W^\pm$ a Z^0 bosony nebo objev Higgsova bosonu přispěli k pochopení světa a fyziky standardního modelu, což je

nejkompletnější teorie popisující mikrosvět, kterou fyzika zná. Poznatky o chování a výrobě antihmoty přispívají k vědě a komerčnímu využití v mnoha sektorech. A v neposlední řadě World Wide Web je dílem fyzika zaměstnaného v CERNu.

Všechny tyto objevy a poznatky přinášejí další a další otázky. Co je to temná hmota? Jsou to snad přenašeči temné hmoty? Co nastalo po velkém třesku a jak se tehdy hmota chovala? Proč pozorujeme ve vesmíru více hmoty než antihmoty? To jsou všechno problémy, se kterými se potýká současná věda včetně pracovníků v CERNu. Dveře této komunity jsou otevřeny každému, kdo má chuť bádát, a proto je možné, že některý ze čtenářů těchto řádků by mohl přispět k průlomů v některých z otázek, nad kterými si dnešní věda láme hlavu.

Literatura

- [1] Cid Vidal, X., Cid, R.: *Taking a closer look at LHC – Magnetic multipoles*. LHC Closer Website [online]. Dostupné z: https://www.lhc-closer.es/taking_a_closer_look_at_lhc/0.magnetic_multipoles, 2010.
- [2] *Our History*. CERN, 2026, <https://home.cern/about/who-we-are/our-history>.
- [3] Alesini, D.: *LINAC. Proceedings of the CERN-Accelerator-School course: Introduction to Accelerator Physics*, <https://cas.web.cern.ch/previous-schools>.
- [4] Lee, S. Y.: *Accelerator Physics*. 4. vydání, World Scientific, 2018.



Rekonstrukce jedné z prvních srážek iontů olova na LHC v rovině ortogonální na trajektorii iontů zaznamenaných detektorem ALICE. (zdroj: <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Alicelead3.jpg>)

Hustota černé díry

Jan Veselý, Planetárium Praha

Černá díra je objekt s velkou hmotností, tudíž gravitací, která je koncentrovaná do malého poloměru. Plyne z toho, že černá díra má také extrémní hustotu! Nebo je to jinak? Pojďme se na problém podívat prostředky středoškolské fyziky.

Vyjdeme ze vztahu pro „poloměr černé díry“. Známe jej jako Schwarzschildův poloměr nebo také poloměr horizontu událostí. Je to hranice, z níž je úniková rychlost rovna rychlosti světla ve vakuu. Odvození vztahu z výše uvedené podmínky a z Newtonova zákona ponecháme na čtenáři, je poměrně jednoduché.

Schwarzschildův poloměr R_S :

$$R_S = \frac{2GM}{c^2}.$$

Hustotu spočítáme (s využitím vzorce pro objem koule):

$$\varrho = \frac{M}{V} = \frac{3M}{4\pi R^3}.$$

M je v obou vztazích hmotnost tělesa (černé díry). Pro vytvoření základní představy stačí počítat se zaokrouhlenými hodnotami gravitační konstanty $G = 6,7 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{kg}^{-1}$ a rychlosti světla $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Začněme klasickou otázkou: Jaký je poloměr černé díry o hmotnosti Země?

Hmotnost Země je $M_Z = 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}$. Schwarzschildův poloměr pro černou díru o této hmotnosti je:

$$R_{SZ} = \frac{2 \cdot 6,7 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24}}{(3 \cdot 10^8)^2} \doteq 9 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 9 \text{ mm}.$$

Hustota takové černé díry pak vychází:

$$\varrho_{RSZ} = \frac{3 \cdot 6 \cdot 10^{24}}{4\pi \cdot 729 \cdot 10^{-9}} \doteq 2 \cdot 10^{30} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}.$$

To je opravdu extrémně vysoká hodnota. A co teprve černá díra o hmotnosti Slunce, tedy $M_S = 2 \cdot 10^{30}$ kg, což je třístatisíckrát větší hmotnost, než má Země.

Schwarzschildův poloměr:

$$R_{SS} = \frac{2 \cdot 6,7 \cdot 10^{-11} \cdot 2 \cdot 10^{30}}{(3 \cdot 10^8)^2} \doteq 3 \cdot 10^3 \text{ m} = 3 \text{ km}.$$

Hustota:

$$\varrho_{RSS} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 10^{30}}{4\pi \cdot 27 \cdot 10^9} \doteq 1,8 \cdot 10^{19} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}.$$

To je o jedenáct řádů méně! Zdá se tedy, že hustota černé díry s rostoucí hmotností klesá. Mnozí jistě již řešení této „záhady“ vidíte na první pohled.

Vraťme se teď zpět na začátek a dosaďme vztah pro Schwarzschildův poloměr do vzorce pro hustotu. Nejprve vyjádříme R_S^3 a převrácenou hodnotu:

$$R_S^3 = \frac{8G^3 M^3}{c^6} \Rightarrow \frac{1}{R_S^3} = \frac{c^6}{8G^3 M^3}$$

a dosadíme:

$$\varrho = \frac{3M}{4\pi R_S^3} = \frac{3Mc^6}{32\pi G^3 M^3} = \frac{3c^6}{32\pi G^3} \cdot \frac{1}{M^2}.$$

Vidíme, že hustota černé díry klesá s druhou mocninou její hmotnosti:

$$\varrho \approx \frac{1}{M^2}.$$

Pojďme ale pro zajímavost ještě spočítat hustoty černých děr v centrech galaxií. Využijeme toho, že v rovnici pro hustotu černé díry rozepsané do dvou zlomků se v prvním zlomku vyskytují pouze konstanty, a tudíž stačí hodnotu hustoty černé díry o hmotnosti Slunce vynásobit faktorem $1/M^2$, pokud hmotnost galaktické černé díry vyjádříme jako násobek hmotnosti Slunce (M_S), což je obvyklá praxe. Tedy

$$\varrho_{SG} = \varrho_{RSS} \cdot \frac{1}{M^2}.$$

Hmotnost černé díry v jádru naší Galaxie je $M_G = 4,2 \cdot 10^6 M_S$. (4,2 milionů hmotností Slunce). Dosazujeme tedy tak, že výše vypočítanou hustotu černé díry o hmotnosti Slunce ($1,8 \cdot 10^{19} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$) násobíme

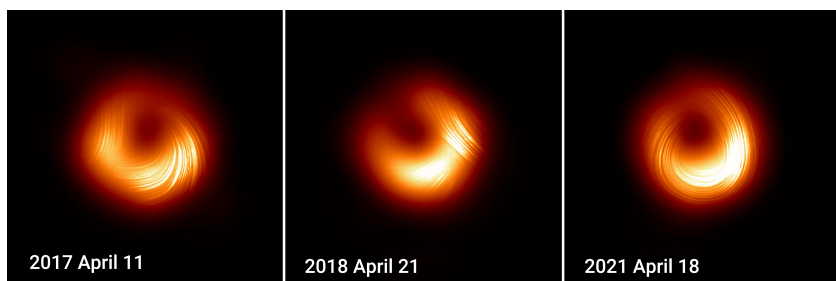
převrácenou hodnotou druhé mocniny hmotnosti galaktické černé díry vyjádřenou jako násobek hmotnosti Slunce (což je bezrozměrný faktor), a tím se výpočet zjednoduší:

$$\varrho_{\text{RSG}} = 1,8 \cdot 10^{19} \cdot \frac{1}{(4,2 \cdot 10^6)^2} \doteq 1,0 \cdot 10^6 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}.$$

To je stále ještě velmi vysoká hodnota, tisícinásobek hustoty vody. Ale pozor! V jádrech galaxií nacházíme i opravdové veledíry. Např. hmotnost černé díry M87* v galaxii Messier 87 – první, u níž se podařilo pomocí radioteleskopů „vyfotografovat“ akreční disk, který ji obklopuje – činí 6,5 miliardy hmotností Slunce, tedy $M_{87} = 6,5 \cdot 10^9 M_{\text{S}}$. Její hustota je

$$\varrho_{\text{RS87}} = 1,8 \cdot 10^{19} \cdot \frac{1}{(6,5 \cdot 10^9)^2} \doteq 0,43 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}.$$

To je přibližně třetina hustoty vzduchu za normálních podmínek!!



Obr. 1: Změny v akrečním disku v okolí černé díry M87*, který pozorujeme pomocí sítě radioteleskopů zapojených do projektu Event Horizon Telescope. Jde o pozorování v polarizovaném rádiovém záření na frekvenci 230 GHz. (zdroj: eventhorizontelescope.org)

Závěr

Atribut extrémní hustoty je černé díře často připisován. Vede k tomu i představa vzniku černých děr gravitačním zhroucením jader velmi hmotných hvězd do malého objemu. Ukázali jsme ale, že je to poněkud zavádějící pohled na věc. Podstatné je hlavně to, že jsme počítali průměrnou hustotu oblasti ohraničené horizontem událostí. Nicméně tato hodnota ve skutečnosti nemá valný fyzikální smysl. Schwarzschildův poloměr není rozměrem tělesa v klasickém smyslu. Určuje horizont událostí, tedy hranici, zpoza níž neunikne ani světlo. Prostoročas uvnitř horizontu je navíc silně zakřivený, a proto v tomto případě nelze jednoduše uplatnit archimédovskou koncepci hustoty jako podílu hmotnosti a objemu.

Vydává Jednota českých matematiků a fyziků
tel.: 222 090 708-9, e-mail: jcmf@math.cas.cz
za podpory MFF UK Praha a FJFI ČVUT Praha



Vycházejí 4 čísla v kalendářním roce

Obálku navrhl Bohuslav Šír

Sazbu programem $\text{\TeX}$ připravil RNDr. Miloslav Závodný

Adresa redakce: MFF UK, V Holešovičkách 2, 182 00 Praha 8–Troja
e-mail: rozhledy@jcmf.cz

Internetové stránky časopisu: <https://rozhledy.jcmf.cz/>

Vytiskla Tiskárna Matula, Olomoucká 27, 618 00 Brno

Distribuci pro předplatitele provádí v zastoupení vydavatele
MediaCall, s. r. o.

Vídeňská 546/55, 639 00 Brno

tel.: +420 532 165 165, e-mail: export@mediacall.cz

web: www.zahranicnitisk.com

ISSN 0035-9343

MK ČR E4691

© Jednota českých matematiků a fyziků, Praha 2026

Redakční rada

Vedoucí redaktorka:

doc. Ing. Lubomíra Dvořáková, Ph.D., FJFI ČVUT Praha

Redaktorka pro matematiku:

doc. Ing. Lubomíra Dvořáková, Ph.D., FJFI ČVUT Praha

Redaktorka pro fyziku:

RNDr. Věra Krajčová, Ph.D., FJFI ČVUT Praha

Členové redakční rady:

prof. RNDr. Vlastimil Dlab, DrSc., F.R.S.C., Praha

doc. RNDr. Zdeněk Drozd, Ph.D., MFF UK Praha

RNDr. Petr Hanuš, FSv ČVUT Praha

doc. RNDr. Jaroslav Hora, CSc., FPE ZČU Plzeň

prof. RNDr. Ivo Kraus, DrSc., FJFI ČVUT Praha

doc. RNDr. Jan Kříž, Ph.D., PřF UHK Hradec Králové

prof. RNDr. Miroslav Lávička, Ph.D., FAV ZČU Plzeň

RNDr. Pavel Pokorný, Ph.D., VŠCHT Praha

RNDr. Miroslav Randa, Ph.D., PdF ZČU Plzeň

RNDr. Filip Studnička, Ph.D., PřF UHK Hradec Králové

doc. RNDr. Jan Šlégr, Ph.D., PřF UHK Hradec Králové

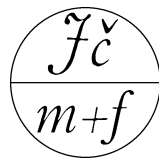
prof. RNDr. Pavel Tlustý, CSc., PedF JU České Budějovice

doc. RNDr. Pavel Töpfer, CSc., MFF UK Praha

RNDr. Vladimír Wagner, CSc., ÚJF AV ČR Řež

ROZHLEDY matematicko-fyzikální

Ročník 101 (2026), číslo 3



OBSAH

J. Kuchařík: Důkaz větší než nekonečno, který končí u nuly	1
P. Šimová, J. Suchánek (za M&M): Korespondenční seminář M&M	11
A. Heroudková: BRněnský KOrespondenční Seminář	19
D. Dlab: Rotationally Multiplicative Integers	22
Matematické oříšky: Hrátky s čísly	36
T. Jandík: Nikdy nevíte, k čemu vám bude matematika za dvacet let	37
I. Kraus, Š. Zajac: Jan Marek Marci (Johannes Marcus Marci) *13. 6. 1595, †10. 4. 1667	46
M. Růžek: Proč se rázostroj přestává odrážet aneb synchronizace prostřednictvím nepružných srážek	53
M. Tonka: Co se děje v CERNu	62
J. Veselý: Fyzikální okénko: Hustota černé díry	70

Pokyny pro autory

Příspěvky dodávejte na adresu redakce v elektronické podobě. Nejlépe napsané ve formátu $\text{\LaTeX}$, přijatelný je i formát $\text{\PlainTeX}$, je akceptovatelný i text připravený editorem Word či podobným.

Pokud jde o obrázky, je žádoucí, aby byly připraveny v reprodukovatelné podobě. Každý obrázek nechť je v samostatném souboru, nejlépe ve formátu pdf nebo eps. Přípustná je též bitmapa v dostatečném rozlišení.

Ke každému zasílanému příspěvku (ne u soutěží, zpráv a recenzí) přiložte krátkou anotaci v českém jazyce. Dále je žádoucí, aby u každého příspěvku byla uvedena literatura, na kterou je v textu odkazováno.