ROZHLEDY

MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ

ČASOPIS PRO ZÁJEMCE O MATEMATIKU, FYZIKU A INFORMATIKU

ROČNÍK 99 (2024) • ČÍSLO 1

Modely a paradoxy teorie her, úvahy o vězňově dilematu

Tereza Čapková, Ekonomická fakulta JU, České Budějovice
Jana Klicnarová, Ekonomická fakulta JU, České Budějovice
Tomáš Roskovec, Pedagogická fakulta JU, České Budějovice

Abstrakt. V článku představujeme některé základní pojmy teorie her na klasické úloze vězňova dilematu. Úloha je snadno formulovatelná, přesto má zejména v ekonomii významné aplikace. Pozoruhodné na ní je zejména to, že různé přístupy k modelování rozhodování vedou k velmi různým výsledkům, ke kterým se musí přistupovat s opatrností. Kromě modelů zmíníme i experimenty.

Matematický model je něco, co je sice špatně, ale přesto je to užitečné. Tato myšlenka, vypůjčená z přednášky Luďka Berce [2], je zvláště relevantní v aplikované matematice, kde se často setkáváme s jevy, které je obtížné přesně popsat, přesto je chceme analyzovat. Proto v různých oborech, jako je fyzika, biologie nebo společenské vědy, často využíváme zjednodušující modely, abychom lépe porozuměli složitým situacím a mohli navrhnout řešení, která pak musíme pečlivě posoudit a aplikovat. Jinými slovy, model zjednodušuje situaci, aby byla popsatelná a řešitelná, ale musíme si dát pozor, abychom po zjednodušení už neřešili zcela jiný problém a nedostali tak naprosto přesné řešení zcela jiné úlohy.

V tomto pojednání se budeme zabývat modely založenými na tzv. teorii her. Kořeny teorie her sahají do 16. a 17. století. Původně se vědci zabývali především problémy ve vztahu k tehdy velmi populárním salonním hrám. Základním specifikem teorie her je, že se zde bere v úvahu reakce ostatních stran (na rozdíl například od teorie rozhodování). Předpokládáme, že všichni aktéři jsou tzv. racionální, to znamená, že se každý snaží o co největší vlastní prospěch. Za základ současné teorie her se pokládá článek Johna von Neumanna z roku 1928. Základní pojmy, včetně pojmu teorie her, byly ustanoveny v knize, kterou napsal ve spolupráci s Oskarem Morgensternem v roce 1944 [8] a kde poukazují na souvislost problematiky teorie her a (nejen) ekonomických problémů.

V současné době je teorie her široce rozšířený obor, který se zabývá zkoumáním střetů a rozhodování mezi dvěma nebo více hráči v různých typech her – v hrách, situacích a konfliktech. Tito hráči mohou představovat jednotlivce, firmy nebo dokonce státy, zkrátka aktéry, kteří jsou vůči sobě v nějaké konfliktní situaci. Hry mohou zahrnovat různé situace, jako je obchodní jednání, výběrová řízení, karetní hry nebo plánování společné dovolené. V našem příspěvku se zaměříme na jeden z nejklasičtějších problémů teorie her, na hru, která je základním prvkem kurzů teorie her v matematice i ekonomii. Na ní budeme demonstrovat několik fascinujících paradoxů této teorie.

Vězňovo dilema

Problém, dnes známý jako vězňovo dilema, popsali Merrill Flood a Melvin Dresher v roce 1950. Jméno a dodnes uváděnou legendu mu dal Albert W. Tucker v roce 1951, který přepracoval původní číselné zadání tak, aby bylo srozumitelné i pro nematematiky, zejména pro psychology. O jaký problém jde? Jedná se o hru, která se odehrává mezi dvěma vězni (ve skutečnosti vlastně zadrženými), kteří jsou zatčeni a obviněni ze společného zločinu. Každý z nich je umístěn v oddělené místnosti a má možnost se rozhodnout, zda se přizná (samozřejmě s určitou mírou viny připsané komplici) nebo zda bude popírat svou vinu. Existují tedy čtyři možné kombinace rozhodnutí, které jsou znázorněny tabulkou (v řeči teorie her maticí) na obr. 1.

		Bob	
		popírat vinu	přiznat se
Alice	popírat vinu	1 rok 1 rok	3 roky propuštění
	přiznat se	propuštění 3 roky	2 roky 2 roky

Obr. 1: Vězňovo dilema

V této matici jsou uvedeny tresty, které odpovídají různým kombinacím rozhodnutí obou vězňů. Pokud se oba přiznají, bude jim vina prokázána a budou odsouzeni každý na dva roky ve vězení. Pokud se žádný z nich nepřizná, budou odsouzeni za nižší zločin (nelze prokázat vinu) a každý obdrží trest jeden rok. Když se jeden vězeň přizná a druhý zapírá, pak vězeň, který zapírá, bude odsouzen na velmi dlouhou dobu (tři roky, bude mu prokázána vina), zatímco vězeň, který poskytne přiznání, je propuštěn bez trestu (získává polehčující okolnost). Tímto dilematem je ilustrováno, jak složité může být rozhodování ve střetu zájmů a jaký vliv mají jednotlivá rozhodnutí na výsledek pro každého z hráčů.

Teorie her nás směřuje k hledání optimálních strategií. V případě, že vězni nemají možnost se dohodnout a neznají chování svého komplice, musí se snažit odhadnout správnou strategii. V takové situaci by analyzovali: Pokud můj kolega mlčí, je pro mě výhodnější se přiznat, protože tím se dostanu do nejvýhodnější situace, zatímco pokud budu mlčet, čeká mě delší trest. A pokud se můj kolega přiznal, měl bych se také raději přiznat, protože mlčení opět vede k delšímu trestu. Proto, pokud jednáme racionálně a nebere se ohled na důsledky (nebo v jazyce teorie her výplatu) druhého hráče, je v každém případě výhodnější se přiznat. Pokud jsou oba hráči racionální, oba se tedy přiznají. Prvním paradoxem je, že pokud každý hráč minimalizuje svůj trest, výsledkem je situace, kdy si hráči dohromady odsedí maximální možnou dobu.

Z výše popsaného je tedy patrné, proč se tento problém nazývá dilema. Nejlepší strategie pro oba hráče, pokud by spolupracovali a věřili si, by bylo se nepřiznat, v takovém případě by jim nebylo nic prokázáno a dostali by každý pouze rok. Ale toto řešení není takzvaně stabilní, to znamená, že pokud se hráč rozhodne nejednat podle této strategie, tak si polepší a druhému pohorší. Právě tato struktura výsledků se objevuje v mnoha problémech z oblastí ekonomie, sociologie, politologie, biologie, proto je vězňovo dilema stále aktuálním problémem.

V předchozí úvaze jsme využili model nekooperativních her, který předpokládá, že hráči nemohou uzavřít dohody a rozhodují se pouze na základě vlastní výplaty. Nicméně, pokud hráči dokážou spolupracovat a hledají nejvýhodnější rozhodnutí pro oba, mohou se dohodnout a oba budou mlčet, čímž dosáhnou v součtu nejkratšího možného trestu. Rozdíl ve výplatách (v našem případě rozdíl ve společných trestech) se nazývá superaditivní efekt, v našem případě je to $(2 + 2) - (1 + 1) = 2$ roky trestu. Oba modely, nekooperativní i kooperativní, se zaměřují primárně na matematickou stránku problému a obvykle neposkytují úplný obraz reality, protože nezahrnují všechny lidské faktory, jako je důvěra, psychologie, zkušenost a další.

Nashova rovnováha

I lidé mimo matematiku často znají jméno Johna F. Nashe, vynikajícího matematika, jehož život poznamenala psychická choroba. O Nashovi vznikl film Čistá duše, který velice volně popisuje některé jeho životní osudy. V tomto filmu je rovněž zmíněn a popsán pojem Nashovy rovnováhy, ovšem chybně a velice nepřesně. Přitom právě důkaz existence rovnovážného (Nashova) bodu je práce, za kterou byl Nash oceněn Nobelovou cenou. Co je to *Nashova rovnováha*? To je volba strategií hráčů, ve které se ani jednomu hráči nevyplatí změnit svou strategii, za předpokladu, že ostatní hráči svoji strategii zachovají. Ve výše zmíněném dilematu je to právě rozhodnutí obou hráčů přiznat vinu. Pokud bude druhý hráč držet svoji strategii (tj. přizná se), tak se mi nevyplatí měnit mé rozhodnutí (tj. přiznat se). To ilustruje, že taková volba rozhodnutí nemusí být tím nejlepším pro jednoho či více hráčů, ale je to řešení, které je stabilní.

Jiný příklad je hra *Kámen, nůžky, papír*, kde je jediná situace odpovídající Nashově rovnováze právě strategie hrát náhodně, tedy každý symbol volit s pravděpodobností $1/3$. Pokud bychom totiž volili jakékoli jiné pravděpodobnosti nebo nějaký systém, soupeř se může přizpůsobit (pokud preferujeme kámen, soupeř bude častěji hrát papír a méně často nůžky, budeme-li pravidelně střídat strategie, protihráč se také přizpůsobí, bude vědět, co budeme volit), ale pak se i nám vyplatí jeho nové strategii přizpůsobit. Tato úvaha je poněkud náročná na výpočet, ukazuje nám ovšem, proč chytrý algoritmus dokáže při dostatečném počtu opakování člověka v této hře porazit – člověk je totiž velmi špatný generátor náhodných veličin. Tato chybovost byla studována například v [9], kde představili algoritmus úspěšný proti lidskému hráči. Nejedná se ovšem o rovnovážný bod, protože pokud vím, že soupeř hraje dle prezentované strategie, dokáži odhadnout jeho strategii v daném kole a odpovědět papírem na jeho kámen a podobně.

Existují i příklady s více body Nashovy rovnováhy. Například *úloha protijdoucích*, kde jde o minutí či střetnutí protijdoucích osob. Jednoduchá hra, kdy jdete po chodníku a přímo proti vám jde jiný chodec. Pokud půjde osoba proti nám napravo, chceme jít nalevo a minout ji. Pokud jde nalevo, stočíme se doprava a nesrazíme se. Nikoho by snad nenapadlo změnit směr a otočit se vpravo, pokud předpokládáme, že osoba jdoucí proti nám se bude držet vpravo od nás, naopak pokud by nás míjela zleva, nebudeme měnit strategii a zůstaneme vpravo. Zde jsou tedy dva Nashovy rovnovážné body. A pokud jdeme na chodníku přímo proti někomu, je nám jedno, který z nich nastane, ale jakmile jsou naše zamýšlené dráhy patrné, ani my, ani protijdoucí nezměníme trasu.

A co bylo na tomto triviálním pojmu tak fascinující, že se to dočkalo Nobelovy ceny? Předně důkaz existence takového bodu za určitých předpokladů konečnosti hry, ale také důsledky a aplikace v ekonomických modelech.

Aplikace vězňova dilematu

Jedním z příkladů, jak lze využít vězňovo dilema v ekonomii, je situace oligopolu. Pro jednoduchost se zaměříme na duopol, což je situace, kdy dvě firmy ovládají prakticky celý trh. Každá z nich se musí rozhodnout, jakou cenu stanoví pro svůj produkt. Tyto firmy mají možnost (pro zjednodušení) volby mezi nižší a vyšší cenou. Jestliže se obě firmy shodnou na nastavení vyšší ceny, budou si rovnoměrně rozdělovat trh a dosáhnou tak vyšších zisků. Naopak, pokud jedna firma zvolí nižší cenu než druhá, firma s nižší cenou získá celý trh a významné zisky, zatímco firma s vyšší cenou ztratí svou pozici na trhu. Když se obě firmy rozhodnou pro nižší cenu, budou si trh rozdělovat rovnoměrně, avšak dosáhnou menšího zisku než při vyšších cenách. Ekonomická teorie tvrdí, že v takovémto „trestném" prostředí si firmy nemohou vzájemně důvěřovat, a proto se neodváží zvolit vyšší cenu. Z pozorování reality však vyplývá, že omezení počtu subjektů na trhu často vede ke zvýšení cen, a to i přesto, že kartelová dohoda mezi firmami je zakázána zákonem (jako například u mobilních operátorů v České republice). Situaci duopolu lze znázornit pomocí výplatní matice, viz obr. 2.

		Firma 2	
		vyšší cena	nižší cena
Firma 1	vyšší cena	Vysoké zisky, férový podíl trhu Vysoké zisky, férový podíl trhu	Ztráta pozice na trhu Vysoké zisky, celý trh
	nižší cena	Vysoké zisky, celý trh Ztráta pozice na trhu	Nižší zisky, férový podíl trhu Nižší zisky, férový podíl trhu

Obr. 2: Rozhodování oligopolistů

Během pandemie Covid-19 jsme všichni čelili vězňovu dilematu, aniž bychom si toho byli plně vědomi, při rozhodování, zda nosit nebo nenosit roušku (samozřejmě za přijatého předpokladu, že nošení roušky přenos nemoci omezí). Tato situace se dá opět ilustrovat pomocí matice rozhodnutí, viz obr. 3. Pokud bude většina populace omezovat možnost přenosu, bude počet nakažených snížen, ale každý omezující se rouškou nebo omezením sociálního kontaktu obětovává své pohodlí.

		Tvoje volba	
		rouška	bez roušky
Moje volba	rouška	nepohodlí, ale pandemie skončí rychle nepohodlí, ale pandemie skončí rychle	nepohodlí, ale pandemie skončí pomalu volnost
	bez roušky	volnost nepohodlí, ale pandemie skončí pomalu	pandemie neskončí pandemie neskončí

Obr. 3: Rozhodování o rouškách

Na poli randění můžeme také nalézt aplikaci vězňova dilematu. Začátek vztahu totiž závisí na vzájemném odhalení citů, kdy každá strana přiznává, že něco cítí ke druhému. Toto odhalení však nese určité riziko, neboť pokud se jedna strana přizná ke svým citům a druhá strana necítí totéž, může se ta první cítit trapně. Naopak, pokud obě strany sdělí svou náklonnost, je to radostná událost. Avšak často je riziko jednostranné lásky příliš velké, což vede k tomu, že účastníci volí Nashovu rovnováhu – tedy se ke svým citům nepřiznají.

V těchto příkladech vidíme, že počáteční modely o kooperaci a nekooperaci přichází do hry oba, a je třeba dalších úvah, abychom rozhodli, který z nich popíše právě zkoumanou situaci. Lze samozřejmě matematicky počítat přínos hráčů z kooperace, ale v aplikacích o navázání spolupráce rozhodnou zpravidla argumenty jiné než čistě racionální.

Opakované vězňovo dilema

Klíčový aspekt, který oddělí kooperaci od nekooperace, je důvěra. Pokud si hráči věří, mohou získat společně více, ale při základním nastavení se hráčům vyplatí si nevěřit. Nyní zkoumejme pozměněný model, takzvané opakované či iterované vězňovo dilema, kdy spolu hráči sehrají několik her po sobě a výsledná výplata je součet skóre v jednotlivých kolech.

Tento model je pro popis vztahů mnohem zajímavější. Partneři v obchodě, ve vědě i v životě se často ocitají v situaci, kdy mohou pracovat na společné věci a důvěřovat, že partner se zachová obdobně, ale mohou se také zachovat sobecky a jen sklízet práci a úsilí partnera. Pokud oba budou preferovat sobecký přístup, sice se nenamáhají zbytečně, ale také se zdaleka nebudou mít tak dobře jako ti, kteří se na sebe mohou spolehnout a něco spolu podniknout. Pokud například obchodnímu partnerovi nevěřím, nepošlu peníze, dokud neobdržím zboží, naopak prodejce bude vyžadovat zálohy a záruky, případně obě strany zaplatí prostředníkům či právníkům za pojištění před podvodem. Všechny tyto úkony stojí čas, úsilí a peníze a jsou zbytečné u partnera, který je spolehlivý. Dle Nashe je optimální v posledním kole iterované hry partnera zradit. Proto stačí o hře přemýšlet jen do předposledního kola. Ale tím se předposlední kolo stává posledním v modelu a opět je nejvýhodnější zradit. Pokračujme v úvaze a můžeme odhadnout, že optimální volba je nekooperativní hra, při které ale oba hráči (jednající dle teorie a optimálně) dopadnou velmi špatně.

Na druhou stranu Robert Axelrod uspořádal slavný turnaj umělých inteligencí, které se střetnou, sehrají spolu iterované vězňovo dilema s náhodným vyšším počtem kol. Vyzval odborníky napříč odvětvími vědy (sám byl politolog), aby navrhli algoritmus, který by v daném turnaji nejlépe uspěl. Přihlášeno bylo 14 strategií a jedna zcela náhodná, které se střetly. A mezi velmi složitými statistickými úvahami a Markovskými řetězci zvítězila strategie až triviální. Začíná spoluprací a v každém dalším kole provede přesně to, co udělal její partner v předchozím kole. Této strategii se říká Tit-for-Tat (obtížně přeložitelná fráze, volně „jak ty mně, tak já tobě“ či „oko za oko, zub za zub“) či Copycat (opisující, opičící se). Později byl tento proslavený turnaj zopakován s mnohem vyšším počtem strategií, mnohé z nich byly navržené tak, aby právě Tit-for-Tat porazili, protože vítěz prvního turnaje byl znám. Ovšem opět zvítězil Tit-for-Tat, protože všemožné komplikované strategie mezi sebou ztratily více. Tím se dostáváme k dalšímu zajímavému paradoxu, kdy experiment nesouhlasí s modelem. Je zde samozřejmě podstatný faktor, že umělé inteligence neznaly počet kol, přesto je překvapivé, že v turnaji je nám strategie oceněná Nobelovou cenou k velmi malému užitku.

Robert Axelrod, který nebyl matematikem, z turnaje vyzdvihnul aplikovatelné myšlenky. Napsal slavnou knihu [1], kde zdůvodnil vítězství Tit-for-Tat dodržením čtyř pravidel pro zdravý partnerský vztah:

1. Buďte milí, nebuďte tím, kdo zklame jako první.
2. Trestejte náhle, ať váš partner okamžitě ví, že mu to u vás neprojde.
3. Odpouštějte, pokud se partner po pochybení začne chovat správně, jednejte s ním, jako by se tak choval vždy.

4. Buďte čitelní, ať váš partner okamžitě ví, co bude po jeho akci vaše reakce.

Významnou popularizační prací je web Evolution of trust od Nicky Case [3], kde se formou hry dozvíme o iterovaném vězňově dilematu, a jehož cílem je propagovat tvorbu důvěry mezi lidmi. Na webu je zahrnut i problém šumu neboli neúmyslné nespolupráce. To je mnohem přesnější model, protože i u dobrých partnerů se můžeme dočkat nenaplnění dohody z objektivních důvodů. Dodavatel nedodá zboží, protože nedostal materiál od svého subdodavatele, spoluautor článku má zpoždění, protože mu onemocněly děti a musí je hlídat, naše milá či milý nedorazí na rande, protože vlak zastavil kdesi v polích a nedovezl je. V takovém modelu se zvažuje zjemnění strategie na Tit-for-two-Tats, kdy partnerovi nevracíme jeho předchozí tah, ale spolupracujeme, pokud od něj nepřišla nespolupráce ve dvou předchozích kolech. Pokud by se totiž střetli dva Tit-for-tat a jeden z nich neúmyslně nespolupracoval, tak si tuto nespolupráci budou předávat po celý zbytek jejich partnerství.

Zajímavá je simulace v pseudoevolučním algoritmu, kdy v nastavené populaci strategií dochází po vyhodnocení k odstranění neúspěšných a naklonování úspěšných. Toto bylo analyzováno například v [3, 5]. Tento model do jisté míry připomíná společnost, kde méně úspěšní lidé změní své chování podle vzoru úspěšných. Zde se ukazuje, za jakého složení převládne jaká strategie, například pokud budou naivní zneužíváni nespolupracujícími, tak naivní hráči časem z populace zmizí a budou nahrazeni nespolupracujícími strategiemi, podobně jako důvěřivý člověk může přestat důvěřovat cizincům, pokud se opakovaně setká s nepoctivým jednáním. Paradoxem právě tohoto modelu je, že ryze sobecké strategie mohou za určitých podmínek převážit, ale toto vítězství znamená, že tito hráči dostanou velmi malou výplatu, protože jejich zisk pramení ze zneužívání důvěry, kterou ale svým chováním z populace zcela vymýtili. Obecně ztráta důvěry znamená snížení výplaty všem zúčastněným, což je pozorování přesahující modely.

Jeden velmi zajímavý výsledek je uveden v článku Reného Levínského, Abrahama Neymana a Miroslava Zeleného [7]. Popisuje tvorbu strategie vedoucí k tomu, aby vás váš partner „neobral“. Řeší otázku, kolik informací musíme v hlavě držet, abychom byli schopni navrhnout proti soupeřově známé strategii dobrou odpověď. Překvapivě si stačí pamatovat stejně jako soupeř a není tedy třeba mít nutně větší paměť. Tento výsledek je sice velmi obecný, nevztahuje se jen k vězňovu dilematu, ale zrovna na něm se dobře vysvětluje jeho zajímavost.

Chování hráčů a optimální strategie

Po všech těchto modelech s vypočítanými strategiemi a umělými inteligencemi samozřejmě musíme zvážit, do jaké míry jsme se při tvorbě modelu odchýlili od reality a zda lidé při svých denních úvahách připomínají spíše Nashův model či model Axelrodův. Tato otázka však již leží mimo oblast matematiky a spadá spíše do sociálních věd, přesto ji nastíníme.

Již od počátku je patrno, že lidé se snaží vyhnout situaci oboustranně sobeckého jednání, a pokud existuje důvod pro důvěru, tak se ji snaží udržovat. Samozřejmě je velmi různé a individuální, při jakých situacích se důvěra ztrácí.

V nedávné práci se touto otázkou zabývala spoluautorka tohoto příspěvku a pomocí webu [4] došla k zajímavým pozorováním. Zdá se, že mezi muži a ženami není při hře velký rozdíl, ale v našem vzorku respondentů se starší hráči chovali více poctivě a byli úspěšnější a také metodičtější. A samozřejmě byla položena otázka, jaká předem naplánovaná strategie by přinesla nejlepší výsledek pro konečný počet her. A ukazuje se, že nejlepší je zpočátku důvěru budovat poctivostí, a v závěru partnerovu důvěru využít a chovat se sobecky. Tuto strategii jsme pro účely práce nazvali Zlatokopka.

Potěšující ovšem je, že ačkoli hráči hráli jen o fiktivní peníze a jejich sobectví by přineslo vyšší skóre, ale neublížilo skutečným lidem, tak se většina z 300 hráčů, konkrétně 94 %, chovala velmi slušně. Po čtyřech kolech, kdy si oba partneři pomáhali, jen velmi malý počet hráčů poslechl v posledním kole Nashe a zachoval se sobecky. Hráči tím paradoxně nemaximalizovali své skóre, svůj zisk, ale hráli vstřícně a slušně. Tato absence optimalizace není výhodná pro hráče, ale podává příznivou zprávu o chování lidí a naší společnosti.

Závěr

Článkem jsme chtěli především čtenáře navnadit na bohaté a atraktivní pole teorie her, kterému se lze věnovat odborně i rekreačně. Řada matematických hříček a úvah může vést k úlohám této teorie, zároveň je tato teorie jednou z těch oblastí matematiky, jejíž aplikace jsou srozumitelné a okamžitě použitelné. Též chceme čtenáře tímto textem varovat před bezhlavým aplikováním výsledků modelů, což je velmi aktuálním tématem. Často se totiž bohužel setkáváme s tím, že z mnoha možných variant je model zvolen tak, aby podpořil názor rozhodce, a nikoliv na základě jeho vhodnosti, zejména v ekonomických, politických, ale i zdravotnických otázkách.

Literatura

[1] Axelrod, R.: *Evolution of cooperation.* Basic books, New York, 1984.

[2] Berec, L.: *Matematické modelování v ekologii a epidemiologii.* Matematika pro život, Jihočeská univerzita, České Budějovice, 2023, [online přednáška] `https://www.youtube.com/watch?v=zaW0Rgv3RIg`.

[3] Case, N.: *Evolution of trust.* `https://ncase.me/trust/`.

[4] Čapková, T.: *Web Creation of trust.* `https://creationoftrust.capek.io/`.

[5] Čapková, T., Roskovec, T.: *Short sequence iterated prisoner's dilemma in simulations and applications.* In: 16th International Scientific Conference Inproforum, roč. 16 (2022), s. 215–221.

[6] Kruml, D.: *Vězeň to má spočítané.* Masarykova univerzita, Brno, 2018.

[7] Levínský, R., Neyman, A., Zelený, M.: Should I remember more than you? Best responses to factored strategies. *International Journal of Game Theory*, roč. 49 (2020), s. 1105–1124.

[8] von Neumann, J., Morgenstern, O.: *Theory of Games and Economic Behavior.* Princeton University Press, Princeton, 1944.

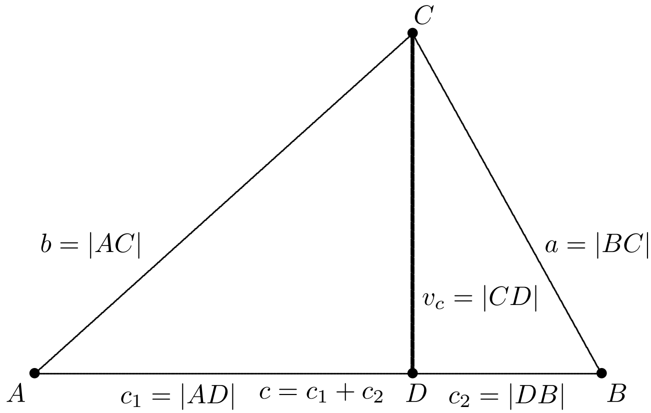
[9] Xu, B., Zhou, H.-J., Wang, Z.: Cycle frequency in standard Rock–Paper–Scissors games: Evidence from experimental economics. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, roč. 392 (2013), č. 20, s. 4997–5005.

Využijme Pythagorovu větu

Vlastimil Dlab, Bzí u Železného Brodu

V literatuře, ať už v učebnicích či časopisech pro školy, se často setkáváme s důkazy jednoduchých tvrzení, která používají pojmy a znalosti nepřiměřené dané úloze. Nezřídka to souvisí s aplikací nabiflovaných vzorečků. Typické je užívání kosinové věty Al Kašího (1380–1429) v případech, kdy plně a s větším porozuměním postačí jednoduchá aplikace podobnosti trojúhelníků a nebo věta Pythagorova. Takových příležitostí lze nalézt v literatuře nadmíru (viz [2]). Zde je třeba zdůraznit, že aplikace jednoduchých a pro žáky nižších ročníků přístupných metod přináší do výuky porozumění a jako důsledek zájem o matematiku.

Ilustrujme tuto skutečnost na jednoduché úloze vyjádřit závislost délky výšky trojúhelníku na délce jeho stran. Vysvětlení nám umožní obr. 1 (který už obsahuje hledaná vyjádření pro výšku z bodu C na stranu c).



$$v_c = \frac{\sqrt{(a^2+b^2+c^2)^2 - 2(a^4+b^4+c^4)}}{2c} =$$
$$= \frac{\sqrt{a^4+b^4+c^4-(a^2-b^2)^2-(b^2-c^2)-(c^2-a^2)}}{2c} =$$
$$= \frac{\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}}{2c}$$

Obr. 1

Obr. 1 obsahuje dva pravoúhlé trojúhelníky ΔADC a ΔBDC. Užitím Pythagorovy věty dostáváme

$$v_c^2 = b^2 - c_1^2 \tag{1}$$

a

$$v_c^2 = a^2 - c_2^2 = a^2 - (c - c_1)^2 = a^2 - c^2 - c_1^2 + 2cc_1. \tag{2}$$

Po dosazení do (2) za v_c^2 z (1) a po jednoduché úpravě máme

$$c_1 = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c} \tag{3}$$

a po dosazení za c_1 z (3) do (1) máme

$$v_c^2 = \frac{4b^2c^2 - (-a^2 + b^2 + c^2)^2}{4c^2}. \tag{4}$$

Zde je užitečné zmínit příslušné vyjádření obsahu $\mathcal{S}$ trojúhelníku ABC:

$$\mathcal{S} = \frac{1}{2}cv_c = \frac{\sqrt{4b^2c^2 - (-a^2 + b^2 + c^2)^2}}{4}.$$

Zapíšeme-li tento výraz ve tvaru $4\mathcal{S} = \sqrt{V}$, můžeme vyjádřit V v různých formách. Kromě tvarů, které obdržíme záměnou stran a, b, c, totiž

$$V = 4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2 \quad \text{a} \quad V = 4a^2c^2 - (a^2 - b^2 + c^2)^2,$$

máme

$$V = 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) - a^4 - b^4 - c^4,$$
$$V = a^4 + b^4 + c^4 + (a^2 - b^2)^2 - (b^2 - c^2)^2 - (c^2 - a^2)^2,$$
$$V = (a^2 + b^2 + c^2)^2 - (a^4 + b^4 + c^4)$$

a tvar připomínající Heronův vzorec:

$$V = (a + b + c)(-a + b + c)(a - b + c)(a + b - c).$$

Potřebná odvození vzorců ponechme čtenáři. Zde stručně odvodíme vzorec poslední, neboť poskytuje velmi jednoduchý důkaz Heronova vzorce pro obsah trojúhelníku. Pišme

$$\begin{gathered}
[(a + b + c)(-a + b + c)][(a - b + c)(a + b - c)] = \\
= [(b + c)^2 - a^2][a^2 - (b - c)^2] = \\
= a^2[(b + c)^2 + (b - c)^2] - a^4 - (b^2 - c^2)^2 = \\
= 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) - a^4 - b^4 - c^4.
\end{gathered}$$

Označíme-li $a + b + c = 2s$, dostáváme

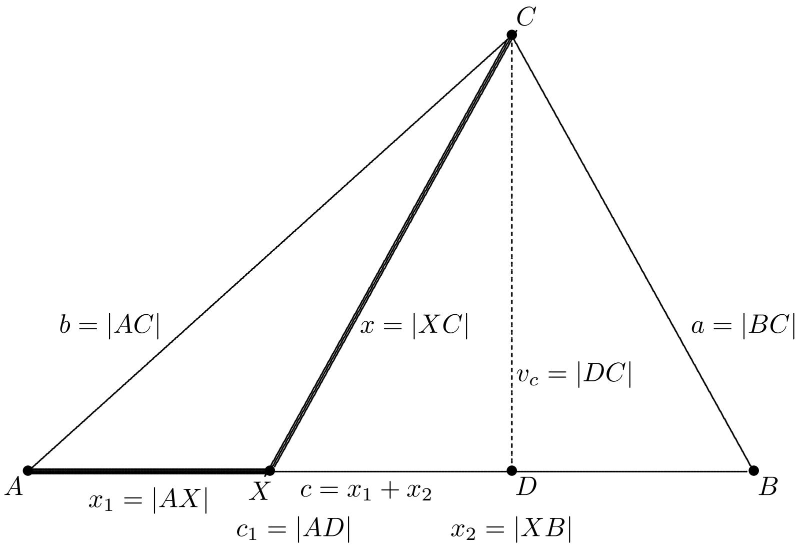
$$-a + b + c = 2(s - a), a - b + c = 2(s - b), a + b - c = 2(s - c),$$

a tedy

$$\mathcal{S} = \frac{1}{4}\sqrt{V} = \sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)}.$$

Odvození tohoto vzorce je nezávislé na tvaru trojúhelníků. Ponecháváme úkolem pro čtenáře přepsat výpočet pro trojúhelník, jehož úhel při vrcholu A nebo B je tupý.

Obraťme nyní pozornost na obecnější situaci, totiž na výpočet délky spojnice vrcholu C a zvoleného bodu X na straně c. Tuto spojnici popíšeme pomocí vzdálenosti bodu X od vrcholu A; označíme ji x_1 (viz obr. 2).



$$a^2 x_1 + b^2 x_2 = (x_1 + x_2)(x_1 x_2 + x^2) \Rightarrow x = \sqrt{\frac{(a^2 - x_2^2)x_1 + (b^2 - x_1^2)x_2}{x_1 + x_2}}$$

Obr. 2

Užitím Pythagorovy věty v pravoúhlém trojúhelníku ΔXDC spolu s výrazy (3) a (4) dostáváme

$$\begin{aligned} x^2 &= (c_1 - x_1)^2 + v_c^2 = \\ &= \left(\frac{-a^2 + b^2 + c^2 - 2cx_1}{2c}\right)^2 + \frac{4b^2c^2 - (-a^2 + b^2 + c^2)^2}{4c^2} = \\ &= \frac{4b^2c^2 + 4c^2x_1^2 - 4cx_1(-a^2 + b^2 + c^2)}{4c^2}, \end{aligned}$$

a tedy

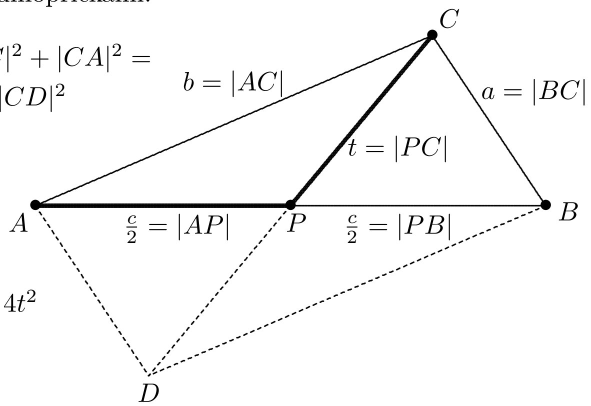
$$x^2 = \frac{b^2c + cx_1^2 - x_1(-a^2 + b^2 + c^2)}{c}.$$

Toto vyjádření lze přepsat do „symetrického“ tvaru, v jakém se Stewartova věta všeobecně prezentuje (viz [1]) a který je v obr. 2 zaznamenán. Anglický matematik Matthew Stewart (1717–1785) se touto větou řadí mezi ty, kteří přispěli do okruhu otázek, jež jsou charakterizovány větou italského inženýra Giovanniho Cevy (1648–1737); elementární důkaz viz např. v [3]. Věta Cevova je duálním tvrzením antické věty Meneláovy (okolo 100 našeho letopočtu); vysvětlení je možno nalézt v [4] či [5].

Stewartův výsledek se redukuje ve speciálním případě $x_1 = x_2$ na větu Apolloniovu týkající se délky těžnice. Ta se v případě rovnoramenného trojúhelníku redukuje dále na větu Pythagorovu. Apolloniovo vyjádření $t = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+b^2) - c^2}$ délky těžnice $|CP|$ (viz obr. 3) ovšem plyne zcela bezprostředně z *rovnoběžníkové rovnosti*, tj. ze vztahu mezi stranami rovnoběžníku a jeho úhlopříčkami:

$$|AD|^2 + |DB|^2 + |BC|^2 + |CA|^2 = \\ = |AB|^2 + |CD|^2$$

$$2(a^2 + b^2) = \\ = c^2 + 4t^2$$



Obr. 3

Literatura

[1] Calda, E.: Stewartova věta a příčky v trojúhelníku. *Rozhledy matematicko-fyzikální*, roč. 86 (2011), č. 2, s. 1–5.

[2] Dlab, V.: Důkladné porozumění elementární matematice. *Učitel matematiky*, roč. 17 (2009), č. 3, s. 169–182.

[3] Dlab, V.: Připomeňme si podobnost trojúhelníků. *Rozhledy matematicko-fyzikální*, roč. 97 (2022), č. 1, s. 18–28.

[4] Dlab, V.: II. Barycentrické souřadnice v rovině. *Rozhledy matematicko-fyzikální*, roč. 91 (2016), č. 2, s. 1–10.

[5] Silvester, J. R.: The famous dual theorems of Ceva and Menelaus. *The Mathematical Gazette*, roč. 84 (2000), s. 268–271.

Zákon odrazu a přelévání vody mezi nádobami

Pavel Tlustý – Jana Vysoká
Pedagogická fakulta JU, České Budějovice

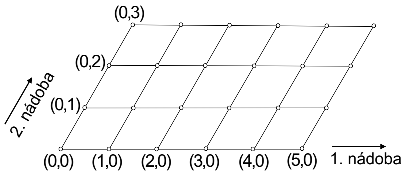
Občas se v rekreační matematice nebo v různých logických hádankách a hříčkách setkáme s úkolem odměřit (bez měření) určené množství tekutiny, a to pouze jejím přeléváním mezi několika nádobami. Dovolujeme si čtenáře upozornit na inspirativní článek [1], který rozhodně stojí za přečtení. Autor zde velmi nápaditě využil problém přelévání kapaliny jako motivaci k objevení celé škály matematických pojmů a tvrzení, které umožňují řešit i mnohem složitější úlohy reálného života. Na druhou stranu je třeba říci, že uvedené teorie (Markovské řetězce, teorie grafů, modulární aritmetika) se přednášejí až na vysokých školách a jejich zvládnutí vyžaduje určité úsilí a čas.

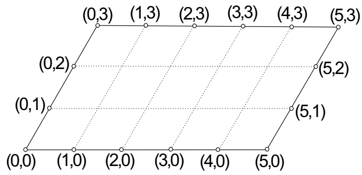
Zůstaňme ale v oblasti rekreační matematiky a řešme jen problém s přeléváním vody mezi nádobami. Pak lze použít mnohem jednodušší postup založený na *zákonu odrazu*, který se učí již žáci základní školy. Skutečnosti, že *úhel odrazu je roven úhlu dopadu* se běžně využívá v mnoha oblastech reálného života – zpětná zrcátka či reflektory automobilů, přihrávky o zem nebo mantinel ve sportu, periskopy a zrcadla v dopravě atd. Nyní si ukážeme, jak lze tento fyzikální zákon použít k řešení matematického problému. Pro jednoduchost užijeme stejnou motivační úlohu jako v [1].

Úloha. Máme dvě nádoby na vodu, jednu o objemu 5 litrů, druhou o objemu 3 litry (bez rysek udávajících výšku hladiny). Můžeme jednu nebo druhou nádobu zcela naplnit vodou, můžeme libovolnou nádobu zcela vyprázdnit (tím, že vodu vylijeme do odpadu) nebo můžeme vodu z jedné nádoby přelít do druhé nádoby, a to tak, že buďto přelijeme všechnu vodu, pokud se do druhé nádoby vejde, tedy až do stavu, kdy je první nádoba prázdná, nebo můžeme přelít takové množství vody, až je druhá nádoba zcela plná.

Problém. Lze s původně prázdnými nádobami dosáhnout stavu, kdy je v jedné nádobě 1 litr vody?

Řešení. Vzhledem k tomu, že máme jen dvě nádoby, můžeme aktuální stav vody v nádobách znázornit jako bod v rovině s odpovídajícími souřadnicemi. Souřadnicové osy budou svírat úhel $60°$, čímž vznikne „kosočtvercová síť“ (obr. 1a).

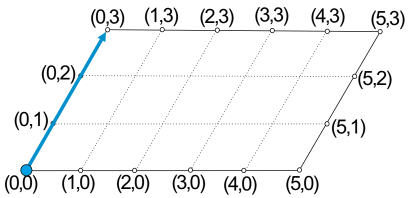


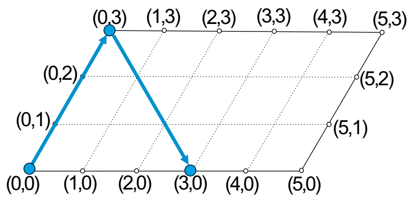


Obr. 1a) kosočtvercová síť 1b) možné množství vody v nádobách

Na obr. 1a) vidíme, že na ose x budeme znázorňovat množství vody v první (pětilitrové) nádobě, zatímco na ose y najdeme množství vody v druhé (třílitrové) nádobě. Bod o souřadnicích $(4, 2)$ v takovém modelu představuje situaci, kdy jsou v pětilitrové nádobě 4 litry vody a ve třílitrové nádobě jsou dva litry vody. Vzhledem k tomu, jak smíme vodu mezi nádobami přelévat, je zřejmé, že ne každý z vyznačených 24 bodů je dosažitelný. Například situace $(4, 2)$ nelze podle pravidel nikdy dosáhnout. Uvědomte si, že dosažitelné jsou pouze situace, které odpovídají bodům na „obvodu sítě“. Na (obr. 1b) tedy již pracujeme jen s 16 možnými situacemi, ostatní nebudeme uvažovat (srv. [1, obr. 2]).

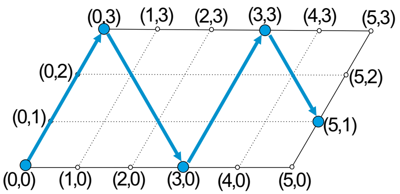
Na začátku jsme ve stavu $(0, 0)$. Proces přelévání vody mezi nádobami můžeme reprezentovat jako pohyb kuličky po „zvláštním“ kulečníkovém stole. Na začátku (obr. 2a) je kulička v bodě $(0, 0)$ a pošleme ji směrem k bodu $(0, 3)$, tj. naplníme druhou nádobu.

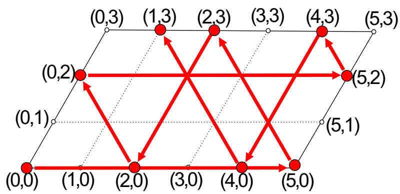




Obr. 2a) kosočtvercová síť 2b) možné množství vody v nádobách

Kulička se v bodě $(0, 3)$ odrazí a podle *zákona odrazu* letí směrem k bodu $(3, 0)$, což vidíme na obr. 2b). V praxi to znamená, že přelijeme vodu ze druhé nádoby do první. Pohyb kuličky ukončíme v okamžiku, když se odráží v bodě, jehož jedna z souřadnic má hodnotu 1 (obr. 3a).





Obr. 3a) řešení úlohy   3b) jiné možné řešení

Tím je úloha vyřešena a z obr. 3a) vidíme, jak přelévat:

$$(0,0) \to (0,3) \to (3,0) \to (3,3) \to (5,1).$$

Tedy nejprve naplníme třílitrovou nádobu, pak ji vyprázdníme do pětilitrové nádoby a znova naplníme třílitrovou nádobu. Z třílitrové nádoby pak odlijeme 2 litry do pětilitrové (víc se tam nevejde), čímž nám zbývá ve třílitrové nádobě jeden litr vody.

Samozřejmě nás napadne, že můžeme začít i naplněním pětilitrové nádoby. I tento postup vede k cíli, ale je mnohem zdlouhavější:

$$(0,0) \to (5,0) \to (2,3) \to (2,0) \to (0,2) \to \\ \to (5,2) \to (4,3) \to (4,0) \to (1,3).$$

Toto řešení vyplývá z obr. 3b).

Nyní můžeme problém zobecnit a uvažovat nádoby o objemu m a n litrů. Pak si můžeme položit celou řadu nejrůznějších otázek:

1. Pro jaká m, n $(m > n)$ lze odměřit i litrů, kde $i = 1, 2, \ldots, m$?

2. Pro jaké i je počet přelití nejmenší?

3. Jak se změní situace, pokud máme tři nádoby a chceme, aby ve dvou nádobách bylo požadované množství vody? atd.

L i t e r a t u r a

[1] Pokorný, P.: Přelévání vody mezi nádobami, teorie grafů a modulární aritmetika. *Rozhledy matematicko-fyzikální*, roč. 98 (2023), č. 1, s. 9–24.

Fibonacci, Mersenne, Mendel

Veronika Eclerová – Petr Zemánek
Ústav matematiky a statistiky, PřF MU, Brno

Abstrakt. Článek krátce přibližuje Mendelovy základní objevy týkající se jeho experimentů s hrachem a také s experimenty spojenou kontroverzi.

Čísla. Sotva se jako malí naučíme svá první slova, už chceme i počítat – nejdříve do deseti, pak do sta, a ti vytrvalejší z nás se dokáží zabavit i počítáním až do tisíce. Čísel je nekonečně mnoho a dokážeme jimi vyjádřit jakékoliv množství. Mnozí jistě máme i nějaké oblíbené číslo, pamatujeme si PIN ke své kartě nebo telefonu a leckdy i svá rodná čísla. Ale řekli byste o nějakém čísle, že se vám líbí? Nebo že se s ním setkáváte výrazně častěji než s ostatními? Vaši odpověď sice odhadnout nedokážeme, ale víme, že příroda takové oblíbence má.

V roce 1202 vydal italský matematik Leonardo Pisánský (dnes známý spíše jako Fibonacci, což znamená Bonacciho syn) Knihu počtů (Liber Abaci), ve které na různých problémech především ilustroval možnosti využití a praktičnost hindsko-arabského číselného systému, čímž výrazně přispěl k jeho rozšíření do Evropy. V jedné z těchto úloh popisuje Leonardo velmi idealizovaný model růstu populace králíků, kdy se králíci množí každý měsíc a nikdy neumírají. Při řešení této úlohy se dostaneme k číslům vyjadřujícím velikost populace v jednotlivých měsících

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ 89,\ 144,\ \ldots,$$

kde každé další číslo je součtem dvou předchozích. Tato čísla jsou známá jako Fibonacciho čísla. Matematici prozkoumali mnoho všelijakých vlastností této posloupnosti – od výskytu prvočísel přes čtvercová či trojúhelníková čísla až k různým formám jejich vyjádření, viz např. [1, 5, 6].

Navzdory tomu, že Leonardův model je poněkud naivní, má příroda překvapivě právě tato čísla velmi ráda. Kdybychom se podívali do včelího úlu a začali sestavovat rodokmen nějakého trubce (třeba Vilíka), tak v něm přesně tuto posloupnost objevíme, neboť včely se rozmnožují tzv. partenogeneticky (neboli pannobřezostí), což znamená, že sameček se narodí z neoplozeného vajíčka (tj. má jen jednoho rodiče), zatímco samička z oplozeného vajíčka (tj. má dva rodiče). Vilík má proto 1 rodiče (jenom matku, protože se narodil z neoplozeného vajíčka), 2 prarodiče (jeho matka se narodila z oplozeného vajíčka, takže ona má dva rodiče), 3 praprarodiče atd. Stejná situace nastane, budeme-li mapovat své předky pouze na linii chromozomu X, muži totiž dědí chromozom X pouze od matky, zatímco ženy od obou rodičů. Také když začneme počítat okvětní lístky u různých druhů květin nebo spirály na borovicových šiškách či v semeníku slunečnice, tak je celkem jisté, že jejich počet bude odpovídat právě některému z Fibonacciho čísel.

Existují ale také čísla, která jsou zajímavá, protože mohou být velmi užitečná. Do této kategorie patří zejména prvočísla (přirozená čísla dělitelná pouze 1 a sama sebou) – obzvláště ta velká, která hrají velmi důležitou roli v kryptografii. Čím větší máte prvočíslo, tím bezpečnější šifru dokážete udělat. Francouzský kněz Marin Mersenne, který působil v první polovině 17. století jako „hub“ pro distribuci vědeckých informací správným směrem, zveřejnil v roce 1644 domněnku ohledně prvočíselnosti (Mersennových) čísel ve tvaru $2^n - 1$ pro některá prvočíselná n. Sice se ukázalo, že některé Mersennovy výsledky byly chybné, ale i tak jsou jeho myšlenky výborným základem pro hledání gigantických prvočísel. Momentálně (na konci roku 2023) největší známé prvočíslo je právě toho tvaru, má 24 862 048 cifer a odpovídá hodnotě $n = 82\,589\,933$. Toto prvočíslo bylo nalezeno v prosinci roku 2018. Kdybychom toto číslo chtěli napsat s ciframi o velikosti 1 cm, potřebovali bychom k tomu pás papíru dlouhý 248 km. Ten bychom bez problémů dokázali natáhnout z Brna do Vídně a zpět. K čemu jsou taková prvočísla dobrá? Zatím k ničemu, ale v budoucnu se jistě mohou hodit při zajišťování naší bezpečnosti.

Avšak Mendel (podobně jako Leonardo Pisánský o Fibonacciho číslech) ukázal, že i Mersennova čísla má příroda velmi ráda, když se zaměřil na sledování dědičných znaků při pěstování hrachu. Mendel ve své práci z roku 1866 popisuje výsledky křížení mezi druhy hrachu lišícími se v jednom znaku. Ve svých pokusech sledoval například tvar semen (kulatý/svraštělý), zbarvení dělohy (žluté/zelené) nebo barvu květu (bílá/růžová). V první generaci získal Mendel potomstvo, které bylo ve vzhledu jednotné a vykazovalo vždy znak jedné z rodičovských rostlin. Samosprašností[1)] těchto hybridů dospěl Mendel k závěrům, ze kterých získal

[1)] Samosprašností se rozumí proces pohlavního rozmnožování, při kterém se vajíčko oplozuje pylem ze stejné rostliny. Tedy, oba rodiče jsou jednou a touž rostlinou. Tato forma rozmnožování je často pozorována u rostlin s květy, které mají schopnost samoopylení, nebo u nichž je opylování uskutečňováno přímo v rámci jednoho květu.

poměr 2 : 1 : 1 mezi segregačně dominantními (tj. hybridními), čistě dominantními a recesivními znaky.

Podle Mendela: *proporce, ve kterých se potomci hybridů vyvíjejí a rozdělují v první a druhé generaci, pravděpodobně platí pro všechny další potomky.* Pro ujištění ještě provedl experimenty pro čtyři, pět a šest generací. Vždy se stejným výsledkem, mezi potomky kterýchkoli dvou hybridů jsou polovina opět hybridi, čtvrtina jsou jedinci nesoucí dominantní znak a čtvrtina jedinci vykazující recesivní znak. To jej přivedlo k formulaci matematického zákona, ze kterého se stal základní kámen jeho teorie: *Jestliže* **A** *označuje dominantní rys,* **a** *recesivní a* **Aa** *hybridní formu, ve které jsou oba spojeny, pak výraz* $\mathbf{A} + 2\,\mathbf{Aa} + \mathbf{a}$ *popisuje vývojovou řadu pro potomstvo hybridních rostlin v páru rozdílných znaků.* A pokračuje: *Lze ukázat, že počty hybridů pocházejících z jednoho opylení*[2] *oproti počtu nových nezměněných forem*[3] *a jejich potomstva z generace na generaci výrazně zaostávají, a přece nemohou nikdy zcela vymizet.* Viz [7].

Pro ilustraci posledního závěru využívá Mendel nalezený zákon pro hybridní segregaci k odvození matematického modelu, který popisuje obecný vývoj hybridních generací. Začíná s první generací potomků hybridů, ve které je průměrně jeden dominantní typ (**A**), dva hybridní (**Aa**) a jeden recesivní typ (**a**). Pro konstrukci svého modelu Mendel nyní předpokládá, že

- (i) každý z těchto typů je stejně plodný,
- (ii) každý je samosprašný,
- (iii) hybridy stále vykazují segregační poměr 2 : 1 : 1 neboli zapsáno v moderním pojetí $(\mathbf{A} + \mathbf{a}) \times (\mathbf{A} + \mathbf{a}) = \mathbf{AA} + 2\mathbf{Aa} + \mathbf{aa}$,
- (iv) každá rostlina produkuje přesně 4 nové rostliny.

Za těchto předpokladů v následující generaci z každého z typů **A** a **a** získáme přesně čtyři nové téhož typu (tj. 4× **A** a 4× **a**), zatímco každý ze dvou hybridů by se opět rozdělil a získali bychom z něj 1× **A**, 2× **Aa** a 1× **a**. Proto v následující generaci budeme mít 6× **A** (4× z **A** a 2× z hybridů), 4× **Aa** a 6× **a**, tj. nyní máme poměr 6 : 4 : 6 neboli 3 : 2 : 3. Mendel to až takto dopodrobna nerozebírá. Místo toho nabízí čtenářům

[2] Ve svých pokusech dále provádí Mendel již pouze samosprašnost.

[3] Tím Mendel míní jedince nesoucí pouze recesivní nebo pouze dominantní znaky, ne rostlinné hybridy.

tabulku se souhrnnými výsledky s počty jednotlivých typů v několika generacích.

generace	**A**	**Aa**	**a**	poměr **A** : **Aa** : **a**
1	1	2	1	$1:2:1$
2	6	4	6	$3:2:3$
3	28	8	28	$7:2:7$
4	120	16	120	$15:2:15$
5	496	32	496	$31:2:31$
n	$2^{n-1}\cdot(2^n-1)$	2^n	$2^{n-1}\cdot(2^n-1)$	$2^n-1:2:2^n-1$

Čísla v prvním a druhém řádku jsme si před chvíli podrobně odvodili. Hodnoty v dalších řádcích získáme podobným způsobem, tj. označíme-li jako $\mathbf{A}_n$, $\mathbf{Aa}_n$ a $\mathbf{a}_n$ počty jednotlivých typů v n-té generaci, pak pro následující generaci (v pořadí $n+1$) platí

$$\mathbf{A}_{n+1} = \mathbf{Aa}_n + 4\,\mathbf{A}_n, \qquad \mathbf{Aa}_{n+1} = 2\,\mathbf{Aa}_n, \qquad \mathbf{a}_{n+1} = \mathbf{Aa}_n + 4\,\mathbf{a}_n,$$

odkud lze odvodit hodnoty v posledním řádku předchozí tabulky, tj. celkový počet rostlin v n-té generaci je 4^n a z toho je 2^n hybridů, takže polovina ze zbývajících rostlin má dominantní znak a druhá polovina recesivní znak, neboli

$$\mathbf{A}_n = (4^n - 2^n)/2, \qquad \mathbf{Aa}_n = 2^n, \qquad \mathbf{a}_n = (4^n - 2^n)/2.$$

Mendel zakončuje tuto část slovy: *Např. v desáté generaci jich bude* $2^n - 1 = 1023$. *Proto z celkových 2 048 rostlin v této generaci je 1 023 s dominantním znakem, 1 023 s recesivním znakem a pouze 2 hybridní.* Ve skutečnosti to nejsou celková čísla – jde pouze o vyjádření jednotlivých poměrů. V 10. generaci totiž budeme mít $\mathbf{A}_{10} = 523\,776$, $\mathbf{Aa}_{10} = 1\,024$ a $\mathbf{a}_{10} = 523\,776$, viz také [10].

Mendelovy výsledky zůstaly opomíjeny až do roku 1900, kdy byly „znovuobjeveny“ de Vriesem, Corrensem a Tschermakem. Je však těžké zpětně zjistit, jak přesně Mendel k těmto číslům dospěl. Možných cest je několik, ale je téměř jisté, že to nebyl jen odhad na základě počtů v několika prvních generacích, nýbrž že vzhledem ke svým matematickým dovednostem si k tomu sepsal i jakýsi matematický důkaz. Každopádně podle Gliboffa hlavním bodem Mendelova článku bylo objasnit *matematický zákon evoluce* a předchozí úvahy byly zlatým hřebem celého článku, viz [3].

Nicméně se příroda ne vždy zcela přesně řídí matematickými zákony, takže Mendelovi rozhodně ne vždy v jeho experimentech s pěstováním hrachu vycházely přesně tyto hodnoty. Navíc statistika je mocná čarodějka, a tak se v roce 1936 rozhořel ex post spor mezi Mendelem (zemřel 1884) a uznávaným britským statistikem a biologem Fisherem, viz [2]. Ten totiž považoval Mendelovy výsledky za příliš dobré, jelikož se mu podařilo spočítat, že pravděpodobnost takového výsledku je pouze 0,007 % (tj. v sedmi případech ze 100 000). To jej přivedlo k závěru, že Mendel (nebo spíše nějaký jeho asistent) výsledky experimentů upravoval tak, aby mu vycházely požadované hodnoty. Mendel skutečně výsledky některých experimentů opomíjel s tím, že výsledné hodnoty byly až příliš vychýlené od ostatních – nikdy to však nepopíral a také tyto situace ve svém článku popsal. Navíc si musíme uvědomit, že moderní, dnes již zavedené statistické postupy při zpracování dat nebyly v Mendelově době známy.

Fisherův hlavní argument se opíral o to, že při určování počtů **A** a **Aa** existuje cca 5,63% pravděpodobnost chyby v jejich identifikaci, a tak by naměřený poměr mezi těmito skupinami v první generaci měl být cca 1,7 : 1 (**Aa** : **A**) místo 2 : 1, jak to Mendelovi v experimentech vychází (v souladu s matematickým modelem). Kde je pravda? To je složité. Například: Při trochu bližší analýze bychom mohli zjistit, že onen naměřený poměr je dán vztahem

$$\mathbf{Aa} : \mathbf{A} = \frac{\frac{2}{3}\left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^i\right)}{\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^i},$$

kde i je počet rostlin v nulté generaci. Odtud pro $i = 20$ dostaneme poměr $1,98109 : 1$, pro $i = 30$ máme 1,99893 : 1, pro $i = 40$ pak 1,99994 : 1 a s rostoucím i se stále blíže a blíže dostáváme k hodnotě 2 : 1. Avšak Mendel prováděl experimenty pouze pro $i = 10$, což vede k Fischerem očekávanému poměru 1,69632 : 1. K tomuto tématu byly sepsány desítky článků a všelijakých analýz. Avšak ne vždy vedly správným směrem. Např. v [8, 9] bylo uvedeno, že tento naměřený poměr je spíše roven

$$\mathbf{Aa} : \mathbf{A} = \frac{\sum_{i=1}^{10} \binom{10}{i} v^i (1-v)^{10-i} \frac{2}{3}\left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^i\right)}{v^{10}\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times \left(\frac{3}{4}\right)^{10}\right)},$$

kde v je pravděpodobnost, že z uvažovaného semínka vyroste rostlina, kterou lze klasifikovat. Pro hodnoty v velmi blízké 1 dostaneme Fischerův očekávaný poměr (např. pro $v = 0{,}999$ budeme mít 1,71304 : 1). Ovšem jaká je skutečná hodnota v? Žádná oficiální hodnota asi neexistuje, ale Novitski z Mendelových pokusů dovozuje $v = 0{,}98$ (k selhání prý došlo u 11 semen z 556), což vede k poměru 2,06758 : 1. Jenže v Mendelově článku [7] je možné najít ještě i další možné hodnoty (11 z 315; 5 ze 101; 6 ze 108; 2 ze 32), což vede k hodnotám v jako 0,964; 0,951; 0,944; 0,938 s odpovídajícími poměry 2,4291 : 1; 2,7741 : 1; 2,9819 : 1; 3,1734 : 1. To ukazuje, že uvedený vzorec asi nebude tím správným, viz také [4].

I přes zpochybnění některých Mendelových postupů byl Mendel inspirací pro generace vědců, které po něm následovaly. Ačkoli nedisponoval nástroji, jako jsou počítač nebo kalkulačka, a musel si vystačit s tužkou, papírem a předchůdci dnešních kalkulaček, kterými byla logaritmická pravítka a arithmometry, dokázal systematicky nasbírat a zpracovat obrovské množství dat. Stal se průkopníkem v oblasti statistiky a analýzy dat, matematické disciplíny, která je jedním ze základních kamenů veškeré moderní vědy.

V dnešní době vědecká komunita po celém světě stále čerpá z Mendelových poznatků. Posun v pochopení genetiky nás dovedl k možnostem, které dnes nabízí syntetická biologie a bioinženýrství. Obě vědní disciplíny přispěly k levné, rychlé a masové výrobě mRNA vakcíny proti SARS-CoV-2, která nám pomohla v efektivnějším boji s nedávnou globální pandemií. mRNA vakcíny vznikly i díky tzv. metodě CRISPR, která umožňuje také vznik nových genových terapií pro dříve nevyléčitelné choroby.

Matematika se stala součástí dnešní biologie a biochemie, vysvětluje složitost nerovnovážných stavů uvnitř buněk, existenci kvazirovnováh, jejich bistabilitu nebo vznikající cykly, může tak popsat biochemické přepínače i cirkadiánní rytmy. Matematika dokáže pracovat s kódováním, tedy i DNA, dokáže simulovat skutečné proteiny, enzymy i jejich chemické reakce, umožňuje vytvářet nové struktury, a dokonce navrhovat jejich vlastnosti s pomocí dalších chytrých nástrojů, jako je umělá inteligence (která také stojí na matematice, především na lineární algebře a optimalizaci). Tak jako stála matematika u zrodu nových řešení a technologií ve fyzice a inženýrství během technologické revoluce v minulých dvou stoletích, stala se matematika stejně významnou pro biochemii v 21. století.

Poděkování

Autoři by rádi na tomto místě poděkovali recenzentovi za velmi podrobné a pečlivé pročtení prvotní verze a nemalé množství návrhů, které přispěly ke zlepšení (nejenom) srozumitelnosti našeho pojednání.

Literatura

[1] Alzer, H., Luca, F.: An inequality for Fibonacci numbers. *Mathematica Bohemica*, roč. 147 (2022), č. 4, s. 587–590.

[2] Fisher, R. A.: Has Mendel's work been rediscovered?. *Annals of Science*, roč. 1 (1936), č. 2, s. 115–137.

[3] Gliboff, S.: Gregor Mendel and the Laws of Evolution. *History of Science*, roč. 37 (1999), č. 2, s. 217–235.

[4] Hartl, D. L., Fairbanks, D. J.: Mud sticks: on the alleged falsification of Mendel's data. *Genetics*, roč. 175 (2007), s. 975–979.

[5] Jarošová, M.: Fibonacci a jeho čísla. *Učitel matematiky*, roč. 16 (2008), č. 2, s. 94–100.

[6] Křížek, M., Luca, F., Somer, L.: Aritmetické vlastnosti Fibonacciových čísel. *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*, roč. 50 (2005), č. 2, s. 127–140.

[7] Mendel, J. G.: Versuche über Pflanzen-Hybriden. *Verhandlungen des Naturforschenden Vereines in Brünn*, roč. 4 (1866), s. 3–47.

[8] Novitski, E.: On Fisher's criticism of Mendel's results with the garden pea. *Genetics*, roč. 166 (2004), č. 3, s. 1133–1136.

[9] Novitski, E.: Revision of Fisher's analysis of Mendel's garden pea experiments. *Genetics*, roč. 166 (2004), č. 3, s. 1139–1140.

[10] Teicher, A.: Mendel's use of mathematical modelling: ratios, predictions and the appeal to tradition. *History and Philosophy of the Life Sciences*, roč. 36 (2014), s. 187–208.

The Truth About Numerology

Mikuláš Kučera, FJFI ČVUT, Praha

Introduction

This problem arose during one of my Spanish classes at FNSPE CTU. [1)] While studying the future tense, we encountered an exercise that supposedly predicted one's future for the coming year based on their date of birth and current year. Specifically, the task was as follows:

Take your birth date and sum the day with the month (e.g. $3+9=12$ *for September 3). Then sum the digits of the current year (e.g.* $2+0+2+3=7$ *for 2023). Sum the two numbers (*$12+7=19$*) and take the sum of the digits (*$1+9=10$*). Repeat doing so until you reach a number between* 1 *and* 9 *(*$1+0=1$*). Read what awaits you next year based on your resulting number.*

The problem appeared when our teacher described the algorithm differently: she first took the sums of the digits of the first two numbers ($1+2=3$ and $7=7$) and only then summed the numbers up ($3+7=10$). Surprisingly, everyone arrived at the same result as with the original algorithm! ($1+0=1$) The destiny seemed inevitable.

Proposition. *Let* $a, b \in \mathbb{N}$. *Denote* $R\colon \mathbb{N} \to \{1, 2, \ldots, 9\}$ *the function that takes a natural number and by taking the sum of its digits (in decimal representation) repeatedly, it eventually returns a number between* 1 *and* 9. *Then*

$$R(a+b) = R(R(a) + R(b)).$$

Remark. It is easy to see that R is well-defined since the sum of the digits of $a \in \mathbb{N}$ is always strictly lower than a and never zero.

Solution

Our problem eventually had an elementary solution using congruence modulo 9. The following theorem is a simple corollary of basic rules of modular arithmetic.

---

1) Faculty of Nuclear Sciences and Physical Engineering, Czech Technical University – Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská, České vysoké učení technické

Theorem 1. *Let f be a polynomial with integer coefficients, $a, b \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$. If $a \equiv b \mod m$, then $f(a) \equiv f(b) \mod m$.*

If we denote $a = a_n \dots a_1 a_0$ and $b = b_m \dots b_1 b_0$ the decimal representations of a and b, let $f(x) := \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, $g(x) := \sum_{j=0}^{m} b_j x^j$, then $a = f(10)$ and $b = g(10)$.

Now since $10 \equiv 1 \mod 9$, we have $a = f(10) \equiv f(1) \mod 9$ and similarly $b = g(10) \equiv g(1) \mod 9$. At the same time, $f(1)$ is nothing else then the sum of the digits of a (and analogously for $g(1)$ and b). Therefore, by taking the sum of the digits of a given number, one preserves its remainder mod 9. We conclude that $R(a) \equiv a \mod 9$. Finally, we arrive at

$$R(a+b) \equiv a+b \equiv R(a)+R(b) \equiv R(R(a)+R(b)) \mod 9. \tag{1}$$

And since both $R(a+b)$ and $R(R(a)+R(b))$ are between 1 and 9, our proposition is proven. We can see now that no matter at which point of the algorithm we sum the two branches up, the result is always the lowest positive remainder of the sum $a+b$ mod 9.

Corollary 2. *Let $a \in \mathbb{N}$ and let R be the function defined above. Then $R(a)$ is the remainder of a mod 9, redefined as 9 for $a \equiv 0 \mod 9$, i.e. the lowest positive remainder of a mod 9.*

Vocabulary

- proposition – tvrzení
- digit – cifra
- decimal representation (of a number) – reprezentace (čísla) v desítkové soustavě
- remark – poznámka
- theorem – věta
- integer – celé číslo
- remainder modulo 9 – zbytek modulo 9
- corollary – důsledek

Palindromy

Milí čtenáři, tentokrát pro vás máme úkol z oblasti jazykových hříček. Palindrom, jak jistě víte, je slovo, které je stejné, ať ho čteme zepředu, nebo pozpátku. Známé palindromické věty v češtině jsou například:

Kobyla má malý bok.
Jelenovi pivo nelej!
Nevypusť supy ven!
Bažantu padá za záda putna žab.

U některých stačí vypustit mezery, někde i diakritiku, aby vznikl palindrom. Nejdelší, v běžné mluvě užívaný, palindrom je zřejmě finské slovo *saippuakauppias*, které označuje prodavače mýdla.

Ale zajímavé jsou i palindromy číselné, zvlášť když se k nim váže nějaké alespoň částečně doložené vysvětlení. Například s položením základního kamene Karlova mostu je spojován palindrom ze samých lichých čísel 135797531. Muzeum Karlova mostu ho použilo jako své logo. Podle astronoma a filozofa Zdeňka Horského mohl být základní kámen položen 9. července 1357 v 5.31. V tu chvíli prý byla příznivá konstelace Slunce a Saturnu. Palindrom je tedy sestaven z údajů: rok–den–měsíc–hodina–minuty.

Palindromy se zkoumají rovněž v matematické disciplíně zvané kombinatorika na slovech. Abychom mohli zformulovat otázku pro čtenáře, potřebujeme představit pár jednoduchých pojmů z této oblasti. *Abecedou* rozumíme libovolnou konečnou množinu. Jejím prvkům říkáme *písmena*. *Slovem* nad danou abecedou rozumíme libovolnou konečnou posloupnost písmen z abecedy. *Faktorem* slova rozumíme řetězec sousedících písmen obsažený v daném slově.

Příklad 1. Ilustrujme si uvedené pojmy na konkrétních příkladech. Uvažujme dvě slova *abaababaa* a *abbabaabb* délky 9 nad abecedou $\{a, b\}$, tedy složená z písmen a, b. Například *aabab* je faktorem prvního slova, ale nikoliv druhého. Podívejme se na palindromické faktory těchto dvou slov.

- *abaababaa* má 9 různých palindromických faktorů:

  a, b, aa, aba, bab, baab, ababa, abaaba, aababaa.

- *abbabaabb* má 8 různých palindromických faktorů:

  a, b, aa, bb, aba, bab, abba, baab.

Nyní můžeme položit čtenáři dnešní otázku:
Kolik různých palindromických faktorů může obsahovat slovo o délce n? Vysvětlete, proč to tak je. A záleží na tom, zda je slovo sestaveno z písmen a, b nebo například z písmen a, b, c, tedy na velikosti abecedy?

Minule měli čtenáři za úkol dokázat následující kritérium dělitelnosti sedmi a nějaké vlastní kritérium vymyslet. Předkládáme řešení *Josého Marciala Nájarese Romera*, autora článku o dělitelnosti v předchozím čísle RMF:

Věta. *Nechť n je přirozené číslo s desítkovým zápisem $(a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0)$, tj.*

$$n = a_k \cdot 10^k + a_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \dots + a_1 \cdot 10 + a_0,$$

pak n je dělitelné sedmi právě tehdy, když $m - 2a_0$ je dělitelné sedmi, kde m je číslo s desítkovým zápisem $(a_k a_{k-1} \dots a_1)$.

Důkaz. Není těžké se přesvědčit, že platí následující rovnosti:

$$n = 10m + a_0 = 7m + 7a_0 + 3m - 6a_0 = 7(m + a_0) + 3(m - 2a_0).$$

Nyní pokud je n dělitelné sedmi, pak i

$$n - 7(m + a_0) = 3(m - 2a_0)$$

je dělitelné sedmi. Jelikož 3 je číslo nesoudělné s číslem 7, musí být $m - 2a_0$ dělitelné sedmi. Naopak pokud je $m - 2a_0$ dělitelné sedmi, pak i

$$n = 7(m + a_0) + 3(m - 2a_0)$$

je evidentně dělitelné sedmi.

Druhou částí úkolu bylo vymyslet vlastní kritérium dělitelnosti sedmi. Ukážeme, jak zjistit zbytek čísla po dělení sedmi metodou, kterou nazveme „předávání zbytků“. Použijeme následující dvě pozorování, přičemž důkaz prvního necháme čtenáři.

Pozorování 1. Pokud v desítkovém zápisu přirozeného čísla nahradíme každou číslici $a_j \geq 7$ číslicí $a_j - 7$, pak výsledné číslo má stejný zbytek po dělení sedmi.

Příklad 2. Například čísla 784 592 156 890 a 14 522 156 120 mají stejný zbytek po dělení sedmi.

Pozorování 2. Nechť $n \in \mathbb{N}$ má desítkový zápis $(a_k a_{k-1} a_{k-2} \dots a_1 a_0)$. Pokud

$$a_k \cdot 10 + a_{k-1} = 7 \cdot q + r, \quad q \in \mathbb{N},\ r \in \{0, 1, \dots, 6\},$$

tj. r je zbytek $a_k \cdot 10 + a_{k-1}$ po dělení sedmi, pak číslo $m \in \mathbb{N}$ s desítkovým zápisem $(r a_{k-2} \dots a_1 a_0)$ má stejný zbytek po dělení sedmi jako n.

Důkaz. Tvrzení plyne z rovnosti

$$\begin{aligned} n &= a_k \cdot 10^k + a_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \dots + a_1 \cdot 10 + a_0 \\ &= 7 \cdot q \cdot 10^{k-1} + r \cdot 10^{k-1} + a_{k-2} \cdot 10^{k-2} + \dots + a_1 \cdot 10 + a_0 \\ &= 7(q \cdot 10^{k-1}) + m. \end{aligned}$$

Příklad 3. Aplikujme pozorování 2 opakovaně na číslo 14 522 156 120 z příkladu 2. Dostaneme, že následující čísla v levém sloupci mají stejný zbytek po dělení sedmi jako 14 522 156 120:

$$\begin{array}{rl} 522\,156\,120 & (14 = 2 \cdot 7 + 0) \\ 32\,156\,120 & (52 = 7 \cdot 7 + 3) \\ 4\,156\,120 & (32 = 4 \cdot 7 + 4) \\ 656\,120 & (41 = 5 \cdot 7 + 6) \\ 26\,120 & (65 = 9 \cdot 7 + 2) \\ 5\,120 & (26 = 3 \cdot 7 + 5) \\ 220 & (51 = 7 \cdot 7 + 2) \\ 10 & (22 = 3 \cdot 7 + 1) \\ 3 & (10 = 1 \cdot 7 + 3). \end{array}$$

Závěr zní, že zbytek po dělení čísla 14 522 156 120 sedmi je roven 3. Stejně tak je 3 zbytek po dělení sedmi čísla 784 592 156 890 (viz příklad 2).

Pojďme hledat řešení některých úloh matematické olympiády pomocí programování I

Ladislav Perk, PřF UJEP v Ústí nad Labem

Abstrakt. V předloženém příspěvku se zabýváme problematikou uplatnění programování při řešení vybraných úloh matematické olympiády ČR a SR. Na celkem šesti úlohách, ve kterých se pracuje s přirozenými čísly, jsou ukázány postupy řešení takových úloh s tím, že cílem námi prezentovaného způsobu řešení úloh je napsání funkčního programu v jazyce Python a získání shodných výsledků, které by bylo možné získat v rámci řešení matematickými postupy vyžadovanými v matematických úlohách. Součástí každé z těchto prezentovaných úloh jsou doplňkové úlohy, které si můžete vyřešit samostatně.

Úvod

Jedním ze zájmů soudobé matematiky je snaha přilákat a získat co nejvíce zájemců z řad žáků základních a středních škol a vzbudit tak u nich zájem o matematické vzdělávání. Využívá k tomu řadu nástrojů, jedním z nich je pořádání matematické olympiády v ČR a SR (dále jen MO), kterou lze pokládat za velmi úspěšnou popularizaci matematiky.

Možná se někteří z vás – kteří řešili úlohy MO [1] – dostali při řešení některé z úloh do situace, kdy jste tápali v dalším postupu a přišlo by vám vhod, kdybyste znali správné řešení úlohy. A právě pomocí programování toho u vybraných úloh můžete dosáhnout. U úloh, kde se pracuje s přirozenými, popř. celými čísly.

V tomto článku byly vybrány takové úlohy MO, kde se pracuje s přirozenými čísly a jsou hledána či posuzována pouze přirozená čísla. V těchto úlohách se nezaměřujeme na problematiku dělitelnosti přirozených čísel, tou se budeme zabývat v příštích článcích.

Řešení matematických úloh pomocí programování nemá v žádném případě plnohodnotně nahrazovat matematické řešení požadované v MO, jedná se pouze o jakýsi doplněk požadovaných matematických řešení.

Tento způsob můžete využít například v situaci, kdy nejste schopni nalézt řešení matematickými prostředky – vypsané výsledky vámi napsaného programu vám pak mohou napovědět při řešení matematickými prostředky. Dále pak můžete tento způsob využít v okamžiku, kdy si potřebujete zkontrolovat správnost vypočítaných výsledků.

Dalším z cílů je, abyste si uvědomili, že programováním jste získali další nástroj, jak řešit vybrané typy matematický úloh, a to nejen úlohy z MO.

Ukázky řešení vybraných úloh matematické olympiády

V tomto článku vám bude představeno celkem šest úloh MO, které lze vyřešit pomocí programování. Všechny tyto úlohy pracují s přirozenými čísly.

Každá úloha obsahuje text zadání úlohy přesně tak, jak je uveden v zadání MO. Po krátkém popisku následuje slovní výčet aktivit, které je nutné zrealizovat pro úspěšné napsání zdrojového kódu v jazyce Python. Každá z těchto aktivit je následně popsána podrobněji; je například zdůvodněno, jaký typ cyklu je vhodné pro vyčíslovávání proměnných použít, zda je či není vhodné pojmenování dalších pomocných proměnných, jakým způsobem se sestavuje podmínka či podmínky pro výpis čísel, které mají být splněny, jakým způsobem se tato čísla či jejich počet vypisuje apod.

Následuje zdrojový kód v jazyce Python, který vypisuje výsledky, které jsou shodné s výsledky uvedenými v MO. Můžete si napsat vlastní zdrojový kód či opsat zde předkládané zdrojové kódy. Je vhodné, abyste se zdrojové kódy pokusili napsat nejprve sami, pokud by se vyskytly komplikace, pak je možné opsat zde předkládaný zdrojový kód.

Na konci některých úloh jsou prezentovány doplňkové úlohy, u kterých nejsou uvedena jejich řešení. Řešení těchto úloh lze získat dílčí modifikací příslušného zdrojového kódu. Řešení těchto úloh budou publikována v dalším článku „Pojďme hledat řešení některých úloh matematické olympiády pomocí programování II“.

Dále je třeba zdůraznit, že se předpokládá, že máte alespoň základní zkušenosti s programováním v jazyce Python. Cílem tohoto článku není výuka jazyka Python, ale ukázka uplatnění programování v jazyce Python při řešení matematických úloh.

První úlohu lze pokládat za algoritmicky jednodušší. V rámci řešení je možné – pro účely prohledávání stavového prostoru – použít pouze jeden cyklus s pevným počtem opakování. Je však při řešení kladen důraz na vaši schopnost správných dekadických zápisů.

Úloha 1. *Zuzka napsala pětimístné číslo. Když připsala jedničku na konec tohoto čísla, dostala číslo, které je třikrát větší než číslo, které by* *získala, kdyby napsala jedničku před původní číslo. Které pětimístné číslo Zuzka napsala?* [2]

Řešení. Hledané pěticiferné číslo v programu označme proměnnou `cislo`.

Při tvorbě funkčního zdrojového kódu je zapotřebí se soustředit na následující kroky:

a) způsob vyčíslování proměnné `cislo`;

b) způsob zformulování šesticiferného čísla, které vznikne přidáním jedničky před pěticiferné číslo, stejně tak šesticiferného čísla, které vznikne přidáním jedničky za pěticiferné číslo;

c) posouzení týkající se vzájemné velikosti obou šesticiferných čísel;

d) výpis všech pěticiferných čísel v proměnné `cislo`, která splňují podmínku pro jejich výpis.

Nyní výše uvedené kroky rozebereme:

ad a) Protože se jedná o pěticiferné číslo, všechna přirozená čísla, která budeme posuzovat, budou v množině všech pěticiferných čísel od 10 000 do 99 999. Je tedy vhodné uplatnit cyklus s pevným počtem opakování (ř. 1).

ad b) Z původního pěticiferného čísla mají vzniknout dvě další šesticiferná čísla. Pro zpřehlednění kódu je vhodné každé z těchto čísel formulovat pomocí pomocné proměnné.

Šesticiferné číslo, které vznikne z původního pěticiferného čísla přidáním jedničky na konec, můžeme označit např. proměnnou `prvni` a vznikne tak, že se vynásobí deseti a přičte jednička (ř. 2).

Šesticiferné číslo, které vznikne z původního pěticiferného čísla přidáním jedničky na začátek, vznikne tak, že jedničku posuneme na místo statisíců a přičteme pěticiferné číslo.

To můžeme označit proměnnou `druhe` (ř. 3).

ad c) Splnění či nesplnění podmínky pro vypsání pěticiferného čísla jako hledaného řešení spočívá v pravdivostním ohodnocení výrazu. Musí platit, že číslo v `prvni` je třikrát větší než číslo v `druhe`. Proto výraz sestavíme tak, že trojnásobek čísla v `druhe` porovnáme s číslem v `prvni` (ř. 5).

ad d) V případě kladného vyhodnocení podmínky je možné vypsat číselnou hodnotu proměnné `cislo` (ř. 6).

```
for cislo in range(10000, 100000):
    prvni = 10 * cislo + 1
    druhe = 1 * 100000 + cislo

    if prvni == 3 * druhe:
        print("Nalezene cislo: ", cislo)
```

Program vypíše jedno pěticiferné číslo, a to 42 857. V řešení MO [2] je jako výsledek představeno číslo 42 857.

Druhou úlohu lze také pokládat za algoritmicky jednodušší. V rámci řešení je však nutné pro účely prohledávání stavového prostoru uplatnit tři vzájemně vnořené cykly s pevným počtem opakování.

Úloha 2. *Eva má tři papírky a na každém z nich je napsáno jedno přirozené číslo. Když vynásobí mezi sebou dvojice čísel z papírků, dostane výsledky 48, 192 a 36. Která čísla jsou napsána na Eviných papírcích?* [3]

Řešení. Hledaná tři přirozená čísla označme v programu proměnnými `a`, `b` a `c`.

Při tvorbě funkčního zdrojového kódu je zapotřebí se soustředit na následující kroky:

a) pojmenování tří proměnných, které reprezentují tři hledaná přirozená čísla napsaná na třech papírcích, a způsob jejich vyčíslení;
b) zformulování součinů dvojic čísel na papírcích;
c) posouzení, zda součiny přirozených čísel odpovídají číslům 48, 192 a 36;
d) výpis nalezených přirozených čísel, která mají být napsána na papírcích.

ad a) Protože je znám konečný počet přirozených čísel, kterých mohou proměnné `a`, `b` a `c` nabývat, je vhodné pro jejich vyčíslovávání použít tři vzájemně vnořené cykly s pevným počtem opakování.

Bez dalších úvah o číselných omezeních proměnných `a`, `b` a `c` lze uvažovat, že každá z těchto proměnných může být přirozeným číslem od 1 do 192 (ř. 1–3).

ad b) Příslušné součiny proměnných `a`, `b` a `c` lze vhodně označit, například pomocí proměnných `ab`, `bc` a `ac` (ř. 4–6).

ad c) Posouzení, zda příslušné součiny čísel v proměnných `a`, `b` a `c` odpovídají číslům 48, 192 a 36, lze provést pomocí podmínky `if`, a to v konjunktivním tvaru za použití `and`. (ř. 8). Stejně tak lze dílčí podmínky zapsat pomocí tří podmíněných příkazů `if` zapsaných pod sebe.

ad d) Po splnění výše uvedené podmínky je vhodné provést výpis nalezených trojic přirozených čísel (ř. 9).

```
1  for a in range(1, 193):
2      for b in range(1, 193):
3          for c in range(1, 193):
4              ab = a * b
5              bc = b * c
6              ac = a * c
7
8              if ab == 48 and bc == 192 and ac == 36:
9                  print("Nalezena trojice: ", a, ",", b, ",", c)
10                 print()
```

Program jako řešení vypíše jedno trojčíslí: (3, 16, 12). V MO [3] jsou jako řešení uvedena tři přirozená čísla 16, 3 a 12.

Protože nezáleží na pořadí zápisu čísel napsaných papírcích, lze obě řešení považovat za shodná.

Nalezněte řešení níže uvedených tří doplňkových úloh dílčími úpravami vámi vytvořeného programu:

Doplňkové úlohy

2.1. *Eva má čtyři papírky a na každém z nich je napsáno jedno přirozené číslo. Když vynásobí mezi sebou všechny trojice čísel z papírků, dostane výsledky 30, 36, 60 a 90. Která čísla jsou napsána na Eviných papírcích?*

2.2. *Eva má čtyři papírky a na každém z nich je napsáno jedno přirozené číslo. Když vynásobí mezi sebou všechny dvojice čísel z papírků, dostane výsledky 6, 14, 10, 21, 15 a 35. Která čísla jsou napsána na Eviných papírcích?*

2.3. *Eva má pět papírků a na každém z nich je napsáno jedno přirozené číslo. Když vynásobí mezi sebou všechny čtveřice čísel z papírků, dostane výsledky 24, 48, 16, 12 a 24. Která čísla jsou napsána na Eviných papírcích?*

Třetí úlohu lze – stejně jako předchozí dvě – pokládat za algoritmicky jednodušší. V rámci řešení je však nutné pro účely prohledávání stavového prostoru uplatnit tři vzájemně vnořené cykly s pevným počtem opakování a správně zformulovat tři dílčí součiny tří přirozených čísel.

Úloha 3. Zadání úlohy v MO:
Součin tří přirozených čísel je 600. Kdybychom jednoho činitele zmenšili o 10, zmenšil by se součin o 400. Kdybychom místo toho jednoho činitele zvětšili o 5, zvětšil by se součin na dvojnásobek původní hodnoty. Která tři přirozená čísla mají tuto vlastnost? [4]

Řešení. Hledaná tři přirozená čísla označme v programu proměnnými `a`, `b` a `c`.

Při tvorbě funkčního zdrojového kódu je zapotřebí se soustředit na následující kroky:

a) způsob vyčíslování proměnných `a`, `b` a `c`;

b) zformulování dílčích podmínek, které musí dané trojice přirozených čísel splňovat;

c) zajištění výpisů nalezených trojic přirozených čísel, které splňují všechny podmínky pro jejich výpis.

Nyní výše uvedené kroky rozebereme:

ad a) Protože ze zadání plyne, že součin čísel v `a`, `b` a `c` je roven číslu 600, pak každé z čísel v `a`, `b` a `c` může mít číselnou hodnotu nejvýše 600 (za předpokladu, že právě dvě libovolné proměnné budou jedničky). A protože se jedná o přirozená čísla, pak čísla v `a`, `b` a `c` mají velikost od 1 do 600. Z tohoto důvodu je vhodné uplatnit tři vzájemné cykly s pevným počtem opakování (ř. 1–3).

ad b) Podmíněné vykonání příkazu v podobě výpisů číselných hodnot proměnných `a`, `b` a `c` je tvořeno podmínkou, která obsahuje logický výraz. Tento výraz je tvořen třemi dílčími výrazy: výraz je vyhodnocen jako pravdivý, pokud všechny tři dílčí výrazy jsou vyhodnoceny jako pravdivé.

Dílčími výrazy jsou:

- prvním je `a * b * c == soucin`;
- druhým je `(a - 10) * b * c == soucin - 400`;
- a třetím je `a * (b + 5) * c == 2 * soucin`.

Protože všechny tři dílčí výrazy musí být splněny, nabízí se přinejmenším dvě možnosti zápisu: buď použití vzájemně vnořených příkazů `if` pro každý dílčí výraz zvlášť, nebo použití jednoho podmíněného příkazu `if`, jehož podmínku budou tvořit tři dílčí podmínky v konjuktivním tvaru, tzn. mezi dílčími výrazy se použije operátor `and`. Je vhodné, abyste použili spíše druhou z možností (ř. 6).

Uveďme zdůvodnění: pokud bychom každou z dílčích podmínek formulovali zvlášť pomocí vzájemně vnořených příkazů `if` „pod sebe“, sice bychom zdrojový kód mírně zpřehlednili, ale v případě, že pro každý `if` nebude formulováno alternativní řešení v případném `else` (popř. `elif`), pak takové „větvení“ zdrojového kódu nemá smysl. Navíc je tento způsob neúsporný k pracovnímu prostoru.

V zadání úlohy ale není jednoznačně stanoveno, zda se zvětšení o 10 a zmenšení o 5 vztahuje na dva různé činitele či právě jednoho činitele. Proto je zapotřebí uvažovat také variantu, kdy právě jednoho z činitelů zmenšíme o 10, stejně tak zvětšíme o 5. Lze si libovolně vybrat některou z proměnných `a`, `b` a `c`; použijme například proměnnou `a`. Výsledné posouzení (ř. 10) vznikne analogicky jako předchozí posouzení (ř. 6).

ad c) Výpisy hodnot proměnných `a`, `b` a `c` je nutné realizovat pro každé posouzení zvlášť (ř. 7 a 11).

```
1  for a in range(1, 601):
2      for b in range(1, 601):
3          for c in range(1, 601):
4              soucin = 600
5
6              if a * b * c == soucin and (a - 10) * b * c == soucin - 400 and a * (b + 5) * c == 2 * soucin:
7                  print("Nalezena trojice: ", a, ",", b, ",", c)
8                  print()
9
10             if a * b * c == soucin and (a - 10) * b * c == soucin - 400 and (a + 5) * b * c == 2 * soucin:
11                 print("Nalezena trojice: ", a, ",", b, ",", c)
12                 print()
```

Program vypíše tři přirozená čísla 8, 5, 15. V řešení MO [4] je jako řešení uvedena trojice čísel 8, 15 a 5.

Nalezněte řešení níže uvedených tří doplňkových úloh dílčími úpravami vámi vytvořeného programu:

Doplňkové úlohy

3.1. *Součin čtyř přirozených čísel je 120. Kdybychom první z nich zvětšili o 5, zvětšil by se součin o 200. Kdybychom druhé z nich zvětšili o 5, zvětšil by se o 150. Kdybychom třetí z nich zmenšili o 1, zmenšil by se o 60. Kdybychom čtvrté z nich zvětšili o 10, zvětšil by se na trojnásobek původní hodnoty. Která čtyři přirozená čísla mají tuto vlastnost?*

3.2. *Součin pěti přirozených čísel je 72. Kdybychom první z nich zmenšili o 2, zmenšil by se součin o 48. Kdybychom druhé z nich zvětšili o 4, zvětšil by se o 288. Kdybychom třetí z nich zmenšili o 3, zmenšil by se o 54. Kdybychom čtvrté z nich zvětšili o 6, zvětšil by se na dvojnásobek původní hodnoty. Která pětice přirozených čísel má tuto vlastnost?*

3.3. *Součin tří vzestupně seřazených, vzájemně různých, přirozených čísel je 1 001. Kdybychom nejmenší z nich zvětšili o 20, zvětšil by se součin o 2 860. Kdybychom největší z nich zmenšili o 5, zmenšil by se součin o 385. Kdybychom prostřední ze tří čísel zvětšili o 33, zvětšil by se součin na čtyřnásobek. Která přirozená čísla mají tuto vlastnost?*

Čtvrtou úlohu lze již pokládat za algoritmicky náročnější. Pracuje se zde s ciframi, resp. dvojciframi hledaných čtyřciferných čísel.

Úloha 4. *Uvažme čtyřmístné přirozené číslo s následující vlastností: jestliže prohodíme jeho první dvojčíslí s druhým, dostaneme čtyřmístné číslo o 99 menší. Kolik je takových čísel celkem?* [5]

Hledané čtyřciferné číslo označme v programu proměnnou `abcd`, jeho první dvojčíslí `ab` a jeho druhé dvojčíslí `cd`.

Při tvorbě funkčního zdrojového kódu je zapotřebí se soustředit na následující kroky:

a) způsob vyčíslování proměnných `abcd`, `ab` a `cd`;
b) zformulování hledaného čtyřciferného čísla a čtyřciferného čísla s prohozeným dvojčíslím pomocí dekadických zápisů;
c) posouzení, zda čtyřčíslí s prohozeným dvojčíslím je o 99 menší než hledané čtyřčíslí;
d) zajištění výpisů nalezených čtyřciferných čísel v `abcd`, která splňují podmínku pro jejich výpis.

Nyní výše uvedené kroky rozebereme:

ad a) Každé dvojčíslí označené proměnnými `ab` a `cd` postupně nabývá číselných hodnot od 10 do 99, proto pro jejich vyčíslování je vhodné použít dva vzájemně vnořené cykly s pevným počtem opakování (ř. 3 a 4).

ad b) Zformulování čísel v proměnných `abcd` a `dcba` pomocí proměnných `ab` a `cd` je možné pomocí dekadických zápisů. Číslo `abcd` vytvoříme tak, že dvojčíslí v `ab` vynásobíme stovkou a přičteme dvojčíslí v `cd` (ř. 5). Analogicky číslo v `cdab` vytvoříme tak, že dvojčíslí v `cd` vynásobíme stovkou a přičteme dvojčíslí v `ab` (ř. 6).

ad c) Protože číslo v `cdab` je o 99 menší než číslo v `abcd`, pak k číslu v `cdab` přičteme 99, aby se čísla v `abcd` a v `cdab` rovnala a mohli jsme je v podmíněném příkazu porovnat (ř. 8).

ad d) Výhodou tohoto kódu je, že si můžeme konkrétní čtyřciferná čísla `abcd` splňující podmínky vypsat (ř. 9). Stanovení počtu těchto čísel je realizováno inkrementací proměnné `pocet` (ř. 10), kterou je nutné před začátkem hledání vynulovat (ř. 1). Vlastní výpis počtu čísel je nutné vypsat mimo konstrukci hledání (ř. 12).

```
1  pocet = 0
2
3  for ab in range(10, 100):
4      for cd in range(10, 100):
5          abcd = ab * 100 + cd
6          cdab = cd * 100 + ab
7
8          if abcd == cdab + 99:
9              print(abcd)
10             pocet = pocet + 1
11
12 print("Nalezeny pocet: ", pocet)
```

Program vypíše počet hledaných čtyřciferných čísel, a to číslo 89. Dále pak těchto 89 čísel: 1 110, 1 211, 1 312, 1 413, 1 514, 1 615, 1 716, 1 817, 1 918, 2 019, 2 120, 2 221, 2 322, 2 423, 2 524, 2 625, 2 726, 2 827, 2 928, 3 029, 3 130, 3 231, 3 332, 3 433, 3 534, 3 635, 3 736, 3 837, 3 938, 4 039, 4 140, 4 241, 4 342, 4 443, 4 544, 4 645, 4 746, 4 847, 4 948, 5 049, 5 150, 5 251, 5 352, 5 453, 5 554, 5 655, 5 756, 5 857, 5 958, 6 059, 6 160, 6 261, 6 362, 6 463, 6 564, 6 665, 6 766, 6 867, 6 968, 7 069, 7 170, 7 271, 7 372, 7 473, 7 574, 7 675, 7 776, 7 877, 7 978, 8 079, 8 180, 8 281, 8 382, 8 483, 8 584, 8 685, 8 786, 8 887, 8 988, 9 089, 9 190, 9 291, 9 392, 9 493, 9 594, 9 695, 9 796, 9 897, 9 998. V řešení MO [5] je uveden počet hledaných čtyřciferných čísel 89.

Nalezněte řešení níže uvedených tří doplňkových úloh dílčími úpravami vámi vytvořeného programu:

Doplňkové úlohy

4.1. *Uvažme pětimístné přirozené číslo s následující vlastností: jestliže prohodíme jeho první trojčíslí s posledním dvojčíslím, dostaneme pětimístné číslo o 14 769 menší. Kolik je takových čísel celkem?*

4.3. *Uvažme šestimístné přirozené číslo s následující vlastností: jestliže prohodíme jeho první trojčíslí s druhým trojčíslím, dostaneme šestimístné číslo o 885 114 menší. Kolik je takových čísel celkem?*

4.3. *Uvažme sedmimístné přirozené číslo s následující vlastností: jestliže prohodíme jeho první trojčíslí s posledním čtyřčíslím, dostaneme sedmimístné číslo o 8 515 341 větší. Kolik je takových čísel celkem?*

V páté úloze se budeme zabývat hledáním takového čtyřciferného čísla, jehož cifry nejenže musí splňovat určité vlastnosti, ale zároveň také bude číslem, které bude charakterizované největším rozdílem své hodnoty vůči hodnotě svého opačně ciferně psaného čísla. K tomu uplatníme algoritmickou konstrukci, která je známa jako hledání maximálního prvku. Řešení úlohy lze považovat za náročnější.

Úloha 5. *Monika přemýšlí o čtyřmístném čísle, které má následující vlastnosti:*

- *součin dvou krajních číslic je 40,*
- *součin dvou vnitřních číslic je 18,*
- *rozdíl dvou krajních číslic je stejný jako rozdíl dvou vnitřních číslic,*
- *rozdíl mySleného čísla a opačně napsaného čísla (tj. čísla napsaného stejnými číslicemi, ale v opačném pořadí) je největší možný.*

Určete Moničino myšlené číslo. [6]

Řešení. Jednotlivé cifry hledaného čtyřciferného přirozeného čísla označme v programu proměnnými `a` (tisíce), `b` (stovky), `c` (desítky) a `d` (jednotky).

Při tvorbě funkčního zdrojového kódu je zapotřebí se soustředit na následující kroky:

a) vyčíslení proměnných `a` až `d`;

b) zformulování hledaného čtyřciferného čísla a jeho opačně napsaného čísla pomocí cifer v proměnných `a` až `d`;

c) posouzení splnění všech podmínek kladených na jednotlivé cifry `a` až `d`;

d) zformulování způsobu nalezení čtyřciferného čísla s největším rozdílem vůči svému opačně zapsanému číslu;
e) výpis hledaného čtyřciferného čísla, které splňuje výše uvedené podmínky.

Nyní výše uvedené kroky rozebereme:

ad a) Proměnné `a`, `b`, `c` a `d` reprezentují jednotlivé cifry hledaného čtyřciferného čísla. Ze zadání plyne, že součiny dvojic cifer jsou nenulové, pak všechny proměnné `a` až `d` nebudou nabývat hodnoty 0. Proto se uplatní vzájemně vnořené cykly s pevným počtem opakování s vyčíslením cifer v `a` až `d` od 1 do 9 (ř. 3–6).

ad b) Hledané čtyřciferné číslo označíme s využitím označení proměnných `abcd`, jeho ciferně opačné číslo pak `dcba`; pro obě čísla pak vyjádření vyčíslení pomocí příslušných dekadických zápisů (ř. 7 a 8).

ad c) Posouzení velikosti součinu dvou krajních číslic lze zapsat výrazem `a * d == 40`, posouzení velikosti součinu dvou vnitřních číslic pak `b * c == 18`.

Rozdíl dvou krajních číslic neřeší, zda má být vyčísleno `a` − `d` či `d` − `a`, stejně tak u rozdílu dvou vnitřních číslic `b` − `c` či `c` − `b`. Číselné hodnoty jsou stejné, liší se jen znaménkem, proto je vhodné uplatnit absolutní hodnotu ve vyčíslovávání rozdílů; výsledný výraz lze potom zapsat `abs(a - d) == abs(b - c)` (ř. 10).

ad d) Nyní se máme začít zabývat nalezením takového čtyřciferného čísla, které má se svým opačně napsaným číslem největší rozdíl. V programování se jedná o nalezení největšího čísla (maxima) z určité konečné neprázdné množiny čísel. Pro ty z vás, kteří s touto algoritmickou konstrukcí nemají zkušenosti, jsou určeny následující řádky tohoto bodu.

Pro účely hledání největšího z čísel `abcd` − `dcba` je třeba toto číslo nejprve vyjádřit pomocí vhodné proměnné, např. `rozdil` (ř. 11). Zároveň se zavede pomocná proměnná, např. `nejvetsi`, která registruje největší číslo ze všech posouzených čísel (v našem případě rozdílů v proměnné `rozdil`), po ukončení hledání pak hledaný největší rozdíl. Zároveň se zavede proměnná `cislo`, která bude registrovat číslo v proměnné `abcd` (ř. 15).

Princip hledání největšího z čísel `rozdil` lze ilustrovat následujícím zápisem:

$$\texttt{nejvetsi} := \begin{cases} \texttt{rozdil}, & \text{jestliže } \texttt{nejvetsi < rozdil;} \\ \texttt{nejvetsi}, & \text{jestliže } \texttt{nejvetsi >= rozdil.} \end{cases}$$

V případě, že číslo v proměnné `rozdil` při určitých hodnotách `a`, `b`, `c` a `d` je větší než číslo v proměnné `nejvetsi` (ř. 13), pak se hodnota v proměnné `nejvetsi` přepíše na číselnou hodnotu v proměnné `rozdil` (ř. 14). Zároveň se zapíše do proměnné `cislo` číselná hodnota v `abcd` (ř. 15). V opačném případě k žádnému přepisu číselné hodnoty v proměnných `nejvetsi` a `cislo` nedochází.

Pro každou ze všech číselných hodnot v `a`, `b`, `c` a `d` se tedy vyčíslí proměnná `rozdil` a porovná s číselnou hodnotou v `nejvetsi`, která je přepisována výše uvedeným způsobem. Je tedy zřejmé, že po posouzení všech číselných hodnot v `a`, `b`, `c` a `d` je v proměnné `nejvetsi` zapsána číselná hodnota hledaného největšího číselného rozdílu a v proměnné `cislo` pak číslo v `abcd`, při které byla největší hodnota číselného rozdílu nalezena.

Je třeba zdůraznit, že proměnnou `rozdil` je nutné před započetím hledání nastavit na takovou hodnotu, kdy platí, že všechny číselné hodnoty rozdílů budou mít vždy větší hodnotu než tato nastavená číselná hodnota. Proto proměnnou `rozdil` nastavíme na hodnotu např. $-99\,999$ (ř. 1).

ad e) Výpis číselné hodnoty v proměnné `cislo`, která je hledaným čtyřciferným číslem, je nutné zrealizovat až po ukončení prohledávání stavového prostoru (ř. 17).

```
1  nejvetsi = -99999
2
3  for a in range(1, 10):
4      for b in range(1, 10):
5          for c in range(1, 10):
6              for d in range(1, 10):
7                  abcd = a * 1000 + b * 100 + c * 10 + d
8                  dcba = d * 1000 + c * 100 + b * 10 + a
9
10                 if a * d == 40 and b * c == 18 and abs(a
                       - d) == abs(b - c):
11                     rozdil = abcd - dcba
12
13                     if rozdil > nejvetsi:
14                         nejvetsi = rozdil
15                         cislo = abcd
16
17 print("Nalezene cislo: ", cislo)
```

Program vypíše čtyřciferné přirozené číslo 8 635. V řešení MO [6] je uvedeno čtyřciferné číslo 8 635.

Nalezněte řešení níže uvedených tří doplňkových úloh dílčími úpravami vámi vytvořeného programu:

Doplňkové úlohy

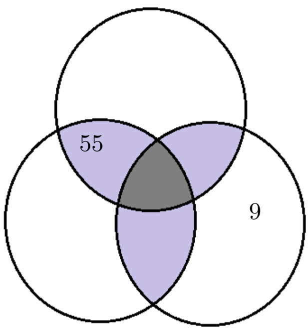
5.1. *Monika přemýšlí o největším pětimístném čísle, které má následující vlastnosti: součin prvních dvou a posledních dvou cifer je 448; cifra uprostřed je menší než 6; rozdíl cifer první dvojice cifer je dvakrát větší než rozdíl cifer poslední dvojice cifer; rozdíl myšleného čísla a opačně napsaného čísla je největší možný. Určete Moničino myšlené číslo.*

5.2. *Monika přemýšlí o největším šestimístném čísle, které má následující vlastnosti: součin prvních dvou a posledních dvou cifer je 2 160; součin cifer ve druhé dvojici cifer je 21; rozdíl cifer první dvojice cifer je stejný jako rozdíl cifer poslední dvojice cifer; rozdíl myšleného čísla a opačně napsaného čísla je největší možný. Určete Moničino myšlené číslo.*

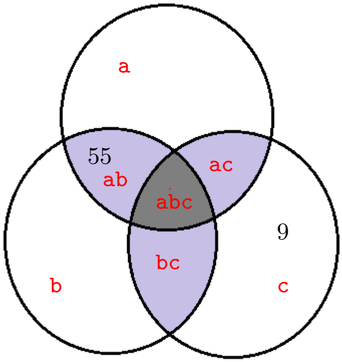
5.3. *Monika přemýšlí o čtyřmístném čísle, které má následující vlastnosti: součin dvou krajních číslic je 30; součin dvou vnitřních číslic je 56; rozdíl dvou krajních číslic je stejný jako rozdíl dvou vnitřních číslic. Ve čtyřciferném čísle vyškrtneme vždy jednu číslici a získáme tak čtyři trojciferná čísla. Pro Moničino číslo platí, že součet těchto trojciferných čísel je největší možný. Určete Moničino myšlené číslo.*

Šestou – a poslední – úlohu lze považovat za algoritmicky jednodušší. Je však specifická tím, že vlastnosti, které mají splňovat hledaná přirozená čísla, jsou formulovány grafickým způsobem.

Úloha 6. *Do prázdných polí v následujícím obrázku doplňte celá čísla větší než 1 tak, aby v každém tmavším políčku byl součin čísel ze sousedních světlejších políček: Jaké je číslo ve středu?* [7]



Řešení. Předpokládejme označení jednotlivých políček podle níže uvedených červeně označených proměnných, které použijeme v programu.



Při tvorbě funkčního zdrojového kódu je zapotřebí se soustředit na následující kroky:

a) způsob vyčíslování proměnných `a` a `b`;
b) posouzení, zda součin příslušných hledaných proměnných je roven číslu 55;
c) zformulování proměnných, které reprezentují číselné hodnoty ve všech zbylých neoznačených políčcích;
d) zajištění výpisů nalezených přirozených čísel v `abc`, která splňují všechny podmínky pro jejich výpis.

Ještě dříve, než přistoupíme k rozboru řešení úlohy, vysvětlíme si význam „sousednosti" políček. Sousednost políček znamená, že hodnota čísla v tmavším políčku vznikne jako součin čísel v těch světlejších políčcích, které právě toto tmavší políčko vzájemně sdílejí.

Podívejme se na obrázek výše. Číslo 55 v tmavším políčku vznikne jako součin čísel ve světlejších políčcích, které lze označit proměnnými `a` a `b`. Čísla v `a` a `b` spolu sousedí a vzájemně sdílejí tmavší políčko, jehož číselnou hodnotu lze registrovat v proměnné `ab` a ze zadání úlohy má konstantní hodnotu, číslo 55.

ad a) Protože součin čísel `a` a `b` je dle zadání roven číslu 55, pak proměnné `a` a `b` mohou postupně nabývat číselných hodnot od 2 do 55 (ř. 2 a 3).

ad b) Posouzení, zda součin čísel v `a` a `b` je roven číslu 55, lze zrealizovat pomocí podmíněného příkazu `if` (ř. 4).

ad c) Zbylá neoznačená políčka lze označit proměnnými, které odpovídají příslušným průnikům proměnných `a`, `b` a `c` (ř. 5–8).

ad d) Výpis číselných hodnot proměnných `a`, `b` a konstanty `c` (ř. 1–3) je nutné zrealizovat po podmíněném příkazu `if` (ř. 4) a formulování proměnných `ab`, `bc` a `ac` (ř. 5–7), stejně tak `abc` (ř. 8).

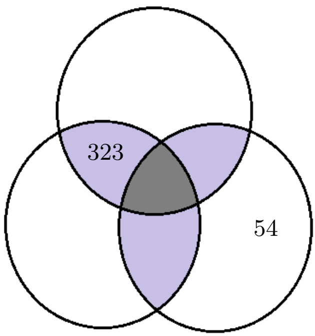
```
1  c = 9
2  for a in range(2, 56):
3      for b in range(2, 56):
4          if a * b == 55:
5              ab = a * b
6              bc = b * c
7              ac = a * c
8              abc = ab * bc * ac
9  
10             print("Cislo v nejtmavsim policku: ", abc)
11             print("Cisla v nejsvetlejsich policcich: ", a, b, c)
12             print()
```

Program vypíše čísla (`a`, `b`, `c`): (5, 11, 9) a (11, 5, 9) a u obou těchto trojic číslo nacházející se v nejtmavším políčku, a to pro obě trojice číslo 245 025. V řešení MO [7] jsou nalezena zbylá čísla ve světlých polích 5 a 11, číslo v nejtmavším políčku je 245 025.

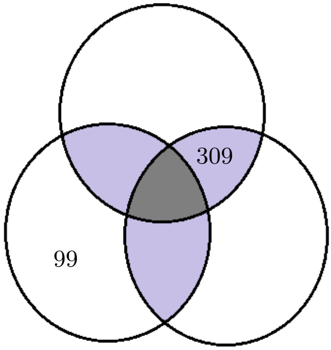
Nalezněte řešení níže uvedených tří doplňkových úloh dílčími úpravami vámi vytvořeného programu:

Doplňkové úlohy

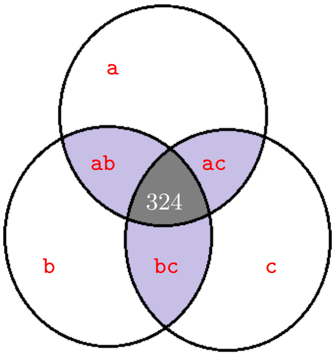
6.1. *Do prázdných polí v následujícím obrázku doplňte celá čísla větší než 1 tak, aby v každém tmavším políčku byl součin čísel ze sousedních světlejších políček: Jaké je číslo ve středu?*



6.2. *Do prázdných polí v následujícím obrázku doplňte celá čísla větší než 1 tak, aby v každém tmavším políčku byl součin čísel ze sousedních světlejších políček: Jaké je číslo ve středu?*



6.3. *Do prázdných polí v následujícím obrázku doplňte celá čísla větší než 1 tak, aby v každém tmavším políčku byl součin čísel ze sousedních světlejších políček a číslo ve středu bylo 324. Jaká čísla mohou být v proměnných* `a`, `b` *a* `c`*?*



Poděkování

Touto cestou bych rád poděkoval paní doc. Ing. Ľubomíře Dvořákové, Ph.D., a také pánům doc. RNDr. Pavlu Töpferovi, CSc., a PhDr. Jiřímu Přibylovi, Ph.D., za inspirativní připomínky k tomuto textu.

Literatura

[1] `https://www.matematickaolympiada.cz/`

[2] MO ČR, 58. ročník, kategorie Z7, domácí kolo, úloha 5. [online].[cit. 25.11.2023]. Dostupné na: `https://www.matematickaolympiada.cz/media/3491964/z58i-7.pdf`.

[3] MO ČR, 62. ročník, kategorie Z6, domácí kolo, úloha 4. [online]. [cit. 25.11.2023]. Dostupné na: `https://www.matematickaolympiada.cz/media/3492013/z62i-6.pdf`.

[4] MO ČR, 62. ročník, kategorie Z8, domácí kolo, úloha 1. [online]. [cit. 25.11.2023]. Dostupné na: `https://www.matematickaolympiada.cz/media/3492015/z62i-8.pdf`.

[5] MO ČR, 69. ročník, kategorie Z9, okresní kolo, úloha 3. [online]. [cit. 25.11.2023]. Dostupné na: `https://www.matematickaolympiada.cz/media/3492097/z69ii-9.pdf`.

[6] MO ČR, 66. ročník, kategorie Z8, okresní kolo, úloha 1. [online]. [cit. 25.11.2023]. Dostupné na: `https://www.matematickaolympiada.cz/media/3492058/z8ii-r.pdf`.

[7] MO ČR, 66. ročník, kategorie Z6, domácí kolo, úloha 6. [online]. [cit. 25.11.2023]. Dostupné na: `https://www.matematickaolympiada.cz/media/3492051/z66-6.pdf`.

Computer science is no more about computers than astronomy is about telescopes.

Informatika není o počítačích o nic víc, než je astronomie o dalekohledech.

I don't need to waste my time with a computer just because I am a computer scientist.

Nemusím ztrácet svůj čas prací u počítače jen proto, že jsem informatik.

Edgar Dijkstra

Jak změřit difuzní koeficient pomocí laseru?

Václav Šebelík, PřF JU, České Budějovice

Abstrakt. Článek popisuje sestavení jednoduchého experimentu pro měření difuzního koeficientu. Při analýze tohoto pokusu je třeba spojit znalosti z informatiky, matematiky i fyziky. Vzhledem k tomu, že difuzi se na středních školách věnuje většinou relativně málo prostoru a žáci tomuto tématu často dostatečně neporozumí, je popisovaný pokus vhodný k doplnění těchto znalostí.

Úvod

Difuze je proces, při kterém se částice (atomy, molekuly) samovolně rozptylují v prostoru, a to z oblastí s vyšší koncentrací do oblastí s koncentrací nížší. Uplatňuje se v mnoha odvětvích, jako např. v technických oborech (desalinizace, ředění plynů), ve farmakologii (farmakokinetika) nebo v medicíně (transport léčiv a škodlivin). Pro charakterizaci, jak snadno daná látka difunduje daným prostředím, se používá konstanta zvaná difuzní koeficient D. Ten udává počet molů dané složky, která projde jednotkovou plochou za jednotku času při jednotkovém spádu koncentrace složky.

Na středních školách se studenti s pojmem difuze setkají kromě fyziky většinou i v biologii a chemii. V biologii je difuze klíčová pro pochopení základních procesů v buňkách a ve tkáních, zatímco v chemii je výklad difuze často spojen s učivem o osmóze. Navzdory svému významu pro velké množství oborů není difuzi při výuce věnováno mnoho prostoru. Podle výzkumu provedeného mezi studenty prvního ročníku vysoké školy je velmi omezená nejen představa studentů o difuzních jevech, ale i jejich znalosti základních veličin a pojmů spojených s difuzí, jako např. Fickův zákon nebo pojem gradient [1].

Experimentálně je difuze na středních školách obvykle předvedena pomocí inkoustu nebo potravinářského barviva kápnutého do sklenice vody. Bohužel v tomto experimentu není hlavní příčinou smíchání difuze. Molekuly vody na hladině se odpařují, a tím se ochlazuje voda, která je blíže povrchu. Studenější voda je hustější, a tak se začne pohybovat směrem dolů. To způsobí proudění, které je z velké části zodpovědné za promíchání vody a barviva. Tento proces je na rozdíl od difuze relativně rychlý a voda v nádobě bývá inkoustem zcela obarvena během několika desítek minut. Druhým experimentem prováděným na školách je ponoření jednoho čajového sáčku do sklenice s teplou vodou a druhého čajového sáčku do sklenice se studenou vodou. Cílem tohoto pokusu je ukázat, že difuze probíhá rychleji při vyšší teplotě. I v tomto případě ale není difuze jediným jevem, který nastává. Ve sklenici s teplou vodou navíc hrají větší roli při míchání turbulentní a konvektivní proudění, způsobené různými teplotami v různých částech nádoby, popř. vložením pytlíku čaje.

V dalších částech si ukážeme, čemu je nutné se při pokusech s difuzí vyhnout, na co si dát pozor a jak je možné pomocí velmi jednoduchého experimentu s laserem difuzi popsat i kvantitativně.

Princip experimentu

Je všeobecně známo, že světelný paprsek se láme na rozhraní dvou prostředí o různém indexu lomu. K ohybu paprsku ale dochází i tehdy, když neexistuje ostré rozhraní mezi prostředími. Klasickým příkladem je např. zrcadlení nad horkou vozovkou nebo pískem (*fata morgana*). To je způsobeno vznikem vzájemně stabilních tenkých vrstev vzduchu s rozdílnými teplotami, což ale zároveň znamená, že každá vrstva má různý index lomu. Takto je sluneční paprsek odkloněn směrem k pozorovateli a tomu se zdá, že nad povrchem se zrcadlí voda. Ve skutečnosti je to však obraz oblohy.

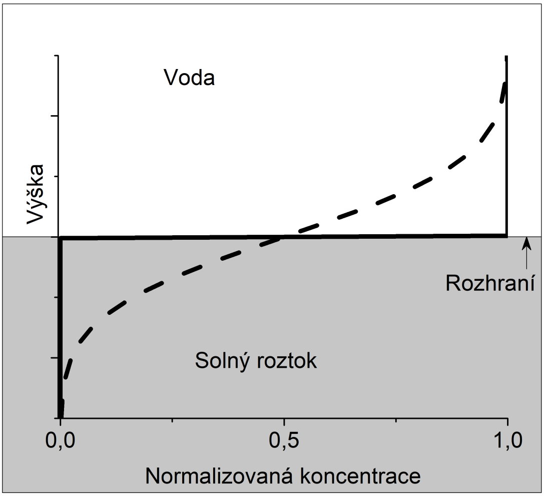
O výše zmíněných vrstvách nad vozovkou s různou teplotou můžeme říct, že tvoří teplotní gradient, potažmo gradient indexu lomu. A co že je to vlastně gradient? Gradient je vektorové pole, které ukazuje směr a velikost nejvyššího nárůstu hodnoty funkce v daném bodě. Matematicky je gradient funkce f v bodě definován jako vektor jeho parciálních derivací, tj.

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) \tag{1}$$

Teplotní gradient (resp. gradient indexu lomu), který způsobuje *fata morganu*, je tedy míra změny teploty (indexu lomu) se vzdáleností v daném směru, typicky vyjádřená jako stupně na jednotku délky. Gradient a difuzní koeficient úzce souvisí v procesech difuze, kde difuzní koeficient určuje rychlost, s jakou se látka šíří (difunduje) prostředím, a gradient (např. koncentrační nebo teplotní) udává směr a intenzitu tohoto šíření. Při difuzi je tok látky přes oblast přímo úměrný gradientu koncentrace, přičemž difuzní koeficient je mírou této úměrnosti (první Fickův zákon).

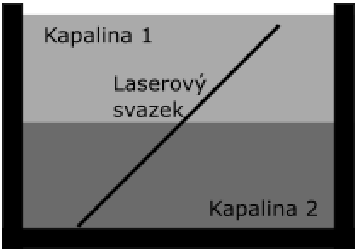
V případě difuze tedy gradient udává, jak rychle a jakým směrem se látka šíří, zatímco difuzní koeficient kvantifikuje, jak snadno se látka šíří prostředím.

Gradientu indexu lomu lze využít i pro studium difuze. Představme si, že máme v nádobě dvě mísitelné kapaliny tak, že hustší kapalina je na dně. Pokud bychom měli ideální podmínky, dělilo by je v čase nula ostré horizontální rozhraní. Pokud bychom si normalizovali koncentraci horní kapaliny (nejnižší hodnota je tudíž 0, zatímco nejvyšší hodnota je 1), získali bychom stejný profil, který je na obr. 1 zobrazen plnou čarou. Po určitém čase se ale kvůli difuzi ostrý přechod mezi kapalinami začne rozmělňovat, a tudíž se změní i profil koncentrace horní kapaliny (obr. 1, přerušovaná čára). Proces difuze pokračuje až do okamžiku, kdy obě kapaliny mají v celém objemu nádoby normalizovanou koncentraci 0,5.



Obr. 1: Schematické znázornění počátečního profilu koncentrace (plná čára) a koncentračního profilu po určitém čase difundování rozpuštěné látky přes rozhraní (přerušovaná čára)

Pokud mají kapaliny různý index lomu a začnou se kvůli difuzi mísit, bude mít každá vertikální pozice v nádobě jiný index lomu – vytvoří se gradient. Index lomu můžeme měřit pomocí světelného svazku dopadající kolmo na vzorek. Kdybychom lom změřili pro různé výšky ve vzorku a opakovali tento experiment v různých časech, viděli bychom, jak se s postupující difuzí mění index lomu každé vertikální pozice. Index lomu tedy závisí na vertikální poloze, neboli na výšce, ve které svazek vstupuje do vzorku. Abychom si práci ulehčili, nebudeme posouvat světelným svazkem nahoru nebo dolů, ale rozložíme si ho do výseče roviny tak, že bude pod úhlem 45° procházet vzorkem (viz obr. 2 a část textu Popis experimentu). Na každé x-ové pozici tudíž bude mít jinou výšku.

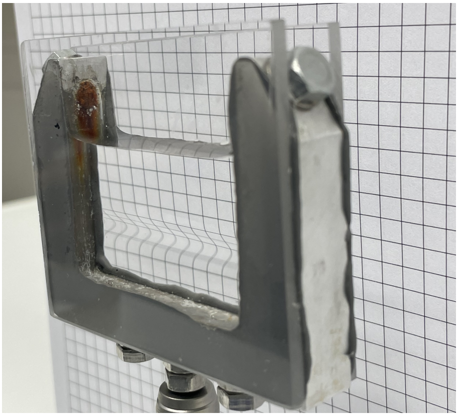


Obr. 2: Schéma umístění průchodu laserového svazku vzorkem

Takovýto experiment byl proveden a popsán už v roce 1893 Ottou Wienerem [2]. Ten pro svůj experiment ještě samozřejmě nemohl využít laser, musel tudíž svůj zdroj světla udělat monochromatickým a poté použít štěrbinu, která svazku vymezila rovinu pod úhlem 45°. Pokud by totiž využil nemonochromatické světlo, každá vlnová délka by měla jiný úhel lomu a na stínítku by se vytvořily křivky tvořené různými barvami. To by sice vypadalo vizuálně velmi esteticky, ale ztížilo by to odečtení výsledků. V dnešní době je vhodné využít laser, který je ze své podstaty monochromatický, a rozložit ho pomocí cylindrické čočky do výseku roviny.

Popis experimentu

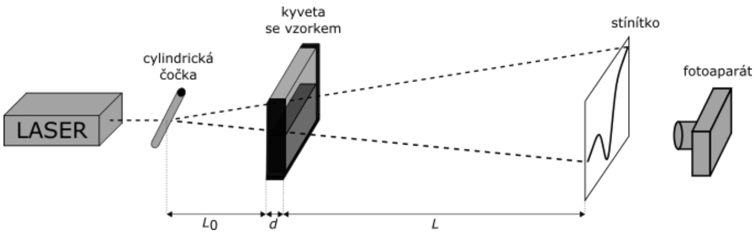
Jako vzorek byla vybrána voda a roztok soli ve vodě (0,2 g/ml). Jejich rozdílné indexy lomu nám umožní pozorovat na jejich rozhraní ohyb paprsku a zároveň je možné je relativně jednoduše transportovat do kyvety tak, aby se nepromíchaly. Kyveta v našem experimentu má rozměry 5x5x1 cm. Její spodní a boční stěny byly vytištěny na 3D tiskárně a na tuto kostru pak byla z obou stran přilepena dvousložkovým epoxidovým lepidlem plexiskla o tloušťce 2 mm. Do kyvety nejprve nalijeme vodu, a to do necelé půlky kyvety. Nyní nabereme roztok soli do pipety, popř. do injekční stříkačky s dostatečně dlouhou a tenkou jehlou, opatrně konec pipety vložíme na dno kyvety a solný roztok jemně vypustíme. To opakujeme, dokud nemáme v kyvetě přibližně stejně vody a roztoku soli. Protože má solný roztok vyšší hustotu než voda, zůstane u dna nádoby, dokud se difuzí obě kapaliny nepromíchají. Při práci s kyvetou je nutné pracovat opravdu pomalu a jemně, neboť při neopatrném postupu by se nevytvořil ostrý přechod mezi vodou a roztokem soli, který se bude postupně kvůli difuzi „rozmělňovat“. Všimněte si, že tento přechod je možné vidět i pouhým okem (obr. 3).



Obr. 3: Kyveta se vzorky. Prohlé čáry na papíru v pozadí ukazují, kde je přechod mezi vzorky

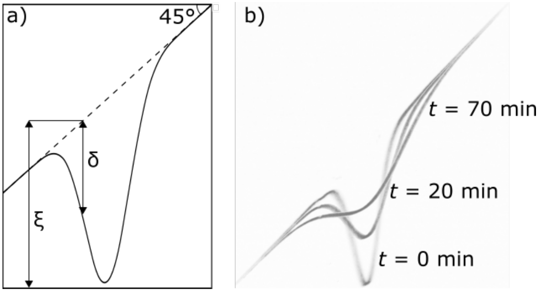
Při experimentu samotném je nutné omezit výpar a tím zamezit víření kapalin. To je možné zajistit dvěma jednoduchými úkony. Zaprvé je třeba zmenšit plochu výparu. Volíme tudíž nádobu, ve které bude mít hladina kapaliny co nejmenší povrch. Zadruhé je nutné omezit proudění vzduchu nad hladinou. Toho dosáhneme jednoduchým zakrytím nádoby, např. pomocí víčka, nebo parafilmu. Ověření toho, že nám ve vzorku nevzniká žádné proudění, můžeme udělat jednoduše tím, že roztok se solí obarvíme pomocí inkoustu a uděláme časosběrné video kyvety se vzorky. Proudění by bylo na takto vytvořeném videu vidět. Je také vhodné kyvetu už před plněním umístit na místo, kde bude po dobu experimentu, abychom zabránili zbytečnému pohybu, který by při transportu kyvety mohl způsobovat promíchávání vzorku.

Schéma experimentu je znázorněno na obr. 4. Pozor, při práci s laserovým zářením je vždy nutné dbát zvýšené opatrnosti a používat ochranné pomůcky! Laser (v našem případě He-Ne) je v držáku umístěn tak, aby svazek, který z něj vychází, byl vodorovný. Tento svazek následně prochází cylindrickou čočkou o průměru 6 mm (je možné použít skleněnou chemickou tyčinku, nebo si objednat skleněné tyčinky s různým průměrem z e-shopu s optickým sklem a dárkovými předměty). Ta je upevněna pod úhlem 45° vůči podložce. Po průchodu cylindrickou čočkou je laserový svazek rozložen do výseče roviny. Tento rozložený svazek poté necháme procházet skrz kyvetu tak, aby přibližně polovina svazku vedla nad rozhraním kapalin a polovina pod ním (obr. 2). Svazek po průchodu kyvetou pokračuje na pevný papír (čtvrtku), který nám poslouží jako stínítko. Na papír si ještě před jeho umístěním uděláme pomocí pravítka a tužky několik čar o námi vybrané délce (např. 1 cm), abychom při pozdějším zpracování dokázali určit poměr mezi pixely a skutečnou délkou. Za stínítkem umístíme fotoaparát, kterým budeme snímat data. Je vhodné mít k fotoaparátu připojenu dálkovou spoušť umožňující nastavení doby expozice, počtu snímků a času mezi jednotlivými snímky. Zároveň je kvůli zpracování dat nejlepší fotit v zatemněné místnosti.



Obr. 4: Schéma experimentu

Parametry snímků v experimentu byly tyto: expoziční čas: 1/80 s, clona: f/4, ISO: 200, velikost: 6016 × 4000 px. Snímky byly zachyceny každých 10 minut po dobu 70. minut. Celkem tedy bylo vyfotografováno 8 snímků. Navíc byl vytvořen jeden kalibrační snímek při rozsvíceném světle, abychom při zpracování dat mohli převést pixely na cm. Po sestavení experimentu můžeme na stínítku pozorovat křivku zobrazenou na obr. 5a plnou čarou. Čárkovanou čarou je naznačena pozice svazku, pokud by v kyvetě procházel homogenním prostředím. Parametry ξ a δ, jejichž odečtení je naznačeno na obr. 5a, budou využity při zpracování obdržených dat. Tyto hodnoty se musí odečíst pro všechny x-ové polohy. Příklady obdržených křivek v různých časech jsou ukázány na obr. 5b.



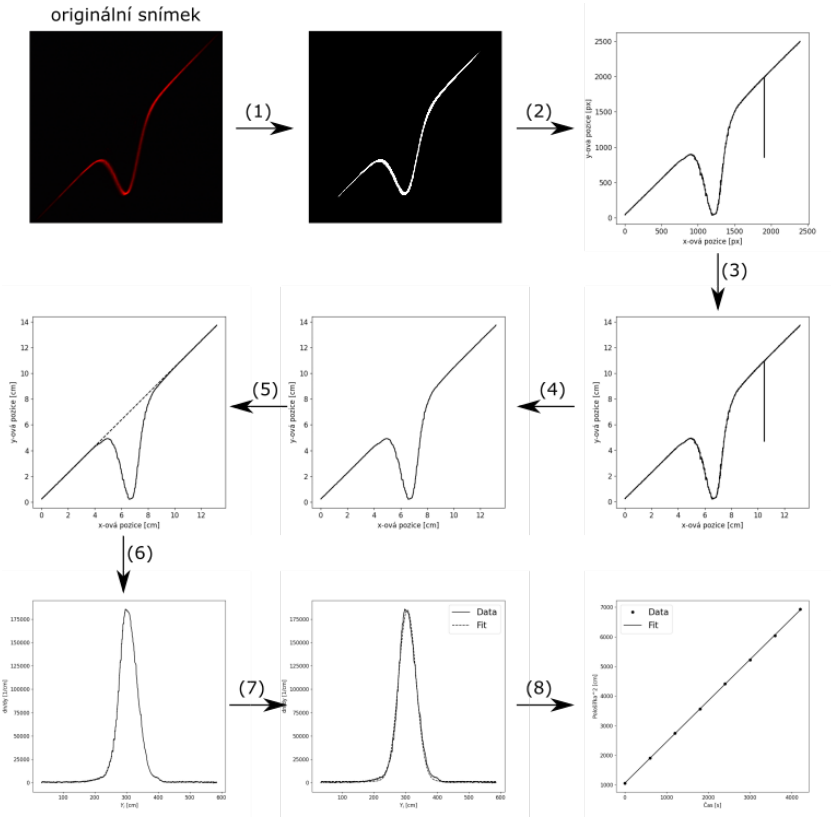
Obr. 5: (a) Schematické zobrazení zakřivené laserové stopy objevující se na stínítku (plná čára). Pomocí parametrů δ a ξ je možné určit gradient indexu lomu $\frac{dn}{dy_i}$ v dané vertikální poloze y_i v kyvetě. (b) Příklad naměřených dat (snímky byly převedeny do odstínů šedi, byly jim invertovány barvy a poté byly přeloženy přes sebe)

Zpracování dat

Obdržená data byla zpracována v prostředí Python 3.6. Použitý skript spolu s daty je dostupný na adrese:

`http://www.polivkalab.cz/cz_diffusion.html`

Všechny snímky byly nejprve oříznuty pomocí stejných parametrů a to tak, aby obsahovaly celou křivku, ale zároveň co nejméně jejího okolí. Na obr. 6 je zobrazen následný postup zpracování dat, který nyní krok po kroku popíšeme. Začínáme s oříznutým obrázkem, který převedeme do stupňů šedi (1). Poté u každého snímku najdeme indexy maximálních hodnot podél osy y (2). Tím si vlastně převedeme obrázky na grafy. Tento krok je samozřejmě možné provést i „ručně“, ale výhodnější a přesnější je použití softwaru. Můžeme využít jak volně dostupný software (např. Engauge Digitizer), tak námi vytvořený program. Všimněte si, že stále máme hodnoty na osách x a y v pixelech. Je jasné, že pro výpočet budeme potřebovat na obou osách jednotku vzdálenosti. Dle definice v úvodu a z Fickova zákona je patrné, že difuzní koeficient je možné vyjádřit v jednotkách cm^2/s, a proto si nyní převedeme pixely na cm. To uděláme tak, že na kalibračním snímku změříme počet pixelů na jeden cm a touto hodnotou vydělíme obě osy (3). Při pohledu na získaná data je jasné, že minimálně jedna hodnota se odchyluje od námi získané křivky. Tu můžeme odstranit buď ručně, nebo pomocí algoritmu, který tuto odchylku dokáže najít a odstranit/opravit (4). Dále je třeba určit úsečku, kterou by vykreslil laserový svazek na stínítku, pokud procházel skrze homogenní prostředí. V našem případě jsme použili vždy první a poslední bod grafu a mezi nimi jsme proložili přímku (5).



Obr. 6: Postup zpracování dat. Detailněji jsou všechny kroky popsány v textu

U následujících kroků nebudeme výsledky odvozovat, detaily odvození je možné nalézt např. v [3, 4, 5, 6].

Nyní je třeba určit vztah mezi každou vertikální pozicí svazku ve vzorku (budeme značit y_i) a každou vertikální pozicí svazku na stínítku (ξ):

$$y_i = \frac{\xi L_0}{L_0 + d + L}. \qquad (2)$$

Hodnotu ξ určíme, jak je znázorněno na obr. 5, zatímco hodnoty L_0, d a L jsou vyznačeny na obr. 4 a v našem případě byly následující: $L_0 = 20$ cm, $d = 1$ cm a $L = 60$ cm. Tloušťka stěn kyvety byla při výpočtech zanedbána.

Nyní musíme matematicky propojit výchylku svazku označenou na obr. 5 jako δ s gradientem $\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}y_i}$, kde n je index lomu:

$$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}y_i} = \frac{\delta}{dL}. \tag{3}$$

Závislost $\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}y_i}$ na y_i by měla odpovídat Gaussově funkci. V dalším kroku tedy vypočítaná data nafitujeme právě jí (7). Z parametrů fitu si vybereme plnou šířku v polovině výšky (*full width at half maximum, zkráceně FWHM*). Toto číslo vydělíme dvěma, umocníme na druhou a označíme si ho jako $y^2_{1/2}$.

Celý postup od (1) do (7) opakujeme pro všechny zbývající obrázky. Poté si vyneseme závislost všech $y^2_{1/2}$ na čase (v našem případě 0 s, 600 s, 1200 s, ...). Tato data by měla vykazovat lineární závislost, proto je proložíme přímkou. Z tohoto fitu získáme sklon (neboli směrnici) s proložené přímky. Difuzní koeficient poté už získáme velmi jednoduše pomocí vztahu

$$D = \frac{s}{4ln2}. \tag{4}$$

Pro naše data (koncentrace 3,4 mol/l) vychází difuzní koeficient $1{,}514 \cdot 10^{-5}$ cm^2/s. Podle [7] je difuzní koeficient $1{,}565 \cdot 10^{-5}$ cm^2/s pro koncentraci 3 mol/l a $1{,}594 \cdot 10^{-5}$ cm^2/s pro koncentraci 4 mol/l.

Závěr

Tento experiment umožňuje spojit a prohloubit znalosti z různých předmětů a oborů, jako např. chemie (používání chemických látek, příprava solného roztoku o dané koncentraci), fyzika (sestavení experimentu a používání optických členů) nebo informatika (sběr dat a jejich následné zpracování). Vzhledem k malé dotaci hodin středoškolské výuky na probrání difuze, a to v kterémkoliv předmětu, je představený pokus vhodným nástrojem na prohloubení tohoto učiva. Zároveň může být vzhledem ke kombinaci teoretických i praktických znalostí atraktivní pro širokou škálu studentů nebo jejich skupin.

Literatura

[1] Skopalík, J., Sekora, J., Belza, J., Horák, T., Parák, T.: *Částice + difuze fluorescence – aneb co často chybí středoškolákům pro zvládnutí technických a biomedicínských oborů.* Univerzita Palackého v Olomouci, Olomouc, 2022.

[2] Wiener, O.: Darstellung gekrümmter Lichtstrahlen und Verwerthung derselben zur Untersuchung von Diffusion und Wärmeleitung. *Annalen der Physik*, roč. 285 (1893), s. 105–149.

[3] Swapna, M. N. S., Anitha, M. J., Sankararaman, S. I.: Study of drug diffusion rate by laser beam deflection technique. *Journal of Biomedical Optics*, roč. 22 (2017), 068001.

[4] Cadavid, A., Garzón, J.: Optical Method For Liquid Diffusional Coefficients Calculation. *Revista Colombiana de Física*, roč. 43 (2011), s. 507–512.

[5] Barnard, A. J., Ahlborn, B.: Measurement of refractive index gradients by deflection of a laser beam. *Americal Journal of Physics*, roč. 43 (1975), s. 573–574.

[6] Gaffney, C., Chau, Ch.-K.: Using refractive index gradients to measure diffusivity between liquids. *American Journal of Physics*, roč. 69 (2001), s. 821–825.

[7] Vitagliano, V., Lyons, P. A.: Diffusion Coefficients for Aqueous Solutions of Sodium Chloride and Barium Chloride. *Journal of the American Chemical Society*, roč. 78 (1956), s. 1549–1552.

Foto z akce Matematika pro život 2024 (zpráva na str. 57)

Matematika pro život 2024

Ľubomíra Dvořáková a Jan Vybíral (organizátoři akce)

Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská ve spolupráci s Pedagogickou fakultou Univerzity Karlovy pořádala 12. ledna 2024 již pošesté jednodenní akci s názvem Matematika pro život. Na programu kurzu byly ukázky aplikací matematiky v elektrokardiologii, statistice, aperiodickém dláždění prostoru, neurovědě. Účastníci z řad středoškolských profesorů matematiky dorazili v hojném počtu, díky čemuž snad už můžeme pomalu zapomenout na „covidový“ on-line ročník a „postcovidový“ hybridní ročník. Posluchači v anketě jednomyslně vyjádřili zájem znovu se v budoucnu účastnit, z čehož máme velkou radost.

Přednášky tentokrát kromě aplikací matematiky zabrousily ve dvou případech také do oblasti didaktiky matematiky:

- prof. RNDr. Naďa Vondrová, Ph.D.: *Kritická místa českých žáků a studentů v matematice aneb Čemu bychom měli věnovat ve výuce pozornost.* Pedagogická fakulta UK
- prof. RNDr. Jiří Bouchala, Ph.D.: *Laplaceova bota.* Fakulta elektrotechniky a informatiky VŠB TU Ostrava
- RNDr. Jan Kotůlek, Ph.D.: *Reformy středoškolského studia matematiky včera a dnes (a zítra?).* Fakulta strojní VŠB TU Ostrava
- prof. RNDr. Karel Hron, Ph.D.: *(Skoro) vše je relativní aneb s logaritmem na statistiku.* Přírodovědecká fakulta UP v Olomouci
- prof. Ing. Zuzana Masáková, Ph.D.: *Einstein: problém jedné dlaždice.* Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská ČVUT v Praze
- doc. RNDr. Jiří Fiala, Ph.D.: *Rovinné grafy a jejich dotykové reprezentace.* Matematicko-fyzikální fakulta UK
- prof. Ing. Michal Beneš, Ph.D.: *Matematika pro elektrokardiologii.* Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská ČVUT v Praze
- Dipl. Inf. Roman Pipek: *Neurověda o matematickém myšlení aneb Jak se (nena)učíme počítat.* Imining GmBH München

Byly pořízeny kvalitní záznamy přednášek, které jsou k dispozici na YouTube kanálu:

`https://www.youtube.com/@matematikaprozivot4615`

Představení knihy J. Mlynáře a V. Krajčové Nejžhavější sen pod Sluncem

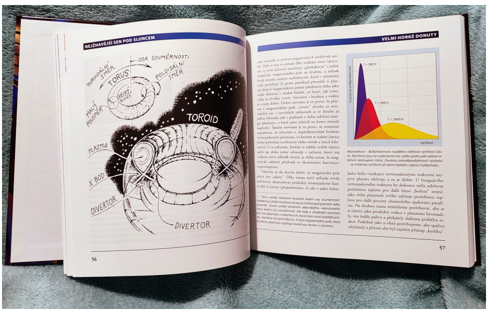
Věra Krajčová, FJFI ČVUT, Praha

Zajímáš se o termojadernou fúzi? A přemýšlel jsi někdy nad tím, jaká cesta vedla k výstavbě druhé nejdražší stavby pod Sluncem, tedy k TOKAMAKu ITER? Pokud jsi na obě otázky odpověděl kladně, pak je kniha profesora Jana Mlynáře přesně pro tebe.

Profesor Jan Mlynář byl odborníkem na termojadernou fúzi, který ale velmi toužil předat své nadšení pro vědu i středoškolským studentkám a studentům. Proto s nadšením přijímal pozvání na gymnázia i střední odborné školy, kde velmi srozumitelným způsobem, což není u takových odborníků úplně zvykem, předával své zážitky, vědomosti a vize, co se fúze týče. Podstatou jeho přednášek, které můžete shlédnout na youtube, byly jeho osobní zkušenosti a setkání během pracovních pobytů v Anglii, Švýcarsku i České republice. Kniha *Nejžhavější sen pod Sluncem* právě z těchto přednášek vychází. Je psána pro širokou veřejnost – pro žáky středních škol a jejich učitele, technicky zaměřené dospělé, pro všechny, které zajímá nejnovější vývoj vědy a techniky, narážející až na hranice lidských možností.

První kapitola knihy přibližuje pohled člověka na Slunce. Od jeho uctívání jako boha, až po první představy o tom, proč nás Slunce hřeje a kde se bere jeho obrovská energie. Ve druhé kapitole se již člověk pokouší mít vlastní Slunce na Zemi, resp. jeho energii. S tím souvisel i vývoj vodíkové bomby o nepředstavitelné síle. Zároveň se ovšem začalo přemýšlet, jak tuto energii zkrotit a využít pro lidstvo pozitivně, tedy postavit elektrárny založené na termojaderné fúzi. Jednou z možností je zařízení ve tvaru donatu TOKAMAK, o jehož vývoji pojednává celá třetí kapitola. Řeklo by se, že pokud již máme teorii i menší funkční zařízení, je už jen krůček ke stavbě toho v budoucnu největšího, který se nazývá ITER (International Thermonuclear Experimental Reactor). Tento krůček ale trval 21 let a celou čtvrtou kapitolu knihy. Dítě jménem ITER se narodilo 21. listopadu 2006 podpisem dohody o mezinárodní spolupráci na tomto projektu. Začalo se stavět. O problémech a samotné stavbě pojednává kapitola pátá. Kapitola šestá je odbočkou za „kamarády“ TOKAMAKů – jinými zařízeními, která se s různou úspěšností snaží o jadernou fúzi. Tím plynule přecházíme k vizím – výhledově by měl být TOKAMAK zařízením, dodávajícím energii ke spotřebě ostatním. Jak jsme na tom s energetikou nyní? Bez elektrické energie by nemohl vzniknout tento článek – bez nabití baterie notebooku, bez připojení k internetu i kávy uvařené kávovarem pro autorku tohoto textu. A stejně jako roste počet lidí a postupuje vývoj lidstva, roste i spotřeba energie – již dávno si nevystačíme s ohněm a párou. Sice máme jaderné elektrárny založené na štěpné jaderné reakci a třeba i fotovoltaiku, ale stačí to? A co na to příroda? O tom pojednává zásadní sedmá kapitola. Aby kniha nekončila neradostně, poslední kapitola představuje další velké vědecké projekty současnosti – CERN, ISS, ESA, NASA, ESO, ...

Text knihy, srozumitelný i pro nefyziky, doplňuje 318 fotografií a barevných nákresů a 11 perokreseb, vysvětlujících některé fyzikální záležitosti. Vznikla tak odborná, ale i poutavá a hezká kniha, která určitě stojí za přečtení. Vydalo ji nakladatelství Aldebaran Group for Astrophysics v roce 2023.



MoMath National Museum of Mathematics in New York

Ľubomíra Dvořáková

Americké národní muzeum matematiky je senzačním popularizátorem matematiky. Nemusíte žít v New Yorku, abyste si užívali zajímavostí ze světa matematiky prostřednictvím tohoto muzea. Stačí se přihlásit k odběru novinek na webu muzea `https://momath.org/about/contact/`.

V MoMath se pořád něco děje. Pojďme společně nahlédnout do dubnového online programu:

- Loving Math – matematické příběhy a veselé hry pro děti
- QED – rozhovory s významnými osobnostmi o matematice a vyučování matematiky
- Senior Sessions – 45minutová fascinující setkání s poutavými tématy: topologie, puzzle, kryptografie, geometrie, nekonečno atd. atd.
- Folding Fridays – pravidelné hrátky s origami
- Online Topological Crochet – háčkování topologických vzorů
- Tween Primes – setkání teenagerů, kteří mají rádi matematiku a literaturu
- Volumes – setkání dospělých, kteří mají rádi matematiku, přírodní vědy a literaturu
- Extensions – online program pro nadané středoškoláky a žáky 2. stupně
- Krazy Kahoot! – kvíz pro celou rodinu
- Math Gym – procvičování logického myšlení
- Starring Math – debaty o vybraných filmech či seriálech, v nichž hraje roli matematika
- Ask a mathematician – Anything! – vaše otázky hostům z řad významných matematiků
- Meet a mathematician – moderované rozhovory s významnými matematiky

Nebo si třeba pusťte krátká videa v sekci Beautiful Math `https://momath.org/home/beautifulmath/`, kde vám známé matematické osobnosti vysvětlí, v čem podle nich spočívá krása matematiky.

Vydává Jednota českých matematiků a fyziků
tel.: 222 090 708-9, e-mail: jcmf@math.cas.cz
za podpory MFF UK Praha a FJFI ČVUT Praha

Vycházejí 4 čísla v kalendářním roce

Obálku navrhl Bohuslav Šír

Sazbu programem TEX připravil RNDr. Miloslav Závodný

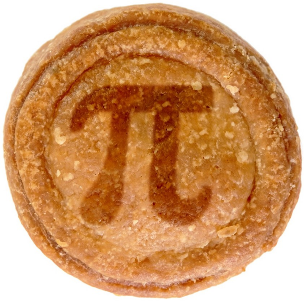
Adresa redakce: KM FJFI ČVUT, Trojanova 13, 120 00 Praha 2
e-mail: rozhledy@jcmf.cz

Internetové stránky časopisu: https://rozhledy.jcmf.cz/

Vytiskla Tiskárna Pohlline, Zálesí 1126/88, 142 00 Praha 4

Distribuci pro předplatitele provádí v zastoupení vydavatele
MediaCall, s. r. o.
Vídeňská 546/55, 639 00 Brno
tel.: +420 532 165 165, e-mail: export@mediacall.cz
web: www.zahranicnitisk.com

ISSN 0035-9343 MK ČR E4691



π den

Víte, že
14. března se slaví Mezinárodní den matematiky?

14. 3. je to proto, že číslo π má desetinný rozvoj začínající 3,14...

O historii tohoto svátku se dočtete např. na webu Exploratoria,
kde tato myšlenka vznikla.

https://www.exploratorium.edu/pi-day/pi-day-history

ROZHLEDY
matematicko-fyzikální
Ročník 99 (2024), číslo 1

OBSAH

Pokyny pro autory

Příspěvky dodávejte na adresu redakce v elektronické podobě. Nejlépe napsané ve formátu LaTeX, přijatelný je i formát PlainTeX, je akceptovatelný i text připravený editorem Word či podobným.

Pokud jde o obrázky, je žádoucí, aby byly připraveny v reprodukovatelné podobě. Každý obrázek nechť je v samostatném souboru, nejlépe ve formátu eps nebo pdf. Přípustná je též bitmapa v dostatečném rozlišení.

Ke každému zasílanému příspěvku (ne u soutěží, zpráv a recenzí) přiložte krátkou anotaci v českém jazyce. Dále je žádoucí, aby u každého příspěvku byla uvedena literatura, na kterou je v textu odkazováno.