

# ROZ HLEDY

**MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ**

ČASOPIS PRO ZÁJEMCE O MATEMATIKU, FYZIKU A INFORMATIKU

ROČNÍK 99 (2024) • ČÍSLO 2

„Devítková“ vlastnost prvočísel

Mikuláš Kučera, FJFI ČVUT, Praha

Ukážeme si jednu z mnoha zajímavých vlastností prvočísel – konkrétně vlastnost period jejich převrácených hodnot, kterou poprvé dokázal roku 1836 francouzský matematik Etienne Midy (1775–1846) [1].

Začneme s číslem  $1/7$ . Klasickým algoritmem dělení zjistíme:

$$\frac{1}{7} = 0,\overline{142857}. \quad (1)$$

Tedy získáme periodu 142857. Rozdělme ji v polovině na čísla 142 a 857 a ta sečtíme:

$$142 + 857 = 999.$$

Získali jsme číslo ze samých devítek. Totéž si můžete zkusit například s číslem  $1/13$ :

$$\frac{1}{13} = 0,\overline{076923}, \quad 076 + 923 = 999.$$

Zdá se, že obdobný postup bude fungovat s libovolným prvočíslem  $p \geq 7$ , jehož perioda je sudé délky. Označme  $\mathbb{P}$  množinu všech prvočísel. Pro potřeby formulace problému vyslovme nejprve definici. Není-li řečeno jinak, budeme v celém článku ztotožňovat čísla a jejich reprezentace v desítkové soustavě.

Reálné číslo  $a \in (0, 1)$  nazveme *periodickým*, pokud je jeho rozvoj za desetinnou čárku zakončen *periodou*, tj. pravidelně se opakující nenulovou  $n$ -ticí číslic. Periodu značíme pruhem, tj.

$$a = 0, b_1 b_2 \dots b_m \overline{a_1 a_2 \dots a_n}.$$

$n$ -tici  $a_1 a_2 \dots a_n$  nazýváme *perioda délky  $n$* ,  $m$ -tici  $b_1 b_2 \dots b_m$  nazýváme *předperioda délky  $m$* . Má-li číslo prázdnou předperiodu ( $m = 0$ ), nazýváme je *ryze periodické* (angl. *purely periodic*), v opačném případě ( $m \neq 0$ ) jde o číslo *posléze periodické* (angl. *eventually periodic*).

**Poznámka.** Za periodická nepovažujeme čísla s periodou 9, neboť např.  $1 = 0,\overline{9}$ . Dále je zřejmé, že periodu (i předperiodu) vždy musíme uvažovat nejkratší možnou pro jednoznačnost definice.

**Příklad.** Číslo  $1/3 = 0,\bar{3}$  je ryze periodické s periodou 3 délky 1. Číslo  $1/6 = 0,1\bar{6}$  je posléze periodické s předperiodou 1 délky 1 a periodou 6 délky 1.

**Úkol 1.** Ukažte, že každé periodické číslo je racionální, tj. pokud  $a$  je periodické, pak  $a = r/q$ , kde  $r$  a  $q$  jsou celá čísla.

### Midyho věta

Tvrzení, že pozorování z úvodu skutečně platí pro všechna prvočísla  $p \geq 7$ , je obsahem tzv. Midyho věty. Nejprve ukážeme, že převrácené hodnoty těchto prvočísel jsou ryze periodické.

**Tvrzení 1.** *Nechť  $p \in \mathbb{P} \setminus \{2, 5\}$ . Potom  $1/p$  je v desítkové soustavě ryze periodické.*

K důkazu využijeme následující slavnou větu.

**Věta** (Malá Fermatova). <sup>1)</sup> *Nechť  $p \in \mathbb{P}$ ,  $a \in \mathbb{N}$ ,  $a \perp p$  ( $a$  je nesoudělné s  $p$ ). Potom*

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}. \quad (2)$$

Při dělení  $1/p$  napočítáme prvních  $n$  číslic za desetinnou čárkou jako  $\lfloor 10^n/p \rfloor$  s  $n$ -tým zbytkem  $r_n = 10^n \pmod{p}$ . K výpočtu další číslice dělíme  $10r_n/p$  atd. Stačí tedy, aby v některém kroku dělení vyšel zbytek 1. A zde využijeme právě malou Fermatovu větu (2). Stačí volit  $n := p - 1$  a  $a := 10$  a zjistíme, že po  $p - 1$  vypočítaných číslicích se desetinný rozvoj začne opakovat. Skutečně, jelikož  $10^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ , je  $r_{p-1} = 1$ .  $p$ -tou číslicí za desetinnou čárkou tedy, stejně jako tu první, vypočteme coby  $\lfloor 10/p \rfloor$  s  $p$ -tým zbytkem  $r_p = r_1 = 10 \pmod{p}$  a obdobně pro číslice následující.

**Úkol 2.** Ukázali jsme, že  $1/p$  je ryze periodické. Sami si rozmyslete, že navíc platí, že délka jeho periody musí dělit  $p - 1$ . Ověřte na příkladech pro  $p = 7$  a  $p = 13$ .

**Věta 2** (Midy). *Nechť  $p \in \mathbb{P}$ ,  $p \geq 7$ . Pokud periodu čísla  $1/p$  lze rozdělit na dva bloky stejné délky, pak jejich součet je tvořen pouze číslicemi 9.*

---

<sup>1)</sup>Pro důkazy a další zajímavosti týkající se malé Fermatovy věty čtenáře odkazujeme na literaturu [2].

**Poznámka.** Uvědomme si, že zde povolujeme čísla, jejichž zápis začíná číslicí 0, jak jsme viděli například pro číslo  $1/13$ .

Nechť tedy

$$\frac{1}{p} = 0,\overline{xy}, \quad (3)$$

kde  $x$  a  $y$  jsou  $n$ -tice číslic (to tedy znamená, že  $2n$  je nejmenší přirozené číslo takové, že  $10^{2n} \equiv 1 \pmod{p}$ ). Chceme ukázat, že  $x+y$  je číslo tvořené pouze číslicemi 9. Jistě platí následující odhady:

$$0 \leq x \leq 10^n - 1, \quad 0 \leq y \leq 10^n - 1.$$

Protože však  $x$  a  $y$  nemohou být současně tvořeny pouze nulami (pak by platilo  $1/p = 0$ ) ani pouze devítkami (jinak  $1/p = 1$ ), získáváme odhad

$$0 < x + y < 2(10^n - 1). \quad (4)$$

Vynásobením rovnice (3) číslem  $10^{2n}$  dostaneme

$$\frac{10^{2n}}{p} = 10^n x + y + 0,\overline{xy} = 10^n x + y + \frac{1}{p}.$$

Odtud jednoduchou úpravou

$$\frac{(10^n - 1)(10^n + 1)}{p} = \frac{10^{2n} - 1}{p} = 10^n x + y.$$

Jelikož  $p$  je prvočíslo a nedělí  $10^n - 1$  (v opačném případě  $10^n \equiv 1 \pmod{p}$ , což je spor s předpokladem, že  $1/p$  má periodu délky  $2n$ ), musí dělit  $10^n + 1$ . To znamená, že

$$\frac{10^n x + y}{10^n - 1} \in \mathbb{N}.$$

Snadno vidíme, že platí

$$x + y = 10^n x - (10^n - 1)x + y \equiv 10^n x + y \equiv 0 \pmod{10^n - 1}.$$

Číslo  $x+y$  je dělitelné  $10^n - 1$  a ve spojení s odhadem (4) máme kýženou rovnost  $x + y = 10^n - 1$ , což je číslo ze samých devítek.

**O krok dál – Ginsbergova věta**

Když jsme úspěšně vyřešili úvodní problém, můžeme se ještě jednou vrátit k číslu  $1/7 = 0,142857$  (1). Zkusme periodu tentokrát rozdělit na tři bloky délky 2 a ty sečíst:

$$14 + 28 + 57 = 99.$$

Opět dostáváme číslo ze samých devítek! Snadno ověříme tentýž výsledek pro  $1/13$ :

$$07 + 69 + 23 = 99.$$

Zdá se, že devítková vlastnost platí i při dělení period na třetiny. Že je tomu skutečně tak, dokázal Ginsberg (2004) [1]. Jak uvidíme, důkaz je už o něco složitější.

Nechť  $p \in \mathbb{P}$ ,  $p \geq 7$  a

$$\frac{1}{p} = 0,\overline{xyz} = 0,\overline{x_1 \dots x_n y_1 \dots y_n z_1 \dots z_n} \quad (5)$$

je číslo s periodou délky  $3n$ . Jednoduchým odhadem analogickým důkazu Midyho věty získáme

$$0 < x + y + z < 3(10^n - 1). \quad (6)$$

Stejně tak vynásobením (5) číslem  $10^{3n}$  odvodíme

$$\frac{(10^n - 1)(10^{2n} + 10^n + 1)}{p} = \frac{10^{3n} - 1}{p} = 10^{2n}x + 10^ny + z. \quad (7)$$

A stejnou argumentací jako dříve ( $p$  je prvočíslo a nedělí  $10^n - 1$ ) obdržíme dělitelnost  $x + y + z$  číslem  $10^n - 1$ :

$$\begin{aligned} x + y + z &= 10^{2n}x + 10^ny + z - (10^n - 1)(10^n + 1)x - (10^n - 1)y \equiv \\ &\equiv 10^{2n}x + 10^ny + z \equiv 0 \pmod{10^n - 1}. \end{aligned} \quad (8)$$

Díky (6) a (8) je součet  $x + y + z$  roven buď  $10^n - 1$ , nebo  $2(10^n - 1)$ . Pro důkaz Ginsbergovy věty tedy stačí ukázat  $x + y + z \equiv -1 \equiv 9 \pmod{10}$ .

Označme  $r_x$ ,  $r_y$ ,  $r_z$  postupně zbytky při výpočtu prvních  $n$ ,  $2n$ ,  $3n$  cifer čísla  $1/p$ , tedy zbytky při dělení  $10^n/p$ ,  $10^{2n}/p$ ,  $10^{3n}/p$ . Potom

$$\frac{10^n - r_x}{p} = x, \quad \frac{10^{2n} - r_y}{p} = 10^n x + y, \quad \frac{10^{3n} - r_z}{p} = 10^{2n}x + 10^ny + z. \quad (9)$$

Z (9) odvodíme následující dvě pozorování:

1. Vynásobením rovnic číslem  $p$  a kongruencí mod 10 máme

$$px \equiv -r_x \pmod{10}, \quad py \equiv -r_y \pmod{10}, \quad pz \equiv -r_z \pmod{10}.$$

Sečtením těchto kongruencí získáme výsledek

$$p(x + y + z) \equiv -(r_x + r_y + r_z) \pmod{10}. \quad (10)$$

2. Přímou z (9) plyne

$$r_x \equiv 10^n \pmod{p}, \quad r_y \equiv 10^{2n} \pmod{p}, \quad r_z \equiv 10^{3n} \pmod{p}.$$

Dle (7)  $p$  dělí číslo  $10^{2n} + 10^n + 1$ , proto musí dělit i  $10^{3n} + 10^{2n} + 10^n$ . Sečtením předchozích kongruencí proto dostaneme

$$r_x + r_y + r_z \equiv 10^n + 10^{2n} + 10^{3n} \equiv 0 \pmod{p}.$$

Současně víme, že  $r_z$  je posledním zbytkem při dělení před zopakováním periody, tedy  $r_z = 1$  (viz (7) a (9)). Protože  $r_x \leq p - 1$  a  $r_y \leq p - 1$ , máme  $0 < r_x + r_y + r_z < 2p$  a díky kongruenci výše pak

$$r_x + r_y + r_z = p. \quad (11)$$

Zbytek důkazu je jednoduchý – stačí dosadit rovnost (11) do kongruence (10), a jelikož  $p$  je nesoudělné s 10, můžeme jím obě strany vydělit. Získali jsme kýžený výsledek

$$x + y + z \equiv -1 \equiv 9 \pmod{10}.$$

Skutečně tedy  $x + y + z = 10^n - 1$ , což je opět číslo tvořené samými devítkami.

#### Literatura

- [1] Martin, H. W.: Generalizations of Midy's theorem on repeating decimals. *Electronic Journal of Combinatorial Number Theory*, roč. 7 (2007), č. 1, s. 1–7, <https://eudml.org/doc/127779>.
- [2] Křížek, M., Somer, L., Šolcová, A.: *Kouzlo čísel: Od velkých objevů k aplikacím*. Academia, Praha, 2009.

## Sudoku pohledem matematiky: Odmocnina z jedné a soustava rovnic

Jan Jekl, Univerzita obrany, Brno

**Abstrakt.** Sudoku se nadále těší popularitě, a proto může sloužit jako motivační zdroj k podnícení zájmu studentů o matematiku. V tomto článku ukazujeme způsob, jak lze sudoku ztotožnit s úlohou hledání řešení jistého systému lineárních a nelineárních rovnic.

V této práci se věnujeme sudoku, kterému se již také věnovala řada jiných autorů, zmiňme například [2, 4, 5, 6, 7, 8].

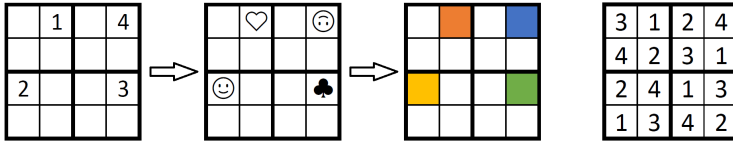
Sudoku přitom fascinuje vědeckou komunitu již nějakou dobu (viz první výskyt slova sudoku v databázi Scopus z roku 2005, přičemž jediný starší výskyt odkazuje na autora jménem Sudoku). I v matematice byla řada výsledků v minulosti motivována hrami. Zmiňme například Hanojské věže, Patnáctku, Tetris, Rubikovu kostku a další [1]. Zmiňme také, že řada dalších výsledků byla motivována hrami, kde vzájemně soupeří dva a více hráčů proti sobě. Mezi příklady zde patří Dáma, Hex nebo Hra oware [1]. Tento fakt se také projevil v názvu matematického odvětví, které studuje konfliktní situace: *Teorie her*.

Cílem naší práce je zkoumat sudoku jako systém rovnic. Pro usnadnění pochopení budeme celou situaci rozebírat na  $4 \times 4$  variantě sudoku, která se nazývá shidoku (z japonského shi, což znamená 4). Všechny zde uvedené informace lze s trochou práce rozšířit na obvyklé zadání  $9 \times 9$  sudoku.

Pro úplnost připomeňme, že shidoku je předvyplněná  $4 \times 4$  tabulka, do níž doplňujeme čísla 1 až 4. V tabulce se nachází 4 disjunktní  $2 \times 2$  sekce a naším úkolem je do každého řádku, sloupce i do každé sekce doplnit každé ze čtyř čísel právě jednou. Systém rovnic získáme, když si uvědomíme, že do tabulky nemusíme doplňovat jenom čísla, ale stejně dobře by nám posloužily 4 rozdílné symboly. Navíc bychom nemuseli doplňovat pouze symboly. Úplně by stačilo do tabulky doplňovat barvy, nebo třeba zvuky, viz obr. 1.

Uveďme ještě několik informací ohledně použitého značení. Každá tabulka se skládá z buněk, které budeme značit obvyklým maticovým značením. Pod pojmem buňka  $(k, l)$  tedy budeme myslet buňku v  $k$ -tém

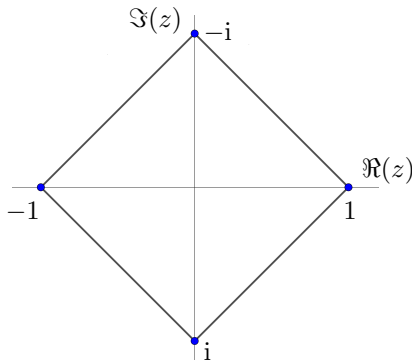
řádku a  $l$ -tém sloupci, počítáno z levého horního okraje dolů ( $k$ ), resp. doprava ( $l$ ).



Obr. 1: Shidoku, které je zadáno pomocí čísel, symbolů i barev – vpravo se nachází řešení tohoto shidoku

### Hlavolam shidoku a čtvrtá odmocnina z jedné

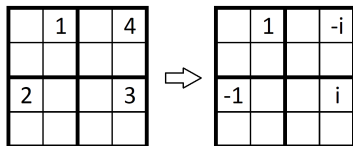
V této části se pokusíme do shidoku namísto čísel 1, 2, 3 a 4 doplňovat vhodná komplexní čísla (tato varianta byla prozkoumaná také v [3]). Obeznamovaný čtenář jistě ví, že imaginární jednotku  $i$  definujeme jako řešení rovnice  $x^2 = -1$ , a také ví, že v oboru reálných čísel tato rovnice nemá řešení. Podobně můžeme uvážit rovnici  $x^4 = 1$ , která má v oboru reálných čísel pouze dvě řešení, a to  $x_1 = 1, x_2 = -1$ . Přímo z definice imaginární jednotky však vyplývá, že v oboru komplexních čísel má rovnice  $x^4 = 1$  navíc ještě řešení  $x_3 = i, x_4 = -i$ . Protože se jedná o řešení rovnice  $x^4 = 1$ , tak těmto řešením říkáme 4. odmocniny z jedné. Pokud řešení vykreslíme v komplexní rovině, pak řešení leží ve vrcholech čtverce, jak je zobrazeno na obr. 2. Pro zajímavost ještě uvedme, že řešení rovnice  $x^n = 1$  určují vrcholy pravidelného  $n$ -úhelníku.



Obr. 2: Řešení rovnice  $x^4 = 1$  vyobrazené v komplexní rovině; všechna řešení leží ve vrcholech čtverce



Když nyní víme, jak vypadají čtvrté odmocniny z jedné, tak je můžeme doplnit do hlavolamu shidoku například tak, že číslo  $k$  nahradíme  $x_k$ . Takové nahrazení vidíme např. na obr. 3.



Obr. 3: Zadání hlavolamu shidoku, kde každou hodnotu  $k$  nahradíme 4. odmocninou z jedné  $x_k$

Nyní specifikujeme systém rovnic, jehož řešení bude korespondovat s řešením shidoku. Začneme tak, že každé z 16 buněk shidoku přiřadíme jednu proměnnou  $y_k$ ,  $k \in \{1, \dots, 16\}$ . Toto propojení můžeme například provést tak, že buňce  $(k, l)$  přiřadíme proměnnou  $y_{k+4(l-1)}$ . Přiřazení proměnných buňkám je znázorněno níže.

$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$
$y_5$	$y_6$	$y_7$	$y_8$
$y_9$	$y_{10}$	$y_{11}$	$y_{12}$
$y_{13}$	$y_{14}$	$y_{15}$	$y_{16}$

Pro zadané počáteční nápovědy hlavolamu máme hodnoty některých proměnných předem zadané. V hlavolamu na obr. 3 tak víme, že platí  $y_2 = 1$ ,  $y_4 = -i$ ,  $y_9 = -1$ ,  $y_{12} = i$ . Neznámé hodnoty ostatních proměnných  $y_k$  pak reprezentují chybějící hodnoty v hlavolamu. Abychom zaručili, že proměnné  $y_k$  budou skutečně čtvrté odmocniny z jedné, tak specifikujeme, že každá proměnná  $y_k$  musí řešit rovnici  $y_k^4 = 1$ .

Navíc si uvědomme, že některé proměnné nemohou mít stejnou hodnotu. Například proměnné  $y_1$  a  $y_4$  reprezentují buňky ve stejném řádku, a tedy musí platit, že  $y_1 \neq y_4$ . O takových dvojicích řekneme, že jsou v přímém vztahu. Můžeme si rozmyslet, že každá proměnná je v přímém vztahu se sedmi dalšími proměnnými. Toto platí proto, že každá buňka je ovlivněna sedmi jinými buňkami, jak můžeme vidět na obr. 4. Celkem máme 16 proměnných, které jsou ve vztahu vždy se sedmi buňkami. Protože nerozlišujeme situace, kde je proměnná  $y_k$  v přímém vztahu s proměnnou  $y_l$  a kde je  $y_l$  ve vztahu s  $y_k$ , tak máme dohromady  $\frac{16 \cdot 7}{2} = 56$  dvojic proměnných v přímém vztahu.

O	O		
O	X	O	O
	O		
	O		

Obr. 4: Buňka označená písmenem X je ve vztahu se sedmi buňkami označenými písmenem O

Uvažujme nyní libovolnou dvojici  $y_k, y_l$  proměnných v přímém vztahu. Nerovnost  $y_k \neq y_l$  převedeme na rovnici, jejíž řešení tuto podmínku musí splňovat. Protože 4. odmocniny z jedné splňují, že  $y_k^4 = 1 = y_l^4$ , pak také musí splňovat rovnici  $y_k^4 - y_l^4 = 0$ . Tento vztah nyní splňují i proměnné, pro něž platí  $y_k = y_l$ , tj. kde  $y_k - y_l = 0$ . Abychom vyloučili tuto možnost, můžeme tímto výrazem dělit a máme

$$0 = \frac{y_k^4 - y_l^4}{y_k - y_l} = (y_k + y_l)(y_k^2 + y_l^2).$$

Vezmeme-li tedy pro libovolnou dvojici proměnných  $y_k, y_l$  v přímém vztahu rovnici

$$(y_k + y_l)(y_k^2 + y_l^2) = 0, \tag{1}$$

pak tyto rovnice zaručí, že proměnné  $y_k$  budou splňovat všechny požadavky na řešení shidoku.

Zaměříme se opět na hlavolam shidoku, který jsme studovali na obr. 3. Jemu odpovídající systém rovnic by vypadal následujícím způsobem:

$$\begin{aligned} y_1^4 = 1 \quad y_2 = 1 \quad y_3^4 = 1 \quad y_4 = -i \quad y_5^4 = 1 \quad y_6^4 = 1 \quad y_7^4 = 1 \quad y_8^4 = 1 \\ y_9 = -1 \quad y_{10}^4 = 1 \quad y_{11}^4 = 1 \quad y_{12} = i \quad y_{13}^4 = 1 \quad y_{14}^4 = 1 \quad y_{15}^4 = 1 \quad y_{16}^4 = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (y_1 + y_2)(y_1^2 + y_2^2) = 0 \quad (y_7 + y_5)(y_7^2 + y_5^2) = 0 \quad (y_{10} + y_9)(y_{10}^2 + y_9^2) = 0 \\ (y_1 + y_3)(y_1^2 + y_3^2) = 0 \quad (y_7 + y_6)(y_7^2 + y_6^2) = 0 \quad (y_{10} + y_{11})(y_{10}^2 + y_{11}^2) = 0 \\ (y_1 + y_4)(y_1^2 + y_4^2) = 0 \quad (y_7 + y_8)(y_7^2 + y_8^2) = 0 \quad (y_{10} + y_{12})(y_{10}^2 + y_{12}^2) = 0 \\ (y_1 + y_5)(y_1^2 + y_5^2) = 0 \quad (y_7 + y_3)(y_7^2 + y_3^2) = 0 \quad (y_{10} + y_2)(y_{10}^2 + y_2^2) = 0 \\ (y_1 + y_9)(y_1^2 + y_9^2) = 0 \quad (y_7 + y_{11})(y_7^2 + y_{11}^2) = 0 \quad (y_{10} + y_6)(y_{10}^2 + y_6^2) = 0 \\ (y_1 + y_{13})(y_1^2 + y_{13}^2) = 0 \quad (y_7 + y_{15})(y_7^2 + y_{15}^2) = 0 \quad (y_{10} + y_{14})(y_{10}^2 + y_{14}^2) = 0 \\ (y_1 + y_6)(y_1^2 + y_6^2) = 0 \quad (y_7 + y_4)(y_7^2 + y_4^2) = 0 \quad (y_{10} + y_{13})(y_{10}^2 + y_{13}^2) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (y_{16} + y_{13})(y_{16}^2 + y_{13}^2) &= 0 & (y_4 + y_2)(y_4^2 + y_2^2) &= 0 & (y_{11} + y_9)(y_{11}^2 + y_9^2) &= 0 \\
 (y_{16} + y_{14})(y_{16}^2 + y_{14}^2) &= 0 & (y_4 + y_3)(y_4^2 + y_3^2) &= 0 & (y_{11} + y_{12})(y_{11}^2 + y_{12}^2) &= 0 \\
 (y_{16} + y_{15})(y_{16}^2 + y_{15}^2) &= 0 & (y_4 + y_8)(y_4^2 + y_8^2) &= 0 & (y_{11} + y_3)(y_{11}^2 + y_3^2) &= 0 \\
 (y_{16} + y_4)(y_{16}^2 + y_4^2) &= 0 & (y_4 + y_{12})(y_4^2 + y_{12}^2) &= 0 & (y_{11} + y_{15})(y_{11}^2 + y_{15}^2) &= 0 \\
 (y_{16} + y_8)(y_{16}^2 + y_8^2) &= 0 & (y_6 + y_5)(y_6^2 + y_5^2) &= 0 & (y_{13} + y_{14})(y_{13}^2 + y_{14}^2) &= 0 \\
 (y_{16} + y_{12})(y_{16}^2 + y_{12}^2) &= 0 & (y_6 + y_8)(y_6^2 + y_8^2) &= 0 & (y_{13} + y_{15})(y_{13}^2 + y_{15}^2) &= 0 \\
 (y_{16} + y_{11})(y_{16}^2 + y_{11}^2) &= 0 & (y_6 + y_2)(y_6^2 + y_2^2) &= 0 & (y_{13} + y_5)(y_{13}^2 + y_5^2) &= 0 \\
 (y_6 + y_{14})(y_6^2 + y_{14}^2) &= 0 & (y_{13} + y_9)(y_{13}^2 + y_9^2) &= 0 & & 
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (y_2 + y_3)(y_2^2 + y_3^2) &= 0 & (y_8 + y_5)(y_8^2 + y_5^2) &= 0 & (y_9 + y_{14})(y_9^2 + y_{14}^2) &= 0 \\
 (y_2 + y_5)(y_2^2 + y_5^2) &= 0 & (y_8 + y_{12})(y_8^2 + y_{12}^2) &= 0 & (y_{15} + y_3)(y_{15}^2 + y_3^2) &= 0 \\
 (y_2 + y_{14})(y_2^2 + y_{14}^2) &= 0 & (y_9 + y_5)(y_9^2 + y_5^2) &= 0 & (y_{15} + y_{12})(y_{15}^2 + y_{12}^2) &= 0 \\
 (y_8 + y_3)(y_8^2 + y_3^2) &= 0 & (y_9 + y_{12})(y_9^2 + y_{12}^2) &= 0 & (y_{15} + y_{14})(y_{15}^2 + y_{14}^2) &= 0
 \end{aligned}$$

Tato soustava je poměrně složitá a nalezení jejího řešení přímým výpočtem by jistě nebylo jednoduché. Nicméně vzpomeňme si, že soustava byla vytvořena tak, aby korespondovala s shidoku, které je zobrazeno na obr. 3. Soustavu nyní snadno vyřešíme nalezením řešení samotného shidoku. Toto řešení je

$y_1 = i$	$y_2 = 1$	$y_3 = -1$	$y_4 = -i$
$y_5 = -i$	$y_6 = -1$	$y_7 = i$	$y_8 = 1$
$y_9 = -1$	$y_{10} = -i$	$y_{11} = 1$	$y_{12} = i$
$y_{13} = 1$	$y_{14} = i$	$y_{15} = -i$	$y_{16} = -1$

Čtenář si nyní může vyzkoušet, jak by vypadala rovnice (1) pro klasické sudoku  $9 \times 9$  nebo jeho jiné varianty  $6 \times 6$ ,  $16 \times 16$  apod. Čtenář může také určit, kolik rovnic by obsahoval systém pro tyto varianty.

### Závěr

Úkolem tohoto textu bylo ukázat, jak lze sudoku spojit s řešením soustavy rovnic. Domníváme se, že hlavolam sudoku je dostatečně známý, aby následně mohl sloužit jako motivace pro studenty v rámci probírané látky. Avšak zdá se nám, že je tento problém dostatečně zajímavý sám

o sobě, aby sloužil výzkumníkům k dalšímu bádání. Z historie je známo, že řada teoretických poznatků byla motivována hrami a hlavolamy [1].

Řada chybných pokusů o nalezení minimálního ireducibilního sudoku (viz [9, 10]) dle nás ilustruje, že se o téma sudoku v minulosti zajímala také širší veřejnost. Z posledního dotazníkového šetření firmy YouGov vyplývá, že se sudoku líbí 46 % dotázaných [11].

## Poděkování

Tento příspěvek vznikl s podporou projektu DZRO Vojenské autonomní a robotické systémy.

## Literatura

- [1] Pickover, C. A.: *Matematická kniha*. Dokořán, Praha, 2012.
- [2] Rosenhouse, J., Taalman, L.: *Taking sudoku seriously: The Math Behind the World's Most Popular Pencil Puzzle*. Oxford University Press, Oxford, 2011.
- [3] Arnold, E., Lucas, S., Taalman, L.: Gröbner basis representations of sudoku. *College Mathematics Journal*, roč. 41 (2010), č. 2, s. 101–112.
- [4] Delahaye, J. P.: The science behind sudoku. *Scientific American*, roč. 294 (2006), č. 6, s. 81–87.
- [5] Felgenhauer, B., Jarvis, F.: Mathematics of sudoku I. *Mathematical Spectrum*, roč. 39 (2006), č. 1, s. 15–22, <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:122734246>.
- [6] Russel, E., Jarvis, F.: Mathematics of sudoku II. *Mathematical Spectrum*, roč. 39 (2006), č. 2, s. 54–58.
- [7] McGuire, G., Tugemann, B., Civario, G.: There is no 16-clue sudoku: solving the sudoku minimum number of clues problem via hitting set enumeration. *Experimental Mathematics*, roč. 23 (2014), č. 2, s. 190–217, <https://doi.org/10.1080/10586458.2013.870056>.
- [8] Katrnoška, F., Křížek, M., Somer, L.: Magické čtverce a sudoku. *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*, roč. 53 (2008), č. 2, s. 113–124.
- [9] Papke, A.: Mindestens 17 müssen es sein: Untersuchungen zur eindeutigen Lösbarkeit von sudokus. *Junge Wissenschaft*, roč. 84 (2009), s. 1–8.
- [10] Néstor, R. A.: Proof that no 16-clue sudoku puzzle exists. November (2010), <https://nestorgames.com/docs/16s/16s.html>.
- [11] *Sudoku*. <https://today.yougov.com/topics/society/explore/activity/Sudoku>. [cit. 12.6.2023].

## Sudoku

Martina Škorpilová, MFF UK, Praha

Řešte následující Sudoku, znáte-li hodnoty pouze v pěti políčkách a hodnoty v některých dalších políčkách je nutné určit jako výsledky níže uvedených příkladů (hodnota v políčku označeném písmenem  $a$  je rovna výsledku příkladu  $a$  atd.).

	a		b		c			d	e
			f		9				
				g		h	ch		
		i		j			k		l
				m		n			8
	o	p				q		r	
			9	s		t			
					u		v	4	
2		w			x		y		z

- a) Určete celočíselný kořen  $x$  rovnice

$$8^{2x^2-11x+5} = 1.$$

- b) Určete poloměr kružnice, která je určena rovnicí

$$x^2 - 4x + y^2 + 2y + 4 = 0.$$

c) Určete

$$\frac{2\sqrt{3}}{5} \cdot (\sin 60^\circ + \operatorname{tg} 30^\circ) - \cos 180^\circ.$$

d) Určete, pro které přirozené číslo  $n$  platí: vnitřní úhel pravidelného  $n$ -úhelníku má velikost  $140^\circ$ .

e) Určete, kolik přirozených trojčiferných čísel dělitelných pěti lze sestavit z číslic 1, 3, 4, 5, jestliže se číslice v zápisu jednotlivých čísel neopakují.

f) Určete celočíselný kořen  $x$  rovnice

$$2 \cdot \log_7 x + \frac{3}{\log_7 x} = 5.$$

g) Určete excentricitu hyperboly, která je určena rovnicí

$$\frac{(x-1)^2}{16} - \frac{(y+4)^2}{9} = 1.$$

h) Určete reálnou část čísla

$$\frac{-2 + 2i}{2i}.$$

ch) Určete kořen  $x$  rovnice

$$3^{2x} - 4 \cdot 3^x = 45.$$

i) Nechť je dána krychle. Délku její hrany označme  $h$  a délku její tělesové úhlopříčky označme  $u$ . Určete

$$\frac{7u^4}{9h^4}.$$

j) Z čísel  $3!$ ;  $10^7$ ;  $5$ ;  $\frac{121}{30}$ ;  $2$ ;  $-\sqrt{36}$  vyberte takové, které patří do oboru hodnot funkce

$$f(x) = 4 \cdot \sin x.$$

## MATEMATIKA

- k) Bod  $C$  je středem úsečky  $AB$ , kde  $A [5; ?]$ ,  $B [9; ?]$ . Určete  $y$ -ovou souřadnici bodu  $C$ , je-li parametrické vyjádření přímky  $AB$  následující:

$$\begin{aligned}x &= 1 + 2t, \\y &= 3 + t, \quad t \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

- l) Vypočítejte

$$\log_5 25 - (\log_4 2 + \log_4 32) + \log_3 45 - \log_3 5 - 2 \cdot \log_2 \frac{1}{2}.$$

- m) Určete funkční hodnotu funkce  $f$  v bodě 4, je-li

$$f(x) = 2 \cdot \frac{(x^2)^3 \cdot (x^2 - 1) \cdot \sqrt[4]{x^{20}}}{(x + 1) \cdot x^{11}}.$$

- n) Určete nezáporný kořen  $x$  rovnice

$$x^2 + 4x - 21 = 0.$$

- o) Určete kořen  $x$  rovnice

$$\frac{1}{10^5} \cdot 5^{2x} \cdot 2^{2x} = 10^{\frac{x}{3}}.$$

- p) Vypočítejte

$$3 \cdot [(\cos x - \sin x)^2 + (\cos x + \sin x)^2].$$

- q) Určete kořen  $x$  rovnice

$$7^{4-x} = 7^{x-10}.$$

- r) Určete kořen  $x$  rovnice

$$-\frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 8x + 12} = 1.$$

- s) Určete  $x$ -ovou souřadnici průsečíku grafu funkce  $f$  a osy  $x$  souřadnicového systému, je-li

$$f(x) = \left| |x - 1| - 2 \right|.$$

Existuje-li takových průsečíků více, vyberte z nich takový, jehož  $x$ -ová souřadnice je největší.

- t) Určete  $x$ -ovou souřadnici vrcholu paraboly, která je určena rovnicí

$$y = 6x^2 - 24x + 25.$$

- u) Určete přirozené číslo  $n$ , pro které platí

$$\binom{n}{3} = \binom{n}{4}.$$

- v) Určete kladný kořen  $x$  rovnice

$$|x + 3| + |x - 2| = 7.$$

- w) Určete

$$\left| (-i - 1)^4 \right|.$$

- x) Určete

$$6 \cdot (\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ)^8.$$

- y) Určete součet všech kořenů rovnice s neznámou  $x$ :

$$|x - 4| = 3.$$

- z) Určete

$$9 \cdot \log_9 81^{0,5}.$$

Řešení tohoto Sudoku naleznete na str. 43

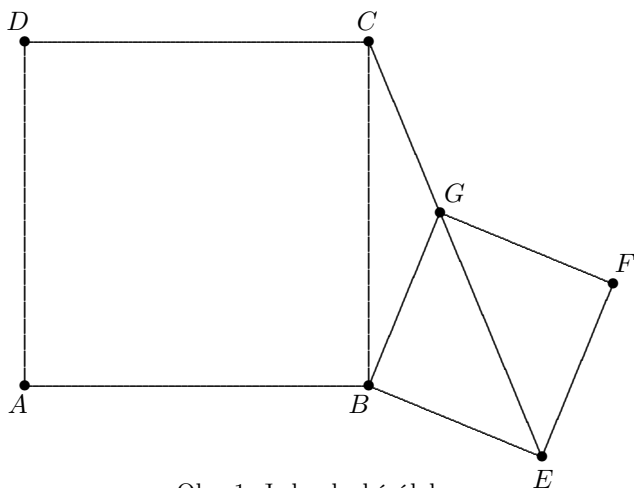


## Dva čtverce či obdélníky v obecném trojúhelníku

*Vlastimil Dlab, Bzí u Železného Brodu*

Inspirace k napsání článku může přicházet z nejrůznějších zdrojů. Často je to malá poznámka, která se objevila v tisku. Tak je tomu zvláště tehdy, když taková poznámka nevyčerpává všechny možnosti, které by čtenáři přinesly hlubší porozumění danému problému. Zdá se mi též záslužné poukázat na to, jak se vyhnout překotnému užívání nabílovaných vzorečků či zbytečnému (a často zatemňujícímu) užívání pojmů, jako jsou např. trigonometrické funkce v případech, kdy v daném řešení nehrají žádnou úlohu a nepomáhají porozumění (viz např. [2]). Důležitou roli v tomto procesu hraje *rozbor úlohy*. Ten odhalí podstatu úlohy a naznačí často cestu k jednoduššímu řešení mnohdy i obecnější úlohy. Jeden z významných matematiků své doby James Joseph Sylvester (1814–1897) poukázal na to, že obecné úlohy jsou často jednodušší než jejich konkrétní případy. Mohu jenom dodat, že mé zkušenosti jsou obdobné.

Následující jednoduchá úloha ilustruje popsanou situaci zcela věrně. Obr. 1 zobrazuje dva čtverce  $\mathbb{C}_1 = ABCD$  a  $\mathbb{C}_2 = BEFG$ , které mají společný vrchol  $B$  a jsou položeny tak, že vrchol  $C$  leží na prodloužené úhlopříčce  $EG$ . Je-li  $|GC| = 7$  a  $|EG| = 10$ , určete obsah čtverce  $\mathbb{C}_1$ .



Obr. 1: Jednoduchá úloha

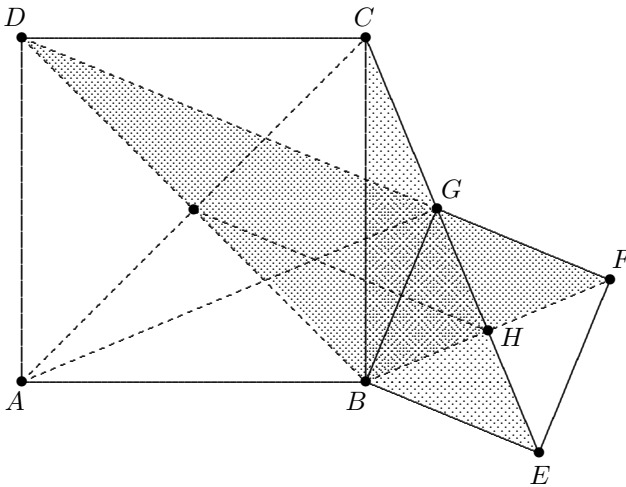
Určit obsah čtverce  $\mathbb{C}_1$  znamená určit čtverec strany  $|BC|$ . Jaký přístup k řešení, patrně bez velkého rozmyšlení, současného studenta/studentku gymnázia napadne? Najdeme to popsáno v článku [3]. Zřejmě se soustředí na trojúhelník  $BGC$ , neboť vidí, že

$$|\sphericalangle BGC| = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ, \quad |BG| = 5\sqrt{2}, \quad |GC| = 7.$$

Užitím *kosinové věty* tedy ihned určí, že

$$\text{obsah}(\mathbb{C}_1) = |BC|^2 = 50 + 49 - 2 \cdot 5\sqrt{2} \cdot 7 \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 169.$$

Naskytá se ovšem bezprostřední otázka, zda je nutné použít poměrně náročného vzorce, který vyžaduje pojem goniometrické funkce? Článek [3] považuje takový postup za přirozený a postačující.



Obr. 2: Řešení úlohy (reference: <https://www.geogebra.org/m/zrazju2q>)

Zamyslíme-li se totiž nad úlohou pozorněji a označíme-li průsečík úhlopříček čtverce  $\mathbb{C}_2$  písmenem  $H$ , vidíme ihned, že trojúhelník  $BHC$  je pravoúhlý (viz obr. 2) a Pythagorova věta nám dává odpověď

$$|BC|^2 = 5^2 + 12^2 = 169, \text{ a tedy } |BC| = 13.$$

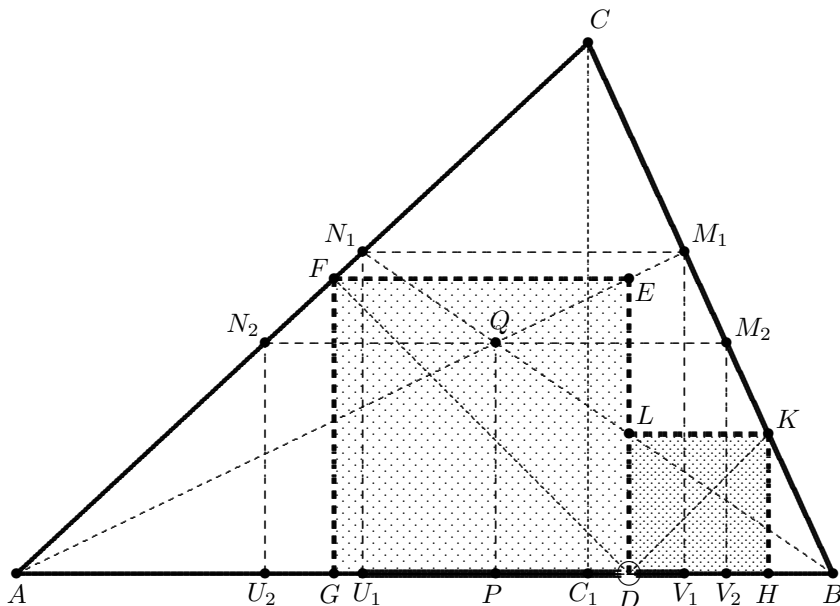
Tento postup nám též usnadní zodpovědět zcela přirozenou otázku, proč jsou zadány pro úsečky  $|GC|$  a  $|EG|$  délky 7 a 10? Vidíme totiž

ihned, že tyto hodnoty mohou být zcela libovolná nezáporná reálná čísla  $x$  a  $y$ . Označíme-li stranu čtverce  $\mathbb{C}_1$  písmenem  $a$ , dostáváme

$$a^2 = \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = x^2 + xy + \frac{y^2}{2}.$$

Navíc vidíme, že velikosti úhlů splňují rovnosti  $|\sphericalangle DBF| = |\sphericalangle CBE|$  a  $|\sphericalangle BFD| = |\sphericalangle BEC|$ , a tedy  $|\sphericalangle GDB| = |\sphericalangle ECB|$ , tj. trojúhelníky  $BFD$  a  $BEC$  jsou podobné. Body  $F, G$  a  $D$  tedy leží na přímce. Laskavý čtenář jistě dokáže doplnit další trojúhelníky z obr. 2, které jsou podobné  $\triangle BFD$ .

Vraťme se nyní k hlavnímu tématu tohoto článku, který je naznačen v jeho titulu a inspirován příspěvkem [1]. Úlohou je popsat situaci znázorněnou na obr. 3.



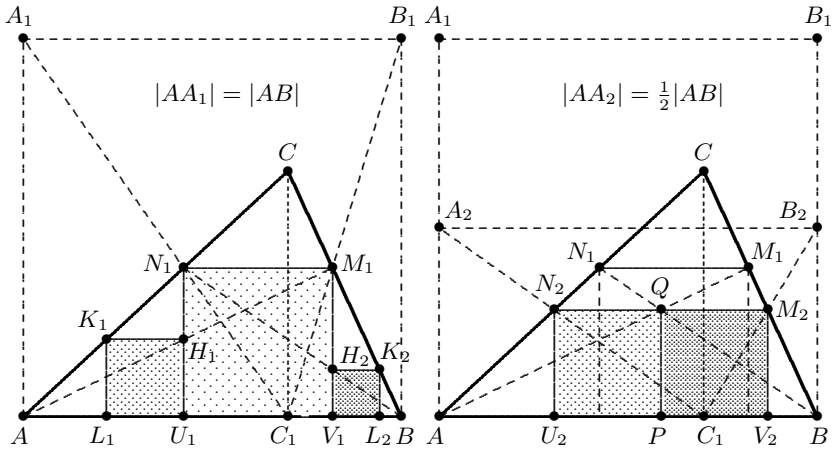
Obr. 3: Dva čtverce umístěné v trojúhelníku

Zde jsou v daném (libovolném) trojúhelníku  $ABC$  umístěny dva čtverce  $DEFG$  a  $DHKL$ . Připomeňme, že čtvercem umístěným v trojúhelníku  $ABC$  rozumíme čtverec, jehož jedna strana leží na jedné ze stran

trojúhelníka (a tou bude převážně strana  $AB$ ) a alespoň jeden z dvou zbylých vrcholů leží na další straně trojúhelníku.

Poloha dvojice čtverců je určena volbou bodu  $D$ . Vrcholy  $F$  a  $K$  (a tím strany trojúhelníků) jsou potom průsečíky stran trojúhelníku  $ABC$  a úseček (úhlopříček)  $DF$  a  $DK$  svírajících se stranou  $AB$  úhel  $45^\circ$ . Extrémní případy nastávají, když čtverec  $DEFG$  nebo čtverec  $DHKL$  zaujme pozici vepsaného čtverce  $U_1V_1M_1N_1$  (viz obr. 4 naznačující též příslušnou konstrukci). Vrcholy  $U_1$  a  $V_1$  určují úsečku, která je definujícím oborem pro volbu bodu  $D$ .

Zvláštním případem je též situace, kdy vepsané čtverce jsou shodné (viz obr. 5 opět naznačující příslušnou konstrukci).



Obr. 4

Obr. 5

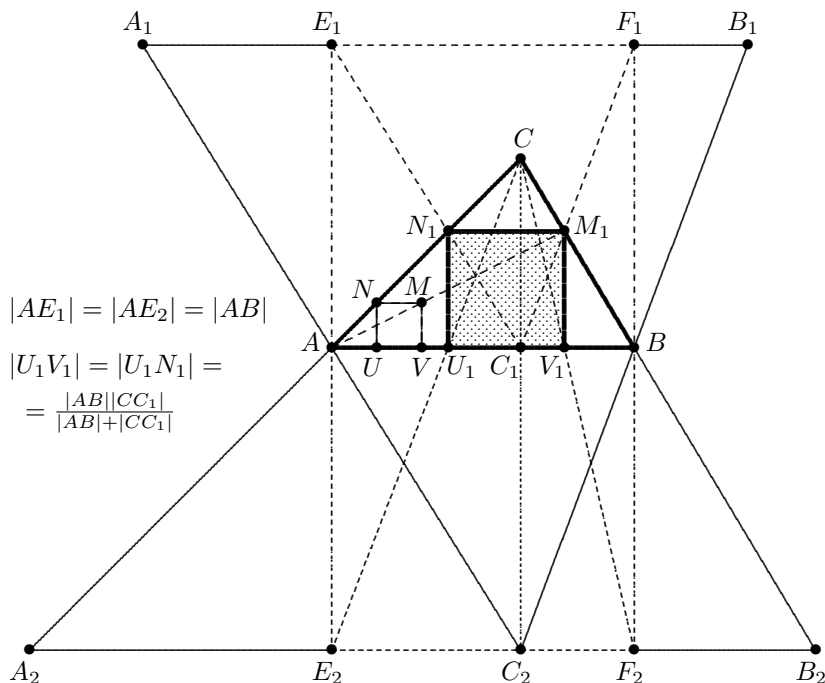
Čtverec  $U_1V_1M_1N_1$  vepsaný do trojúhelníku  $ABC$  si zaslouží zvláštní pozornost. Tři konstrukce tohoto čtverce ilustruje obr. 6. První, využitím pomocného čtverce  $UVMN$  a podobnosti trojúhelníků  $AVM$  a  $AV_1M_1$ , je zcela zřejmá. Nejvhodnější je konstrukce využívající podobnosti trojúhelníků  $CE_2F_2$  a  $CU_1V_1$ . Odtud dostáváme vyjádření

$$|U_1V_1| = |U_1N_1| = \frac{|AB||CC_1|}{|AB| + |CC_1|} \tag{1}$$

a záhy, využitím podobnosti trojúhelníků  $AU_1N_1$  a  $AC_1C$ ,

$$|AU_1| = \frac{|AB||AC_1|}{|AB| + |CC_1|}. \tag{2}$$

Třetí konstrukci naznačenou na obr. 6, využívající podobnosti trojúhelníků  $E_1F_1C_1$  a  $A_1B_1C_2$ , ponecháváme za úlohu popsat čtenáři.



$$|AE_1| = |AE_2| = |AB|$$

$$|U_1V_1| = |U_1N_1| =$$

$$= \frac{|AB||CC_1|}{|AB|+|CC_1|}$$

Obr. 6: Tři konstrukce čtverce  $U_1V_1M_1N_1$

Označme  $|AB| = c$ ,  $|CC_1| = h$ ,  $|AC_1| = c_1$ ,  $|BC_1| = c_2$  a  $|AD| = d$ . Aplikací vzorce (1) na pravoúhlý trojúhelník  $AU_1N_1$  (obr. 4) dostáváme

$$|K_1L_1| = |L_1U_1| = \frac{cc_1h}{(c+h)(c_1+h)}.$$

Stejným způsobem odvodíme, že

$$|K_2L_2| = |L_2V_1| = \frac{cc_2h}{(c+h)(c_2+h)}.$$

Vraťme se nyní k obr. 3. Zde strana  $GD$  čtverce  $DEFG$  splňuje

$$|GD| = s_1 = \frac{dh}{c_1+h}$$

a strana  $DH$  čtverce  $DHKL$

$$|DH| = s_2 = \frac{(c-d)h}{c_2+h}.$$

První vztah plyne z podobnosti trojúhelníků  $AGF$  a  $AC_1C$ , druhý vztah užitím podobnosti trojúhelníků  $BKH$  a  $BCC_1$ .

Čtverce  $DEFG$  a  $DHKL$  jsou shodné pro  $s_1 = s_2$ , tj. pro  $d$  splňující

$$d(c_2+h) = (c-d)(c_1+h),$$

neboli

$$d = \frac{c(c_1+h)}{c+2h}.$$

Součet jejich obsahů, tj. obsah obdélníku  $U_2V_2M_2N_2$ , se rovná

$$2 \left( \frac{ch}{c+2h} \right)^2.$$

Součet  $\Sigma(d) = s_1^2 + s_2^2$  obsahů čtverců  $DEFG$  a  $DHKL$  je kvadratickou funkcí  $d$ , a tedy užitím Al-Chorezmího metody „doplnění na čtverec“ snadno najdeme hodnotu  $d$ , pro niž má tato funkce extrémní (zde minimální) hodnotu:

$$\begin{aligned} \Sigma(d) &= \frac{d^2h^2}{(c_1+h)^2} + \frac{(c-d)^2h^2}{(c_2+h)^2} = \\ &= w [d^2(c_2+h)^2 + c^2(c_1+h)^2 - 2cd(c_1+h)^2 + d^2(c_1+h)^2], \end{aligned}$$

kde

$$w = \frac{h^2}{(c_1+h)^2(c_2+h)^2}.$$

Definujeme

$$w_* = w [(c_1+h)^2 + (c_2+h)^2].$$

Potom

$$\begin{aligned} \Sigma(d) &= w_* \left[ d^2 - 2d \frac{c(c_1+h)^2}{(c_1+h)^2 + (c_2+h)^2} + \frac{c^2(c_1+h)^2}{(c_1+h)^2 + (c_2+h)^2} \right] = \\ &= w_* \left[ \left( d - \frac{c(c_1+h)^2}{(c_1+h)^2 + (c_2+h)^2} \right)^2 + \frac{c^2(c_1+h)^2(c_2+h)^2}{[(c_1+h)^2 + (c_2+h)^2]^2} \right]. \end{aligned}$$

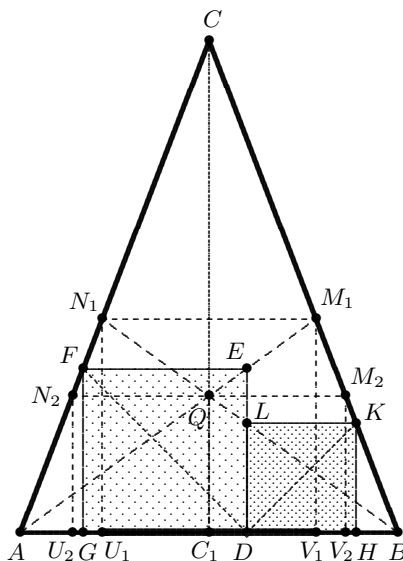
Tedy pro

$$d_* = \frac{c(c_1 + h)^2}{(c_1 + h)^2 + (c_2 + h)^2}$$

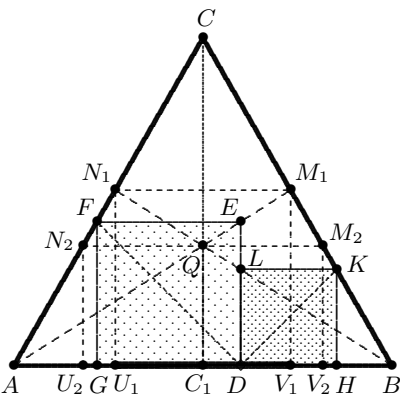
má součet obsahů čtverců minimální hodnotu

$$\Sigma_* = w_* \frac{c^2(c_1 + h)^2(c_2 + h)^2}{[(c_1 + h)^2 + (c_2 + h)^2]^2} = \frac{c^2 h^2}{(c_1 + h)^2 + (c_2 + h)^2}.$$

Čtenáři doporučujeme užít tuto metodu k výpočtu minimální hodnoty součtu obsahů v jednodušších případech rovnoramenného ( $c_1 = \frac{c}{2}$ ) a rovnostranného trojúhelníku ( $c_1 = \frac{c}{2}$  a  $h = \frac{c\sqrt{3}}{2}$ ); viz obr. 7 a 8.



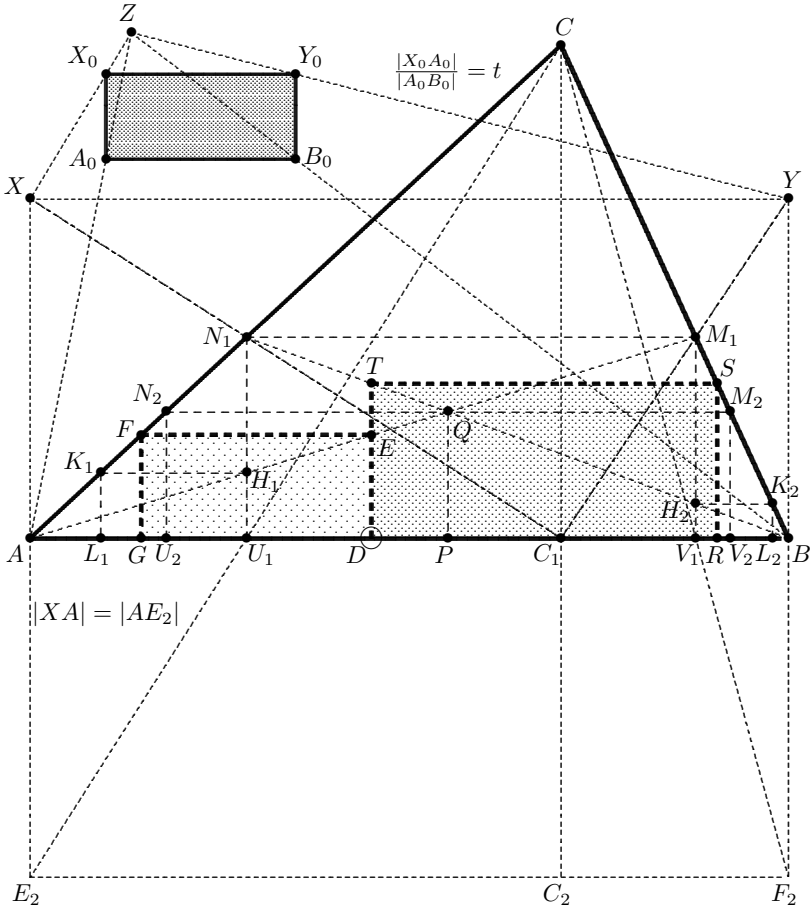
Obr. 7



Obr. 8

V závěrečné části článku nahradíme čtverce dvěma podobnými obdélníky. Poměr délek jejich stran označíme písmenem  $t$ . To je už zaznamenáno v obr. 9, který zobecňuje předchozí obrázky 3, 4, 5 a 6. Obdélníky  $ABYX$ ,  $U_1V_1M_1N_1$ ,  $PQN_2U_2$ ,  $PQM_2V_2$ ,  $U_1H_1K_1L_1$ ,  $V_1H_2K_2L_2$ ,  $AE_2F_2B$ ,  $DEFG$  a  $DRST$  jsou všechny podobné. Jsou spjaty s podobností trojúhelníků  $AE_2C$  a  $N_1U_1C$ , trojúhelníků  $E_2F_2C$  a  $U_1V_1C$ , trojúhelníků  $AL_1K_1$ ,  $AU_2N_2$ ,  $AU_1N_1$  a  $AC_1C$ , trojúhelníků  $AU_1H_1$ ,  $ADE$ ,

$APQ$  a  $AV_1M_1$ . Stejným způsobem jsou podobností spjaty trojúhelníky  $BK_2L_2$ ,  $BM_2V_2$ ,  $BSR$ ,  $BM_1V_1$  a  $BCC_1$ , a konečně též trojúhelníky  $BH_2V_1$ ,  $BQP$ ,  $BT D$  a  $BN_1U_1$ .



Obr. 9: Dva podobné obdélníky v trojúhelníku

Zmíněné podobnosti trojúhelníků využijeme k odvození následujících vzorců, kde  $m = tc + h$ ,  $m_1 = tc_1 + h$  a  $m_2 = tc_2 + h$ :

$$|U_1V_1| = \frac{ch}{m}, \quad |U_1N_1| = \frac{tch}{m}, \quad |AU_1| = \frac{tcc_1}{m}, \quad |BV_1| = \frac{tcc_2}{m}.$$



$$|L_1U_1| = \frac{tcc_1h}{mm_1}, \quad |L_1K_1| = \frac{t^2cc_1h}{mm_1}, \quad |AL_1| = \frac{t^2cc_1^2}{mm_1}.$$

$$|L_2V_1| = \frac{tcc_2h}{mm_2}, \quad |L_2K_2| = \frac{t^2cc_2h}{mm_2}, \quad |BL_2| = \frac{t^2cc_2^2}{mm_2}.$$

Abychom určili rozměry obdélníku  $U_2V_2M_2N_2$  a vzdálenosti vrcholů  $U_2$  a  $V_2$  od  $A$  a  $B$ , použijeme předchozí vzorce týkající se  $U_1V_1M_1N_1$ , nyní pro obdélník, jehož poměr stran je  $\frac{1}{2}$ . Tedy, píšeme-li  $tc + 2h = m_0$ ,

$$|U_2V_2| = \frac{2ch}{m_0}, \quad |U_2N_2| = |PQ| = \frac{tch}{m_0},$$

$$|AU_2| = \frac{tcc_1}{m_0}, \quad |BV_2| = \frac{tcc_2}{m_0}.$$

Dále

$$|AP| = \frac{cm_1}{m_0} \quad \text{a} \quad |BP| = \frac{cm_2}{m_0}.$$

Zde si uvědomíme, že k výpočtu těchto hodnot nalezneme v obr. 9 celou řadu možností. Příkladem může být podobnost trojúhelníků  $AU_1H_1$ ,  $ADE$ ,  $APQ$  a  $AV_1M_1$ , nebo  $BV_1H_2$ ,  $BPQ$ ,  $BDT$  a  $BU_1N_1$ . Takové vztahy mohou též posloužit k ověřování správnosti obdržených vzorců.

Nyní se konečně dostáváme k obecnému vnoření obdélníků  $GDEF$  a  $DRST$  daném volbou bodu  $D$ ,  $|AD| = d$ . Označme dále  $s_1 = |GD|$  a  $s_2 = |DR|$ . Tedy  $|DE| = t|GD| = ts_1$  a  $|RS| = t|DR| = ts_2$ . Podobnost trojúhelníků  $BN_1U_1$  a  $BT D$  vede k rovnosti

$$|DT| = |RS| = \frac{t(c-d)h}{m_2},$$

a tedy

$$s_2 = \frac{(c-d)h}{m_2}.$$

Podobně

$$s_1 = \frac{dh}{m_1}.$$

Navíc

$$|AG| = \frac{tc_1d}{m_1} \quad \text{a} \quad |BR| = \frac{tc_2(c-d)}{m_2}.$$

Součet obsahů obou obdélníků je funkcí vzdálenosti  $d$  (jejíž hodnota splňuje podmínku  $|AU_1| \leq d \leq |AV_1|$ )

$$\Sigma(d) = ts_1^2 + ts_2^2 = t \left( \frac{d^2 h^2}{m_1^2} + \frac{(c-d)^2 h^2}{m_2^2} \right),$$

tj.

$$\begin{aligned} \Sigma(d) &= \frac{th^2(m_1^2 + m_2^2)}{m_1^2 m_2^2} \left( d^2 - 2cd \frac{m_1^2}{m_1^2 + m_2^2} + c^2 \frac{m_1^2}{m_1^2 + m_2^2} \right) = \\ &= \frac{th^2(m_1^2 + m_2^2)}{m_1^2 m_2^2} \left[ \left( d - \frac{cm_1^2}{m_1^2 + m_2^2} \right)^2 - \frac{c^2 m_1^4}{(m_1^2 + m_2^2)^2} + \frac{c^2 m_1^2}{m_1^2 + m_2^2} \right]. \end{aligned}$$

Pro

$$d_{\min} = \frac{cm_1^2}{m_1^2 + m_2^2}$$

má tedy součet obsahů minimální hodnotu

$$\Sigma_{\min} = \frac{tc^2 h^2}{m_1^2 + m_2^2}.$$

Nyní můžeme tyto podmínky přepsat pro speciální případy rovnoramenného či rovnostranného trojúhelníku. Např. pro dva čtverce v pravoúhlém rovnoramenném trojúhelníku máme

$$d_{\min} = \frac{c}{2}$$

a

$$\Sigma_{\min} = \frac{c^2}{8}.$$

Závěrem poznamenejme, že článek poskytuje pro čtenáře celou řadu souvisejících úloh. Formulujme jednu, kterou naznačuje obr. 10.

Využitím předešlých výpočtů postupně dostáváme

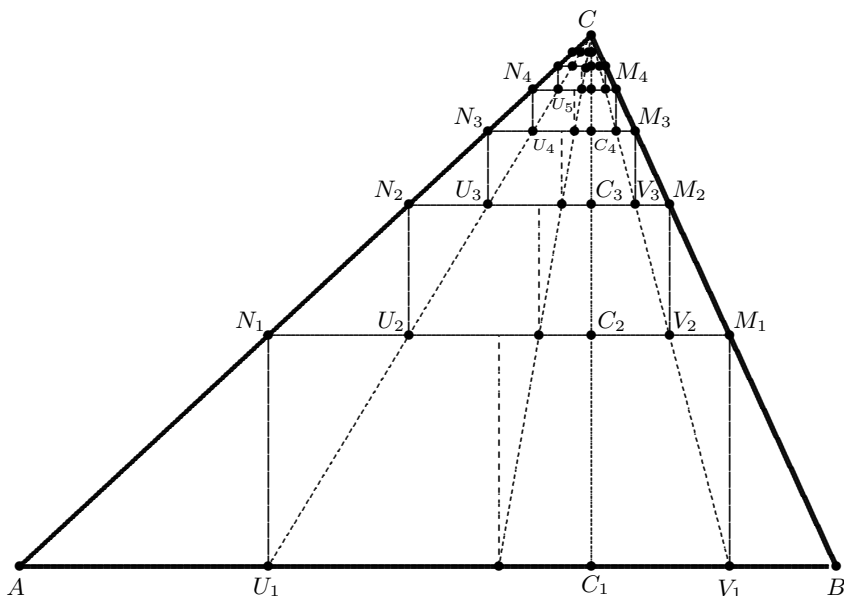
$$|U_1 N_1| = \frac{tch}{tc+h}, \quad |U_2 N_2| = \frac{tch^2}{(tc+h)^2}, \quad |U_3 N_3| = \frac{tch^3}{(tc+h)^3}, \dots$$

$$|U_1 V_1| = \frac{ch}{tc+h}, \quad |U_2 V_2| = \frac{ch^2}{(tc+h)^2}, \quad |U_3 V_3| = \frac{ch^3}{(tc+h)^3}, \dots$$

a tedy součet stran  $|U_k N_k|$ , stran  $|U_k V_k|$  a obsahů  $|U_k N_k| |U_k V_k|$  vepsaných obdélníků je

$$\sum_{k=1}^{\infty} tc \left( \frac{h}{tc+h} \right)^k = h, \quad \sum_{k=1}^{\infty} c \left( \frac{h}{tc+h} \right)^k = \frac{h}{t},$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} tc^2 \left( \frac{h}{tc+h} \right)^{2k} = \frac{ch^2}{tc+2h}.$$



Obr. 10: Posloupnost obdélníků umístěných v trojúhelníku

Literatura

- [1] Calda, E.: Dva čtverce v rovnostranném trojúhelníku. *Učitel matematiky*, roč. 22 (2014), č. 4, s. 252–256.
- [2] Dlab, V.: Důkladné porozumění elementární matematice. *Učitel matematiky*, roč. 17 (2009), č. 3, s. 169–182.
- [3] Kuřina, F.: Chvála „biflování“. *Učitel matematiky*, roč. 18 (2010), č. 1, s. 49–52.

# Pokrývací systémy a soustava rovnic

*Lukáš Moudrý, Plzeň*

**Abstrakt.** V 19. století vyslovil Alphonse de Polignac následující domněnku: Pro libovolné liché číslo  $k$  existuje takové přirozené číslo  $n$ , že  $2^n + k$  je prvočíslo. V minulém století ji však vyvrátil Paul Erdős, a to za použití tzv. pokrývacích systémů. Jak tyto systémy fungují a jak pomocí nich tuto domněnku vyvrátit, si vysvětlíme v tomto článku.

## Pokrývací systémy

Nezáporná celá čísla můžeme rozdělit na dvě skupiny, lichá a sudá čísla. V řeči kongruencí <sup>1)</sup> je číslo  $n$  sudé, právě když splňuje

$$n \equiv 0 \pmod{2},$$

a liché, právě když platí

$$n \equiv 1 \pmod{2}.$$

Např. číslo tři je liché, protože platí  $3 \equiv 1 \pmod{2}$ , a číslo čtyři sudé, protože  $4 \equiv 0 \pmod{2}$ . Tyto dvě kongruence tvoří pokrývací systém, neboť všechna přirozená čísla splňují jednu z těchto kongruencí.

Pojďme zavést pojem pokrývací systém formálně matematicky.

**Definice 1.** Mějme  $d$  přirozených čísel  $m_1, m_2, \dots, m_d$  a celá nezáporná čísla  $r_1, r_2, \dots, r_d$  taková, že  $r_1 < m_1, r_2 < m_2, \dots, r_d < m_d$ . Řekneme, že páry  $(m_1, r_1), (m_2, r_2), \dots, (m_d, r_d)$  tvoří *pokrývací systém*, pokud ke každému přirozenému číslu  $n$  lze nalézt pár  $(m_i, r_i)$  takový, že  $n$  má zbytek  $r_i$  po dělení  $m_i$ , tj.  $n \equiv r_i \pmod{m_i}$ .

**Příklad 1.** Je zřejmé, že páry  $(2, 0)$  a  $(2, 1)$  tvoří pokrývací systém. Stejně tak pro libovolné  $m \in \mathbb{N}$ , páry  $(m, 0), (m, 1), \dots, (m, m-1)$  tvoří pokrývací systém.

---

<sup>1)</sup>Nechť  $a, b \in \mathbb{Z}$  a  $m \in \mathbb{N}$ . Řekneme, že  $a$  je kongruentní  $b$  modulo  $m$ , pokud  $m$  dělí beze zbytku rozdíl  $a - b$ . Píšeme  $a \equiv b \pmod{m}$ . Pro více informací o kongruencích a práci s nimi doporučujeme [1, 2].

**Příklad 2.** Existují i pokrývací systémy, kde některým přirozeným číslům odpovídá více párů. Například pro pokrývací systém  $(2, 0)$ ,  $(2, 1)$ ,  $(4, 1)$  platí, že číslu 5 přísluší páry  $(2, 1)$  i  $(4, 1)$ , protože  $5 \equiv 1 \pmod{2}$  a také  $5 \equiv 1 \pmod{4}$ .

Pro prezentaci Erdősova důkazu bude třeba pracovat s pokrývacím systémem, kde jsou všechna modula vzájemně různá. Zkusme si pro ilustraci jeden takový odvodit. Zafixujeme si kongruenci  $n \equiv 0 \pmod{2}$  a budeme postupně upravovat  $n \equiv 1 \pmod{2}$  tak, aby modulo bylo u každé kongruence jiné. Všechna lichá čísla splňují jednu z následujících dvou kongruencí:

$$\begin{aligned} n &\equiv 1 \pmod{4}, \\ n &\equiv 3 \pmod{4}. \end{aligned}$$

Nyní si upravíme kongruenci  $n \equiv 3 \pmod{4}$ . Aby bylo jasnější, co se děje, napíšme si několik prvních přirozených čísel splňujících tuto kongruenci

$$3, \underline{7}, \underline{11}, 15, \underline{19}, \underline{23}, 27, \underline{31}, \underline{35}, 39, \underline{43}, \underline{47}, 51, \underline{55}, \underline{59}, 63, \dots$$

Všimněme si, že počínaje trojkou je každé třetí číslo dělitelné třemi (viz nepodtržená čísla). Tato čísla tedy pokryjeme kongruencí

$$n \equiv 0 \pmod{3}.$$

Dále si všimněme, že počínaje sedmičkou je každé třetí číslo o jedna více než nějaký násobek šestky (viz podtržená čísla). Tato čísla pokryjeme kongruencí

$$n \equiv 1 \pmod{6}.$$

A nakonec si všimněme, že od jedenáctky dál je každé třetí číslo o jedenáct víc než nějaký násobek dvanáctky (viz dvakrát podtržená čísla). Tato čísla pokryjeme kongruencí

$$n \equiv 11 \pmod{12}.$$

Získali jsme tedy pokrývací systém, kde jsou všechna modula různá:

$$(2, 0), (4, 1), (3, 0), (6, 1), (12, 11).$$

Co kdyby nám někdo naopak ukázal tyto páry a chtěl by po nás ověřit, jestli jde opravdu o pokrývací systém? Pro jaká všechna čísla musíme ověřit, že splňují alespoň jednu z daných kongruencí?

Ukážeme si, že se stačí podívat na všechna čísla od 0 až do nejmenšího společného násobku všech modul zmenšeného o jedna, což je v našem případě 11.

$$\begin{aligned} 0 &\equiv 0 \pmod{2}, \\ 1 &\equiv 1 \pmod{4}, \\ 2 &\equiv 0 \pmod{2}, \\ 3 &\equiv 0 \pmod{3}, \\ 4 &\equiv 0 \pmod{2}, \\ 5 &\equiv 1 \pmod{4}, \\ 6 &\equiv 0 \pmod{2}, \\ 7 &\equiv 1 \pmod{6}, \\ 8 &\equiv 0 \pmod{2}, \\ 9 &\equiv 0 \pmod{3}, \\ 10 &\equiv 0 \pmod{2}, \\ 11 &\equiv 11 \pmod{12}. \end{aligned}$$

Co když si teď vezmeme libovolné číslo  $n \geq 12$ ? Pro takové  $n$  existuje přirozené číslo  $l$ , že  $n = 12l + j$ , kde  $j$  je zbytek po dělení 12, tedy  $0 \leq j < 12$ . Pak ale stačí v pokrývacím systému najít pár  $(r, m)$  takový, že  $j \equiv r \pmod{m}$ . Takový pár jistě existuje, protože  $j < 12$ . Jelikož  $m$  dělí 12, platí

$$n = 12l + j \equiv j \pmod{m}.$$

Odtud dostáváme  $n \equiv r \pmod{m}$ .

Např. pro  $n = 257$  lze psát  $n = 21 \cdot 12 + 5$ . A jelikož  $5 \equiv 1 \pmod{4}$ , platí také  $257 \equiv 1 \pmod{4}$ .

**Úkol 1.** Ověřte sami, že  $(2, 1)$ ,  $(3, 1)$ ,  $(4, 2)$ ,  $(8, 4)$ ,  $(12, 8)$ ,  $(24, 0)$  tvoří pokrývací systém.

### Vyvrácení domněnky

Nyní již můžeme popsat, jakým elegantním způsobem Paul Erdős vyvrátil Polignacovu domněnku.

**Domněnka 1.** Pro libovolné liché přirozené číslo  $k$  existuje takové přirozené číslo  $n$ , že  $2^n + k$  je prvočíslo.

Erdősova strategie byla následující. Uvažoval pokrývací systém z úkolu 1

$$(2, 1), (3, 1), (4, 2), (8, 4), (12, 8), (24, 0). \quad (1)$$

K číslům  $m_1 = 2$ ,  $m_2 = 3$ ,  $m_3 = 4$ ,  $m_4 = 8$ ,  $m_5 = 12$  a  $m_6 = 24$  našel různá prvočísla  $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5$  a  $p_6$  taková, že  $p_i$  dělí  $2^{m_i} - 1$  pro každé  $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ , tj.

$$2^{m_i} \equiv 1 \pmod{p_i}. \quad (2)$$

Napišme si rozklady  $2^{m_i} - 1$  na prvočísla.

$$2^{m_1} - 1 = 2^2 - 1 = 3,$$

$$2^{m_2} - 1 = 2^3 - 1 = 7,$$

$$2^{m_3} - 1 = 2^4 - 1 = 15 = 3 \cdot 5,$$

$$2^{m_4} - 1 = 2^8 - 1 = 255 = 3 \cdot 5 \cdot 17,$$

$$\begin{aligned} 2^{m_5} - 1 &= 2^{12} - 1 = (2^6 - 1)(2^6 + 1) = (2^3 + 1)(2^3 - 1)65 = \\ &= 3^2 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 13, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2^{m_6} - 1 &= 2^{24} - 1 = (2^{12} - 1)(2^{12} + 1) = \\ &= 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13 \cdot (2^4 + 1)(2^8 - 2^4 + 1) = 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 241. \end{aligned}$$

Lze zvolit  $p_1 = 3$ ,  $p_2 = 7$ ,  $p_3 = 5$ ,  $p_4 = 17$ ,  $p_5 = 13$  a  $p_6 = 241$ . Aby vyvrátil Polignacovu domněnku, zkonstruoval Erdős liché číslo  $k$  takové, že pro každé z nalezených prvočísel  $p_i$  platí

$$2^{r_i} + k \equiv 0 \pmod{p_i},$$

přičemž  $r_i$  jsou zbytky v pokrývacím systému (1), tj.  $r_1 = r_2 = 1$ ,  $r_3 = 2$ ,  $r_4 = 4$ ,  $r_5 = 8$ ,  $r_6 = 0$ .

Takové číslo  $k$  již vyvrací domněnku, protože díky tomu, že (1) je pokrývací systém, lze pro každé přirozené  $n$  najít pár  $(m_i, r_i)$  takový, že  $n \equiv r_i \pmod{m_i}$ , tj.  $n = r_i + lm_i$  pro nějaké  $l$  nezáporné celé číslo. Pak ale s využitím faktu, že  $2^{m_i} \equiv 1 \pmod{p_i}$ , máme

$$2^n + k = 2^{r_i + lm_i} + k = 2^{r_i} \cdot (2^{m_i})^l + k \equiv 2^{r_i} + k \equiv 0 \pmod{p_i}.$$

To znamená, že prvočísla  $p_i$  dělí  $2^n + k$ , a tudíž  $2^n + k$  je číslo složené.

Zbývá ukázat, že lze nalézt liché číslo  $k$  splňující  $2^{r_i} + k \equiv 0 \pmod{p_i}$ . Dosazením konkrétních hodnot máme pro  $k$  systém kongruencí

$$\begin{aligned} 2^1 + k &\equiv 0 \pmod{3}, \\ 2^1 + k &\equiv 0 \pmod{7}, \\ 2^2 + k &\equiv 0 \pmod{5}, \\ 2^4 + k &\equiv 0 \pmod{17}, \\ 2^8 + k &\equiv 0 \pmod{13}, \\ 2^0 + k &\equiv 0 \pmod{241}. \end{aligned} \tag{3}$$

Takový systém kongruencí lze řešit využitím čínské zbytkové věty [3].

**Věta 3** (čínská věta o zbytcích). *Nechť  $p_1, p_2, \dots, p_j$  jsou po dvou nesoudělná přirozená čísla a necht'  $a_1, a_2, \dots, a_j$  jsou libovolná celá čísla. Pak systém kongruencí*

$$\begin{aligned} x &\equiv a_1 \pmod{p_1}, \\ x &\equiv a_2 \pmod{p_2}, \\ &\vdots \\ x &\equiv a_j \pmod{p_j} \end{aligned}$$

*má celočíselné řešení. Navíc každé řešení  $x \in \mathbb{Z}$  splňuje*

$$x \equiv c_1 \frac{p}{p_1} + c_2 \frac{p}{p_2} + \dots + c_j \frac{p}{p_j} \pmod{p},$$

*kde  $p = p_1 p_2 \dots p_j$  a  $c_i$  splňují pro každé  $i \in \{1, 2, \dots, j\}$*

$$c_i \frac{p}{p_i} \equiv a_i \pmod{p_i}.$$

Přepíšme systém kongruencí (3) ekvivalentním způsobem do stejného tvaru, jako je v čínské zbytkové větě.

$$\begin{aligned} k &\equiv 1 \pmod{3}, \\ k &\equiv 5 \pmod{7}, \\ k &\equiv 1 \pmod{5}, \\ k &\equiv 9 \pmod{17}, \\ k &\equiv 4 \pmod{13}, \\ k &\equiv -1 \pmod{241}. \end{aligned} \tag{4}$$



**Úkol 2.** Pro čtenáře, který hrozně rád počítá, necháme jako domácí cvičení nalézt pomocí čínské zbytkové věty číslo  $k$ , které řeší systém kongruencí (4).

**Úkol 3.** Pro čtenáře, který rád počítá, necháme jako domácí cvičení ověřit, že  $k = 1\,518\,781$  řeší systém kongruencí (4).

ZÁVĚR tedy zní: *Polignacova domněnka neplatí např. pro  $k = 1\,518\,781$ .*

**Příklad 3.** Ukažme pro nějaké „náhodně vybrané“  $n$ , že  $2^n + k$  skutečně není prvočíslo. Uvažujme  $n = 12$ . Toto číslo splňuje  $n \equiv 4 \pmod{8}$ , konkrétně  $n = 1 \cdot 8 + 4$ . Jelikož  $2^8 \equiv 1 \pmod{17}$ , dostáváme

$$2^n = 2^4 \cdot 2^8 \equiv 2^4 \pmod{17}.$$

Tudíž

$$2^n + k \equiv 2^4 + k \equiv 0 \pmod{17}, \quad \text{viz (3).}$$

Suma sumárum, 17 dělí číslo  $2^n + k = 4\,096 + 1\,518\,781 = 1\,522\,877$ . (Nevěřící Tomášové mohou zkontrolovat na kalkulačce, že  $1\,522\,877 = 17 \cdot 89\,581$ .)

Pro více informací jsou k dispozici videa [1] na toto téma připravená autorem článku.

## Poděkování

Děkuji recenzentovi a také vedoucí redaktorce Lubomíře Dvořákové za vhodné úpravy, které vedly k vylepšení článku.

## Literatura

- [1] <https://www.youtube.com/watch?v=coplC14mj08&list=PLFbx-hq3ir1mXupqlAfgoW8Ek1eTF3f6k>
- [2] <https://prase.cz/library/KongruenceKK/KongruenceKK.pdf>
- [3] Pěchoučková, Š.: Armáda v Kocourkově a čínská věta. *Učitel matematiky*, roč. 24 (2016), č. 3, s. 174–181.

# Rozměňování peněz pomocí geometrie

*Kryštof Sedláček, Gymnázium Evolution, Praha*

**Abstrakt.** V matematice se často stává, že se věta z jednoho oboru použije na důkaz tvrzení, které pochází úplně z jiné části matematiky. V tomto článku si ukážeme příklad právě jednoho takového propojení dvou oborů, které vede ke krásnému vzorci, který se vám může třeba hodit při nákupu ve večerce.

## Pickův vzorec

Abychom mohli správně pochopit Pickův vzorec, musíme prvně vědět, co je to bodová mříž. Bodová mříž v  $\mathbb{R}^2$  je množina celočíselných lineárních kombinací dvou bodů  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ , které neleží na stejné přímce, tj.

$$\left\{ a \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Nejjednodušší příklad takové mříže je  $\mathbb{Z}^2$ , kde

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

**Věta 1** (Pickův vzorec [2]). *Obsah jakéhokoliv jednoduchého mnohoúhelníku<sup>1)</sup> s vrcholy na obecné bodové mříži je určen rovností*

$$S = A \left( I + \frac{B}{2} - 1 \right),$$

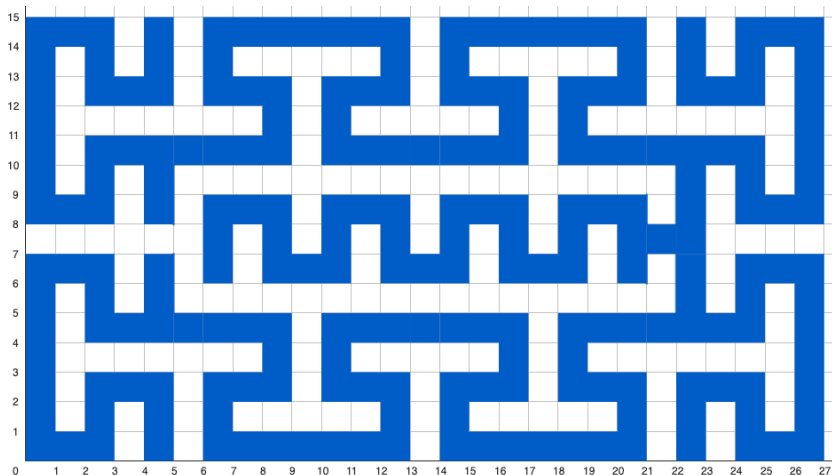
kde  $A$  je obsah jednoho pole mříže,  $I$  je počet mřížových bodů ležících uvnitř mnohoúhelníku a  $B$  je počet mřížových bodů ležících na stranách mnohoúhelníku.

**Příklad 1.** Vyzkoušejme nyní Pickův vzorec na mnohoúhelníku z obr. 1. Hlavní poznatek, který nám pomůže problém vyřešit, je ten, že daný mnohoúhelník neobsahuje žádné vnitřní mřížové body, tedy  $I = 0$ . Dále

<sup>1)</sup>Jednoduchý mnohoúhelník je takový mnohoúhelník, ve kterém se žádné strany navzájem neprotínají.

si uvědomme, že naopak každý z mřížových bodů náležících obdélníku  $15 \times 27$  leží na straně tohoto mnohoúhelníku, a tedy  $B = 16 \cdot 28$ . Nyní dosadíme do Pickova vzorce. Se znalostí toho, že obsah jednoho pole mříže je v tomto případě 1, dostáváme

$$S = 1 \left( 0 + \frac{448}{2} - 1 \right) = 223.$$



Obr. 1: Příklad mnohoúhelníku, pro který použití Pickova vzorce velmi zjednoduší práci při zjišťování obsahu

Jak můžeme vidět, Pickův vzorec nám pomohl s výpočtem obsahu paradoxně „nejjednoduchého“ jednoduchého mnohoúhelníku. Tento geometrický vzorec má navíc spoustu leckdy nečekaných využití. Uveďme nyní problém z kombinatoriky, který je zobecněnou verzí problému z článku [1], na jehož vyřešení použijeme právě Pickův vzorec.

### Rozměňování peněz

Předpokládejme, že máme neomezený počet mincí se třemi různými celočíselnými hodnotami  $n_1, n_2, n_3$ . Chceme zaplatit nenulovou celou částku  $C$ , která je dělitelná všemi třemi hodnotami mincí. Kolika způsoby lze s těmito mincemi zaplatit částku  $C$ ?

Necheť  $x, y, z$  určují počty mincí s hodnotami  $n_1, n_2, n_3$  v tomto

pořadí. Všechna nezáporná celočíselná řešení  $(x, y, z)$  rovnice

$$xn_1 + yn_2 + zn_3 = C$$

budou pak všechny možné kombinace, kterými můžeme částku  $C$  zaplatit. Problém můžeme převést na úlohu pro dvě neznámé s jedním parametrem úpravou rovnice na tvar

$$xn_1 + yn_2 = \left(\frac{C}{n_3} - z\right)n_3,$$

kde  $\left(\frac{C}{n_3} - z\right)$  může být jakékoliv celé číslo  $k$  z intervalu  $\left(0, \frac{C}{n_3}\right)$ . Stačí tedy najít nezáporná řešení  $(x, y)$  rovnice  $xn_1 + yn_2 = kn_3$  pro každé  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $0 \leq k \leq \frac{C}{n_3}$ , a poté dopočítat  $z$  ze vztahu  $\frac{C}{n_3} - z = k$ .

### Obsah pole mříže

Uvažujme diofantické rovnice<sup>2)</sup>

$$xn_1 + yn_2 = kn_3 \quad \text{pro } k \in \mathbb{Z}. \tag{1}$$

Označme  $M$  množinu bodů  $\left(\frac{x}{n_1}, \frac{y}{n_2}\right) \in \mathbb{Z}^2$ , kde  $(x, y)$  řeší některou z rovnic (1). V následujícím textu vysvětlíme, že  $M$  je mříž.

**Věta 2 (Bézoutova).** *Pro  $a, b, c \in \mathbb{Z}$  platí, že rovnice  $ax + by = c$  má celočíselná řešení  $(x, y)$  právě tehdy, pokud  $\text{nsd}(a, b)$  dělí pravou stranu  $c$  beze zbytku.<sup>3)</sup> Navíc pokud  $(x_0, y_0)$  je jedno řešení, jsou pak všechna řešení ve tvaru*

$$\left(x_0 - l\frac{b}{d}, y_0 + l\frac{a}{d}\right), \quad \text{kde } l \in \mathbb{Z} \text{ a } d = \text{nsd}(a, b).$$

**Příklad 2.** Pro lepší představu o tom, jak funguje Bézoutova věta, si zkusme najít všechna celočíselná řešení  $(x, y)$  diofantické rovnice

$$4x + 6y = 18.$$

Nejprve si všimněme, že  $2 = \text{nsd}(4, 6) \mid 18$ , což znamená, že rovnice má celočíselná řešení. Uvědomme si také, že  $(0, 3)$  je jedním z nich. Bézoutova věta tedy říká, že všechna celočíselná řešení budou tvaru

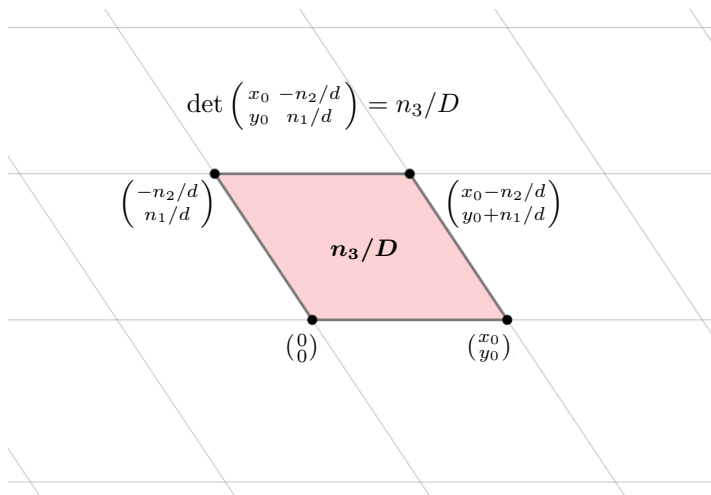
$$\left(0 - l\frac{6}{2}, 3 + l\frac{4}{2}\right) = (-3l, 3 + 2l), \quad \text{kde } l \in \mathbb{Z}.$$

<sup>2)</sup>Polynomiální rovnice, kde řešení hledáme pouze v oboru celých čísel.

<sup>3)</sup>Píšeme  $\text{nsd}(a, b) \mid c$ .

Nyní můžeme dosazením vyzkoušet, zda získaná řešení opravdu fungují pro jakoukoliv celočíselnou hodnotu  $l$ .

$$4(-3l) + 6(3 + 2l) = 18.$$



Obr. 2: Transformace mříže

Vraťme se k případu (1), kde musí nutně platit  $\text{nsd}(n_1, n_2) \mid kn_3$ . Dále je zřejmé, že platí  $\text{nsd}(n_1, n_2) \mid k \text{nsd}(n_1, n_2)$ . Tyto dva postřehy můžeme po krátkém zamyšlení spojit do vztahu

$$\text{nsd}(n_1, n_2) \mid \text{nsd}(kn_3, k \text{nsd}(n_1, n_2)). \quad (2)$$

Z definice největšího společného dělitele evidentně platí

$$\text{nsd}(kn_3, k \text{nsd}(n_1, n_2)) = k \text{nsd}(n_3, \text{nsd}(n_1, n_2)) = k \text{nsd}(n_1, n_2, n_3).$$

Zapišme nyní vztah (2) jako rovnost

$$k \text{nsd}(n_1, n_2, n_3) = m \text{nsd}(n_1, n_2) \quad \text{pro nějaké } m \in \mathbb{Z}.$$

Nyní můžeme vyjádřit  $k$  a dostáváme

$$k = m \frac{\text{nsd}(n_1, n_2)}{\text{nsd}(n_1, n_2, n_3)}, \quad \text{kde } m \in \mathbb{Z}. \quad (3)$$

Dostali jsme, že právě pro  $k$  tvaru (3) má rovnice (1) celočíselné řešení. Pro zjednodušení označme

$$\text{nsd}(n_1, n_2) = d, \quad \text{nsd}(n_1, n_2, n_3) = D.$$

Dosazením vyjádření (3) do rovnice (1) získáme

$$xn_1 + yn_2 = m \frac{d}{D} n_3.$$

Dále uvažujme  $(x_0, y_0)$ , která splňují rovnost (podle Bézoutovy věty existují)

$$x_0 n_1 + y_0 n_2 = \frac{d}{D} n_3.$$

Pak je zřejmé, že bude platit i rovnost

$$(mx_0)n_1 + (my_0)n_2 = m \frac{d}{D} n_3.$$

Podle Bézoutovy věty budou tedy všechna celočíselná řešení rovnic (1) ve tvaru

$$\left( mx_0 - l \frac{n_2}{d}, my_0 + l \frac{n_1}{d} \right) \quad \text{pro } l \in \mathbb{Z}.$$

Tudíž i všechny body z množiny  $M$  budou ve tvaru

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} -\frac{n_2}{d} \\ \frac{n_1}{d} \end{pmatrix}.$$

Tudíž  $M$  je opravdu mříž. Maticově lze body z  $M$  zapsat jako

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 & -\frac{n_2}{d} \\ y_0 & \frac{n_1}{d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ l \end{pmatrix}.$$

Body  $\begin{pmatrix} m \\ l \end{pmatrix}$ , kde  $m, l \in \mathbb{Z}$ , popisují základní čtvercovou bodovou mříž  $\mathbb{Z}^2$  s obsahem jednoho pole 1. Matice  $\begin{pmatrix} x_0 & -\frac{n_2}{d} \\ y_0 & \frac{n_1}{d} \end{pmatrix}$  je maticí lineární transformace bodů  $\begin{pmatrix} m \\ l \end{pmatrix}$  ze  $\mathbb{Z}^2$  na body  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  z mříže  $M$ , a tedy násobek, o který se zvětší obsah jednoho pole mříže, bude

$$\det \begin{pmatrix} x_0 & -\frac{n_2}{d} \\ y_0 & \frac{n_1}{d} \end{pmatrix} = \frac{x_0 n_1 + y_0 n_2}{d}.$$

Čtenář, který neví, že obsah rovnoběžníku odpovídá determinantu, může obsah pole spočítat jiným způsobem (viz obr. 2). Z rovnosti

$$x_0 n_1 + y_0 n_2 = \frac{d}{D} n_3$$

dostaneme

$$\frac{x_0 n_1 + y_0 n_2}{d} = \frac{n_3}{D}.$$

Obsah jednoho pole mříže  $M$  je tedy roven  $n_3/D$ .

### Mřížové body na stranách trojúhelníku

Abychom mohli použít Pickův vzorec, nyní pro změnu uvažujme trojúhelník  $XYZ$  ležící na naší bodové mříži  $M$ , jehož vrcholy jsou po řadě body

$$\left(\frac{C}{n_1}, 0\right), \left(0, \frac{C}{n_2}\right), \left(0, 0\right).$$

Trojúhelník jsme si vybrali právě tak, aby souřadnice bodů  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  v trojúhelníku byly po řadě z omezených intervalů  $\langle 0, C/n_1 \rangle$  a  $\langle 0, C/n_2 \rangle$ , protože nechceme mít záporný počet mincí. Lze si tedy všimnout, že souřadnice všech mřížových bodů ležících uvnitř nebo na hranách tohoto trojúhelníku budou přesně všechna celočíselná nezáporná řešení  $(x, y)$  rovnice  $xn_1 + yn_2 = kn_3$  pro  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $0 \leq k \leq \frac{C}{n_3}$  (viz obr. 3).

Vypočteme nyní počet těchto mřížových bodů ležících na stranách trojúhelníku, který si označíme  $B$ :

$$B = B_x + B_y + B_c,$$

kde

$B_x$  je počet bodů trojúhelníku, kde  $y = 0$ , kromě vrcholu  $\begin{pmatrix} C/n_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

$B_y$  je počet bodů trojúhelníku, kde  $x = 0$ , kromě vrcholu  $\begin{pmatrix} 0 \\ C/n_2 \end{pmatrix}$ .

$B_c$  je počet bodů trojúhelníku, kde  $xn_1 + yn_2 = C$ , kromě vrcholu  $\begin{pmatrix} 0 \\ C/n_2 \end{pmatrix}$ .

Pro první skupinu bodů platí  $xn_1 = kn_3$ , tj.

$$x = k_x \frac{n_3}{\text{nsd}(n_1, n_3)}, \quad \text{kde } k_x \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Ze zřejmé nerovnosti  $0 \leq x < \frac{C}{n_1}$  dostáváme

$$0 \leq k_x \frac{n_3}{\text{nsd}(n_1, n_3)} n_1 < C,$$

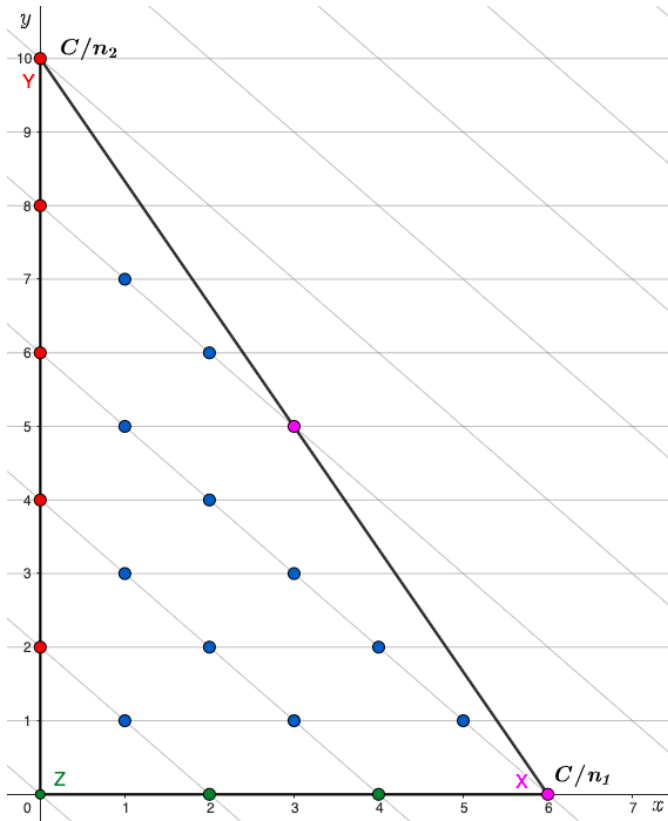
tedy

$$0 \leq k_x < \frac{C \operatorname{nsd}(n_1, n_3)}{n_1 n_3}.$$

Proto může  $k_x$  nabývat jen celočíselných hodnot z  $\left\langle 0, \frac{C \operatorname{nsd}(n_1, n_3)}{n_1 n_3} \right\rangle$ , a tedy

$$B_x = \frac{C \operatorname{nsd}(n_1, n_3)}{n_1 n_3}.$$

Poznamenejme, že celočíselnost  $\frac{C \operatorname{nsd}(n_1, n_3)}{n_1 n_3}$  plyne z předpokladu  $n_1 \mid C$  a  $n_3 \mid C$ .



Obr. 3: Příklad trojúhelníku  $XYZ$  pro vybrané hodnoty  $C = 60$ ,  $n_1 = 10$ ,  $n_2 = 6$  a  $n_3 = 4$



Pro  $B_y$  lze použít obdobný argument a dostáváme

$$B_y = \frac{C \operatorname{nsd}(n_2, n_3)}{n_2 n_3}.$$

Pro třetí skupinu bodů platí, že  $xn_1 + yn_2 = C$ . Použijeme opět Bézoutovu větu. Jedním řešením je zjevně  $(x_0, y_0) = (\frac{C}{n_1}, 0)$  neboli všechna řešení budou ve tvaru

$$\left( \frac{C}{n_1} - k_c \frac{n_2}{\operatorname{nsd}(n_1, n_2)}, k_c \frac{n_1}{\operatorname{nsd}(n_1, n_2)} \right).$$

Obě složky řešení musí být nezáporné,  $x$  musí být dokonce kladné, a proto  $k_c \geq 0$  a zároveň  $k_c < \frac{C \operatorname{nsd}(n_1, n_2)}{n_1 n_2}$ . Tudíž  $k_c$  nabývá jen celočíselných hodnot z intervalu  $\left(0, \frac{C \operatorname{nsd}(n_1 n_2)}{n_1 n_2}\right)$ , což znamená

$$B_c = \frac{C \operatorname{nsd}(n_1, n_2)}{n_1 n_2}.$$

Závěrem dostáváme, že počet bodů na stranách trojúhelníku je roven

$$B = \frac{C \operatorname{nsd}(n_1, n_3)}{n_1 n_3} + \frac{C \operatorname{nsd}(n_2, n_3)}{n_2 n_3} + \frac{C \operatorname{nsd}(n_1, n_2)}{n_1 n_2}.$$

### Propojení všeho pomocí Pickova vzorce

Použijeme nyní Pickův vzorec na trojúhelník  $XYZ$  ležící na naší mřížce s obsahem jednoho pole  $\frac{n_3}{D}$ .

Obsah trojúhelníku bude roven

$$\frac{1}{2}|XZ||YZ| = \frac{C^2}{2n_1 n_2}.$$

Z Pickova vzorce tedy dostáváme

$$\frac{C^2}{2n_1 n_2} = \frac{n_3}{D} \left( I + B - \frac{1}{2} \left( \frac{C \operatorname{nsd}(n_1, n_3)}{n_1 n_3} + \frac{C \operatorname{nsd}(n_2, n_3)}{n_2 n_3} + \frac{C \operatorname{nsd}(n_1, n_2)}{n_1 n_2} \right) - 1 \right).$$

Odtud můžeme vyjádřit  $B + I$ :

$$B + I = \frac{C^2 \operatorname{nsd}(n_1, n_2, n_3)}{2n_1 n_2 n_3} + \frac{C \operatorname{nsd}(n_1, n_3)}{2n_1 n_3} + \frac{C \operatorname{nsd}(n_2, n_3)}{2n_2 n_3} + \frac{C \operatorname{nsd}(n_1, n_2)}{2n_1 n_2} + 1.$$

Tato rovnice určuje počet všech mřížových bodů mříže  $M$  (viz (1)) ležících uvnitř nebo na hranách trojúhelníku  $XYZ$ . To však ale zároveň znamená, že se tato hodnota rovná všem nezáporným řešením rovnice  $xn_1 + yn_2 = kn_3$  pro  $0 \leq k \leq \frac{C}{n_3}$ . Neboli počet všech možných kombinací, kterými můžeme zaplatit částku  $C$  třemi mincemi s hodnotami  $n_1, n_2, n_3$ , je roven

$$\frac{C^2 \operatorname{nsd}(n_1, n_2, n_3)}{2n_1 n_2 n_3} + \frac{C \operatorname{nsd}(n_1, n_3)}{2n_1 n_3} + \frac{C \operatorname{nsd}(n_2, n_3)}{2n_2 n_3} + \frac{C \operatorname{nsd}(n_1, n_2)}{2n_1 n_2} + 1. \quad (4)$$

**Příklad 3.** Zkusme nyní použít tento vzorec na příklad z obr. 3, tedy pro hodnoty  $C = 60$ ,  $n_1 = 10$ ,  $n_2 = 6$  a  $n_3 = 4$ . Můžete si sami spočítat, kolik je na obrázku mřížových bodů ležících uvnitř nebo na stranách trojúhelníku, a nebo můžete věřit, že jich je 21. Dosaďme nyní hodnoty do vzorce (4) a uvidíme, jestli to vyjde.

$$\frac{3600 \cdot 2}{2 \cdot 10 \cdot 6 \cdot 4} + \frac{60 \cdot 2}{2 \cdot 10 \cdot 4} + \frac{60 \cdot 2}{2 \cdot 6 \cdot 4} + \frac{60 \cdot 2}{2 \cdot 10 \cdot 6} + 1 = 21.$$

Příště až si budete ve večerce kupovat nějaký chlazený nápoj, který stojí přesně 60 korun, a budete mít u sebe velký počet smyšlených 4, 6 a 10 korunových mincí, tak vězte, že máte přesně 21 způsobů, jak nápoj zaplatit.

## Poděkování

Na závěr bych chtěl poděkovat Adamu Blažkovi za velikou pomoc při formulování důkazu a psaní článku. Také bych chtěl velmi poděkovat paní docentce Dvořákové za všechny rady k článku a za umožnění stáže na Fakultě jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT.

## Literatura

- [1] Holíková, M.: O Pickově vzorci a rozměňování peněz. *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*, roč. 61 (2016), č. 4, s. 312–322.
- [2] Pick, G. A.: Geometrisches zur Zahlenlehre. (Bearbeitung eines in der deutschen mathematischen Gesellschaft zu Prag gehaltenen Vortrags.) In: *Sitzungsberichte des deutschen naturwissenschaftlich-medizinischen Vereines für Böhmen „Lotos“ in Prag*, roč. 19, Praha, 1899, s. 311–319.

# MATEMATICKÉ OŘÍŠKY

## POP IT

Milí čtenáři, jestlipak znáte hračku POP IT? Takové ty silikonové bublinky, s kterými si hrají jak malé děti, aby si procvičily motoriku, tak i dospělí, aby zahrnali stres. Ovšem hrají si s ní i děti ve škole. Průzkumem mezi 9letými žáčky jsme zjistili, že pravidla jsou následující:<sup>1)</sup>

- Hrají dva hráči a pravidelně se střídají.
- V každém tahu musí hráč zmáčknout jednu, dvě, nebo tři bubliny.
- Prohrává hráč, který zmáčkne poslední bublinu.

Na obrázku 1 je POP IT ve tvaru jednorožce, který má 29 bublin.



Obr. 1: POP IT ve tvaru jednorožce

Máme pro čtenáře několik otázek:

1. *Je lepší začínat, nebo hrát jako druhý v případě hry POP IT z obr. 1?*
2. *Pokud si můžete vybrat, kdo začne, umíte vždy vyhrát v případě hry POP IT z obr. 1?*
3. *Pokud si můžete vybrat, kdo začne, umíte vždy vyhrát v případě hry POP IT s libovolným počtem bublin?*

<sup>1)</sup>Ale existuje i celá řada jiných pravidel.

Minule měli čtenáři za úkol odpovědět na otázku týkající se palindromů, tedy slov, která zůstanou stejná, když se přečtou pozpátku: *Kolik různých palindromických faktorů může obsahovat slovo o délce  $n$ ?* Vysvětlete, proč to tak je. A záleží na tom, zda je slovo sestaveno z písmen  $a, b$  nebo například z písmen  $a, b, c$ , tedy na velikosti abecedy?

*Řešení.* Odpověď je  $n$ . Vysvětleme proč.

Mějme slovo  $w$  délky  $n$ , tj. složené z  $n$  ne nutně různých písmen. Každý palindromický faktor  $p$  se někde ve slově  $w$  vyskytne poprvé, tedy  $w = xpy$  pro nějaké faktory  $x, y$ , kde prefix  $u = xp$  slova  $w$  neobsahuje  $p$  jinak než jako sufix. Pak  $p$  je nejdelším palindromickým sufixem prefixu  $u$ . Kdyby existoval delší palindromický sufix  $q$  slova  $u$ , pak by palindrom  $p$  byl jeho sufix, ale díky palindromicitě  $q$  by byl i jeho prefixem. Tudíž by slovo  $u$  obsahovalo  $p$  alespoň dvakrát, což je spor.

Umíme tedy každému palindromickému faktoru  $p$  slova  $w$  přiřadit výše popsáním způsobem jednoznačně prefix  $u$ , přičemž různým palindromům přiřadíme různé prefixy. Jinými slovy, popsali jsme prosté zobrazení, které palindromickým faktorům slova  $w$  přiřazuje prefixy slova  $w$ . No a jelikož je různých prefixů slova  $w$  právě  $n$ , je různých palindromických faktorů slova  $w$  nejvýše  $n$ .

Z argumentu je rovněž vidět, že na velikosti abecedy nezáleží.

*Řešení Sudoku ze str. 12:*

5 <sup>a</sup>	3	1 <sup>b</sup>	7	2 <sup>c</sup>	8	4	9 <sup>d</sup>	6 <sup>e</sup>
8	2	7 <sup>f</sup>	4	9	6	5	3	1
4	9	6	5 <sup>g</sup>	3	1 <sup>h</sup>	2 <sup>ch</sup>	8	7
1	7 <sup>i</sup>	8	2 <sup>j</sup>	5	4	9	6 <sup>k</sup>	3 <sup>l</sup>
9	5	4	6 <sup>m</sup>	1	3 <sup>n</sup>	7	2	8
3 <sup>o</sup>	6 <sup>p</sup>	2	9	8	7 <sup>q</sup>	1	5 <sup>r</sup>	4
7	8	9	3 <sup>s</sup>	4	2 <sup>t</sup>	6	1	5
6	1	5	8	7 <sup>u</sup>	9	3 <sup>v</sup>	4	2
2	4 <sup>w</sup>	3	1	6 <sup>x</sup>	5	8 <sup>y</sup>	7	9 <sup>z</sup>

## Proměnné hvězdy a význam pořizování jejich dat amatérsky

*Daniel Kurtin, Gymnázium a SOŠPg Jeronýmova, Liberec*

**Abstrakt.** Článek vychází z ročníkové práce ve 3. ročníku na gymnáziu. Cílem ročníkové práce bylo porozumět problematice proměnných hvězd, zpracovat napozorovaná data a předat informace srozumitelnou formou ostatním studentům. Teoretická část řeší fyzikální podstatu proměnných hvězd, jejich rozdělení, historii pozorování a současný výzkum. Praktická část je založená na pořizení vlastních dat proměnné zákrytové dvojhvězdy AB And. Představen je také způsob zpracování těchto dat a jejich následný rozbor. Nakonec je posuzován význam pořizování těchto dat v době, kdy za nás velkou práci odvádějí kosmické sondy.

Proměnné hvězdy jsou skupinou hvězd, jejichž jasnost se v čase mění. Může se měnit buď periodicky, neperiodicky nebo pouze ojedinele. Příčiny těchto změn jsou velice složitou a komplexní záležitostí – mohou záviset na vnitřních i vnějších jevech, podle čehož proměnné hvězdy rozdělujeme do různých skupin. Výzkum proměnných hvězd se řadí mezi jedny z nejmladších oborů astronomie, jehož skutečnou podstatu plně odhalujeme až v posledních desetiletích. Je ale v dnešní době vůbec ještě potřeba měřit proměnné hvězdy amatérsky, když máme družice, které dokáží pozorovat velkou část oblohy najednou? A jak případně taková data pořídít?

### Základní dělení

Abychom se vůbec v systému proměnných hvězd zorientovali, představíme jejich základní rozdělení. Dnes rozlišujeme dvě základní skupiny proměnných hvězd podle toho, jaký původ jejich změny jasnosti mají – jsou to *fyzické* a *geometrické* proměnné hvězdy.

U fyzických proměnných hvězd dochází ke změně zářivého toku. Tyto hvězdy tak skutečně mění svojí fyzikální charakteristiku, která se navenek projevuje právě změnou jasnosti. Tyto změny mají často původ v nestabilitě gravitační síly hvězdy a tlakové síly vyvolané termonukleárními reakcemi v jejím jádře, v důsledku čehož hvězda pulzuje (převaha vlivu obou sil se střídá, ale hvězda zůstává dlouhodobě stabilní), exploduje nebo se zhroutí (převládá jedna ze sil). Změna jasnosti zde může

mít původ také ve složitém magnetickém poli hvězdy, čímž může docházet k hvězdným erupcím měnícím celkovou jasnost. Fyzické proměnné se proto dále dělí na *pulzující, explozivní a eruptivní hvězdy*.

Mezi pulzující hvězdy patří *cefeidy*. U cefeid je zajímavá závislost periody pulzací na absolutní magnitudě, čímž se dají cefeidy používat k měření vzdáleností ve vesmíru. Poměrně časté jsou pak *hvězdy typu RR Lyrae*, které mohou mít podobné světelné křivky (graf závislosti jasnosti na čase) jako cefeidy, ale jsou slabší a tvoří je většinou staré hvězdy v kulových hvězdokupách v galaktických halech (kulová obálka galaxií). Existují také *proměnné hvězdy typu Delta Scuti* nebo *typu RV Tauri*. Druhý zmíněný typ má delší periodu a většinou dvě minima (jedno hlubší a jedno mělké), čímž se podobá zákrytovým dvojhvězdám. Tato minima se navíc v čase mohou měnit, a dokonce i vyměňovat. Mezi pulzující proměnné se dále řadí *dlohoperiodické proměnné typu Mira*. Patří sem pomalu pulzující hvězdy, tedy hvězdy s dlouhou periodou pohybující se obvykle mezi sto dny a čtyřmi lety, které mají velkou amplitudu v průměru kolem 5 mag (magnituda – jednotka jasnosti používaná v astronomii).

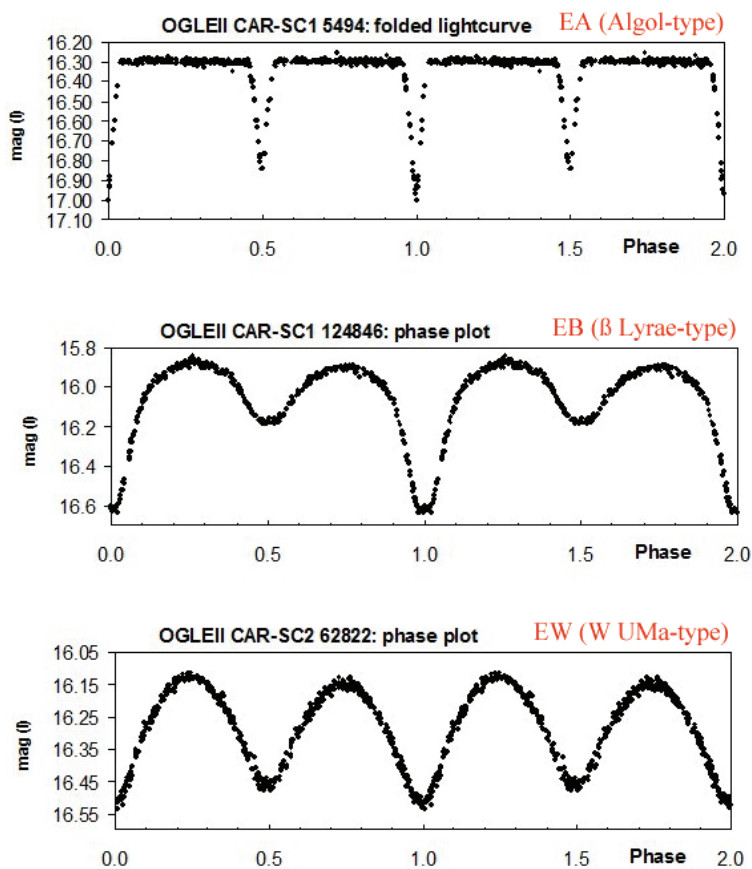
Explozivní hvězdy pak prodělávají extrémní změnu jasnosti, která často nastává jen jednou za jejich existenci. Jedná se hlavně o *supernovy* a *novy* (u nov je zjasňování opakující se děj). Supernovy mohou vznikat několika způsoby. Dvěma nejčastějšími typy jsou supernovy typu II a supernovy typu Ia. Typ II vzniká, když velice hmotná hvězda vyčerpá své palivo a zhroutí se. Typ Ia pak vzniká v těsné dvojhvězdě, kde bílý trpaslík nahromadí hmotu svého průvodce, čímž se zhroutí na neutronovou hvězdu. Explozivní termonukleární hoření v celém objemu trpaslíka způsobí supernovu typu Ia. Novy vznikají podobně jako supernovy typu Ia, ale zde se bílý trpaslík udrží a spustí se v něm termojaderná fúze.

Mezi eruptivní hvězdy patří takové objekty, u nichž dochází ke změně jasnosti v důsledku bouřlivých dějů v jejich atmosféře, které mají původ ve složitém magnetickém poli hvězdy. Mohou to být tedy *protovhvězdy*, velice *mladé hvězdy* nebo hvězdní *obří* a *veleobří*.

Dostáváme se k druhé velké skupině, kterou jsou geometrické proměnné. Změna jasnosti těchto hvězd není dána změnou jejich fyzikální charakteristiky, ale vnějšími příčinami (viz dále). Celková svítivost hvězdy se tedy nemění a vždy záleží na vzájemné poloze hvězdy a pozorovatele. Už z podstaty se jim také říká „zdánlivě proměnné hvězdy“.

Jedná se o *rotační proměnné hvězdy*, tedy osamocené asférické hvězdy, které díky vlastní rotaci mění na obloze jasnost (například na sobě mají

velké skvrny) nebo o *zákrytové dvojhvězdy*, tedy hvězdy, které se navzájem z našeho pohledu zakrývají. Zákrytové dvojhvězdy se dělí na tři skupiny: proměnné hvězdy *typu Algol*, *typu Beta Lyræ* a *typu W UMa*. Rozlišujeme je podle vzájemné vzdálenosti a podle toho, zda u nich dochází k přenosu materiálu. Do této skupiny můžeme zařadit také přechody exoplanet (tedy přechody planet v jiných soustavách přes jejich mateřské hvězdy).



Obr. 1: Světelné křivky jednotlivých typů zákrytových dvojhvězd, postupně se jedná o proměnnou typu Algol, typu Beta Lyræ a typu W UMa

## Něco z historie

### *První proměnné hvězdy*

Hvězdy na obloze zajímají lidstvo od nepaměti. I pravěký člověk často vzhledl k noční obloze a byl očarován několika tisíci hvězdami a Mléčnou dráhou. Zároveň na něj musela dolehnout tíha obrovského neznáma – o jejich podstatě totiž neměl žádné povědomí. Vznikaly první teorie, že nebeská obloha se dělí na sféry a že všechny stálice jsou na jedné z nich a ostatní objekty jako Slunce, Měsíc a ostatní „bludné hvězdy“ putují na sférách vlastních. Všem objektům kromě stálic se v řečtině říkalo planetés (v překladu právě „bludné hvězdy“) – tento výraz se dochoval do dnešní doby pro skupinu těles, kterým říkáme planety. Tato myšlenka přetrvávala velmi dlouho. Jistou revoluci přinesl až v první polovině 16. století Mikuláš Koperník, zastávající heliocentrický model vesmíru. Teorie, že Slunce je pouze „obyčejnou“ hvězdou, která je podobná hvězdám na noční obloze, se však začala prosazovat až v 18. a 19. století.

Zatímco v Evropě byla proměnnost hvězd často přehlížena, v Číně a v Japonsku tomu tak nebylo. Místní astronomové pečlivě zaznamenávali všechny úkazy na obloze do kronik. Podle nich víme, že prvními událostmi, kdy lidé prokazatelně zachytili změny jasností hvězd, byly supernovy a novy. Tou vůbec nejjasnější supernovou byla SN 1006 v souhvězdí Vlka na jižní obloze.

První novodobá a více zdokumentovaná změna jasnosti hvězdy pochází z roku 1572, kdy dánský astronom Tycho Brahe objevil v souhvězdí Kasiopeji „novou hvězdu“, jejíž vývoj v následujících měsících důkladně sledoval a dokumentoval. Z těchto dokumentací bylo možné sestavit vůbec první světelnou křivku proměnné hvězdy. Díky tomu víme, že se jednalo o supernovu, jejíž jasnost přesáhla na svém vrcholu jasnost planety Venuše a dosáhla  $-4,1$  mag. Hvězda následně postupně slábla a v březnu 1574 se její jasnost dostala pod hranici viditelnosti pouhýma očima. Tycho Brahe rozbořem vlastních dat i dat ostatních pozorovatelů (mezi nimi byl například i český přírodovědec Tadeáš Hájek z Hájku) zjistil, že ona „nova“ (jak jí tenkrát říkal) musí být minimálně šestkrát dál než Měsíc. Dnes víme, že se jednalo o supernovu typu Ia ve vzdálenosti osm až deset tisíc světelných let.

V roce 1604 pozoroval Johannes Kepler podobnou supernovu, která se stala do dneška poslední pozorovanou supernovou v Mléčné dráze. Už z dobových světelných křivek se ukazuje, že se rovněž jednalo o supernovu typu Ia.



První objevenou periodicky proměnnou hvězdou se stala hvězda Omikron Ceti neboli Mira. Tu pozoroval německý astronom David Fabricius v srpnu 1596, když v souhvězdí Velryby našel hvězdu druhé hvězdné velikosti, která záhy (v říjnu) přestala být vidět. Pokládá se však za pravděpodobné, že Mira byla pozorována už v Babylonu. Některé dobové klínopisné tabulky totiž obsahují informace o hvězdě v oblasti Velryby, která „vybuchla a zhasla“. Její periodicitu ale dokázal až v roce 1638 astronom Johannes Phocylides Holwarda. Roku 1667 francouzský astronom Ismaël Bouillau určil její periodu na 333 dní (podle dnešních měření je to 332 dní, což potvrzuje relativní přesnost dobových pozorování). V roce 1667 byla objevena proměnnost hvězdy Algol v souhvězdí Persea. Poté bylo objeveno ještě několik málo takových proměnných, ale tyto objevy byly stále dost sporadické.

Rok	Typ	Souřadnice		Dnešní označení	Maximální hv. vel. [mag]	Doba pozorování pouhýma očima	Pozorovatel(é)
		$\alpha$ [ $^{\circ}$ m]	$\delta$ [ $^{\circ}$ ]				
-134	?	5 54	-13		?	?	Hiparchos, Číňané
185	SN	14 12	-60		-8	7.12.185–červenec 186	
369	?	0 $\pm$	+60 $\pm$		?	6 měsíců	
386	SN	18 30	-25		+1	3 měsíce	
393	SN	16 48	-38		-1	8 měsíců	
1006	SN	15 13	-45		-8 až -10	28.4.1006–13.8.1006	arab., jap., čín., jihoevr. poz.
1054	SN	5 30	+22	CM Tau	-4 až -5	4.7.1054–17.4.1056	Jang Wej-Te aj.
1181	SN				-1	červenec 1181–?	
1203	N	16 48	-38		-2		
1230	N	16 20	+20			říjen 1230–březen 1231	S. Fujivara aj.
1430	N	7 24	+7			1 měsíc	
1572	SN	0 19	+64	B Cas	-4	6.11.1572–únor 1574	Schüller, Brahe, Hájek aj.
1600	N?	20 12	+38	P Cyg	+3	18.8.1600–1626?	Blau <sup>3</sup>
1604	SN	17 25	-21	V843 Oph	-2,5	9.10.1604–podzim 1605	Kepler, Fabricius, Brunowski
1667	N	6	+20	V529 Ori			
1670	N	19 42	+28		+2,7	20.6.1670–?	Anthelm, Picard

Obr. 2: Historické novy a supernovy [1, str. 10]

### První systematická pozorování

Významným milníkem se stala 80. léta 18. století, do kdy se datuje začátek vrcholové kariéry britsko-německého astronoma Williama Herschela, který zavedl první systematickou metodiku pro srovnávání jasností hvězd. Do stejného období se řadí také první snahy o vysvětlení příčiny změny jasnosti hvězdy Algol. Podle těchto teorií měla být hvězda zastiňována slabším objektem, který přes ni pravidelně přecházel (dnes víme, že se jedná o zákrytovou dvojhvězdu).

Historickým mezníkem byl rok 1844, kdy německý astronom Friedrich Argelander v díle „Výzva přátelům astronomie“ publikoval jednoduchou, ale relativně přesnou metodu pozorování proměnných hvězd, čímž v tomto ohledu překonal Williama Herschela. Ve stejném roce navrhl způsob označování proměnných hvězd. Podle něho se proměnným přiřadila písmena v abecedě počínaje písmenem R, po nichž následovala latinská zkratka souhvězdí, ve kterém se hvězda nacházela (např. R Cep). Každému souhvězdí tak náleželo maximálně 9 proměnných hvězd, což se záhy ukázalo jako velmi naivní představa o počtu proměnných hvězd.

S objevy a s pozorováními již objevených proměnných hvězd se roztrhl pytel v polovině 19. století. V této době bylo známo kolem stovky proměnných. Vznikaly různé spolky, byly vydávány hvězdné katalogy a díla popisující nejlepší strategie při pozorování a astronomie se rozšířila do dalších zemí. Počet známých proměnných tak začal bezprecedentně narůstat, a to také díky rozmachu fotografie.

### *První polovina 20. století*

Americká astronomka H. S. Leavittová se v roce 1903 zaměřila na Magallanovy oblaky, ve kterých bylo po třech letech její práce známo 1 777 proměnných hvězd. V témže roce objevila také závislost periody cefeidy na jejich absolutní magnitudě.

Hlavním centrem ve výzkumu proměnných hvězd se ale stalo Německo. V té době byl asi vůbec nejúspěšnějším pozorovatelem proměnných hvězd Cuno Hoffmeister, který v roce 1925 založil hvězdárnu v Sonnebergu. Inicivoval tam fotografickou přehlídku oblohy a s její pomocí objevil skoro 10 000 proměnných hvězd. Po celém světě přibývali astronomové, kteří tyto proměnné hvězdy proměřovali a získávali i desetitisíce jednotlivých odhadů jasností.

V roce 1911 vznikla v USA *Americká asociace pozorovatelů proměnných hvězd* (AAVSO), která je dnes největší a nejaktivnější v celosvětovém měřítku. Jejím hlavním účelem byla a je dlouhodobá mezinárodní spolupráce v pozorování proměnných hvězd a koordinace v rámci získávání nových dat a poznatků. V roce 1917 byla založena *Česká astronomická společnost* (ČAS). O sedm let později, v roce 1924, byla v rámci ČAS založena také Sekce pozorovatelů hvězd měnlivých (od roku 2008 známá jako Sekce proměnných hvězd a exoplanet). Ve Francii vznikla v roce 1921 *Francouzská asociace pozorovatelů proměnných hvězd* (AFOEV), která je dnes asi nejvýznamnější skupinou v Evropě.

V červenci 1919 vyvrcholila snaha založit astronomickou společnost

světového charakteru. Vznikla tak *Mezinárodní astronomická unie* (IAU). Ta sestává z různých komisí zastřešujících vždy určitou oblast astronomie. Jednou z prvních byla i 27. komise „Proměnné hvězdy“. Ta rozhodla v roce 1925 mimo jiné i o novém způsobu katalogizace proměnných hvězd za pomoci označení počínaje V335 (pokračovalo se V336 atd.).

Po válce se koordinace vědeckých prací opět ujala Mezinárodní astronomická unie, která přesunula v roce 1946 centrální evidenci proměnných hvězd z Německa do SSSR. Zde se tak začala připisovat proměnným hvězdám jejich definitivní označení, v důsledku čehož vzniklo několik vydání *Generálního katalogu proměnných hvězd* (GCVS) a *Katalogu hvězd podezřelých z proměnnosti* (CSV).

Určitou revoluci v pozorování přineslo používání CCD čipů, které jsou velice citlivé na světlo a dokáží přesně rozpoznat jasnost každého pixelu a tím poskytnout přesnější měření. S jejich nástupem byl zaznamenán veliký nárůst počtu pozorování. V 90. letech existovalo po světě už přes 200 společností zabývajících se proměnnými hvězdami.

### ***Současný výzkum proměnných hvězd***

V roce 2010 bylo celkem známo asi 200 000 proměnných hvězd, v roce 2020 už to byly dva miliony a v roce 2022 po uveřejnění dat z družice Gaia to bylo 10,5 milionů proměnných hvězd. To poukazuje na extrémní nárůst objevů, který je daný stále přesnějšími přístroji a družicemi, které jsou schopné zachycovat i minimální odchylky jasností, a dále pak celooblohovými přehlídkami (kamery snímají automaticky a dlouhodobě často i celou oblohu).

Dvě hlavní družice, které nám v posledních letech poskytují nejvíce informací, jsou TESS a již zmíněná Gaia. Primárním cílem amerického satelitu TESS je výzkum tranzitujících exoplanet. Data z této družice ale obsahují přesné informace o jasnostech hvězd, a dají se tudíž využít také ke studiu binárních systémů nebo pulzujících hvězd. TESS pozoruje oblohu po částech, je tedy důležitý hlavně při výzkumu hvězd s kratšími periodami. V rámci primární mise bylo pomocí TESS identifikováno (ne však objeveno) 46 tisíc periodicky proměnných hvězd s vysokou spolehlivostí a dalších 38 tisíc jich bylo identifikováno se střední spolehlivostí. Mise však byla prodloužena, takže se dá očekávat, že nám satelit v budoucnu nabídne pohled i na další hvězdy a poskytne nám spoustu dalších informací.

Evropská observatoř Gaia pozoruje a zaznamenává mimo jiné přesné polohy a pohyby objektů. Cílem této mise, která započala v roce 2013,

je vytvořit trojrozměrnou mapu celé Mléčné dráhy s tím, že tato mapa by měla obsahovat více než jednu miliardu objektů do 20 mag emitujících záření v široké oblasti spektra od blízké UV oblasti po blízkou IR oblast. Balík dat zveřejněný v červnu 2022 už však obsahoval informace o téměř dvou miliardách objektů. Mimo jiné se jednalo o měření 10,5 milionů proměnných hvězd, konkrétně třeba více jak 15 tisíc cefeid, téměř 2,2 milionů zákrytových dvojhvězd, 1,7 milionů dlouhoperiodických proměnných, 270 tisíc proměnných typu RR Lyræ.

Dá se tedy říci, že kosmické sondy dnes utváří budoucnost výzkumu vesmíru. Přípravovanou sondou je dnes například PLATO, která by měla být do vesmíru vynesena v roce 2026 a jejíž hlavním cílem bude hledání exoplanet.

### **Praktické amatérské pozorování**

Základem studia proměnných hvězd je vytvoření tzv. světelné křivky, která zaznamenává změny jasnosti v čase. Ze světelné křivky se dají vyčíst informace o povaze sledovaných objektů. Jedná se o amplitudu změny jasnosti (rozdíl mezi nejmenší a nejvyšší jasností), minimální a maximální jasnost, průběh změny jasnosti, a pokud je změna periodická, tak i její frekvenci. Z těchto informací se dá následně odvodit původ těchto změn (*vnitřní* – fyzické proměnné a *vnější* – geometrické proměnné), z čehož můžeme pochopit fungování sledovaných objektů. Výzkumem proměnných hvězd ale také získáme často unikátní informace o jejich výkonech, hmotnostech i o vnitřním složení. Navíc nám mohou prozradit také svoji vzdálenost od Země, čímž se vyznačují hlavně supernovy typu Ia, ale občas také pulzující proměnné hvězdy a za určitých podmínek i zákrytové dvojhvězdy. Pomocí těchto informací se tak dají upřesňovat a rozvíjet dosud známé informace a vědomosti i o obecné fyzice a jejich ostatních oborech.

### **Vybavení**

Jelikož pozorování proměnné hvězdy zabere většinou celou noc, je potřeba mít zejména pevný stativ a kvalitní montáž. Montáž slouží ke kompenzaci rotace Země a je tak velice důležitá pro pořizování dlouhých expozič. Mezi potřebné vybavení dále patří dalekohled, který nemusí být nutně velký – na jasnější proměnné si vystačíme i s teleobjektivem. V neposlední řadě je důležitý také fotoaparát nebo astronomická kamera. Jelikož za jednu noc pořídíme stovky expozič a důležitá je pro nás hlavně informace o jasnosti jednotlivých pixelů a nikoli rozlišení, vystačíme si i s poměrně jednoduchou astronomickou kamerkou s malým CCD čipem.

Já jsem použil montáž Sky-Watcher EQ-5 Pro, dalekohled Vixen ED 81S II a kameru Meade DSI Pro MC. Zmíněný dalekohled má průměr 81 mm a ohniskovou vzdálenost 625 mm. Asi vůbec nejdůležitější je však právě kamera, která v mém případě disponuje CCD čipem značky Sony o velikosti 4,9 mm × 3,69 mm a rozlišením 0,25 Mpx. To je v porovnání s moderními zobrazovacími zařízeními poměrně málo, ale na fotometrii proměnných hvězd to zcela stačí – menší velikost výstupních snímků je naopak výhodou při zpracování. Na hodnotu získané amplitudy bude mít nemalý vliv tzv. spektrální citlivost (to, jak je kamera citlivá na záření o určitých vlnových délkách). Mnou použitá kamera je nejcitlivější na záření o vlnové délce asi 600 nm. To vysvětluje malý rozdíl v mých výsledcích pozorování oproti družici TESS, která je nejcitlivější na trochu delší vlnové délky (přibližně od 600 nm od 1 000 nm).

### ***Cílový objekt***

Pro svou práci jsem potřeboval vybrat proměnnou hvězdu, která bude mít dostatečně velkou amplitudu a naopak kratší periodu, abych byl schopen získat co nejkvalitnější data. Při malé amplitudě by totiž hrozilo, že kamera nebude schopna zachytit změnu jasnosti. Při dlouhé periodě bych zase musel pořídit takové množství dat, které není v mých možnostech. Ideální hvězda musí být navíc od nás dobře pozorovatelná a musí stoupat co možná nejvýše nad jižní obzor, aby ji bylo možno souvisle pozorovat co nejdéle, nebo musí být cirkumpolární (nikdy nezapadající). Při výběru jsem tedy musel uvážit veškeré tyto aspekty. Nakonec jsem zvolil proměnnou hvězdu AB And, nacházející se v souhvězdí Andromedy. Jedná se o zákrytovou dvojhvězdu typu W UMa.

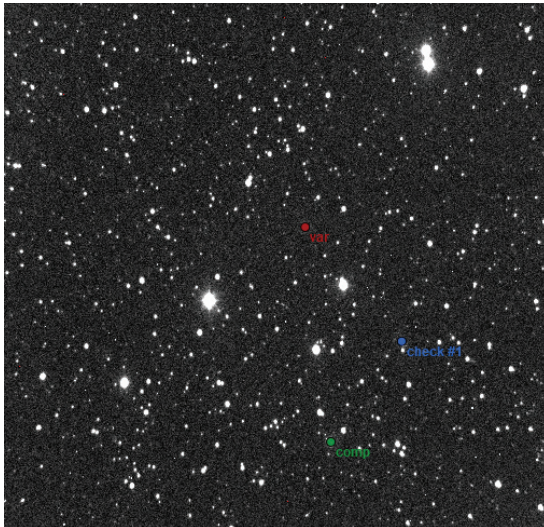
### ***Získávání dat proměnné hvězdy***

Obecně má v astrofotografii veliký vliv na kvalitu pozorování světelné znečištění. Je tedy dobré zvolit si lokalitu co nejméně postiženou nežádoucím vlivem umělých světel z měst.

Abychom měli měřenou hvězdu správně exponovanou, musíme použít správné nastavení kamery. Délku expozice vybereme tak, abychom neměli snímky v důsledku nepřesné práce montáže rozmazané. V závislosti na použité kameře pak nastavíme také citlivost tak, aby byla hvězda správně exponovaná. Ideálně se však snažíme navolit co nejmenší hodnotu, abychom zbytečně nepodpořili šum na snímcích. Vlastností CCD kamer však je, že disponují pouze jedním nastavením citlivosti, takže v mém případě stačilo nastavit pouze délku expozice – při tmavé obloze to bylo 30 sekund, a když svítil Měsíc v první čtvrti 20 sekund. Pak sta-

čilo fotit tak dlouho, dokud to jen podmínky dovolily. Bylo ale přitom důležité občas kontrolovat, zda je náš cílový objekt v zorném poli, nebo zda se neroší objektiv.

V astrofotografii je vždy dobré nasnímat i takzvané kalibrační snímky, které nám pomohou zvýšit poměr signálu k šumu (signal-to-noise ratio – SNR) a eliminovat nežádoucí jevy v našich datech. V noci, když je málo světla, je totiž SNR malý a my musíme pořizovat dlouhé expozice, které jsou pak zašuměné. Senzor kamery na sobě také může obsahovat prachová zrnka, která se na fotografiích také projeví negativně. Od toho nám však pomohou právě kalibrační snímky – dark, flat a bias framy. Získání co nejlepších kalibračních snímků je poměrně složité. Na internetu však najdete spoustu užitečných návodů, které s tím pomohou.



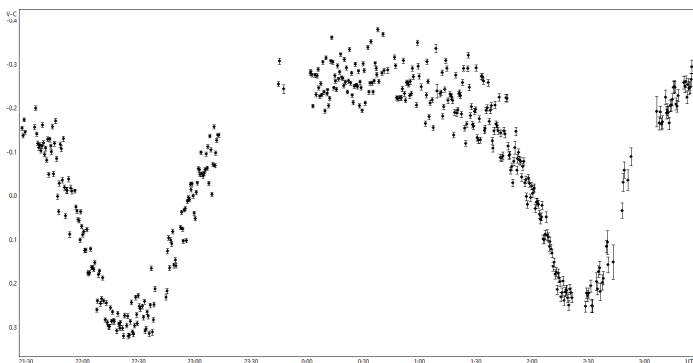
Obr. 3: Snímek ukazující polohu proměnné hvězdy AB And (označení var – červeně, nahoře), srovnávací hvězdy (comp – zeleně, dole) a kontrolní hvězdy (check #1 – modře, vpravo)

### ***Zpracování dat***

Zpracování dat je složitou, ale velice důležitou částí celé práce. Vytvořit světelné křivky nám pomůže český program Muniwin. Můžeme v něm také vytvořit výsledné kalibrační snímky. Při zpracování dat je nejdůležitější vybrat správnou srovnávací hvězdu v poli, která nám poslouží k porovnání s jasností naší proměnné. Tato hvězda by tedy měla

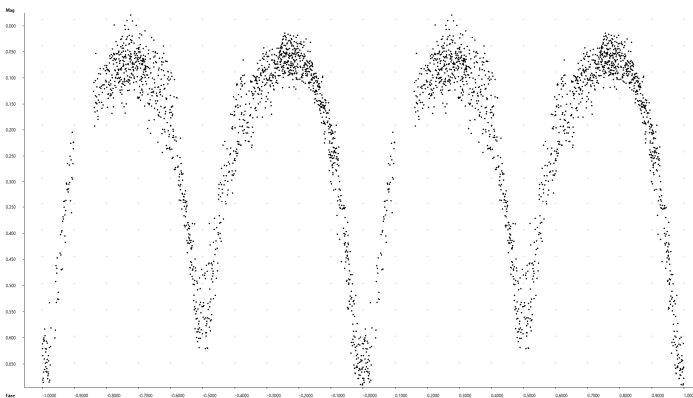
mít konstantní jasnost, ideálně by také měla být podobně jasná a měla by být podobným spektrálním typem.

Fotil jsem čtyři noci, takže jsem musel v programu Muniwin vytvořit čtyři dílčí světelné křivky – z každé noci jednu. Zde je příklad jedné takové křivky z noci ze 14. na 15. října 2023. Jak je vidět, podařilo se zachytit obě minima najednou, nejprve primární a poté i sekundární. Neblahý vliv však v závěru měla oblačnost, která občas mou cílovou hvězdu zakrývala.



Obr. 4: Světelná křivka hvězdy AB And z noci ze 14. na 15. 10. 2023

Všechny dílčí křivky jsem následně musel složit do jedné výsledné fázové křivky, což jsem udělal v programu SILICUPS. Tuto fázovou křivku můžete vidět na obr. 5.



Obr. 5: Výsledná fázová světelná křivka

Celkem jsem získal asi 16 hodin dat, což pokrylo celou periodu dokonce dvakrát. Vždy je dobré pořádit co nejvíce dat, i když se třeba opakují. Zlepší to totiž kvalitu našeho pozorování a hlavně přesnost získaných informací.

### *Rozbor dat*

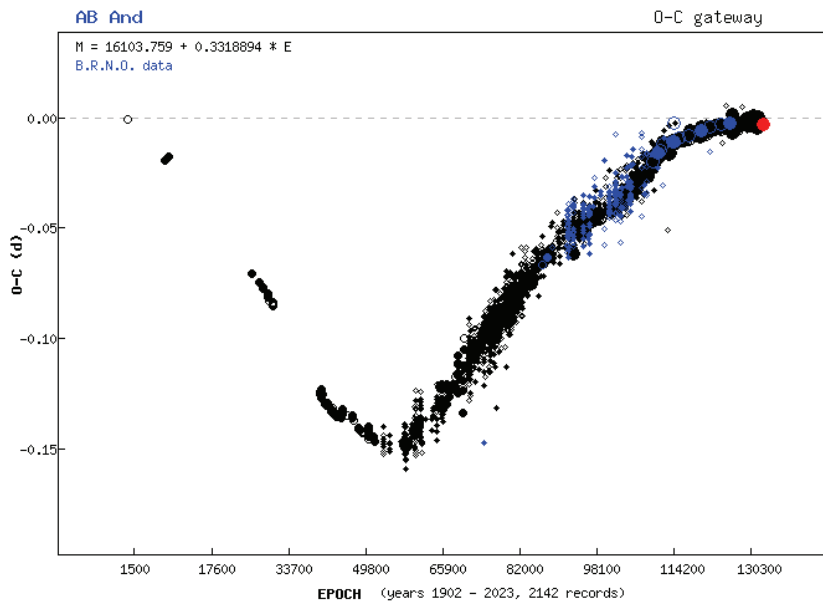
Nakonec můžeme z fázové křivky vyčíst spoustu informací. Za prvé se jasnost mění v průběhu celé periody a primární a sekundární minima jsou podobná, což naznačuje, že se skutečně jedná o typ těsné zákrytové dvojhvězdy, ve kterém se obě hvězdy vzájemně téměř dotýkají. Mohlo by se tedy jednat o proměnnou typu W UMa, jak jsme předpokládali. Z programů jednoduše vyčteme periodu proměnné hvězdy 0,331 907 5 dne, což je 7 hodin 57 minut 56,808 sekundy (bez zaokrouhlení). Tabulková hodnota činí 0,331 89 dne. Můžeme určit přesnost měření 0,000 01 dne neboli 0,86 s. Amplitudu jasnosti jednoduše odečteme z křivky: 0,62 mag. Po porovnání se srovnávací hvězdou také můžeme zjistit minimální a maximální jasnost „naší“ hvězdy 9,87 mag až 10,49 mag. Jsme schopni také určit přesný okamžik primárního minima, což se v astronomii zpravidla uvádí v Juliánském datu 2460232.4346513.

### *O-C diagram*

To ale není vše, co můžeme zjistit. U zákrytových proměnných hvězd k zákrytům nemusí vždy docházet přesně periodicky, ale perioda se může v průběhu dní až let měnit. Tento rozdíl nám udávají tzv. O-C diagramy. Čas je zde definován pomocí tzv. „epoch“, které značí počet zákrytů. Veškerá minima by se tak měla dát vypočítat, pokud přičteme k okamžiku referenčního minima  $M_0$  násobek periody a určitého počtu epoch. Ve skutečnosti však tato vypočítaná minima (C – computed) často nekorespondují přesně s pozorovanými minimy (O – observed). A právě tento rozdíl se zakresluje do tzv. O-C diagramů, které nám tedy říkají, jak se v čase mění perioda nebo nám ji na základě dlouhodobých pozorování umožňují zpřesnit.

Na výše uvedeném O-C diagramu hvězdy AB And je moje pozorování označené červenou tečkou. Jak vidíme, od roku 1902 došlo u hvězdy k poklesu hodnoty O-C, který vyvrcholil kolem roku 1960 a poté zase hodnota O-C stoupala. To může znamenat, že se s hvězdou děje něco, co neumíme s jistotou vysvětlit. Například může kolem této dvojhvězdy obíhat ještě třetí hvězda nebo mezi hvězdami přetéká velké množství materiálu, což ovlivňuje její periodu.





Obr. 6: O-C diagram hvězdy AB And vytvořený z primárního minima z druhé noci, červeným bodem je označený můj výsledek

## Závěr

Je potřeba připomenout, že přestože se může zdát, že práci ohledně výzkumu proměnných hvězd už plně převzaly kosmické sondy, schopné najednou sledovat velkou část oblohy mimo zemskou atmosféru, amatérská pozorování mají v tomto oboru stále své místo. I amatér může přispět k vědecké činnosti a pomoci s hledáním souvislostí mezi proměnnými hvězdami. A nejlepší je, pokud ho to navíc i baví.

## Literatura

- [1] Zejda, M.: Historie výzkumu proměnných hvězd. In: Mikulášek, Z. a kol.: *Pozorování proměnných hvězd I*. Contributions of the Public Observatory and Planetarium in Brno, Hvězdárna a planetárium Mikuláše Koperníka, roč. 30A, Brno, 1994, s. 9–22. [https://articles.adsabs.harvard.edu/cgi-bin/nph-article\\_query?bibcode=1994CoBrn..30A.....&db\\_key=AST&page\\_ind=0&data\\_type=GIF&type=SCREEN\\_VIEW&classic=YES](https://articles.adsabs.harvard.edu/cgi-bin/nph-article_query?bibcode=1994CoBrn..30A.....&db_key=AST&page_ind=0&data_type=GIF&type=SCREEN_VIEW&classic=YES)

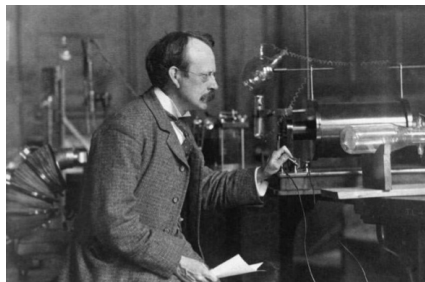
## Robert Andrews Millikan (1868–1953) – stanovil hodnoty dvou základních fyzikálních konstant

*František Jáchim, Základní škola Dukelská, Strakonice*

**Abstrakt.** Článek pojednává o základních výsledcích práce amerického fyzika Roberta Millikana – metodách určení velikosti náboje elektronu a hodnoty Planckovy konstanty. Jsou zmíněni i někteří Millikanovi spolupracovníci.

Ve druhé polovině 19. století dostali fyzikové do rukou několik pozoruhodných pomůcek umožňujících provádět řadu nových pokusů. Jednou z nich byl Ruhmkorffův induktor produkující vysoké napětí v řádu desetitisíců voltů. V kombinaci se skleněnými trubicemi se zatavenými elektrodami a naplněnými různými plyny, popř. pouze velmi zředěným vzduchem, nabízel využití ke zcela novým fyzikálním pokusům. Protože elektrické výboje v těchto trubicích probíhaly snáze než za normálního tlaku plynu a byly doprovázené viditelným zářením mezi elektrodami, práce s takovými pomůckami fyziky velice zaujala.

Mezi nadšenými experimentátory byl i anglický fyzik Joseph John Thomson (1856–1940), obr. 1.



Obr. 1: Joseph John Thomson (1856–1940) ve své laboratoři při práci s Ruhmkorffovým induktorem a trubicemi

Roku 1897 pokusy zjistil, že záření v trubici vycházející z katody je proudem záporně nabitých částic. Ve své přednášce v londýnské Royal Institution 30. dubna 1897 tuto částici nazval *corpuscule*. Dnešní název *elektron* jí dal až roku 1900 irský fyzik George Johnstone Stoney (1823–1911). J. Thomson se usilovně snažil odhalit i další vlastnosti elektronu. Ve své badatelské práci ale pouze zjistil, že poměr velikosti náboje této částice k její hmotnosti je asi 1 000krát větší než stejně počítaný poměr pro vodíkový kladný iont. Usoudil,

že má-li mít nově objevená částice stejně velký záporný náboj jako kladný iont vodíku, bude tedy asi 1 000krát lehčí než zbytek vodíkového atomu. Zůstávala tu tedy otázka, jak velký elektrický náboj má. Jeho velikost určil americký fyzik Robert Andrews Millikan (obr. 2).

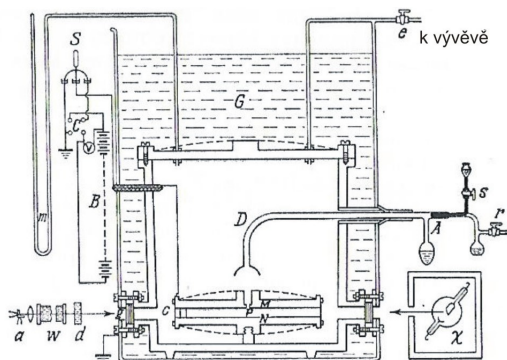


Obr. 2: Robert Andrews Millikan, r. 1932 [5]

Robert Millikan (22. 3. 1868–19. 12. 1953) studoval původně fyziku na Kolumbijské univerzitě v New Yorku. V letech 1895 až 1896 pobýval v Evropě na univerzitách v Berlíně a Göttingenu. V roce 1896 se stal asistentem profesora Alberta Abrahama Michelsona (1852–1931) na chicagské univerzitě, na které pak od roku 1910 působil jako profesor. Od roku 1921 přešel na Kalifornský technologický institut (CALTECH) v Pasadeně. Robert Millikan byl velice zručný experimentátor. Měl jistou vášeň pro obzvláště jemné práce, o nichž hovořil, že je provádí „s velmi vysokou přesností“.

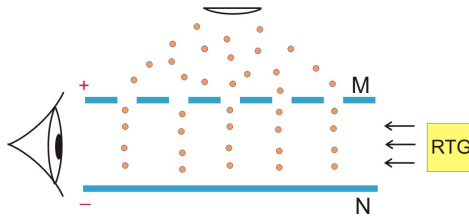
### Velikost náboje elektronu

Pro určení velikosti elektrického náboje elektronu Millikan sestavil aparaturu, jejíž schéma je na obr. 3.



Obr. 3: Schéma Millikanovy aparatury, jíž určil velikost náboje elektronu

V uzavřené nádobě vyplněné vodou G byl za stálého tlaku vzduchu sledován déšť olejových kapek z rezervoáru A propadajících deskou M na desku N. Prostor mezi deskami byl ozařován zprava RTG zářením. Pozorování a měření probíhalo mikroskopem umístěným vlevo (a). Hlavní součástí aparatury byly dvě 1,5 cm od sebe vzdálené rovnoběžné desky M, N o průměru 22 cm (horní perforovaná), mezi nimiž vytvořil homogenní elektrické pole s potenciálem 5 000 V. Otvory v horní desce nechal procházet olejový déšť ze „sprchy“ B s kapičkami o průměru asi 0,01 mm. Prostor mezi deskami byl z jedné strany ozařován rentgenovou lampou, čímž se vzduch mezi nimi ionizoval. Děj v prostoru mezi deskami je znázorněn na obr. 4.



Obr. 4: Detail děje mezi deskami M a N

Kapičky při pádu na sebe nabalovaly elektrický náboj a jejich pohyb byl přitom sledován z druhé strany dalekohledem. Celé zařízení bylo uzavřeno v nádobě se stálou teplotou a tlakem (obr. 5).



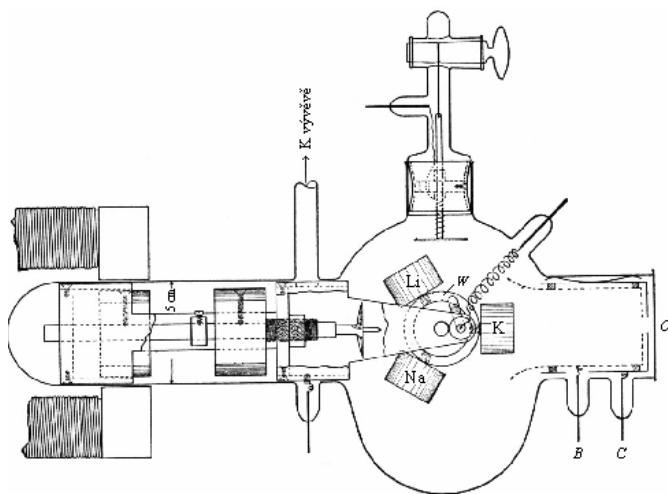
Obr. 5: Millikanův originální přístroj na měření náboje elektronu [5]

Millikan vzal v úvahu všechny síly, které na kapičky oleje působily, tzn. jejich hmotnost, sílu odporu vzduchu i sílu vyvolanou elektrickým polem. Když měřil dobu pádu kapiček mezi deskami, zjistil, že časy se kumulují do určitých

skupin, a to 15,45 s, 16,0 s, 21,85 s, 34,72 s a 85,0 s. Jakmile porovnal jejich převrácené hodnoty, tj.  $0,0803 \text{ s}^{-1}$ ,  $0,0625 \text{ s}^{-1}$ ,  $0,04458 \text{ s}^{-1}$ ,  $0,0288 \text{ s}^{-1}$  a  $0,0118 \text{ s}^{-1}$ , zjistil, že rozdíly mezi nimi jsou vždy stejné, a to  $0,017 \text{ s}^{-1}$ . Z toho usoudil, že jde zřejmě o skokové získávání náboje padající kapičkou. Pečlivým měřením získal Millikan hodnoty, které se lišily o pouhé jedno procento od v současnosti přijímané platné hodnoty  $1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}^{1)}$ .

### Velikost Planckovy konstanty

Druhou oblastí Millikanova fyzikálního zájmu byl fotoelektrický jev. Jeho podstata tkví ve vyražení elektronů z povrchu kovů dopadajícím světlem, přičemž množství uvolněných elektronů nezávisí na intenzitě světla, nýbrž na jeho frekvenci. Jev správně vysvětlil Albert Einstein v roce 1905, avšak součástí jeho teorie byla jistá fyzikální konstanta – dnes nazývaná Planckova. Právě jejímu měření se Millikan několik let věnoval. K rozhodujícímu pokusu došlo na půdě Ryersonovy fyzikální laboratoře na chicagské univerzitě. Velmi zručný mechanik ústavu Julius Parson k tomu účelu na Millikanův návrh vyrobil zařízení, jehož schéma je na obr. 6, o němž Millikan hovořil jako o „strojní dílně ve vakuu“.



Obr. 6: Millikanova měřicí aparatura („dílna ve vakuu“)

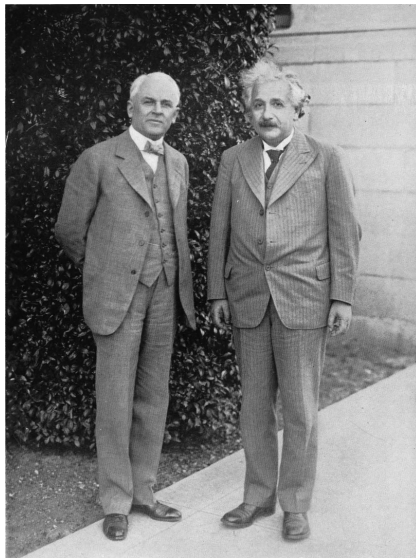
V dutině zbavené vzduchu byly umístěny tři vzorky kovů (sodík, draslík a lithium). Protože pro pokus musel být jejich povrch stále čistý, vzorky byly

<sup>1)</sup>Dnes je uváděna velikost náboje elektronu  $1,602\,176\,634 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ . Tato hodnota je také využita k definici základních jednotek.

nepřetržitě stírány nožem (na obrázku v části s pružinou). Na vzorky kovů dopadalo okénkem O monochromatické záření z křemenno-rtuťové výbojky, nastavitelné v rozmezí vlnových délek 240 nm až 540 nm (záření částečně z oboru ultrafialového i viditelného světla) a fotoelektrony byly zachycovány sběrnými válci B a C.<sup>2)</sup>

Rozpětí vlnových délek užitého záření Millikanovi umožnilo určit vztah mezi pohybovou energií elektronu a frekvencí světla s přesností asi 0,5 %. S využitím jím dříve nalezeného náboje elektronu mohl určit energii dopadajících elektronů a z toho velikost Planckovy konstanty  $6,57 \cdot 10^{-34} \text{ Js}^3)$ . Výsledky svých měření uvedl v roce 1916 v článku *Fotoelektrické určení Planckovy konstanty*.

Precizní Millikanova teoretická i technická práce na experimentech umožňujících nalezení velikosti dvou fundamentálních konstant byla v roce 1923 oceněna Nobelovou cenou za *jeho práci o elementárním elektrickém náboji i fotoelektrickém efektu*.



Obr. 7: Millikan a Albert Einstein v Kalifornském technologickém institutu, r. 1932 [5]

<sup>2)</sup>Pozn. redakce: Během svého působení na Caltechu Millikan snížil vlnovou délku až na 0,14 nm, tedy od UV přešel až k RTG záření.

<sup>3)</sup>Dnes uváděná hodnota Planckovy konstanty pro potřeby definice základních jednotek je  $6,626\,070\,15 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$ .

## Kosmické záření

Kosmické záření, jemuž je Země nepřetržitě vystavena, tvoří převážně jádra atomu vodíku, částečně i hélia. Tyto elektricky nabitě částice se pohybují rychlostí blízkou rychlosti světla a jejich velká pohybová energie jim umožňuje pronikat celou atmosférou až na povrch Země. Jedny z prvních výzkumů původně tajemného záření prováděl rakouský fyzik Viktor Hess (1883–1958). Po získání grantu Císařské akademie ve spolupráci s rakouským aeronautickým klubem vykonal několik balónových letů (jeden až do výšky 5 kilometrů) za měření dosud neznámého záření, které i na povrchu Země vybíjelo kondenzátory. Hess pro proud neznámých paprsků zavedl název *ultrazáření*<sup>4)</sup>.

Několik let po Hessově objevu Robert Millikan vyrobil elektroskop, který dokázal zachytit průběh měření na film, což umožnilo vypouštět nepilotované balóny, přirozeně do větších výšek. Robert Millikan a jeho kolega Ira Bowen (1898–1973) měřili takto ionizaci vzduchu až do výšky 15 km nad povrchem Země. Během deseti let balónových letů došlo k zásadnímu vývoji Millikanových názorů na toto záření. Nejprve se totiž domníval, že je původu zemského. Soustavnými měřeními však zjistil, že záření je poměrně složité – osahuje alfa částice, protony i neutrony a i záření gama a jeho intenzita roste se vzdáleností od povrchu Země. Byla tu tedy domněnka, že je jeho zdrojem Slunce. Ale měření v různých denních dobách – i v noci – potvrdila jeho mimosluneční původ. Pomocí vodotěsných elektroskopů ponořených do vysokohorských jezer Millikan zjišťoval energii tohoto záření, resp. míru jeho pohlcování vodou. Zjistil, že intenzita záření se ve vysokohorských jezerech projevuje asi čtyřikrát silněji než ve stejné hloubce pod hladinou na úrovni moře. Do vynalezení detektorů Hansem Geigrem (1882–1945) a Waltherem Müllerem (1905–1979) roku 1928 bylo měření pomocí elektroskopů jedinou metodou.

Robert Millikan se velmi zasloužil o rozvoj Kalifornského technologického institutu (obvykle označovaného jako Caltech), jehož správní radu vedl v letech 1921 až 1945, kdy odešel do důchodu. Zemřel 19. prosince 1953 na infarkt.

## Literatura

- [1] Halton, G.: Millikanův zápas s teorií. *Československý časopis pro fyziku*, roč. 51 (2001), s. 130–131
- [2] Lipson, A.: *Veliké experimenty v fyzice*. Mir, Moskva, 1972.
- [3] Svoboda, E.: Nové definice základních jednotek SI. *Matematika-fyzika-informatika*, roč. 28 (2019), s. 190–201.
- [4] Jáchim, F.: Velký objev malé částice. *Rozhledy matematicko-fyzikální*, roč. 86 (2011), č. 2 s. 13–17.
- [5] [https://en.wikipedia.org/wiki/Robert\\_Andrews\\_Millikan](https://en.wikipedia.org/wiki/Robert_Andrews_Millikan)

<sup>4)</sup>Za objev tohoto záření obdržel v roce 1936 Nobelovu cenu.

## Ohlédnutí za krajskými koly Matematické olympiády v Praze

*Zbyněk Štěr, předseda krajské komise MO*

V pondělí 17. června 2024 ve 14:00 se v barokním refektáři Univerzity Karlovy v budově Matematicko-fyzikální fakulty na Malostranském náměstí konalo slavnostní zakončení letošního již 73. ročníku Matematické olympiády (obr.1).



Počet účastníků se v Praze každoročně zvyšuje a letos dosáhl celkového počtu 360 soutěžících. Byly předány diplomy a ceny vítězům a úspěšným řešitelům pražských krajských kol všech kategorií. Kategorie určené pro studenty středních škol a vyšších gymnázií byly tradičně nejpočetněji zastoupeny: v kategorii A bylo oceněno 65 úspěšných soutěžících, v kategorii B 28 studentů a v kategorii C jich bylo 48. Programátorská kategorie P je početně menší, ale hraje v naší soutěži významnou roli, letos v ní uspělo 20 soutěžících. Každoročně probíhají také kategorie určené pro základní školy či nižší gymnázia. V nejvyšší z těchto kategorií Z9 je pořádáno krajské kolo, ve kterém bylo oceněno 32 soutěžících.



## ZPRÁVY

Slavnostního vyhlášení byli přítomni také zástupci organizací, které se zejména podílejí na organizaci a bezproblémovém chodu Matematické olympiády. Jedná se o Jednotu českých matematiků a fyziků, Dům dětí a mládeže Praha 2 a dvě fakulty, které velmi významně a dlouhodobě MO podporují, totiž Matematicko-fyzikální fakulta UK v Praze a Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská ČVUT v Praze.

Na závěr uvedme, že nejlepší soutěžící všech kategorií se kvalifikovali na celostátní soustředění a soutěže, ve kterých právě Praha dosahuje tradičně vynikajících výsledků. Zejména v prestižním celostátním kole kategorie A soutěžící z Prahy obsadili všech 5 prvních míst (obr. 2).



Vydává Jednota českých matematiků a fyziků  
tel.: 222 090 708-9, e-mail: jcmf@math.cas.cz  
za podpory MFF UK Praha a FJFI ČVUT Praha



Vycházejí 4 čísla v kalendářním roce

Obálku navrhl Bohuslav Šír

Sazbu programem  $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$  připravil RNDr. Miloslav Závodný

Adresa redakce: MFF UK, V Holešovičkách 2, 182 00 Praha 8–Troja  
e-mail: rozhledy@jcmf.cz

Internetové stránky časopisu: <https://rozhledy.jcmf.cz/>

Vytiskla Tiskárna Matula, Olomoucká 27, 618 00 Brno

Distribuci pro předplatitele provádí v zastoupení vydavatele  
MediaCall, s. r. o.

Vídeňská 546/55, 639 00 Brno

tel.: +420 532 165 165, e-mail: [export@mediacall.cz](mailto:export@mediacall.cz)

web: [www.zahranicnitisk.com](http://www.zahranicnitisk.com)

ISSN 0035-9343

MK ČR E4691

© Jednota českých matematiků a fyziků, Praha 2024

---

## Redakční rada

Vedoucí redaktorka:

doc. Ing. Lubomíra Dvořáková, Ph.D., FJFI ČVUT Praha

Redaktorka pro matematiku:

doc. Ing. Lubomíra Dvořáková, Ph.D., FJFI ČVUT Praha

Redaktor pro fyziku:

RNDr. Věra Krajčová, Ph.D., FJFI ČVUT Praha

Členové redakční rady:

prof. RNDr. Vlastimil Dlab, DrSc., F.R.S.C., Praha

doc. RNDr. Zdeněk Drozd, Ph.D., MFF UK Praha

RNDr. Petr Hanuš, FSv ČVUT Praha

doc. RNDr. Jaroslav Hora, CSc., FPE ZČU Plzeň

prof. RNDr. Ivo Kraus, DrSc., FJFI ČVUT Praha

doc. RNDr. Jan Kříž, Ph.D., PřF UHK Hradec Králové

prof. RNDr. Miroslav Lávička, Ph.D., FAV ZČU Plzeň

RNDr. Pavel Pokorný, Ph.D., VŠCHT Praha

RNDr. Miroslav Randa, Ph.D., PdF ZČU Plzeň

RNDr. Filip Studnička, Ph.D., PřF UHK Hradec Králové

doc. RNDr. Jan Šlégr, Ph.D., PřF UHK Hradec Králové

prof. RNDr. Pavel Tlustý, CSc., PedF JU České Budějovice

doc. RNDr. Pavel Töpfer, CSc., MFF UK Praha

RNDr. Vladimír Wagner, CSc., ÚJF AV ČR Řež

# Matika Česku

## program pro podporu učitelů a učitelek matematiky

### Pomozte nám vrátit matematiku Česku!

Přihlaste se od školního roku 2024/2025 do programu **Matika Česku** a získejte **roční finanční podporu**. Můžete se o ni ucházet, pokud splňujete následující kritéria.

- Učíte matematiku, fyziku nebo informatiku
- Ve školství nepůsobíte déle než 5 let
- Aktivně s dětmi pracujete
- Věnujete se sebevzdělávání a profesnímu rozvoji

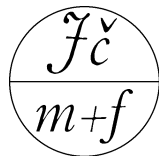
### Zaujal vás náš projekt?

Kontaktujte nejpozději do 30. 6. 2024 manažerku projektu Terezu Špalkovou (**tereza.spalkova@qminers.com**), která vás bude informovat o průběhu výběrového řízení. Počet účastníků do programu je omezen.

**Milujeme poznání, milujeme matematiku!**

*Projekt Matika Česku zmapoval, že v Česku chybí stovky učitelů matematiky. Vysoké školy neprodukují dostatečný počet nových mladých vyučujících a průměrný věk učitelů matematiky se neustále zvyšuje. Věříme, že přímá podpora motivovaným mladým pedagogům pomůže k tomu, aby se situace zlepšila. Kvalitní a moderní výuka matematiky je klíčem k budoucnosti našich dětí i konkurenceschopnosti Česka!*

# ROZHLEDY matematicko-fyzikální Ročník 99 (2024), číslo 2



---

## OBSAH

M. Kučera: „Devítková“ vlastnost prvočísel . . . . .	1
J. Jekl: Sudoku pohledem matematiky: Odmocnina z jedné a soustava rovnic . . . . .	6
M. Škorpilová: Sudoku . . . . .	12
V. Dlab: Dva čtverce či obdélníky v obecném trojúhelníku . . . . .	16
L. Moudrý: Pokrývací systémy . . . . .	27
K. Sedláček: Rozměňování peněz pomocí geometrie . . . . .	33
Matematické oříšky: POP IT . . . . .	42
D. Kurtin: Proměnné hvězdy a význam pořizování jejich dat amatérsky . . . . .	44
F. Jáchim: Robert Andrews Millikan (1868–1953) – stanovil hodnoty dvou základních fyzikálních konstant . . . . .	57
Z. Šír: Ohlédnutí za krajskými koly Matematické olympiády v Praze . . .	63

---

## Pokyny pro autory

Příspěvky dodávejte na adresu redakce v elektronické podobě. Nejlépe napsané ve formátu  $\text{L}^{\text{T}}\text{E}^{\text{X}}$ , přijatelný je i formát Plain $\text{T}^{\text{E}}\text{X}$ , je akceptovatelný i text připravený editorem Word či podobným.

Pokud jde o obrázky, je žádoucí, aby byly připraveny v reprodukovatelné podobě. Každý obrázek nechte v samostatném souboru, nejlépe ve formátu eps nebo pdf. Přípustná je též bitmapa v dostatečném rozlišení.

Ke každému zasílanému příspěvku (ne u soutěží, zpráv a recenzí) přiložte krátkou anotaci v českém jazyce. Dále je žádoucí, aby u každého příspěvku byla uvedena literatura, na kterou je v textu odkazováno.