

# ROZ HLEDY

**MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ**

ČASOPIS PRO ZÁJEMCE O MATEMATIKU, FYZIKU A INFORMATIKU

ROČNÍK 99 (2024) • ČÍSLO 3

## Pythagorejské průměry, kontraharmonický průměr a zlatý řez v pravoúhlém trojúhelníku

*Luděk Spíchal, Česká lesnická akademie, Trutnov*

Postupy určování průměrů (průměrných hodnot) byly pravděpodobně vynalezeny brzy poté, co lidé začali počítat. Ačkoliv je původ těchto výpočtů často připisován starověkým řeckým matematikům, jejich historie sahá patrně mnohem dále.

Není snad nikoho, kdo by neznal pojem aritmetického průměru, například při výpočtu průměrné mzdy. Geometrický a harmonický průměr, označované často společně s průměrem aritmetickým jako pythagorejské průměry, jsou možná o něco méně známé. Geometrický průměr je ovšem ve skutečnosti vhodným nástrojem pro popis proporcionálního růstu, a to jak exponenciálního růstu, kdy je míra růstu konstantní, tak proměnlivého růstu. Harmonický průměr je vhodnější než aritmetický průměr v případech, kdy pracujeme s poměry. Může se jednat např. o stanovení průměrné rychlosti nebo odporu v elektrickém obvodu s paralelně zapojenými odpory.

Připomeňme si definice *aritmetického* ( $\mathcal{A}$ ), *geometrického* ( $\mathcal{G}$ ) a *harmonického* ( $\mathcal{H}$ ) průměru kladných reálných čísel  $a, b$

$$\mathcal{A}(a, b) = \frac{a + b}{2},$$

$$\mathcal{G}(a, b) = \sqrt{ab},$$

$$\mathcal{H}(a, b) = \frac{2ab}{a + b},$$

pro které dále platí, že

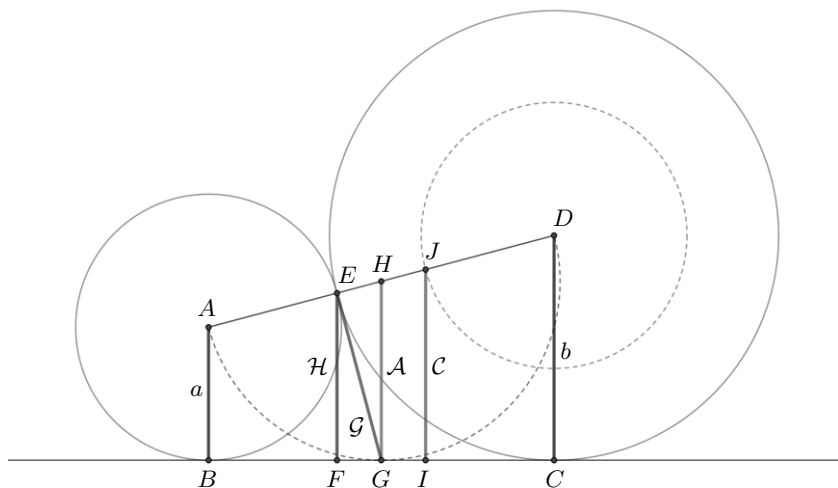
$$\mathcal{H} \leq \mathcal{G} \leq \mathcal{A}, \tag{1}$$

$$\mathcal{G}^2 = \mathcal{A}\mathcal{H}. \tag{2}$$

Řecký matematik Eudoxos z Knidu (asi 408 př. n. l. – asi 355 př. n. l.) doplnil výše uvedenou trojici o tzv. *kontraharmonický průměr*, pro který platí

$$\mathcal{C}(a, b) = \frac{a^2 + b^2}{a + b}.$$

Kontraharmonický průměr jako méně běžný typ střední hodnoty nalézá použití např. při filtrování šumu (redukci zrnění) na obrázcích [12].



Obr. 1: Konstrukce pythagorejských průměrů  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{G}$ ,  $\mathcal{H}$  a kontraharmonického průměru  $\mathcal{C}$  [7]

**Problém 1.** Ukažte, že pro součet harmonického a kontraharmonického průměru čísel  $a$ ,  $b$  platí

$$\mathcal{H} + \mathcal{C} = a + b.$$

Výše uvedené průměry ještě pro potřeby článku doplníme o *kvadratický průměr*  $\mathcal{Q}$  čísel  $a$ ,  $b$ , pro který platí

$$\mathcal{Q}(a, b) = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}.$$

Kvadratický průměr nalézá uplatnění v takových oblastech, jako je např. statistika, fyzika (akustika) či elektrotechnika.<sup>1)</sup>

*Zlatý řez* (zlatý poměr, zlatý průměr) je číslo, které označuje poměr, kdy se úsečka dělí do dvou částí takovým způsobem, že poměr délky celé

<sup>1)</sup>Ve statistice hraje důležitou roli při analýze dat a pochopení rozložení hodnot v datových souborech (např. rozptyl či směrodatná odchylka). V oblasti elektrotechniky můžeme zmínit např. výpočet efektivní hodnoty střídavého napětí nebo střídavého proudu.

úsečky vůči délce její větší části se rovná poměru délky větší části k délce té menší [1]. Číselnou hodnotu zlatého řezu získáme z řešení rovnice

$$\frac{x+y}{x} = \frac{x}{y},$$

kde  $x, y$  ( $x > y$ ) jsou části úsečky o délce  $x + y$ . Pokud dále položíme  $y = 1$ , pak po zjednodušení dostáváme rovnici

$$x^2 - x - 1 = 0, \tag{3}$$

pro jejíž kořeny platí

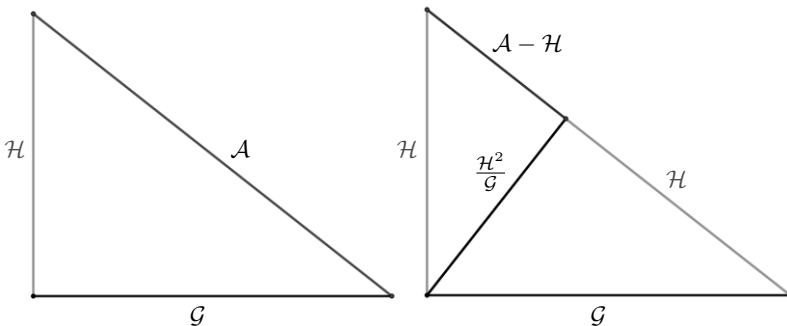
$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Zlatým řezem  $\varphi$  je kladný kořen

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

### Pythagorejské průměry a kontraharmonický průměr v pravoúhlém trojúhelníku

Domenico v článku [2] dokázal následující zajímavou větu (obr. 2 vlevo).



Obr. 2: Pythagorejské průměry  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{G}$ ,  $\mathcal{H}$  v pravoúhlém trojúhelníku, kde  $\mathcal{A}/\mathcal{H} = \varphi$

**Věta.** *Aritmetický, geometrický a harmonický průměr dvou kladných reálných čísel jsou délky stran pravoúhlého trojúhelníku právě tehdy, když je poměr aritmetického a harmonického průměru roven zlatému řezu.*

Podle Pythagorovy věty platí

$$\mathcal{H}^2 + \mathcal{G}^2 = \mathcal{A}^2.$$

Použitím rovnosti (2) dostáváme

$$\mathcal{H}^2 + \mathcal{A}\mathcal{H} = \mathcal{A}^2,$$

kde pro kladný kořen platí

$$\mathcal{A} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \mathcal{H} = \varphi \mathcal{H}.$$

Opačnou implikaci bychom dokázali obrácením uvedeného postupu.

Klademe si za cíl uvést výše zmíněnou větu do širších souvislostí, kde zahrneme do úvah rovněž kontraharmonický průměr, kvadratický průměr a tzv. Keplerovy trojúhelníky.

Pro některé dále zmíněné úvahy může být užitečné vyjádřit vztah mezi čísly  $a$  a  $b$  v případě, že  $\mathcal{A}/\mathcal{H} = \varphi$ . Zjednodušením rovnice

$$\frac{a+b}{2} = \frac{2ab}{a+b} \varphi,$$

dostáváme  $(a+b)^2 = 4\varphi ab$ , a dále<sup>2)</sup>

$$\frac{b}{a} = 2 + \sqrt{5} = 2\varphi + 1, \quad \text{nebo} \quad \frac{b}{a} = \sqrt{5} - 2 = 2\varphi - 3.$$

Ve zbývající části textu budeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že  $b > a$ , tj.  $b/a = 2 + \sqrt{5} = 2\varphi + 1$ , kde pro pythagorejské průměry čísel  $a, b$  platí

$$\mathcal{A}(a, b) = \frac{a+b}{2} = a\varphi^2,$$

$$\mathcal{G}(a, b) = \sqrt{ab} = a\varphi\sqrt{\varphi},$$

$$\mathcal{H}(a, b) = \frac{2ab}{a+b} = a\varphi.$$

---

<sup>2)</sup> Kořen  $2 + \sqrt{5}$  je současně řešením rovnice  $x^2 - 4x - 1 = 0$ . Rovnice ve tvaru  $x^2 - px - 1 = 0$  ( $p \in \mathbb{N}$ ) mají kořeny  $x_{1,2} = (p \pm \sqrt{p^2 + 4})/2$ . Kladné kořeny ( $\sigma_p$ ) se obvykle označují jako *kovové řezy* (popř. *kovové průměry*), např.  $\sigma_1 = (1 + \sqrt{5})/2$  je výše zmíněný *zlatý řez*,  $\sigma_2 = 1 + \sqrt{2}$  je *stříbrný řez*,  $\sigma_3 = (3 + \sqrt{13})/2$  je *bronzový řez*,  $\sigma_4 = 2 + \sqrt{5}$  je *měděný řez* atd. [8, 9].

**Problém 2.** Ukažte, že platí

$$2\varphi + 1 = \varphi^3.$$

**Problém 3.** Ukažte, že platí

$$\mathcal{C}(a, b) = a(\varphi + 2).$$

**Problém 4.** Ukažte, že platí

$$\mathcal{Q}(a, b) = a\varphi\sqrt{\varphi + 2}.$$

Výše uvedenou větu můžeme nyní doplnit o následující důsledek.

**Důsledek.** *Jestliže aritmetický, geometrický a harmonický průměr dvou kladných reálných čísel jsou délky stran pravoúhlého trojúhelníku, kde poměr aritmetického a harmonického průměru je zlatý řez, pak výška dělí přeponu o délce  $\mathcal{A}$  na úseky o délkách  $\mathcal{H}$  a  $\mathcal{A} - \mathcal{H}$ .*

Důsledek (obr. 2 vpravo) platí, jestliže

$$\mathcal{H}^2 - (\mathcal{A} - \mathcal{H})^2 = \mathcal{G}^2 - \mathcal{H}^2.$$

Použitím substituce  $\mathcal{A}/\mathcal{H} = \varphi$  a dalším zjednodušením dále dostáváme rovnici ve tvaru

$$1 + \varphi = \varphi^2,$$

která je ekvivalentní s rovnicí (3). Pro délku výšky dále podle Euklidovy věty o výšce platí

$$\sqrt{\mathcal{H}(\mathcal{A} - \mathcal{H})} = \sqrt{\mathcal{H}(\varphi\mathcal{H} - \mathcal{H})} = \mathcal{H}\sqrt{\varphi - 1} = \frac{\mathcal{H}}{\sqrt{\varphi}} = \frac{\mathcal{H}^2}{\mathcal{G}} = a\sqrt{\varphi}.$$

Následující tvrzení shrnuje některé další vztahy mezi výše zmíněnými průměry v pravoúhlém trojúhelníku, kde  $\mathcal{A}/\mathcal{H} = \varphi$ . Důkazy jednotlivých tvrzení přenecháváme laskavému čtenáři jako cvičení.

**Tvrzení 1.** *Jestliže  $\mathcal{A}/\mathcal{H} = \varphi$ , pak*

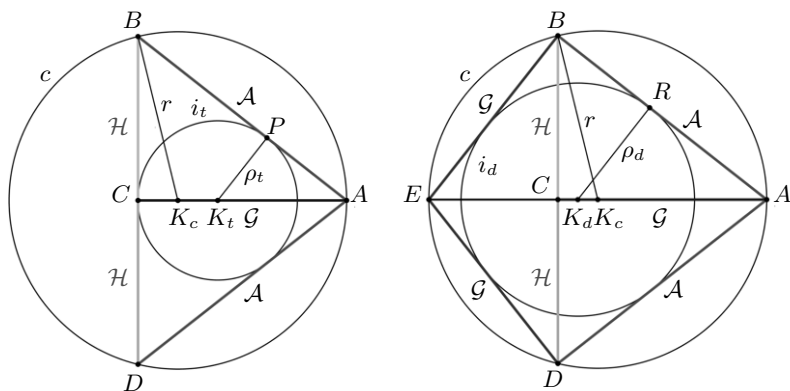
1.  $\mathcal{A} - \mathcal{H} = a$ ,
2.  $\mathcal{A} + \mathcal{H} = b$ .
3.  $\mathcal{C} - \mathcal{A} = a$ ,
4.  $\mathcal{C} + \mathcal{A} = 2a + b$ .

### Keplerovy trojúhelníky

Pokud platí, že  $\mathcal{A}/\mathcal{H} = \varphi$ , pak  $\mathcal{A}/\mathcal{G} = \mathcal{G}/\mathcal{H} = \sqrt{\varphi}$ . Délky stran pravoúhlého trojúhelníku tvoří geometrickou posloupnost, kde pro poměr délek stran platí

$$1 : \sqrt{\varphi} : \varphi.$$

Pravoúhlé trojúhelníky splňující uvedený poměr délek stran se označují jako *Keplerovy trojúhelníky*.<sup>3)</sup> Z vlastností těchto trojúhelníků můžeme zmínit, že pokud vezmeme dvě kopie Keplerova trojúhelníku a přiložíme je k sobě druhou nejdelší stranou, pak výsledný rovnoramenný trojúhelník má největší poloměr vepsané kružnice ze všech rovnoramenných trojúhelníků s danou délkou ramen [11].



Obr. 3: Kružnice opsaná a vepsaná (vlevo: trojúhelník  $ABD$  tvořený dvěma kopiemi Keplerova trojúhelníku, vpravo: pravoúhlý deltoid  $ABED$ ;  $\mathcal{A}/\mathcal{H} = \varphi$ ,  $|\mathcal{AC}| = \mathcal{G}$ )

Vzhledem k situaci znázorněné na obr. 3 (vlevo) můžeme konstruovat kružnici opsanou a vepsanou trojúhelníku  $ABD$ , který tvoří dvě shodné kopie Keplerova trojúhelníku. Snadno lze ověřit, že obsah a obvod trojúhelníku  $ABD$  je  $S = \mathcal{H}\mathcal{G}$ ,  $o = 2(\mathcal{H} + \mathcal{A})$  a pro poloměry vepsané ( $\rho_t$ ) a

<sup>3)</sup> Johannes Kepler (1571–1630) se o trojúhelnících v roce 1597 zmiňuje v dopise svému učiteli Michaelu Mästlinovi. Průřez Velké pyramidy v Gíze je podle Keplera tvořen rovnoramenným trojúhelníkem složeným ze dvou pravoúhlých trojúhelníků, jejichž strany jsou v poměru  $1 : \sqrt{\varphi} : \varphi$ . Existují ovšem i starší zmínky o těchto trojúhelnících, např. v knize *Liber mensurationum* perského matematika Abú Bakr al-Karajilho (953–1029) nebo knize *Practica geometriae* italského matematika Leonarda Pisánského zvaného Fibonacci (okolo 1170–okolo 1240) [10].

opsané ( $r$ ) kružnice proto platí<sup>4)</sup>

$$\rho_t = \frac{\mathcal{HG}}{\mathcal{H} + \mathcal{A}} = \frac{a}{\sqrt{\varphi}},$$

$$r = \frac{2\mathcal{HA}^2}{4\mathcal{HG}} = \frac{\mathcal{A}^2}{2\mathcal{G}} = \frac{\varphi^2\sqrt{\varphi}}{2}a,$$

tj. poměr jejich poloměrů je

$$\frac{r}{\rho_t} = \frac{\varphi^3}{2}.$$

Středy kružnic leží na výšce rovnoramenného trojúhelníku  $ABD$ , pro vzdálenosti středů kružnic od základny platí  $|K_tC| = \rho_t = a/\sqrt{\varphi}$ ,

$$|K_cC| = \sqrt{r^2 - \mathcal{H}^2} = \sqrt{\frac{\varphi^2\mathcal{G}^2}{4} - \frac{\mathcal{G}^2}{\varphi}} = \sqrt{\frac{a^2\varphi^5}{4} - a^2\varphi^2} =$$

$$= \frac{a\varphi\sqrt{\varphi^3 - 4}}{2} = \frac{a\varphi\sqrt{2\varphi - 3}}{2}.$$

Poměr vzdáleností středů kružnic od základny trojúhelníku je konstantní a roven

$$\frac{|K_tC|}{|K_cC|} = \frac{2}{\varphi\sqrt{\varphi}\sqrt{2\varphi - 3}},$$

kde

$$\varphi\sqrt{\varphi}\sqrt{2\varphi - 3} = \sqrt{\varphi^3(2\varphi - 3)} = \sqrt{(2\varphi + 1)(2\varphi - 3)} =$$

$$= \sqrt{4\varphi^2 - 4\varphi - 3} = \sqrt{4(\varphi + 1) - 4\varphi - 3} = 1,$$

proto

$$\frac{|K_tC|}{|K_cC|} = 2.$$

Na obr. 3 (vpravo) přímka  $AC$  protíná kružnici opsanou trojúhelníku  $ABD$  v bodě  $E$ , kde délka úsečka  $AE$  je průměrem opsané kružnice.

---

<sup>4)</sup>Při odvození jsme využili známé vzorce pro poloměr kružnice trojúhelníku vpsané a opsané.



Body  $ABED$  tvoří pravoúhlý tečnový čtyřúhelník (deltoid) s páry shodných stran  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{G}$  a úhlopříčkami délek  $|AE| = 2r$  a  $|BD| = 2\mathcal{H}$ . Podle Pythagorovy věty pro délku delší úhlopříčky  $AE$  platí

$$|AE| = \sqrt{\mathcal{A}^2 + \mathcal{G}^2} = \sqrt{\varphi\mathcal{G}^2 + \mathcal{G}^2} = \mathcal{G}\sqrt{\varphi + 1} = \varphi\mathcal{G}.$$

Délka úsečky  $AC$  ( $|AC| = \mathcal{G}$ ) je tedy zlatým řezem délky úsečky  $AE$ .

Poloměr kružnice vepsané deltoиду, který určíme jako poměr obsahu deltoidu a poloviny jeho obvodu, je  $\rho_d = a(\varphi + 1)/(\sqrt{\varphi} + 1)$ . Z podobnosti trojúhelníků  $ABE$  a  $ARK_d$  plyne, že

$$|AK_d| = a\varphi \frac{\varphi + 1}{\sqrt{\varphi} + 1}.$$

Vzdálenost středu  $K_d$  kružnice vepsané deltoidu  $ABED$  od průsečíku úhlopříček  $C$  je

$$|K_dC| = |AC| - |AK_d| = a\varphi\sqrt{\varphi} - a\varphi \frac{\varphi + 1}{\sqrt{\varphi} + 1} = a\varphi \frac{\sqrt{\varphi} - 1}{\sqrt{\varphi} + 1}.$$

Poměr vzdáleností středu kružnice opsané a vepsané deltoidu od průsečíku  $C$  je konstantní a roven přibližně

$$\frac{|K_cC|}{|K_dC|} = \frac{\sqrt{2\varphi - 3}(\sqrt{\varphi} + 1)}{2(\sqrt{\varphi} - 1)} \approx 2,$$

Vzdálenosti středů kružnic (obr. 3) od bodu  $C$  jsou tedy přibližně v poměru  $1 : 2 : 4$ .

V následujícím tvrzení popíšeme vztah mezi pythagorejskými průměry v pravoúhlých trojúhelnících tvořících deltoid  $ABED$  (obr. 3 vpravo).

**Tvrzení 2.** *Nechť  $\mathcal{A}/\mathcal{H} = \varphi$ . Aritmetický a geometrický průměr tvoří délky odvěsen pravoúhlého trojúhelníku právě tehdy, když harmonický průměr tvoří délku výšky nad přeponou trojúhelníku.*

Tvrzení dokážeme pro obě implikace.

" $\Rightarrow$ " Úseky přepony  $\varphi\mathcal{G}$  mají délky  $\mathcal{G}$  a  $\mathcal{G}(\varphi - 1)$ . Použitím Euklidovy věty o výšce dostáváme  $AE$  délky

$$\mathcal{G}^2(\varphi - 1) = \frac{\mathcal{G}^2}{\varphi} = \frac{\varphi\mathcal{H}^2}{\varphi} = \mathcal{H}^2.$$

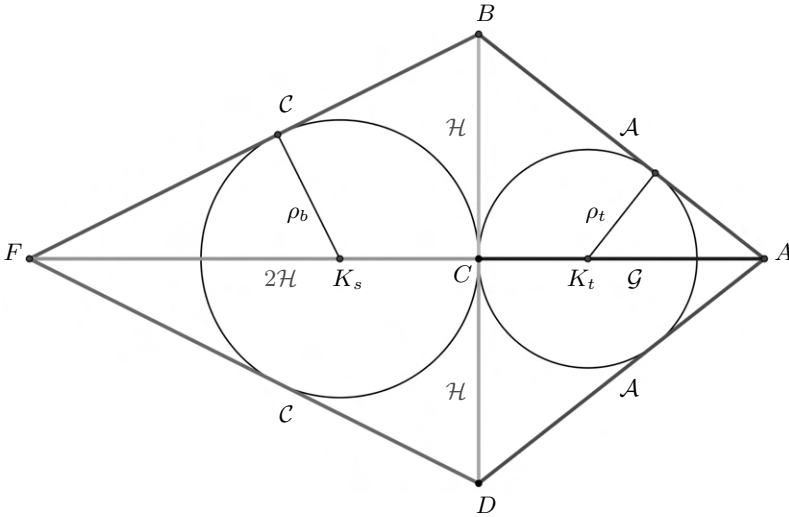
" $\Leftarrow$ " V pravoúhlém trojúhelníku s odvěsnami o délkách  $x$ ,  $y$ , přeponou o délce  $z$  a výškou nad přeponou o délce  $\mathcal{H}$  platí  $xy = z\mathcal{H}$ . Podle předpokladu je trojúhelník keplerovský ( $z = y\sqrt{\varphi}$ ,  $y = x\sqrt{\varphi}$ ), proto

$$x = \mathcal{H}\sqrt{\varphi} = \mathcal{G}, \quad y = \mathcal{G}\sqrt{\varphi} = \mathcal{A}.$$

Na obr. 4 je ke dvojici Keplerových trojúhelníků základnou přiložen rovnoramenný trojúhelník  $DBF$ , jehož ramena mají délku  $\mathcal{C}$  a výšku k základně o délce

$$|CF| = \sqrt{\mathcal{C}^2 - \mathcal{H}^2} = 2a\varphi = 2\mathcal{H},$$

kde poslední rovnost vyplývá z tvrzení 1.



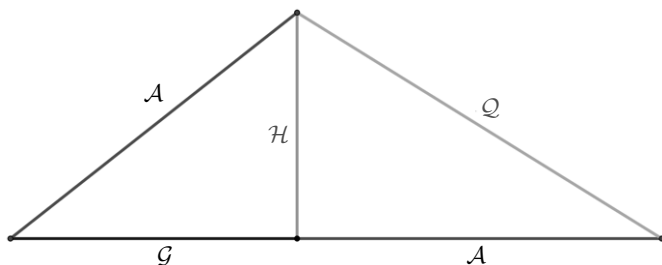
Obr. 4: Pythagorejské průměry  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{G}$ ,  $\mathcal{H}$  a kontraharmonický průměr  $\mathcal{C}$  v deltoidu ( $\mathcal{A}/\mathcal{H} = \varphi$ ,  $|CF| = 2\mathcal{H}$ )

Složením vzniká deltoid s páry shodných stran o délkách  $\mathcal{A}$  a  $\mathcal{C}$ . Kratší úhlopříčka má délku  $2\mathcal{H}$ , delší pak  $\mathcal{G} + 2\mathcal{H}$ . Kružnice vepsané trojúhelníkům  $ABD$  a  $DBF$  tvořících deltoid  $ABFD$  mají poloměry  $\rho_t = a/\sqrt{\varphi}$  a

$$\rho_b = \frac{2\mathcal{H}^2}{\mathcal{H} + \mathcal{C}} = \frac{2a^2\varphi^2}{a\varphi + a(\varphi + 2)} = a\frac{\varphi^2}{\varphi + 1} = a,$$

tj. jejich poloměry jsou v poměru  $1 : \sqrt{\varphi}$ .

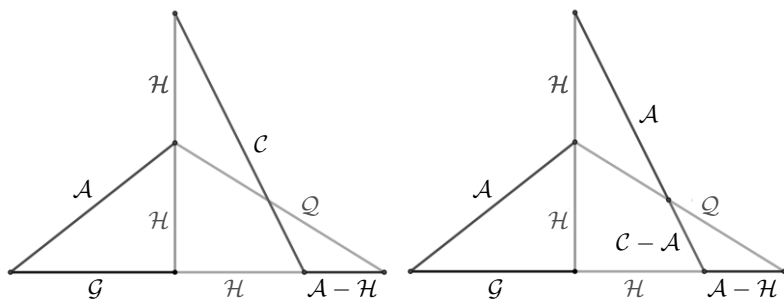
Poslední poznámku v této sekci věnujeme vztahu mezi pythagorejskými průměry  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{G}$  a průměrem kvadratickým opět v případě, kdy  $\mathcal{A}/\mathcal{H} = \varphi$ . Laskavý čtenář si sám může snadno ověřit, že v daném případě platí následující tvrzení (obr. 5).



Obr. 5: Pythagorejské průměry  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{G}$  a průměr kvadratický  $\mathcal{Q}$  v trojúhelníku s výškou  $\mathcal{H}$  ( $\mathcal{A}/\mathcal{H} = \varphi$ )

**Tvrzení 3.** Jestliže  $\mathcal{A}/\mathcal{H} = \varphi$ , pak  $\mathcal{A}^2 + \mathcal{H}^2 = \mathcal{Q}^2$ .

Na obr. 6 (vlevo) je doplněn do konstrukce průměrů rovněž průměr kontraharmonický.



Obr. 6: Pythagorejské průměry  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{G}$ ,  $\mathcal{H}$ , kontraharmonický  $\mathcal{C}$  a kvadratický průměr  $\mathcal{Q}$  ( $\mathcal{A}/\mathcal{H} = \varphi$ )

**Problém 5.** Ukažte (obr. 6 vpravo), že kvadratický průměr dělí průměr kontraharmonický na úseky o délkách  $\mathcal{A} = a\varphi^2$  a  $\mathcal{C} - \mathcal{A} = a$ , tj. v poměru druhé mocniny (čtverce) zlatého řezu.

**Závěr**

Mezi pravoúhlými trojúhelníky, pythagorejskými průměry, průměrem kontraharmonickým, kvadratickým a zlatým řezem je jistě mnoho dalších vztahů a souvislostí a nabízí se tak možnost k dalším úvahám. Některé pěkné příklady vztahů mezi pravoúhlými trojúhelníky a zlatým řezem lze nalézt například v článku [6].

Ukažme nyní na závěr, jakým způsobem Pythagoras uvažoval o výše zmíněných průměrech. Metoda proporcí, kterou použil k jejich konstrukci, je následující. Uvažujme čísla  $a > b > c > 0$ , pro která vypočítáme rozdíly  $a - b$  a  $b - c$  a jejich poměr  $(a - b)/(b - c)$  postupně porovnáme s poměry původních čísel. Číslo  $b$  je pak [3]

- aritmetickým průměrem čísel  $a$  a  $c$ , jestliže

$$\frac{a - b}{b - c} = \frac{a}{a} = \frac{b}{b} = \frac{c}{c},$$

- geometrickým průměrem čísel  $a$  a  $c$ , jestliže

$$\frac{a - b}{b - c} = \frac{a}{b} = \frac{b}{c},$$

- harmonickým průměrem čísel  $a$  a  $c$ , jestliže

$$\frac{a - b}{b - c} = \frac{a}{c},$$

- kontraharmonickým průměrem čísel  $a$  a  $c$ , jestliže

$$\frac{a - b}{b - c} = \frac{c}{a}.$$

Kvadratický průměr čísel  $a$  a  $c$ , jehož původ lze vysledovat až k Pythagorově větě, lze zavést jako rovnost poměrů

$$\frac{a - b}{b - c} = \frac{b + c}{a + b}.$$

K výše uvedeným poměrům by bylo možné doplnit i další, které zde neuvádíme, neboť nenalezly v moderní matematice konkrétní uplatnění (více např. [4]).

Literatura

- [1] Bellos, A.: *Alexova dobrodružství v zemi čísel*. Dokořán, Praha, 2015.
- [2] Domenico, Di A.: The golden ratio—the right triangle—and the arithmetic, geometric, and harmonic means. *The Mathematical Gazette*, roč. 89 (2005), č. 515, s. 261–261.
- [3] Gielis, J.: *The Geometrical Beauty of Plants*. Atlantis Press, Paris, 2017.
- [4] Høibakk, R., Lukkassen, D., Meidell, A., Persson, L. E.: Geometric construction of some Lehmer means. *Mathematics*, roč. 6 (2018), č. 11, s. 251, <https://doi.org/10.3390/math6110251>.
- [5] Lokesha, V., Padmanabhan, S., Nagaraja, K. M., Simsek, Y.: Relation between Greek means and various means. *General Mathematics*, roč. 17 (2009), č. 3, s. 3–13.
- [6] Scimone, A.: Some nice relations between right-angled triangles and the Golden Section. *Teaching Mathematics and Its Applications*, roč. 30 (2011), s. 85–94.
- [7] Spíchal, L.: The geometric constructions of the Greek means. *Symmetry: Culture and Science*, roč. 34 (2023), č. 4, s. 407–416.
- [8] de Spinadel, V. W.: *From the golden mean to chaos*. Nueva Librería, Buenos Aires, 1998.
- [9] de Spinadel, V. W., Paz, J. M.: A new family of irrational numbers with curious properties. *Humanistic Mathematics Network Journal*, roč. 19 (1999), s. 33–37.
- [10] Sugimoto, T.: Inducing the Symmetries Out of the Complexity: The Kepler Triangle and Its Kin as a Model Problem. In: Darvas, G. (eds): *Complex Symmetries*. Birkhäuser, Cham, 2021.
- [11] *Kepler triangle*. Wikipedia, [https://en.wikipedia.org/wiki/Kepler\\_triangle](https://en.wikipedia.org/wiki/Kepler_triangle). [cit. 2024-06-11].
- [12] *Contraharmonic mean*. Wikipedia, [https://en.wikipedia.org/wiki/Contraharmonic\\_mean](https://en.wikipedia.org/wiki/Contraharmonic_mean). [cit. 2024-06-05].

## Některá využití harmonického průměru ve výuce matematiky na střední škole

*Jan Fiala, Marika Hruběšová, Tomáš Roskovec*

*Pedagogická fakulta, Jihočeská univerzita, České Budějovice*

**Abstrakt.** Článek představuje základní poznatky o harmonickém průměru a demonstruje jeho možná využití při řešení středoškolských úloh z matematiky. V navazujícím příspěvku se zaměříme na využití harmonického průměru ve fyzice a finančnictví.

### Harmonický průměr

**Definice 1.** Prostý harmonický průměr, označený  $\bar{x}_H$ ,  $n$  kladných<sup>1)</sup> reálných čísel (hodnot sledovaného kvantitativního znaku  $x$ )  $x_1, x_2, \dots, x_n$  je definován jako podíl počtu hodnot  $n$  a součtu  $n$  převrácených hodnot k hodnotám  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , tj.

$$\bar{x}_H = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}}. \quad (1)$$

Vzorec (1) lze volně slovy vyjádřit tak, že harmonický průměr je „převrácená hodnota aritmetického průměru převrácených hodnot znaku“. To je patrné z následujícího vzorce

$$\bar{x}_H = \frac{1}{\frac{1}{n} \left( \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} \right)} = \frac{1}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}}.$$

Speciálně pro  $n = 2$  bude mít vzorec (1) tvar

$$\bar{x}_H = \frac{2}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}} = \frac{1}{\frac{1}{2} \left( \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} \right)} = \frac{2x_1x_2}{x_1 + x_2}. \quad (2)$$

Vzorec (2) lze snadno převést do tvaru

$$\frac{1}{\bar{x}_H} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} \right). \quad (3)$$

<sup>1)</sup>Blíží-li se aspoň jedna z hodnot  $x_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , nule, blíží se také hodnota harmonického průměru nule.

**Vážený harmonický průměr**

Jsou-li data již setříděna do tabulky rozdělení četností, tj. hodnota  $x_1$  se vyskytuje  $k_1$ -krát,  $x_2$  se vyskytuje  $k_2$ -krát atd., můžeme vzorec (1) psát ve tvaru

$$\bar{x}_H = \frac{\sum_{i=1}^n k_i}{\sum_{i=1}^n \frac{k_i}{x_i}}, \quad (4)$$

kde  $k_i$  jsou četnosti jednotlivých hodnot, a mluvíme o váženém harmonickém průměru. Na rozdíl od vzorce (1) je celkový počet dat  $\sum_{i=1}^n k_i$  a nikoli  $n$ ,  $n$  značí počet různých hodnot dat, která se v sadě vyskytují. Obecně: přiřadíme-li hodnotám  $x_i$  váhy  $w_i > 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , pak je vážený harmonický průměr definován jako podíl

$$\bar{x}_H = \frac{w_1 + w_2 + \dots + w_n}{\frac{w_1}{x_1} + \frac{w_2}{x_2} + \dots + \frac{w_n}{x_n}} = \frac{\sum_{i=1}^n w_i}{\sum_{i=1}^n \frac{w_i}{x_i}}. \quad (5)$$

Pro  $w_1 = w_2 = \dots = w_n$  dostaneme vzorec (1) a pro  $w_i = k_i$  vzorec (4). Rozdíl mezi vzorcem (4) a (5) je ten, že váhy  $w_i$  mohou být na rozdíl od četností  $k_i$  neceločíselné, což je výhodné například při řešení úloh na výpočet průměrné hustoty při míchání různých látek.

**Geometrická interpretace**

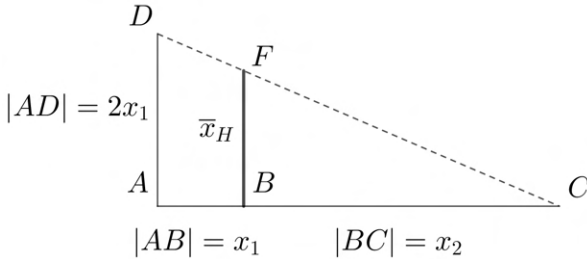
Harmonický průměr dvou čísel  $x_1$  a  $x_2$  lze geometricky interpretovat. K tomuto účelu upravíme vztah (2) do tvaru

$$\frac{2x_1}{\bar{x}_H} = \frac{x_1 + x_2}{x_2}.$$

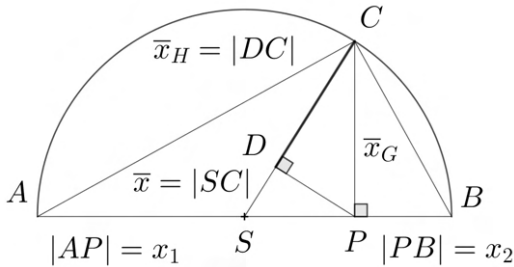
Tento vztah vyjadřuje poměr odpovídajících si stran v podobných trojúhelnících  $ACD$  a  $BCF$  na obr. 1 se shodným úhlem u vrcholu  $C$ , kde délky odvěsen trojúhelníku  $ACD$  jsou rovny  $2x_1$  a  $x_1 + x_2$ .

Geometrická interpretace harmonického průměru dvou kladných reálných hodnot  $x_1$  a  $x_2$  se často uvádí spolu se znázorněním aritmetického a geometrického průměru. Označme  $\bar{x}$  jako aritmetický průměr hodnot  $x_1$  a  $x_2$  a  $\bar{x}_G$  jako geometrický průměr těchto hodnot. Jedna z možných interpretací je na obr. 2.

**Příklad 1.** Výpočtem ověřte, že pro harmonický průměr čísel  $x_1$ ,  $x_2$  platí na obr. 2 vztah (2).



Obr. 1: Geometrická interpretace harmonického průměru čísel  $x_1, x_2$



Obr. 2: Geometrická interpretace aritmetického, geometrického a harmonického průměru čísel  $x_1, x_2$

*Řešení.* Máme ukázat, že v obr. 2 platí  $\bar{x}_H = \frac{2x_1x_2}{x_1+x_2}$ . Podle Euklidovy věty o výšce je na obr. 2 geometrický průměr délek úseček  $x_1, x_2$  roven  $|PC| = \bar{x}_G = \sqrt{x_1x_2}$ . Aritmetický průměr délek  $x_1, x_2$  je roven  $|SC| = \bar{x} = \frac{x_1+x_2}{2}$ . Uvažujme pravoúhlý trojúhelník  $SPC$  s pravým úhlem u vrcholu  $P$ . Z Eukleidovy věty o odvěsně vyplývá  $\bar{x}_G^2 = \bar{x}_H \cdot \bar{x}$ , tedy  $\bar{x}_H = \frac{\bar{x}_G^2}{\bar{x}}$ . Z toho po dosazení a drobné úpravě dostaneme ověřovaný vztah (2).

**Příklad 2.** Upravte vzorec (2) pro harmonický průměr tří čísel  $x_1, x_2, x_3$ .

*Řešení.* Pro tři kladná reálná čísla  $x_1, x_2, x_3$  platí vztah

$$\bar{x}_H = \frac{3x_1x_2x_3}{x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3}.$$



### Některé vlastnosti harmonického průměru

Harmonický průměr je na rozdíl od aritmetického průměru definován pouze pro kladná reálná čísla  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Jeho určující vlastností je stálost součtu převrácených hodnot při jejich nahrazení harmonickým průměrem, což je vlastnost každého průměru. Platí totiž

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} = \underbrace{\frac{1}{\bar{x}_H} + \frac{1}{\bar{x}_H} + \dots + \frac{1}{\bar{x}_H}}_{n\text{-krát}}$$

Tento vzorec lze stručně zapsat ve tvaru

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} = \frac{n}{\bar{x}_H},$$

z něhož po vyjádření  $\bar{x}_H$  získáme výše uvedený vzorec (1) pro výpočet prostého harmonického průměru.

Násobíme-li všechny hodnoty  $x_i$  libovolnou konstantou  $k$ ,  $k \neq 0$ , pak se hodnota harmonického průměru také vynásobí  $k$ -krát (podobně platí i pro aritmetický a geometrický průměr). Platí tedy

$$\bar{x}_H = \frac{n}{\frac{1}{k \cdot x_1} + \frac{1}{k \cdot x_2} + \dots + \frac{1}{k \cdot x_n}} = \frac{k \cdot n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}}.$$

Uvažujme vážený aritmetický průměr s váhami  $k_1, k_2, \dots, k_n$ , který je definován vzorcem

$$\bar{x} = \frac{x_1 \cdot w_1 + x_2 \cdot w_2 + \dots + x_n \cdot w_n}{w_1 + w_2 + \dots + w_n} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \cdot w_i}{\sum_{i=1}^n w_i}, \quad (6)$$

kde  $w_i$  je váha  $i$ -té hodnoty a  $n$  je počet všech hodnot. Snadno lze ověřit, že násobíme-li váhy  $w_i$  ve vzorci (5) pro vážený harmonický průměr stejnou konstantou  $k$ ,  $k > 0$ , hodnota výsledného harmonického průměru se nezmění, stejně jako v případě váženého aritmetického průměru, definovaného vzorcem (6).

Zřejmou výhodou harmonického průměru je skutečnost, že hodnota harmonického průměru není – na rozdíl od aritmetického průměru – výraznou měrou ovlivněna jednou nenulovou hodnotou (či několika málo hodnotami), která je výrazně větší než všechny zbylé hodnoty ze souboru.

Harmonický průměr je vhodný při výpočtu střední hodnoty nerovnoměrně rozložených dat kolem aritmetického průměru, nebo když jsou v souboru dat některé hodnoty extrémně vysoké. Využití harmonického průměru je však značně omezené jeho definicí a vychází z povahy otázky, kterou v úloze řešíme. Harmonický průměr lze použít pouze tehdy, když má smysl uvažovat o součtu převrácených hodnot znaku. I když je užití harmonického průměru často prezentováno jako značně omezené ([4, s. 34]), ukážeme nejprve jeho využití při řešení matematických úloh, v pokračování článku pak představíme, jak lze harmonický průměr použít například ve fyzice, finančnictví a ekonometrii.

### Vztah mezi aritmetickým, geometrickým a harmonickým průměrem

V příkladu 1 jsme uvedli vztah mezi aritmetickým, geometrickým a harmonickým průměrem čísel  $x_1$  a  $x_2$ . Pro dvě kladná čísla  $x_1, x_2$  lze psát

$$\bar{x}_H = \frac{2}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}} = \frac{2x_1x_2}{x_1 + x_2} = \frac{(\sqrt{x_1x_2})^2}{\frac{1}{2}(x_1 + x_2)} = \frac{\bar{x}_G^2}{\bar{x}},$$

kde  $\bar{x}_G$  je geometrický a  $\bar{x}$  je aritmetický průměr čísel  $x_1, x_2$ . Tento vztah je unikátní pro sadu dvou čísel, pro větší sady obecně neplatí.

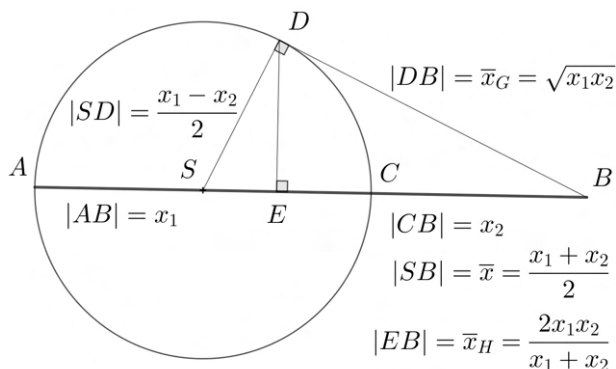
Pro aritmetický a geometrický průměr definovaný předpisem

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \quad \text{a} \quad \bar{x}_G = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}$$

platí tzv. AGH-nerovnost:

$$\bar{x} \geq \bar{x}_G \geq \bar{x}_H. \quad (7)$$

Rovnost zde nastává, právě když  $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ . Pro  $\bar{x}_H, \bar{x}_G$  a  $\bar{x}$  platí, že jsou větší než minimum hodnot  $x_i$  a současně menší než maximum hodnot  $x_i, i = 1, 2, \dots, n$ . Důkaz nerovnosti (7) zde kvůli svému rozsahu neuvádíme, lze však nalézt v četných literárních pramenech, například [8, s. 17]. Platnost vztahu (7) pro  $n = 2$  lze snadno geometricky ověřit například na obr. 2. Hned čtyři různé geometrické důkazy beze slov složené nerovnosti (7) pro  $n = 2$  uvádí Nelsen ([7, s. 63–67]). Z nich za didakticky vhodný do výuky na střední škole lze považovat následující důkaz vztahu (7). Přestože jde o „důkaz beze slov“, odvozujeme s využitím obr. 3 postupně délky úseček  $SB, DB$  a  $EB$ , které jsou po řadě



Obr. 3: Geometrická interpretace nerovnosti harmonického, geometrického a aritmetického průměru dvou čísel  $x_1, x_2$  (podle [7, s. 63])

aritmetickým, geometrickým a harmonickým průměrem úseček délek  $x_1$  a  $x_2$ .

Uvažujme úsečku  $AB$  délky  $x_1$ , úsečku  $BC$  délky  $x_2$ ,  $0 < x_2 \leq x_1$ .

Je-li  $|AB| = x_1$  a  $|BC| = x_2$ , pak  $|AC| = x_1 - x_2$ ,  $|SC| = \frac{x_1 - x_2}{2}$ , a tedy hledaná délka úsečky  $SB$  je  $|SB| = x_2 + \frac{x_1 - x_2}{2} = \frac{x_1 + x_2}{2}$ , což je aritmetický průměr délek úseček  $AB$  a  $BC$ .

Délku úsečky  $DB$  lze odvodit takto: předně platí  $|SC| = |SD| = \frac{x_1 - x_2}{2}$ , pak z Pythagorovy věty pro pravoúhlý trojúhelník  $SBD$  s pravým úhlem při vrcholu  $D$  vyplývá

$$|DB|^2 = |SB|^2 - |SC|^2.$$

Po dosazení dostaneme

$$|DB|^2 = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 - \left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right)^2$$

a po úpravách  $|DB| = \sqrt{x_1 x_2}$ , což je geometrický průměr délek úseček  $AB$  a  $BC$ .

Úsečka  $EB$  je úsekem přepony  $SB$  v pravoúhlém trojúhelníku  $SBD$ . Z Eukleidovy věty o odvěsně pro délku  $EB$  platí

$$|EB| = \frac{|DB|^2}{|SB|}.$$

Po dosazení dostaneme

$$|EB| = \frac{x_1 x_2}{\frac{x_1 + x_2}{2}} = \frac{2x_1 x_2}{x_1 + x_2},$$

což je harmonický průměr délek úseček  $AB$  a  $BC$ . Z obr. 3 tedy vyplývá nerovnost (7).

**Příklad 3.** Pro dvě libovolná kladná reálná čísla  $x_1$  a  $x_2$  dokažte algebraickými úpravami nerovnost (7).

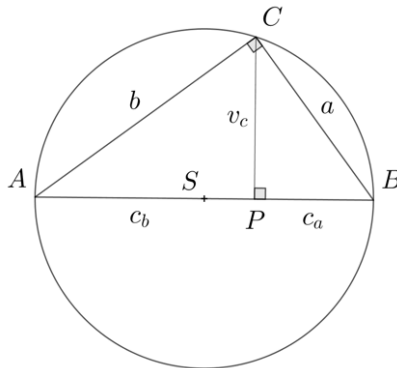
*Řešení.* Pro každé dvě kladné reálné proměnné  $x_1, x_2$  máme řešit soustavu nerovnic

$$\frac{2x_1 x_2}{x_1 + x_2} \leq \sqrt{x_1 x_2} \leq \frac{x_1 + x_2}{2}. \quad (8)$$

Nerovnici vlevo stačí umocnit na druhou, vydělit celou nerovnici nenulovým součinem  $x_1 x_2$  a po úpravách dostaneme nerovnici  $\frac{(x_1 - x_2)^2}{(x_1 + x_2)^2} \geq 0$ , která platí vždy. Nerovnici vpravo také umocníme na druhou a po úpravách dostaneme nerovnici  $\frac{(x_1 - x_2)^2}{4} \geq 0$ , která rovněž platí pro libovolná  $x_1, x_2$ . Rovnosti u soustavy nerovnic (8) nastávají pro  $x_1 = x_2$ .

### Aplikace harmonického průměru v matematice

**Příklad 4.** Ověřte, že v každém pravoúhlém trojúhelníku  $ABC$  s pravým úhlem při vrcholu  $C$  (obr. 4) je druhá mocnina velikosti výšky  $v_c$  vedené bodem  $C$  na přeponu  $c$  rovna polovině harmonického průměru druhých mocnin odvěsen  $a, b$ .



Obr. 4: Trojúhelník  $ABC$  s vyznačenou výškou  $v_c$

*Řešení.* Máme ukázat, že platí

$$v_c^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2a^2b^2}{a^2 + b^2} = \frac{a^2b^2}{a^2 + b^2}. \quad (9)$$

V pravoúhlém trojúhelníku na obr. 4 podle Eukleidovy věty o výšce platí

$$v_c^2 = c_a \cdot c_b \quad (10)$$

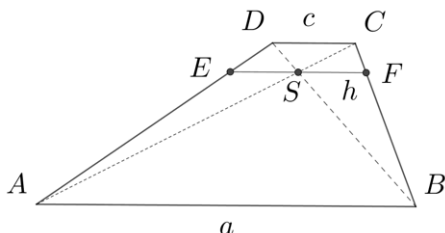
a dále podle Eukleidovy věty o odvěsně platí

$$a^2 = c \cdot c_a, \quad b^2 = c \cdot c_b. \quad (11)$$

Z (11) vyjádříme postupně  $c_a$  a  $c_b$ , které dosadíme do (10) a s využitím Pythagorovy věty dostaneme hledaný vztah (9)

$$v_c^2 = \frac{a^2}{c} \cdot \frac{b^2}{c} = \frac{a^2b^2}{c^2} = \frac{a^2b^2}{a^2 + b^2}.$$

**Příklad 5.** Pomocí délek základů  $a, c$  vypočítejte délku  $h$  příčky lichoběžníku  $ABCD$  ( $AB \parallel CD$ ), která prochází průsečíkem jeho úhlopříček  $S$  (viz obr. 5).<sup>2)</sup>



Obr. 5: Lichoběžník  $ABCD$  s vyznačenou příčkou  $h$

*Řešení.* Trojúhelníky  $ABS$  a  $CDS$  jsou podobné podle věty ( $uu$ ) a pro poměry odpovídajících si stran tedy platí

$$\frac{|CD|}{|AB|} = \frac{|SC|}{|SA|} = \frac{|SD|}{|SB|}.$$

Označme u příčky  $h$  její krajní body  $E, F$ . Délka příčky  $EF$  je součtem délek úseček  $ES$  a  $SF$ . Trojúhelníky  $BFS$  a  $BCD$  a trojúhelníky  $ASE$

<sup>2)</sup>Příčkami v lichoběžníku se podrobně zabývají Vallo a Leischner v [9].

a  $ACD$  jsou dvojice podobných trojúhelníků podle věty ( $uu$ ). Z podobnosti trojúhelníků první dvojice vyplývá  $\frac{|SF|}{|CD|} = \frac{|SB|}{|DB|}$ , z toho po úpravě dostaneme

$$|SF| = \frac{|SB| \cdot |CD|}{|DB|}.$$

Z druhé dvojice podobných trojúhelníků obdobně plyne  $\frac{|ES|}{|CD|} = \frac{|AS|}{|AC|}$  a po úpravě dostaneme

$$|ES| = \frac{|AS| \cdot |CD|}{|AC|}.$$

S ohledem na výše zmíněnou podobnost trojúhelníků  $ABS$  a  $CDS$  nahradíme poměry

$$\frac{|SC|}{|AS|} = \frac{|DS|}{|BS|} = \frac{|CD|}{|AB|}.$$

Pro celkovou délku příčky  $EF$  tedy platí

$$|EF| = \frac{|AS| \cdot |CD|}{|AC|} + \frac{|BS| \cdot |CD|}{|BD|}.$$

Po vydělení  $|AS|$  a  $|SB|$  a protože je  $|AC| = |AS| + |SC|$  a  $|BD| = |BS| + |SD|$ , dostaneme

$$|EF| = \frac{|CD|}{\frac{|AC|}{|AS|}} + \frac{|CD|}{\frac{|BD|}{|BS|}} = \frac{|CD|}{\frac{|AS|+|CS|}{|AS|}} + \frac{|CD|}{\frac{|BS|+|DS|}{|BS|}} = \frac{|CD|}{1 + \frac{|CS|}{|AS|}} + \frac{|CD|}{1 + \frac{|DS|}{|BS|}}.$$

Pomocí označení délek stran dostaneme

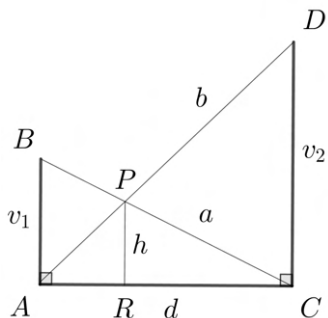
$$h = \frac{c}{1 + \frac{c}{a}} + \frac{c}{1 + \frac{c}{a}} = \frac{ac}{a+c} + \frac{ac}{a+c} = \frac{2ac}{a+c},$$

což je harmonický průměr délek základů  $a, c$  lichoběžníku  $ABCD$ .

**Příklad 6.** Problém zkřížených žebříků: Dva žebříky délek  $a, b$  jsou umístěny ve výkopu šířky  $d$  tak, že jejich paty jsou vždy v krajním místě výkopu a jejich druhé konce se opírají o konce protilehlých stěn, jejichž výšky jsou  $v_1$  a  $v_2$  (obr. 6). Žebříky se v řezu protínají v bodě  $P$ . Pomocí délek  $v_1$  a  $v_2$  vyjádřete vzdálenost  $h$  průsečíku  $P$  od vodorovné základny dna výkopu.<sup>3)</sup>

---

<sup>3)</sup>Podrobně se řešení úlohy věnuje Leischner v [6].



Obr. 6: Model situace zkřížených žebříků s vyznačenou vzdáleností  $h$

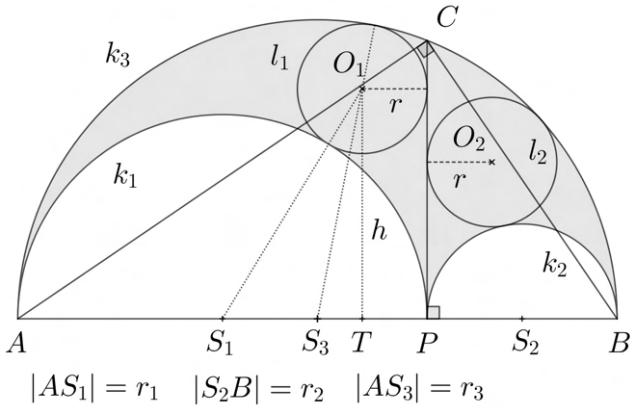
*Řešení.* Představíme-li si na obr. 6 spojnicí  $BD$ , vznikne pravoúhlý lichoběžník  $CDBA$ , v němž jsou žebříky jeho úhlopříčky. K řešení úlohy 6 tedy lze využít poznatky z předchozí úlohy 5, z jejíhož řešení vyplývá, že bod  $S$  rozděluje úsečku  $EF$  na obr. 5 na dvě stejně dlouhé části. Tedy hledaná délka  $h$  v obr. 6 je polovinou harmonického průměru délek  $v_1$  a  $v_2$ .

**Příklad 7.** „Archimédova dvojčata“ (nazývané také Archimédovy kruhy) je pojmenováním dvou kružnic  $l_1$  a  $l_2$  téhož poloměru  $r$ , které jsou vepsány do tzv. *arbelu*<sup>4)</sup>  $APB$ , kterým se rozumí rovinný útvar ohraničený polokružnicemi  $k_1$ ,  $k_2$  a  $k_3$  po řadě nad průměry  $AP$ ,  $PB$  a  $AB$  v téže polorovině s hraniční přímkou  $AB$ , kde  $P$  je vnitřní bod úsečky  $AB$  ([2, s. 513], [5, s. 88], [10]), přičemž kružnice  $l_1$  se dotýká polokružnic  $k_1$  (vnější dotyk) a  $k_3$  (vnitřní dotyk) a přímky  $PC$  a kružnice  $l_2$  se dotýká polokružnic  $k_2$  (vnější dotyk) a  $k_3$  (vnitřní dotyk) a přímky  $PC$ , kde  $PC$  je výška na přeponu  $AB$  v pravoúhlém trojúhelníku  $ABC$ , jemuž je opsána Thaletova kružnice  $k_3$  (obr. 7).<sup>5)</sup> Ověřte, že průměr  $2r$  kružnic  $l_1$  a  $l_2$  je harmonickým průměrem poloměrů  $r_1$  a  $r_2$  kružnic po řadě  $k_1$  a  $k_2$ , a tedy lze psát

$$2r = \frac{2r_1 r_2}{r_1 + r_2}. \quad (12)$$

<sup>4)</sup>Slovo *arbelos* znamená v řečtině ševcovský nůž, knejzp.

<sup>5)</sup>Applet v [1] výstižně demonstruje polohu archimédovských dvojčat v závislosti na velikosti poloměrů polokružnic  $k_1$  a  $k_2$ .



Obr. 7: Arbelos  $APB$  (útvár zvýrazněný šedou barvou) s vepsanými kružnicemi  $l_1$  a  $l_2$

*Řešení.* Platnost vztahu (12) ověříme nejdříve pro kružnici  $l_1$ . Vyjeme z pravoúhlého trojúhelníku  $S_1TO_1$  s odvěsnami délek  $r_1 - r$  a  $h$  a s přeponou délky  $r_1 + r$  a dále z pravoúhlého trojúhelníku  $S_3TO_1$  s odvěsnami délek  $r_1 - r - r_2$  a  $h$  a přeponou délky  $r_1 - r + r_2$ . Pro poloměry  $r_1, r_2$  a  $r_3$  platí:  $r_1 + r_2 = r_3$ . Proto mají odvěsny trojúhelníku  $S_3TO_1$  délky  $r_3 - 2r_2 - r$  a  $h$  a přepona má délku  $r_3 - r$ . Pro oba trojúhelníky platí Pythagorova věta, lze tedy psát

$$(r_1 + r)^2 = h^2 + (r_1 - r)^2 \quad \text{a} \quad (r_3 - r)^2 = h^2 + (r_3 - 2r_2 - r)^2.$$

Po odečtení obou rovnic eliminujeme  $h^2$  a ze soustavy vyjádříme  $r$ :

$$r = \frac{r_2 \cdot (r_3 - r_2)}{r_1 + r_2}.$$

Vynásobíme-li celou rovnicí dvěma, dostaneme hledaný vzorec (12).<sup>6)</sup> Kružnice  $l_1$  a  $l_2$  jsou shodné. Důkaz této skutečnosti uvádí například Bečvář a Švrček ([2, s. 517, 518]), proto ověření vztahu (12) pro kružnici  $l_2$  zde neprovádíme, probíhá však podobně jako pro kružnici  $l_1$ .

<sup>6)</sup>Obdobný důkaz lze nalézt např. v [3, s. 210]. Tamtéž je mnoho informací k dalším specifickým kružnicím vzniklým v arbelu.



## Závěr

Učivo o harmonickém průměru je zajímavým a užitečným nástrojem, který nachází své nezastupitelné uplatnění při řešení specifických výpočetních úloh z matematiky a který přispívá k rozvoji mnohých matematických znalostí a dovedností žáků střední školy. Harmonický průměr bývá často naivně a chybně nahrazován aritmetickým průměrem. Tato chyba není specifická jen pro žákovská řešení, ale objevuje se i v aplikacích a výjimečně i v učebnicích. Jsou-li vstupní data podobná, dávají aritmetický, geometrický a harmonický průměr podobné výsledky. Rozdíly v hodnotách jednotlivých průměrů se projeví až při větších rozdílech v průměrovaných hodnotách.

## Literatura

- [1] Alpert, B.: Archimedes' twin circles in an arbelos. Wolfram Demonstrations Project, 2011. <https://demonstrations.wolfram.com/ArchimedesTwinCirclesInAnArbelos/>.
- [2] Bečvář, J., Švrček, J.: Arbelos. *Matematika–fyzika–informatika*, roč. 14 (2004/05), č. 9, s. 513–523.
- [3] Dodge, C. W., Schoch, T., Woo, P. Y., Yiu, P.: Those ubiquitous Archimedean circles. *Mathematics Magazine*, roč. 72 (2018), č. 3, s. 202–213. <https://doi.org/10.1080/0025570X.1999.11996731>.
- [4] Hindls, R., Arltová, M., Hronová, S., Malá, I., Marek, L., Pecáková, I., Řezanková, H.: *Statistika v ekonomii*. Professional Publishing, Příbram, 2018.
- [5] Leischner, P.: *Polibky kružnic: Archimedes*. *Matematika–fyzika–informatika*, roč. 24 (2015), č. 5, s. 87–94.
- [6] Leischner, P.: *Zkřížené žebříky*. *MFI*, roč. 31 (2022), č. 4, s. 241–252.
- [7] Nelsen, R. B.: *Důkazy beze slov I*. Young Scientist, Washington, 1993.
- [8] Rolínek, M., Šalom, P.: *Zdolávání nerovností*. Přírodovědecká fakulta, Univerzita J. E. Purkyně, Ústí nad Labem, 2012.
- [9] Vallo, D., Leischner, P.: *Priečky rovnobežné so základňou lichobežníka*. *MFI*, roč. 20 (2010/11), č. 6, s. 321–328.
- [10] Weisstein, E. W.: *Arbelos*. MathWorld – A Wolfram Web Resource. 2024 [online]. <https://mathworld.wolfram.com/Arbelos.html>.

# Transcendentní čísla a konstrukce pravítkem a kružítkem

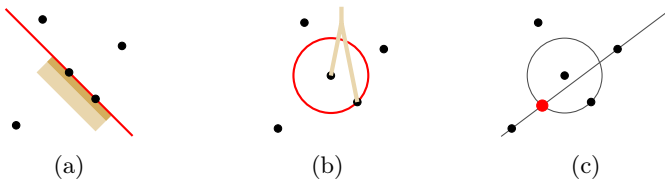
*Pavel Gajdoš, student FSI VUT, Brno*

**Abstrakt.** Transcendentní čísla jsou vysoce teoretický a vcelku obtížně uchopitelný matematický koncept a po staletích od jejich objevu stále skýtají mnoho nezodpovězených otázek. Cílem tohoto článku je ukázat jejich spojitost s takovou banalitou, jako jsou konstrukce pravítkem a kružítkem.

Řekněme, že se jednou ráno probudíte s nepotlačitelnou touhou provést nějakou geometrickou konstrukci. Přirozeně se rozběhnete pro své oblíbené rýsovací pomůcky – ale všechny jsou pryč! Zůstalo jen staré pravítko (a to ještě bez stupnice!) a kružítko. Je to konec, nebo se ve světě konstrukcí pravítkem a kružítkem ukrývá něco velkolepého?

Než se vydáme hledat odpověď na tuto otázku, měli bychom se přesně domluvit, které kroky můžeme provádět. Každou konstrukci začneme s nějakou množinou výchozích *význačných bodů* a v každém kroku konstrukce smíme provést jeden ze tří úkonů (obr. 1):

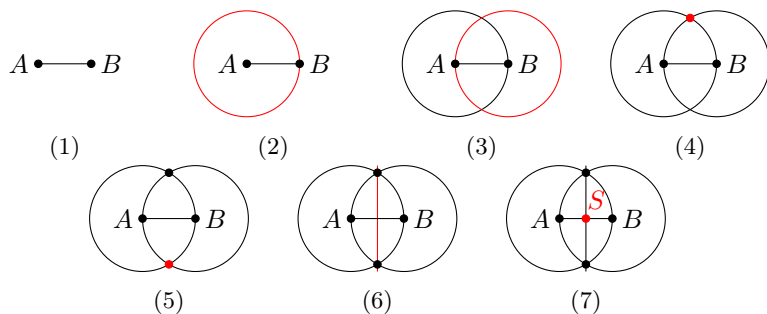
- (a) Sestrojíme přímku procházející dvěma význačnými body.
- (b) Sestrojíme kružnici se středem ve význačném bodě procházející jiným význačným bodem.
- (c) Průsečíkem dvou různoběžných přímek, dvou kružnic, nebo přímky a kružnice přidejeme k význačným bodům.



Obr. 1: Povolené kroky při konstrukci pravítkem a kružítkem

**Příklad 8.** Pomocí pravítka a kružítko můžeme sestavit například střed libovolné úsečky  $AB$  (obr. 2).

Začneme s množinou význačných bodů  $V = \{A, B\}$ . Nejprve zkonstruujeme kružnici se středem v bodě  $A$  procházející bodem  $B$ , poté kružnici se středem v bodě  $B$  procházející bodem  $A$ . Oba průsečíky těchto kružnic přidáme k význačným bodům a sestrojíme přímku, která jimi prochází. Hledaný střed  $S$  potom získáme jako průsečík této přímky a úsečky  $AB$ .

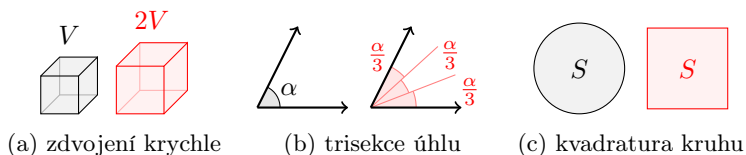


Obr. 2: Konstrukce středu úsečky pomocí pravítka a kružítka

Pro usnadnění manipulace s geometrickými objekty zasadíme prováděné konstrukce do kartézské soustavy souřadnic  $Oxy$ . Každý bod tedy popíšeme dvojicí reálných čísel a každou přímkou nebo kružnicí jejich odpovídající rovnici.

### Antické problémy

Za dob antiky se vyprofilovala trojice konstrukcí, jejichž proveditelnost pravítkem a kružítkem byla po tisíce let záhadou: zdvojení krychle, trisekce úhlu a kvadratura kruhu (obr. 3). Antické úlohy byly vyřešeny až v 19. století pomocí teorie transcendentních čísel.

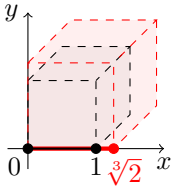


Obr. 3: Antické úlohy

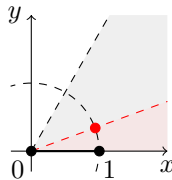
**Zdvojení krychle.** Je možné k libovolné krychli pravítkem a kružítkem sestrojít krychli dvojnásobného objemu?

Přestože je úloha formulována v prostoru, můžeme ji snadno převést na obyčejnou rovinnou konstrukci. Řekněme, že daná krychle má stranu délky  $a$ , tedy objem  $a^3$ . Krychle, o jejíž konstrukci usilujeme, má potom objem  $2a^3$ , tedy délku strany  $a\sqrt[3]{2}$ . Jde tedy o to, zda můžeme v rovině k úsečce libovolné délky  $a$  sestrojiti úsečku délky  $a\sqrt[3]{2}$ .

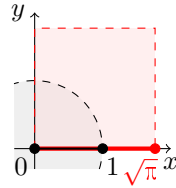
Pro jednotkovou krychli bychom tedy mohli začít s množinou význačných bodů  $V = \{[0, 0], [1, 0]\}$  a snažit se sestrojiti bod  $[\sqrt[3]{2}, 0]$  (obr. 4a).



(a) zdvojení krychle



(b) trisekce úhlu



(c) kvadratura kruhu

Obr. 4: Rozbor antických problémů.

**Trisekce úhlu.** Lze libovolný úhel pomocí pravítka a kružítka rozdělit na třetiny?

Každý úhel můžeme pomocí pravítka a kružítko známým postupem rozdělit na poloviny. Dále je zřejmé, že některé úhly (např.  $90^\circ$ ) roztřetí lze. Obtížnější je rozhodnout, zda existuje nějaký úhel, který roztřetí nelze.

Rozeberme například situaci pro úhel  $60^\circ = \frac{\pi}{3}$ . Stačí, když začneme s dvouprvkovou množinou význačných bodů  $V = \{[0, 0], [1, 0]\}$ , poněvadž třetí bod určující úhel snadno sestrojíme jako vrchol rovnostranného trojúhelníku. Naším cílem je pak nad osou  $x$  sestrojiti úhel  $20^\circ = \frac{\pi}{9}$ .

Kdyby se nám podařilo získat libovolný bod jeho hraniční přímky, v dalších krocích můžeme sestrojiti její průsečík s kružnicí  $x^2 + y^2 = 1$ , jímž je bod  $[\cos \frac{\pi}{9}, \sin \frac{\pi}{9}]$  (obr. 4b).

**Kvadratura kruhu.** Můžeme k libovolnému kruhu pomocí pravítka a kružítko sestrojiti čtverec o stejném obsahu?

Má-li daný kruh poloměr  $r$ , je jeho obsah roven  $\pi r^2$ . Čtverec o stejném obsahu by pak měl stranu délky  $r\sqrt{\pi}$ .

Jedná-li se o jednotkový kruh se středem v počátku, můžeme začít s množinou význačných bodů  $V = \{[0, 0], [0, 1]\}$ . Kýžený bod by potom měl souřadnice  $[\sqrt{\pi}, 0]$  (obr. 4c).

### Exkurze do světa algebry

V následujícím textu budeme velmi často pracovat s číselnými tělesy.

**Definice 2.** Řekneme, že množina  $T \subseteq \mathbb{C}$  s operacemi  $+$  (sčítání) a  $\cdot$  (násobení) tvoří *číselné těleso*, jestliže

- (a)  $0, 1 \in T$ ,
- (b) pro každá  $x, y \in T$  je  $x + y \in T$ ,  $x - y \in T$ ,  $x \cdot y \in T$ , a pokud navíc  $y \neq 0$ , tak i  $\frac{x}{y} \in T$ .

Například množina celých čísel  $\mathbb{Z}$  těleso netvoří, poněvadž například  $1, 2 \in \mathbb{Z}$ , ale  $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$ . Z uvedených podmínek není těžké si domyslet, že každé číselné těleso  $T$  musí nutně obsahovat všechna racionální čísla. Mezi nejznámější tělesa patří racionální čísla  $\mathbb{Q}$ , reálná čísla  $\mathbb{R}$  nebo komplexní čísla  $\mathbb{C}$ .

**Příklad 9.** Zajímavějším příkladem tělesa je množina

$$\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2}, \text{ kde } a, b \in \mathbb{Q}\}.$$

Zřejmě  $0 = 0 + 0\sqrt{2} \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$  a  $1 = 1 + 0\sqrt{2} \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ . Dále označme  $x = x_1 + x_2\sqrt{2}$  a  $y = y_1 + y_2\sqrt{2}$ , kde  $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{Q}$ . Potom

$$x + y = (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2)\sqrt{2} \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$$

a podobně ověříme, že  $x - y \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ . Dále

$$\begin{aligned} x \cdot y &= x_1y_1 + x_1y_2\sqrt{2} + x_2\sqrt{2}y_1 + x_2\sqrt{2}y_2\sqrt{2} = \\ &= (x_1y_1 + 2x_2y_2) + (x_1y_2 + x_2y_1)\sqrt{2} \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]. \end{aligned}$$

Konečně pokud  $y \neq 0$ , platí

$$\begin{aligned} \frac{1}{y} &= \frac{1}{y_1 + y_2\sqrt{2}} \cdot \frac{y_1 - y_2\sqrt{2}}{y_1 - y_2\sqrt{2}} = \frac{y_1 - y_2\sqrt{2}}{y_1^2 - 2y_2^2} = \\ &= \frac{y_1}{y_1^2 - 2y_2^2} - \frac{y_2}{y_1^2 - 2y_2^2}\sqrt{2} \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]. \end{aligned}$$

Z toho v kombinaci s předchozí rovností plyne

$$\frac{x}{y} = x \cdot \frac{1}{y} \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}].$$

**Definice 3.** *Polynomem  $f$  nad tělesem  $T$  rozumíme každý výraz*

$$f = f_0 + f_1x + \cdots + f_nx^n,$$

kde  $f_0, f_1, \dots, f_n \in T$  a  $n \in \mathbb{N}$ . Jestliže  $f_n \neq 0$ , řekneme, že *stupeň polynomu  $f$  je roven  $n$* . Stupeň polynomu  $f = 0$  definujeme jako  $-\infty$ .

Pro  $z \in \mathbb{C}$  označme  $f(z) = f_0 + f_1z + \cdots + f_nz^n$  *hodnotu polynomu  $f$  v bodě  $z$* . Jestliže  $f(z) = 0$ , řekneme, že  $z$  je *kořenem polynomu  $f$* .

Množinu všech polynomů nad  $T$  označíme  $T[x]$ .

Například  $p = x^2 - 5x + 6$  je polynom nad  $\mathbb{Q}$  druhého stupně. Platí kupříkladu  $p(4) = 4^2 - 5 \cdot 4 + 6 = 2$ . Polynom  $p$  má právě dva kořeny, a to 2 a 3.

### Transcendentní čísla

**Definice 4.** Řekneme, že číslo  $\alpha \in \mathbb{C}$  je *algebraické nad tělesem  $T$* , jestliže je kořenem nějakého polynomu nad  $T$ . Číslo  $\alpha$  nazveme *algebraické*, je-li algebraické nad tělesem  $\mathbb{Q}$ . Číslo nazveme *transcendentní*, jestliže není algebraické.

Každé racionální číslo  $p \in \mathbb{Q}$  je zřejmě algebraické (nad  $\mathbb{Q}$ ), poněvadž je kořenem polynomu  $x - p \in \mathbb{Q}[x]$ . Algebraická jsou však i některá iracionální čísla, například  $\sqrt{2}$  je kořenem polynomu  $x^2 - 2$ . Mimo reálná čísla je algebraická například imaginární jednotka  $i \in \mathbb{C}$ , je totiž kořenem polynomu  $x^2 + 1$ .

S trochou teorie polynomů není těžké dokázat, že pro každé algebraické  $\alpha$  nad  $T$  existuje jediný normovaný ireducibilní<sup>1)</sup> polynom nad  $T$ , jehož kořenem je  $\alpha$ . Budeme ho označovat *minimální polynom* daného algebraického čísla a jeho stupeň nazveme *stupeň* daného čísla. Všechny polynomy uvedené v předchozím odstavci jsou minimální. To znamená, že všechna racionální čísla jsou algebraická (nad  $\mathbb{Q}$ ) stupně 1 a čísla  $\sqrt{2}$  a  $i$  stupně 2. Nad  $\mathbb{R}$  je však i  $\sqrt{2}$  algebraická stupně 1, poněvadž jejím minimálním polynomem je  $x - \sqrt{2} \in \mathbb{R}[x]$ .

Lze dokázat, že součet, rozdíl, součin i podíl (pokud je definován) dvou algebraických čísel nad  $T$  je opět algebraický nad  $T$ .

---

<sup>1)</sup> *Normovaný polynom* má u nejvyšší mocniny  $x$  číslo 1. Polynom  $x^2 - 1$  je normovaný, zatímco  $2x + 1$  ne. *Ireducibilní nad  $T$*  je takový polynom, který nelze vyjádřit jako součin dvou nekonstantních polynomů nad  $T$ . Polynom  $x^2 - 2$  je ireducibilní nad  $\mathbb{Q}$ , avšak nikoli nad  $\mathbb{R}$ , neboť  $x^2 - 2 = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$ .

Přirozeně si nyní můžeme položit otázku, zda vůbec nějaká transcendentní čísla existují. Trvalo téměř dvě století, než bylo nějaké takové číslo zkonstruováno. To se povedlo francouzskému matematikovi Josephu Liouvilleovi (1809–1892). Jím objevené transcendentní číslo bylo tvaru

$$\mathcal{L} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{10^{k!}} = 0,110\,001\,000\,000\,000\,000\,000\,001\,000\,000\,0\dots$$

Vzhledem k tomu, jak umělé toto číslo je, bychom mohli usoudit, že transcendentní čísla budou velmi úzká skupina podivných čísel. Roku 1874 však německý matematik Georg Cantor (1845–1918) dokázal šokující tvrzení, podle kterého je v jistém smyslu<sup>2)</sup> více transcendentních čísel než čísel algebraických. Dnes je již známo, že mezi transcendentní čísla patří například čísla  $e$ ,  $\pi$ ,  $\sin \alpha$  nebo  $\ln \alpha$  pro každé algebraické  $\alpha \in \mathbb{R}^+$ ,  $\alpha \neq 1$ .

### Souvislost s konstrukcemi

Nejprve pro jednoduchost zavedeme nové značení. Je-li  $V$  množina význačných bodů, označíme

$$\mathcal{T}(V) \supseteq \bigcup_{[x,y] \in V} \{x, y\}$$

nejmenší číselné těleso, které obsahuje  $x$ -ové i  $y$ -ové souřadnice všech bodů z  $V$ .

Je-li například  $V = \{[0, 0], [1, 0]\}$ , je  $\mathcal{T}(V)$  nejmenší těleso, které obsahuje čísla 0 a 1, tedy  $\mathcal{T}(V) = \mathbb{Q}$ . Jestliže  $V = \{[0, 0], [1, 0], [\sqrt{2}, 0]\}$ , je  $\mathcal{T}(V) = \mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2}, \text{ kde } a, b \in \mathbb{Q}\}$ .

Všimněme si, že můžeme na dané množině význačných bodů elegantně vyjádřit všechny objekty zkonstruovatelné pravítkem a kružítkem:

**Věta 1.** *Bud'  $V$  množina význačných bodů. Potom každou přímku sestrojitelnou v jednom kroku lze vyjádřit ve tvaru  $ax + by + c = 0$  a každou kružnici sestrojitelnou v jednom kroku ve tvaru  $(x - m)^2 + (y - n)^2 = w$ , kde  $a, b, c, m, n, w \in \mathcal{T}(V)$ .*

---

<sup>2)</sup>Cantor konkrétně dokázal, že množina algebraických čísel je spočetná (tzn. algebraická čísla lze jednoznačně očíslovat přirozenými čísly). Množina transcendentních čísel je potom nutně nespočetná.

*Důkaz.* Předpokládejme nejprve, že konstruujeme přímkou kolmou na osu  $x$ , která osu  $x$  protíná v bodě  $[c, 0]$ , potom  $c \in \mathcal{T}(V)$ . Její rovnici napíšeme jako  $x - c = 0$ .

Dále uvažme přímkou  $p$  vedenou body  $u[u_1, u_2], v[v_1, v_2] \in V$ , která není kolmá na osu  $x$ . Rovnici přímky  $p$  lze zapsat ve tvaru  $y = ax + c$ , přičemž  $u_2 = au_1 + c$  a  $v_2 = av_1 + c$ . Odečtením těchto rovnic dostaneme  $v_2 - u_2 = a(v_1 - u_1)$ . Jelikož  $p$  není kolmá k ose  $x$ , platí  $v_1 - u_1 \neq 0$ , a tedy

$$a = \frac{v_2 - u_2}{v_1 - u_1} \in \mathcal{T}(V) \quad \text{a dále} \quad c = u_2 - \frac{v_2 - u_2}{v_1 - u_1} u_1 \in \mathcal{T}(V).$$

Tím je dokázána první část tvrzení.

Nyní předpokládejme, že sestrojíme kružnici  $k$  se středem v bodě  $S[m, n] \in V$  procházející bodem  $u[u_1, u_2] \in V$ . Má poloměr

$$|Su| = \sqrt{(m - u_1)^2 + (n - u_2)^2},$$

a tedy její rovnici můžeme napsat jako

$$(x - m)^2 + (y - n)^2 = |Su|^2 = (m - u_1)^2 + (n - u_2)^2.$$

Jelikož  $m, n, u_1, u_2 \in \mathcal{T}(V)$ , je i  $w = (m - u_1)^2 + (n - u_2)^2 \in \mathcal{T}(V)$ , čímž jsme dokázali i druhou část věty.

Pro řešení antických problémů však využijeme zejména následující vlastnosti.

**Věta 2.** *Bud'  $V$  výchozí množina význačných bodů a  $V'$  množina význačných bodů po provedení jednoho kroku. Potom každé  $t \in \mathcal{T}(V')$  je algebraické nad  $\mathcal{T}(V)$  stupně nejvýše 2.*

*Důkaz.* První dva úkony (a), (b) žádné význačné body nepřidávají. Poslední úkon (c) přidává význačný bod, který je průsečíkem dvou přímek, dvou kružnic, nebo kružnice a přímky.

Předpokládejme, že přidáme průsečík  $P[x_0, y_0]$  dvou různoběžných přímek

$$p: p_1x + p_2y + p_3 = 0 \quad \text{a} \quad q: q_1x + q_2y + q_3 = 0,$$

kde  $p_1, p_2, p_3, q_1, q_2, q_3 \in \mathcal{T}(V)$ . Alespoň jedno z čísel  $q_1, q_2$  je přitom nenulové, jinak by  $q$  nebyla přímka. Předpokládejme, že  $q_1 \neq 0$ , druhý případ se dokáže analogicky.



Označme  $r_1 = \frac{p_1}{q_1}$ , potom  $r_1q_1 = p_1$  a současně  $r_1q_2 \neq p_2$ , neboť přímky  $p, q$  jsou různoběžné. Protože  $P \in p, q$ , platí

$$\begin{aligned} 0 &= (p_1x_0 + p_2y_0 + p_3) - r_1(q_1x_0 + q_2y_0 + q_3) = \\ &= (p_2 - r_1q_2)y_0 + (p_3 - r_1q_3). \end{aligned}$$

Jelikož  $p_2 - r_1q_2 \in \mathcal{T}(V)$ ,  $p_3 - r_1q_3 \in \mathcal{T}(V)$  a  $p_2 - r_1q_2 \neq 0$ , je  $y_0$  algebraické nad  $\mathcal{T}(V)$  stupně 1.

Pokud  $q_2 = 0$ , z rovnice přímky  $q$  ihned dostáváme  $q_1x_0 + q_3 = 0$ , přičemž  $0 \neq q_1 \in \mathcal{T}(V)$ . Jestliže  $q_2 \neq 0$ , pro  $r_2 = \frac{p_2}{q_2}$  platí  $r_2q_2 = p_2$  a  $r_2q_1 \neq p_1$ , tedy

$$\begin{aligned} 0 &= (p_1x_0 + p_2y_0 + p_3) - r_2(q_1x_0 + q_2y_0 + q_3) = \\ &= (p_1 - r_2q_1)x_0 + (p_3 - r_2q_3), \end{aligned}$$

kde opět  $p_1 - r_2q_1 \in \mathcal{T}(V)$ ,  $p_3 - r_2q_3 \in \mathcal{T}(V)$  a  $p_1 - r_2q_1 \neq 0$ . V obou případech tak dostáváme, že  $x_0$  je algebraické nad  $\mathcal{T}(V)$  stupně 1.

Tvrzení pro průsečík dvou kružnic nebo přímky a kružnice dokážeme podobně. Při tom využijeme fakt, že rovnice kružnice je kvadratická, tedy druhého stupně.

Větu 2 je možné za pomoci náročnější algebry dále zobecnit na konstrukce pravítkem a kružítkem o libovolném počtu kroků. Tento výsledek bude stěžejší při řešení antických problémů.

**Věta 3.** *Bud'  $V$  výchozí množina význačných bodů a  $V_n$  množina význačných bodů po aplikaci  $n$  konstrukčních kroků. Potom každé  $t \in \mathcal{T}(V_n)$  je algebraické nad  $\mathcal{T}(V)$  a jeho stupeň dělí  $2^n$ .*

### (Ne)řešení antických problémů

Nyní se můžeme vrátit k antickým problémům. Při tom budeme pracovat s případy rozebranými výše (obr. 4). Vždy tak začneme s množinou význačných bodů  $V = \{[0, 0], [1, 0]\}$ , čemuž odpovídá nejmenší těleso  $\mathcal{T}(V) = \mathbb{Q}$ . Každý bod zkonstruovatelný v  $n$  krocích má tedy dle věty 3 algebraické souřadnice (nad  $\mathbb{Q}$ ) stupně, který dělí výraz  $2^n$ .

V případě *zdvojení krychle* se snažíme sestrojít bod  $[\sqrt[3]{2}, 0]$ . Kdyby se nám to podařilo v  $n$  krocích, musel by stupeň algebraického čísla  $\sqrt[3]{2}$  dělit  $2^n$ . Víme však, že stupeň  $\sqrt[3]{2}$  je 3, což je spor, tedy zkonstruovat daný bod není možné.

Při trisekci úhlu  $\frac{\pi}{3}$  konstruuje bod  $[\cos \frac{\pi}{9}, \sin \frac{\pi}{9}]$ . Kdyby se nám to podařilo v  $n$  krocích, pak by číslo  $\cos \frac{\pi}{9}$  bylo algebraické a jeho stupeň by dělil výraz  $2^n$ .

Všimněme si, že ze známých goniometrických identit můžeme odvodit rovnost

$$\begin{aligned}\cos 3x &= \cos(2x + x) = \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x = \\ &= (\cos^2 x - \sin^2 x) \cos x - (2 \sin x \cos x) \sin x = \\ &= \cos^3 x - 3 \sin^2 x \cos x = \cos^3 x - 3(1 - \cos^2 x) \cos x = \\ &= 4 \cos^3 x - 3 \cos x.\end{aligned}$$

Potom

$$1 = 2 \cos \frac{\pi}{3} = 2 \cos 3 \cdot \frac{\pi}{9} = 8 \cos^3 \frac{\pi}{9} - 6 \cos \frac{\pi}{9}.$$

To znamená, že  $\cos \frac{\pi}{9}$  je kořenem polynomu  $f = 8x^3 - 6x - 1$ . Z teorie polynomů vyplývá, že  $f$  nemá žádné racionální kořeny, z čehož dále plyne jeho ireducibilita nad  $\mathbb{Q}$ . Číslo  $\cos \frac{\pi}{9}$  je tak sice algebraické, avšak stupně 3, což je spor, a konstrukce tak není proveditelná.

U kvadratury kruhu chceme získat bod  $[\sqrt{\pi}, 0]$ . Kdyby se nám to podařilo v  $n$  krocích, pak by  $\sqrt{\pi}$  bylo algebraické číslo (jehož stupeň dělí  $2^n$ ). To by však znamenalo, že i číslo  $\pi = \sqrt{\pi} \cdot \sqrt{\pi}$  je algebraické. Je však dokázáno, že číslo  $\pi$  je transcendentní, což je spor, takže ani kvadratura kruhu není sestrojitelná.

Pomocí teorie transcendentních čísel jsme tak dokázali, že všechny tři antické problémy jsou obecně neproveditelné.

## Závěr

Teorie transcendentních čísel je dodnes plná nezodpovězených otázek a od svého vzniku potrápila řadu proslulých matematiků. Na druhou stranu konstrukce pravítkem a kružítkem jsou jedním z historicky prvních matematických konceptů a všichni se s nimi seznamujeme už na začátku základní školy. Je zajímavé, že mezi těmito dvěma oblastmi dokážeme najít tak úzkou souvislost.

## Literatura

- [1] Rosický, J.: *Algebra*. 4. přeprac. vyd., Masarykova univerzita, Brno, 2002.
- [2] Burger, E. B., Tubbs, R.: *Making Transcendence Transparent*. Springer, New York, 2004, <https://doi.org/10.1007/978-1-4757-4114-8>.
- [3] Dummit, D. S., Foote, R. M.: *Abstract algebra*. John Wiley, Hoboken, 2004.

## Přirozená čísla ve zlomcích

*José Marcial Nájares Romero, ZŠ Gutova, Praha 10*

**Abstrakt.** V tomto textu rozvíjíme myšlenky z článku *Nepárne čísla v zlomcích* od V. Čerňanové. Zamýšlíme se nad tím, co se děje, když lichá čísla nahradíme přirozenými čísly.

### Úvod

Tento článek se inspiruje článkem [1], kde se autorka věnuje lichým číslům ve zlomcích. Všimá si, že zlomek jedna třetina se dá zapsat nekočně mnoha způsoby pomocí lichých čísel takto:

$$\frac{1}{3} = \frac{1+3}{5+7} = \frac{1+3+5}{7+9+11} = \frac{1+3+5+\dots+(2n-1)}{(2n+1)+(2n+3)+\dots+(4n-1)}, \quad (1)$$

tedy v čitateli je  $n$  prvních lichých čísel a ve jmenovateli je  $n$  bezprostředně následujících lichých čísel.

Dále autorka ukazuje, že pokud bude poměr počtu sčítanců v čitateli a jmenovateli  $1 : (m-1)$ , kde  $m$  je přirozené číslo větší než jedna, pak pro zlomek bude platit:

$$\frac{\sum_{k=1}^n (2k-1)}{\sum_{k=n+1}^{mn} (2k-1)} = \frac{1}{m^2-1}, \quad (2)$$

což pro  $m=2$  skutečně dává jednu třetinu.

V našem článku se nejprve podíváme, co se stane se rovností (2), když nahradíme lichá čísla všemi přirozenými čísly při jinak stejném způsobu sčítání. Zjistíme, že se zlomku  $1/(m^2-1)$  pouze blížíme s rostoucím počtem členů. Poté představíme dva způsoby, jak generovat přesně jednu třetinu pomocí zlomků z přirozených čísel, které se podobají (1). Tyto způsoby na závěr zobecníme i pro získání součtů  $1/(m^2-1)$ .

K úpravám výrazů budeme používat vzorec pro součet členů aritmetické posloupnosti

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}.$$

### Přirozená čísla místo lichých

Podívejme se, co se stane se vzorcem (1), když nahradíme lichá čísla přirozenými:

$$\frac{1}{2}, \quad \frac{1+2}{3+4} = \frac{3}{7}, \quad \frac{1+2+3}{4+5+6} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}, \quad \dots$$

Na první pohled to vypadá, že jsme nedostali nic souvisejícího s jednou třetinou. Ale přece!

$$\frac{1+2+\dots+n}{(n+1)+(n+2)+\dots+2n} = \frac{\frac{(1+n)n}{2}}{\frac{(n+1+2n)n}{2}} = \frac{1+n}{1+3n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3}.$$

Podobně tvrzení platí i obecně při náhradě lichých čísel přirozenými ve vzorci (2).

**Věta 1.** *Nechť  $m$  je přirozené číslo,  $m \geq 2$ . Pak platí:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n k}{\sum_{k=n+1}^{mn} k} = \frac{1}{m^2 - 1}.$$

*Důkaz.* Opět použijeme vzorec pro součet aritmetické posloupnosti a dostaneme:

$$\begin{aligned} \frac{\sum_{k=1}^n k}{\sum_{k=n+1}^{mn} k} &= \frac{\frac{(1+n)n}{2}}{\frac{(n+1+mn)(m-1)n}{2}} = \frac{1+n}{(1+(m+1)n)(m-1)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(m+1)(m-1)} = \frac{1}{m^2 - 1}. \end{aligned}$$

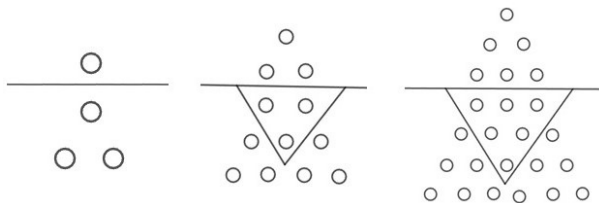
### Generování jedné třetiny pomocí přirozených čísel

Nyní ukážeme dva způsoby, jak generovat přesně jednu třetinu pomocí přirozených čísel.

- **1. způsob:** Pro libovolné přirozené číslo  $n$  budeme v čitateli počítat prvních  $n$  přirozených čísel a ve jmenovateli budeme počítat hodnotu  $n$  a dále  $n$  bezprostředně následujících přirozených čísel, tj. ve jmenovateli bude sečteno  $n+1$  čísel. Skutečně pro  $n = 1, 2, 3$ :

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{1+2} = \frac{1+2}{2+3+4} = \frac{1+2+3}{3+4+5+6}. \tag{3}$$

Podívejme se na znázornění pomocí trojúhelníkových čísel na obr. 1.



Obr. 1: Znázornění rovností (3) pomocí trojúhelníkových čísel

Tvrzení nyní zapišme formálně.

**Věta 2.** Pro každé přirozené číslo  $n$  platí

$$\frac{1 + 2 + \dots + n}{n + (n + 1) + \dots + 2n} = \frac{1}{3}.$$

*Důkaz.* Tvrzení okamžitě plyne použitím součtu pro aritmetickou posloupnost.

$$\frac{1 + 2 + \dots + n}{n + (n + 1) + \dots + 2n} = \frac{\frac{(1+n)n}{2}}{\frac{(n+2n)(n+1)}{2}} = \frac{1}{3}.$$

- **2. způsob:** Opět budeme pro libovolné přirozené číslo  $n$  v čitateli sčítat prvních  $n$  přirozených čísel a ve jmenovateli budeme sčítat hodnotu  $n$  po sobě jdoucích čísel počínaje  $n+2$ , tedy číslo  $n+1$  tentokrát vynecháme. Skutečně pro  $n = 1, 2, 3$ :

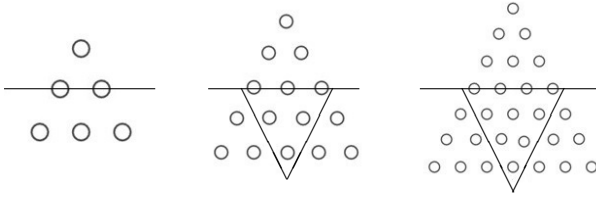
$$\frac{1}{3} = \frac{1 + 2}{4 + 5} = \frac{1 + 2 + 3}{5 + 6 + 7}. \tag{4}$$

Podívejme se i tentokrát na znázornění pomocí trojúhelníkových čísel na obr. 2.

Tvrzení opět zapišme formálně.

**Věta 3.** Pro každé přirozené číslo  $n$  platí

$$\frac{1 + 2 + \dots + n}{(n + 2) + (n + 3) + \dots + 2n + (2n + 1)} = \frac{1}{3}.$$



Obr. 2: Znázornění rovností (4) pomocí trojúhelníkových čísel

*Důkaz.* Tvrzení plyne z věty 2, stačí si uvědomit, že nejen čitatelé, ale i jmenovatelé zlomků jsou ve větě 2 i ve větě 3 stejní.

$$\begin{aligned} n + (n + 1) + (n + 2) + \dots + 2n &= \\ = (n + 2) + (n + 3) + \dots + 2n + (2n + 1). \end{aligned}$$

### Generování dalších zlomků pomocí přirozených čísel

Nyní se budeme snažit zobecnit výsledek (2) pro přirozená čísla. Rozdělíme si způsoby pro  $m$  sudé a  $m$  liché,  $m \geq 3$ .

- $m$  sudé: Pokud v čitateli sečteme  $n$  prvních přirozených čísel a do jmenovatele dáme  $(m - 1)n$  čísel ovšem tak, že vynecháme  $m/2$  prostředně následujících po  $n$ , pak dostaneme  $1/(m^2 - 1)$ .

**Věta 4.** Pro všechna přirozená čísla  $n, m$ , kde  $m$  je navíc sudé, platí:

$$\begin{aligned} \frac{1 + 2 + \dots + n}{(n + m/2 + 1) + (n + m/2 + 2) + \dots + (n + m/2 + (m - 1)n)} &= \\ = \frac{1}{m^2 - 1}. \end{aligned}$$

*Důkaz.* I tady si znovu vystačíme se součtem aritmetické posloupnosti.

$$\begin{aligned} \frac{1 + 2 + \dots + n}{(n + m/2 + 1) + (n + m/2 + 2) + \dots + (n + m/2 + (m - 1)n)} &= \\ = \frac{\frac{(1 + n)n}{2}}{\frac{(n + m/2 + 1 + n + m/2 + (m - 1)n)(m - 1)n}{2}} &= \frac{1}{m^2 - 1}. \end{aligned}$$

Všimněme si, že pro  $m = 2$  odpovídá věta 4 druhému způsobu generování čísla jedna třetina, jak byl popsán v předchozí části.

- $m$  liché: Pokud v čitateli sečteme  $n$  prvních přirozených čísel a ve jmenovateli sečteme  $(m - 1)n$  následujících čísel, ovšem poslední sčítanec  $mn$  opakujeme navíc  $(m - 1)/2$ -krát, pak dostaneme součet  $1/(m^2 - 1)$ .

**Věta 5.** Pro všechna přirozená čísla  $n, m$ , kde  $m$  je navíc liché a  $m \geq 3$ , platí

$$\frac{1 + 2 + \dots + n}{(n + 1) + (n + 2) + \dots + nm + nm \frac{(m-1)}{2}} = \frac{1}{m^2 - 1}.$$

Důkaz poslední věty necháváme jako cvičení pro čtenáře. I tentokrát bude stačit znalost vzorce pro součet aritmetické posloupnosti a šikovná úprava algebraických výrazů.

## Poděkování

Rád bych poděkoval doc. Ing. Lubomíře Dvořákové, Ph.D., za jazykovou korekturu, zkrácení a zjednodušení článku a vylepšení jeho formátu.

## Literatura

- [1] Čerňanová, V.: Nepárne čísla v zlomkoch. *Rozhledy matematicko-fyzikální*, roč. 98 (2023), č. 2, s. 1–6.
- [2] Tlustý, P.: Lichá čísla ve zlomcích ještě jednou. *Rozhledy matematicko-fyzikální*, roč. 98 (2023), č. 4, s. 39–43.

## Průměry, kam se podíváš

Milí čtenáři, v tomto čísle se vyskytují hned dva články o průměrech: aritmetickém, geometrickém, harmonickém, ale také kontraharmonickém a kvadratickém. Proto i my v dnešních úlohách pro čtenáře zůstaneme u průměrů.

Začneme s úlohou snazší:

- *Běžec uběhl první polovinu dráhy (400 m) průměrnou rychlostí 10 km/h. Jakou průměrnou rychlostí musí uběhnout druhou polovinu dráhy (tedy dalších 400 m), aby průměrná rychlost celého běhu byla dvojnásobná, tedy 20 km/h?*

Nyní úloha těžší:

- *Určete průměrnou vzdálenost dvou bodů na kružnici.*

Na závěr úloha nematematická:

- *V češtině používáme termín průměr pro průměry aritmetické, geometrické apod., ale také pro průměr kružnice. V angličtině se stejná slova nepoužívají (mean vs. diameter). Proč zvolila čeština stejná pojmenování?*

Minule měli čtenáři za úkol odpovědět na otázku týkající se hračky POP IT. Připomeňme, že jde o hračku se silikonovými bublinami, které se mačkají podle následujících pravidel:

- Hrají dva hráči a pravidelně se střídají.
- V každém tahu musí hráč zmáčknout jednu, dvě, nebo tři bubliny.
- Prohrává hráč, který zmáčkne poslední bublinu.

Čtenáři měli odpovědět na následující otázky:

- Je lepší začínat, nebo hrát jako druhý v případě hry POP IT s 29 bublinami?*
- Pokud si můžete vybrat, kdo začne, umíte vždy vyhrát v případě hry POP IT s 29 bublinami?*



## MATEMATICKÉ OŘÍŠKY

- (c) *Pokud si můžete vybrat, kdo začne, umíte vždy vyhrát v případě hry POP IT s libovolným počtem bublin?*

*Řešení* J. M. Nájarese Romera:

Ukažme, že pokud počet bublin  $k$  po mém tahu splňuje podmínku

$$k \bmod 4 = 1,$$

pak vyhrají.

Předpokládejme, že po mém tahu zůstane počet bublin, který splňuje předchozí podmínku. Pak druhý hráč zmáčkne jednu, dvě nebo tři bubliny. V následujícím tahu zmáčknu tři, dvě nebo jednu bublinu tak, aby celkem v těchto dvou tazích ubyly čtyři bubliny. Tím se dostanu do stavu s počtem bublin  $k - 4$ , který rovněž splňuje podmínku

$$(k - 4) \bmod 4 = 1.$$

Takto pokračuji dál, dokud nezbude poslední bublina pro mého protivníka. Nyní můžeme odpovědět na otázky pro čtenáře.

- (a) Jelikož  $29 \bmod 4 = 1$ , je vhodné, abych hrál jako druhý.
- (b) Ano, pokud si můžu vybrat, tak si vyberu, že budu hrát jako druhý a vždy vyhrají.
- (c) Ano, označme si  $n$  počet bublin. Je-li  $n \bmod 4 = 1$ , volím, že budu hrát jako druhý. Je-li  $n \bmod 4 \neq 1$ , pak si zvolím, že budu hrát jako první. Můj první tah bude takový, aby  $(n - p) \bmod 4 = 1$ , kde  $p$  je počet bublin, který zmáčknu v prvním tahu.

# Astronomická soutěž Supernova umožňuje studentům proniknout do tajů astrofyziky

*Jan Herzig, herzig@astro.cz*

## 1. Motivace

Astronomie a astrofyzika jsou velmi zajímavé obory, které mají velký potenciál zaujmout studenty základních a středních škol a přivést je k zájmu o přírodní vědy. Výuka fyziky ve školách se však těmto tématům věnuje bohužel jen velmi okrajově. Pokud se někdo chce začít těmto oborům věnovat, může se zúčastnit například Astronomické olympiády. Příprava na ni však není jednoduchá a nabídka studijních materiálů přiměřené obtížnosti studentům zmíněných věkových kategorií je velmi omezená.

Sám jsem se na cestu za poznáním vesmíru vydal již před několika lety. Nyní, když jsem získal nějaké základní znalosti, jsem se rozhodl pomoci svým vrstevníkům, kteří projeví zájem o stejný obor, vytvořením nových studijních textů a astronomické soutěže. Věřím, že právě rozšíření nabídky astronomického vzdělávání může vést ke zvýšení zájmu nejen o tento obor, ale v důsledku i o exaktní vědy jako celek. Astronomie totiž svojí komplexností dokáže zájemci přinést dostatečný vhled do oblasti matematiky, fyziky i informatiky a je pak jen na něm, zdali zůstane u zkoumání vesmíru, nebo si pro svou budoucí kariéru vybere některý z příbuzných oborů.

## 2. Projekt Supernova

Založil jsem tedy vzdělávací web a soutěž se jménem Supernova. Projekt byl spuštěn v listopadu roku 2023. Soutěž probíhala ve čtyřech kolech. V prvních třech kolech byli soutěžící seznámeni se třemi základními oblastmi astronomie, finálové kolo pak kombinovalo otázky ze všech těchto oblastí. Tři úvodní kola sestávala vždy z pěti úloh, první úloha se zaměřovala pouze na teoretické znalosti v podobě otázek ANO/NE, zbylé již vyžadovaly jednoduché výpočty. Finálové kolo mělo podobu jedné velké úlohy s devíti početnými podotázkami, z každé oblasti tři.

První série úloh se zaměřovala na nebeskou mechaniku, druhá na fotometrii a třetí na sférickou astronomii. Ke každé z těchto oblastí vznikl

poměrně obsáhlý studijní text. Veškeré znalosti potřebné k vyřešení úloh mohli zájemci najít právě v něm. Ve studijních textech jsem se snažil přiblížit zejména rovnice stojící za popisem astronomických jevů, kterým se populární publikace striktně vyhýbají. Proto tuto trojici studijních textů doplnil i stručnější text o základních matematických konceptech potřebných k pochopení daných astronomických témat. Díky tomu není soutěž závislá na školní výuce matematiky, tudíž například zájemce ze 7. třídy nemusí čekat do deváté, aby se naučil goniometrické funkce a mohl začít soutěž řešit.

### 3. Uplatnění ve vzdělávání

Tyto studijní texty jsou však dostupné veřejně všem zájemcům o astronomii jakéhokoliv věku. Kdokoliv tedy může přijít na webové stránky, přečíst si studijní text a následně si procvičit nově nabyté znalosti díky úlohám z minulého ročníku soutěže, které jsou na webu rovněž volně zveřejněny i se vzorovým řešením. Web takto může posloužit i k rozšíření školní výuky fyziky. Učitel může dát studentům při hodině prostor prostudovat si nějaký studijní text nebo alespoň jeho část, popřípadě ji i doplnit vlastním výkladem a následně otestovat znalosti studentů prostřednictvím zmíněných soutěžních úloh.

### 4. Budoucnost

V nově začínajícím školním roce se uskuteční druhý ročník soutěže. Organizační tým byl rozšířen o další úspěšné účastníky oborových soutěží. Oproti loňskému roku budou stávající studijní texty rozšířeny o nová témata a soutěžící se samozřejmě můžou těšit i na nové zajímavé úlohy. První kolo bude spuštěno v průběhu listopadu. Studijní texty navíc plánuji shrnout i do jedné přehledné publikace „Úvod do astrofyziky“, která bude zveřejněna v nejbližších měsících.

### 5. Ukázková úloha: Sestra Země

Exoplaneta Gliese 667 Cc je asi Zemi vůbec nejpodobnější exoplaneta, kterou kdy astronomové objevili. Rozměrově i hmotnostně je s naší planetou srovnatelná a svou mateřskou hvězdu obíhá v tzv. obyvatelné zóně, tudíž by se na jejím povrchu mohla nacházet kapalná voda. Hvězda Gliese 667 C je 3,23krát méně hmotná než Slunce a jeden oběh kolem ní zabere zmíněné planetě 28,155 dní. Jaká je velká poloosa dráhy Gliese 667 Cc v astronomických jednotkách?

**Řešení**

Použijeme třetí Keplerův zákon

$$\frac{a^3}{T^2} = M.$$

Z něj vyjádříme hledanou velkou poloosu:

$$a^3 = MT^2,$$

a tedy

$$a = \sqrt[3]{MT^2}.$$

Pokud do tohoto výrazu dosadíme čas v rocích a hmotnost v násobcích hmotnosti Slunce, získáme velikost velké poloosy v astronomických jednotkách. Periodu převedeme z dnů na roky:

$$T = \frac{28,155}{365} \text{ roků} = 0,077 \text{ roků}.$$

Hmotnost v násobcích hmotnosti Slunce  $M_{\odot}$  můžeme jednoduše zjistit:

$$M = \frac{M_{\odot}}{3,23} = 0,31 M_{\odot}.$$

Na závěr číselně dosadíme:

$$a = \sqrt[3]{0,31 \cdot 0,077^2} \text{ au} = 0,123 \text{ au}.$$

Velká poloosa dráhy Gliese 667 Cc je tedy 0,123 au.

**Odkazy**

Webové stránky naleznete na adrese:

<https://www.astrosupernova.cz/>

Aktuální informace můžete sledovat i na instagramu:

@supernova\_soutez

## Příští zastávka: Vesmír

*Věra Krajčová*

Zajímá Tě vesmír? Pak si udělej volné odpoledne v pátek 8. listopadu 2024 a vyraž do Hvězdárny Brno. Týdenní festival Czech Space Week <https://www.czechspaceweek.com/> je již tradiční akcí. Od roku 2018 se vždy na podzim po celé České republice odehrávají akce pro odbornou i širokou veřejnost, studenty, seniory i rodiny s dětmi. Jde totiž o největší festival kosmických aktivit v Česku.

Součástí Czech Space Weeku je i konference *Příští zastávka: Vesmír*. Jedná se o akci pro studenty středních a vysokých škol, kteří se zajímají o možnosti spojené s kosmickým průmyslem v České republice a o aktivity, které mohou zlepšit jejich rozvoj tímto směrem.

Hlavním cílem konference je představit studentům příležitosti během studia i po něm, aktuální problematiky a motivovat je se v tomto směru dále vzdělávat a propojovat se s lidmi s podobnými zájmy. Mezi řečníky budou zástupci z oblastí vědy, průmyslu a vzdělání (univerzity, vysoké a střední školy).

V rámci konference budou mít studenti možnost navázat kontakt s hosty a dalšími účastníky během přestávek na občerstvení a na konci hlavního programu. Součástí konference bude také job fair, kde si studenti budou moci popovídat s personalisty a prohlédnout aktuálně vybrané pozice.

Je to akce pro Tebe? Registrace probíhá přímo na stránkách akce, kam se dostaneš přes tento QR kód.



# Modelování rozptylu světla v mlhovinách v rámci Talentové akademie ELI Beamlines a HiLASE

*Natálie Faryadová*

**Abstrakt.** Tento článek se zabývá modelováním rozptylu světla v reflexních mlhovinách. Cílem je popsat experiment provedený v laserových centrech ELI Beamlines a HiLASE v září 2023 během akce Talentová akademie. Účelem této akce bylo umožnit středoškolským studentům pracovat v profesionálním vědeckém prostředí a poskytnout jim nové dovednosti. Článek je rozdělen do dvou částí: v úvodní teoretické části jsou popsány jevy emise a rozptylu světla, princip laseru a objekt, jehož chování se snažíme modelovat – mlhovina. V druhé praktické části je popsán postup experimentu, který mlhovinu simuloval pomocí zlatých nanočástic a laseru.

## Úvod

Talentová akademie je soutěž určená talentovaným středoškolákům, kterou pořádají laserová centra ELI Beamlines (The Extreme Light Infrastructure ERIC) a HiLASE (Fyzikální ústav AV ČR). Finalisté Talentové akademie mají možnost vyzkoušet si skutečnou práci vědců v laserových centrech a získat tak reálné zkušenosti s prací v laboratořích i s odbornými počítačovými programy.

## 1. Teoretická východiska experimentu

### 1.1. Emise světla

Světlo lze definovat dvěma způsoby. Jednou z možností je popisovat světlo jako elektromagnetické vlnění o vlnové délce asi 390 až 750 nm. Druhou možností je považovat světlo za proud částic nazývaných fotony. V obou případech se jedná o přenos energie, a to buď ve formě vlny, nebo částice.

K emisi takové energie dochází například tehdy, když elektron v atomu přeskóčí na nižší energetickou hladinu. Tento jev popsal Niels Bohr, když se snažil vytvořit model vodíku, který vysvětloval jeho emisní spektrum. Bohrov model ukázal, že atom absorbuje nebo vyzařuje energii pouze tehdy, když se elektron přesouvá mezi energetickými hladinami, a že energie odevzdaná elektronem odpovídá energii vyzařovaného kvanta světla, tedy fotonu.

Tomuto druhu emise se říká spontánní. Spontánní emise je chaotický děj, protože každý elektron skáče sám a ne vždy ve stejnou chvíli. Když je potřeba, aby vyzářené světlo mělo konkrétní vlastnosti, například aby bylo koherentní (viz dále), používá se tzv. stimulovaná emise, která je základním principem fungování laseru.

## 1.2. Laser

Laser je přístroj, který funguje na principu stimulované emise. Stimulovaná emise nastává, když foton interaguje s excitovaným elektronem v atomu, který se nachází ve vyšší energetické hladině. Tento foton stimuluje elektron k tomu, aby přeskokem do nižší energetické hladiny uvolnil svou přebytečnou energii ve formě nového fotonu. Klíčové je, že nově uvolněný foton má zcela shodné vlastnosti jako foton, který elektron excitoval – má stejnou energii (vlnovou délku), fázi, polarizaci i směr šíření [1].

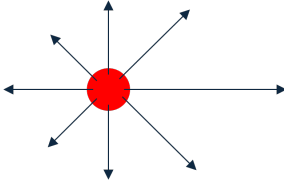
Tento proces umožňuje vytvořit souvislé světelné paprsky s vysokou intenzitou, což je základním principem fungování laseru. V praxi to znamená, že všechny fotony vzniklé stimulovanou emisí jsou identické. Tento jev se označuje jako koherence světla. Výstupním otvorem laseru pak proud koherentních fotonů vychází. Světlo vycházející z laseru může být uvolňováno s různou frekvencí, což je často využíváno zejména u velmi výkonných, tzv. pulsních laserů. Jeden z nejsilnějších laserů na světě, BIVOJ v HiLASE v České republice, je pulsní laser, který pracuje s frekvencí 1 až 10 Hz.

## 1.3. Rozptyl světla

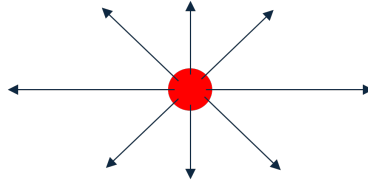
Rozptyl světla je jev, při kterém se světlo odchyluje od původního směru kvůli interakci s různými částicemi. Existují dvě základní varianty rozptylu: Rayleighův a Mieův.

*Rayleighův rozptyl* popisuje situaci, kdy se světlo rozptyluje na částicích, které jsou menší než desetina vlnové délky záření, což platí zejména pro krátké modré vlny. Tento jev vysvětluje například modrou barvu oblohy – světlo dopadající na malé částice ve vzduchu (jako jsou molekuly) se nejvíce rozptyluje v modré části spektra. Proto je obloha modrá a Slunce žluté. Kdyby Země neměla atmosféru, viděli bychom skutečnou, bílou barvu Slunce. Protože ale částice v atmosféře rozptylují zejména modré fotony, vidíme modrou barvu všude na obloze. Tato barva pak ve spektru Slunce není tak výrazná a složením zbylých barev bez modré vznikne žlutá barva Slunce.

*Mieův rozptyl* pozorujeme, když jsou částice větší než desetina vlnové délky světla. Tento rozptyl je obecnější, protože nezávisí na velikosti částice a funguje i pro částice, které světlo absorbují – na rozdíl od Rayleighova rozptylu. Výpočty podle Mieovy teorie jsou však složitější, a proto se, pokud to podmínky dovolují, při výpočtech intenzity rozptýleného světla často upřednostňuje jednodušší Rayleighova teorie [2].



Obr. 1: Mieův rozptyl



Obr. 2: Rayleighův rozptyl

Každá částice rozptyluje světlo s jinou intenzitou a v různých úhlech. U Rayleighova rozptylu dochází k symetrickému rozptylu směrem dopředu i dozadu. Naproti tomu Mieův rozptyl se vyznačuje silnějším rozptylem ve směru dopředu, přičemž dochází k tzv. *dopřednému rozptylu*. Tento efekt je výraznější u větších částic. Mieův rozptyl také zahrnuje rozptyl v mnoha směrech, včetně určitého množství zpětného rozptylu, ale většina energie je směřována dopředu [3].

#### 1.4. Mezihvězdná látka

Velká část vesmíru je zaplněna mezihvězdnou látkou, kterou tvoří plyn a částice prachu. Přestože zabírá obrovské oblasti prostoru v galaxii, mezihvězdná látka představuje jen malé procento z celkové hmotnosti – v případě naší Galaxie tvoří asi 5 % hmotnosti. Největší podíl v těchto pěti procentech má vodík v plynném stavu, průměrná hustota mezihvězdné látky je kolem milionu atomů na metr krychlový.

Mezihvězdný plyn absorbuje světlo vzdálenějších hvězd. Absorpce probíhá různými ionty, atomy či molekulami. Vodík v této oblasti však většinou zůstává nepozorovatelný, protože se ve vesmíru obvykle vyskytuje v neutrálním stavu a jeho absorpční čáry leží v ultrafialové části spektra [4, s. 108–109]. Světlo ještě více tlumí mezihvězdný prach, který se skládá z částic různého původu (např. kovy a minerály) o velikosti kolem jednoho mikrometru.

Tyto částice rozptylují světlo Rayleighovým rozptylem, takže ovlivňují převážně modré světlo. Proto prachovým oblakem proniká hlavně světlo s delšími vlnovými délkami, tedy červené světlo. V důsledku toho působí



mezihvězdné oblaky nebo hvězdy zahalené prachem červeněji, než jaké jsou ve skutečnosti [5].

### 1.5. Mlhoviny

Když je hustota mezihvězdného oblaku (prachu a plynu) v určité oblasti dostatečně vysoká, mohou zde vznikat hvězdy. Oblak se skládá převážně z vodíku, přičemž až deset procent jeho hmotnosti tvoří prach. Aby se oblak začal smršťovat pod vlivem gravitační síly, musí mít dostatečně velkou hmotnost. Částice z vnějších oblastí oblaku získávají vysokou rychlost a při průchodu hustšími vnitřními oblastmi tak dochází ke zvýšení teploty. Pokud teplota dosáhne úrovně potřebné k zažehnutí fúzních reakcí, zrodí se hvězda. Nejjednodušším způsobem, jak vyvolat smrštění oblaku mezihvězdné látky, je výbuch nedaleké supernovy. Ten vytváří rázovou vlnu, která zvyšuje hustotu prachu a plynu v oblaku [4, s. 116–118]

Těmto mezihvězdným oblakům se také říká *mlhoviny*. Nejsou důležité jen při vzniku hvězd, jsou přítomny i při jejich zániku. Zbytky po výbuchu supernovy (což je jedno z možných konečných stádií života hvězdy) jsou totiž také mlhoviny, konkrétně vrchní plynné vrstvy, které supernova při svém výbuchu odhodí do okolí [6].

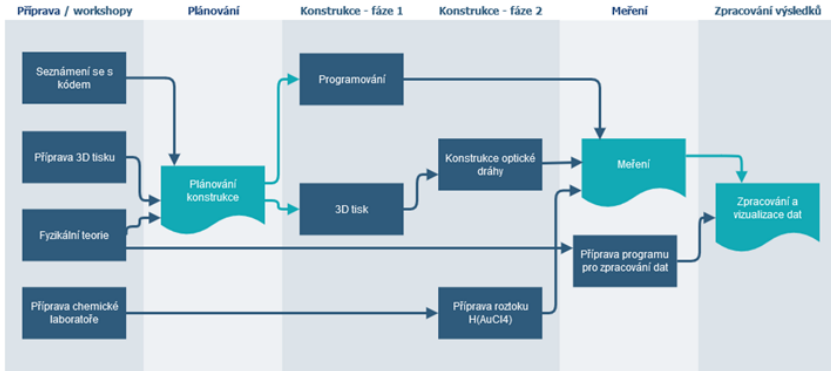
Existuje několik druhů mlhovin. V základu se dělí na tmavé a difúzní. Tmavé se na fotkách jeví jako tmavé fleky, jelikož nejsou osvětlené žádnou hvězdou [7]. Difúzní mlhoviny mají vlastní zdroj světla, který ozařuje látku zevnitř. Další kategorií jsou mlhoviny reflexní. Ty odrážejí světlo z nedaleké hvězdy. Plyn, který obsahují, je studený a neionizovaný, tudíž bez nedaleké hvězdy by patřily mezi tmavé mlhoviny. Absorpční spektrum mlhoviny má stejné absorpční linie jako hvězda, která ji osvětluje. Tyto mlhoviny odrážejí až 60 % světla, které na ně dopadá [8].

## 2. Praktická část

Praktická část této práce byla realizována během finále Talentové akademie 2023 ve výzkumných laserových centrech HiLASE a ELI Beamlines. Cílem bylo vytvořit laboratorní model reflexní mlhoviny pomocí zlatých nanočástic a měřit její rozptyl pomocí několika laserů s různými vlnovými délkami.

Pracovní skupinu tvořili čtyři členové, z nichž každý měl specifickou roli. *Chemik* připravoval zlaté nanočástice, které byly použity jako materiál rozptylující světlo. *Konstruktér* navrhl a sestavil zařízení pro měření. *Programátor* se staral o automatizaci měření a programování krokových

motorů a světelných senzorů měřicího zařízení. Nakonec *teoretik* analyzoval naměřená data a vytvářel jejich grafické znázornění.



Obr. 3: Diagram experimentu

Na obr. 3 je znázorněn postup práce našeho týmu. První odpoledne absolvoval každý člen workshop, kde se naučil základy potřebné k úspěšnému zvládnutí jeho části experimentu. Večer jsme si všichni sdělili získané zkušenosti a začali plánovat konstrukci měřicího přístroje.

Abychom mohli měřit rozptyl světla, rozhodli jsme se, že budeme měřit intenzitu světla v úhlu  $270^\circ$  kolem kyvety s roztokem zlatých nanočástic, který modeloval chování mlhoviny, tedy v úhlu  $\pm 135^\circ$  na každou stranu od osy kolem kyvety.

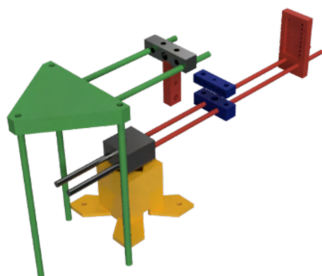
Jakmile jsme se dohodli na postupu, dva členové týmu začali pracovat na 3D modelování a tisku konstrukce držící kyvetu, zatímco zbývající dva členové se věnovali programování ovládacího software pro krokové motory a snímače světla. Následující den odešel jeden člen do chemické laboratoře připravovat roztoky s nanočásticemi, zatímco zbytek týmu připravoval optickou dráhu v laboratoři.

Jakmile byly nanočástice vloženy do kyvety, začalo samotné měření pomocí připravené konstrukce. Měření trvalo přibližně tři hodiny; během té doby jeden člen týmu připravoval grafy a chemik prováděl spektroskopii na připravených roztocích. Nakonec jsme se všichni zapojili do práce na grafech a připravili prezentaci výsledků měření.

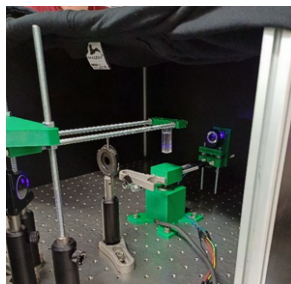
Celý experiment trval necelé tři dny. Na následujících stránkách bude podrobně vysvětleno, jaké úkoly jednotlivé specializace měly a jak jejich práce probíhala.

## 2.1. Konstrukce měřicího přístroje

Za tento aspekt práce zodpovídal *konstruktér*. Navrhl měřicí zařízení, které bylo sestaveno ze závitových tyčí a částí vytištěných pomocí 3D tiskárny, přičemž jednotlivé součásti nejprve vymodeloval v programu Autodesk Inventor. Model zařízení je zobrazen na obr. 4. Oranžově je znázorněn držák krokového motoru, který je přišroubován k optické desce (optický breadboard – deska s pravidelnou mřížkou otvorů se závitem, na kterou se upevňují různé optické prvky, viz obr. 5).



Obr. 4: Model měřicího přístroje vytvořený pomocí AutoDesk Inventor



Obr. 5: Finální vzhled konstrukce

Krokový motor otáčí ramenem, na němž jsou umístěny dva digitální snímače světla: TLS2591, který měří intenzitu v celém viditelném spektru společně s částí infračerveného, a AS7341, který umožňuje měřit intenzitu pro jednotlivé části spektra. Spektrum je rozděleno do intervalů o šířce 20 nm a výstupem senzoru je intenzita světla pro každý interval zvlášť.

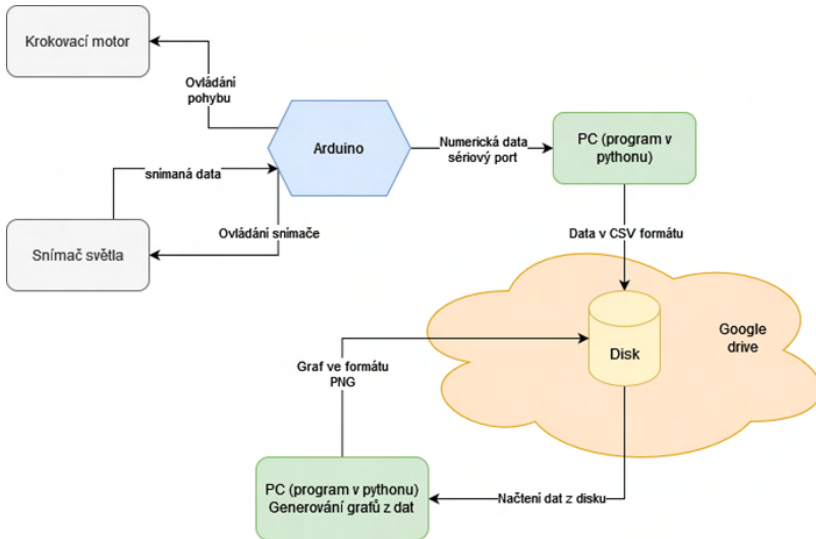
Rameno se pohybuje v zadaném intervalu a je tak možné měřit intenzitu světla, které prochází květou se vzorkem (držák květy je na obr. 4 vyznačen zelenou barvou). Vzorek v květetě je přes čočku osvětlován světlem laseru.

## 2.2. Program pro měření

Jako *programátor* jsem měla za úkol vytvořit program pro snímače světla a krokový motor v prostředí Arduino a zajistit uložení naměřených dat do tabulky. Arduino je jednoduchá programovatelná elektronická deska, která slouží k ovládání různých elektronických zařízení, senzorů a motorů. Je oblíbená pro svou snadnou použitelnost a široké možnosti využití v projektech pro začátečníky i pokročilé.

Organizátoři nám poskytli základní verze tří programů napsaných v jazyce pro Arduino – jeden pro motor a po jednom pro každý snímač.

Nejprve bylo nutné upravit tyto programy tak, aby vyhovovaly potřebám našeho týmu a zkombinovat je do jednoho. Arduino totiž neumožňuje současný běh dvou programů a vzájemná synchronizace (například krok, čekání 1 sekundy, měření atd.) by byla jinak nemožná. Schéma vytvořeného řešení je na obr. 6.



Obr. 6: Diagram toku dat

Deska Arduino jednak ovládala krokový motor, jednak zasílala digitální data ze snímačů přes virtuální sériový port do počítače, kde je přebíral skript vytvořený v jazyce Python, jenž získaná data ukládal ve formátu CSV. Po každém měření byly tyto soubory nahrány na Google drive, odkud si je stáhli členové týmu, kteří pracovali na grafech. Ti měli další pythonový skript, který z dat vytvářel grafy. Ty se potom také přidaly na Google drive, aby k nim měli přístup všichni členové týmu.

### 2.3. Příprava nanočástic

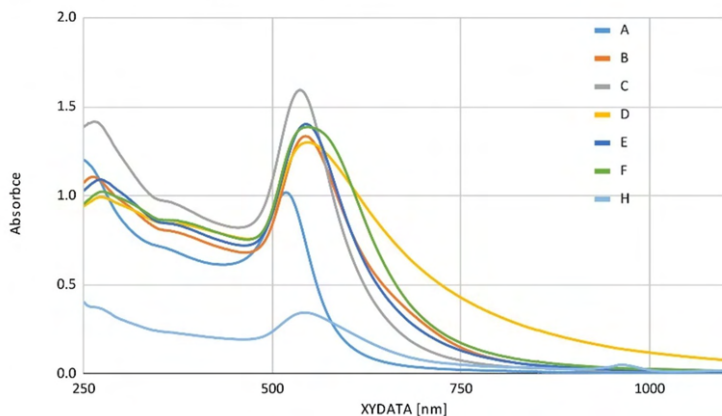
Člen týmu se specializací *chemik* měl za úkol připravit roztok s nanočásticemi zlata, které v našem experimentu představovaly prach v mlhovině. Také prováděl spektrofotometrii výsledného roztoku.

Zlaté nanočástice byly vytvořeny směsí tří roztoků: citrátu trisodného ( $\text{Na}_3\text{Cit}$ ), jodidu draselného ( $\text{KI}$ ) a kyseliny chlorzlatité  $\text{H}(\text{AuCl}_4)$ . Zlaté nanočástice musely být kulaté a musely mít správnou velikost, což byla

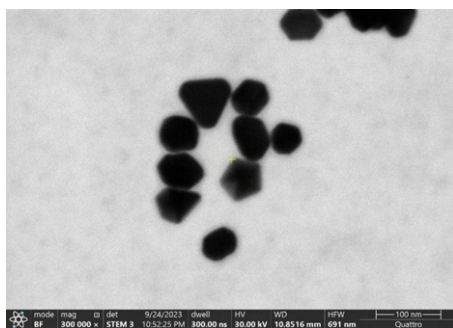
největší překážka, jelikož nanočástice tvořily všechny možné tvary, a pokud se nedodržel přesný poměr látek, neměly správnou velikost. Velikost částic byla měřena pomocí elektronového mikroskopu<sup>1)</sup>.

Podle velikosti se nanočástice rozdělily do kyvet s vodou tak, aby všechny nanočástice v jedné kyvetě měly stejnou hodnotu absorpce. Ta byla zjištěna pomocí spektrofotometrie<sup>2)</sup>, díky které se také dala dokázat jejich přítomnost v roztoku.

Spectrofotometer measurement



Obr. 7: Graf absorpce všech připravených roztoků podle vlnové délky světla zářícího na roztok



Obr. 8: Zlaté částice s různými tvary zkoumané elektronovým mikroskopem

<sup>1)</sup>Mikroskop, který používá proud elektronů jako zdroj světla.

<sup>2)</sup>Analytická metoda, která zjišťuje vlastnosti vzorku podle jeho absorpční hodnoty.

Tyto připravené roztoky sloužily jako model reflexní mlhoviny, kde zlaté nanočástice představovaly prach a částice ve vesmíru.

## 2.4. Teorie a zpracování dat

Osoba se specializací *teoretik* měla za úkol pochopit zkoumané fyzikální jevy, vysvětlit je svému týmu a nakonec vizualizovat získaná data ve formě grafů. Zatímco probíhala první měření, byl teoretikem vytvářen program v Pythonu, který analyzoval naměřené výsledky a vizualizoval je pomocí grafu.

## 2.5. Měření

V laboratoři bylo nejprve nutné sestavit celé zařízení na optické desce. Sestávalo ze dvou zrcadel, laseru, dvou irisových clon a zastíňovacích desek. Sestavení trvalo přibližně dvě hodiny kvůli řešení různých problémů, které se průběžně objevovaly. Proto se zařízení na obr. 5 mírně liší od původního návrhu na obr. 4.

Samotné měření trvalo asi tři hodiny. K dispozici byly lasery se čtyřmi vlnovými délkami: fialový (415 nm), zelený (530 nm), červený (630 nm) a infračervený (930 nm). Měření se zeleným laserem se však nestihlo dokončit a data z červeného laseru se vůbec nezačala sbírat. Grafy byly proto vytvořeny pouze z dat získaných s fialovým a infračerveným laserem.

## 2.6. Výsledky měření

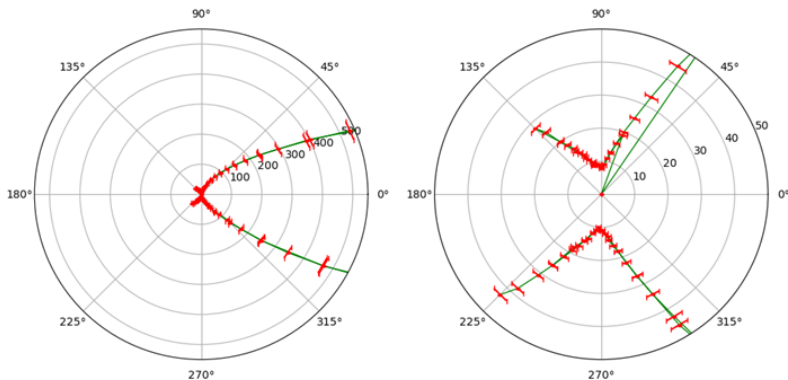
Naměřená data byla převedena do polárních grafů, kde je zaznamenána intenzita světla v daném úhlu. Polární graf nepoužívá kartézskou souřadnicovou soustavu, tedy osy  $x$  a  $y$ , ale zobrazuje data v kruhovém formátu pomocí úhlů a vzdáleností od středu. Každý bod na grafu je určen úhlem (ve stupních nebo radiánech) a vzdáleností od středu, což umožňuje znázornit hodnoty, které závisí na směru nebo úhlu.

Na našich grafech jsou vidět u křivky malá čísla. Ta indikují specifickou radiální hodnotu, tj. velikost radiusu (poloměru), když se používají polární souřadnice, na daném bodě. Také díky tomu, že měření bylo provedeno dvakrát na obě strany, je možné občas vidět dvě křivky vedle sebe. Pokud se na grafu objeví, znamená to, že nastal mezi měřeními rozdíl.

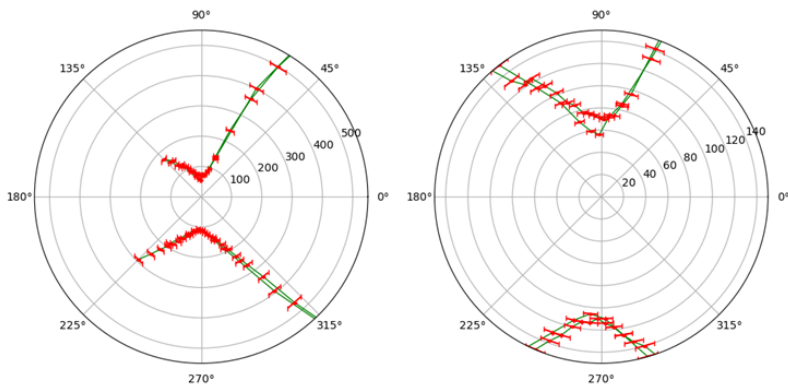
Grafů bylo celkem dohromady 32: pracovali jsme s osmi roztoky s různě velkými nanočásticemi a pro každé měření jsme vytvořili čtyři grafy – dva pro každý laser. Ukázka naměřených hodnot je na obr. 9 a 10.

V grafech je vynesena intenzita rozptýleného světla, která je tím větší, čím je datový bod dále od středu. Kruh je ocejchován ve stupních – nula

stupňů odpovídá spojnicí kyvety s roztokem a laseru. Měření bylo prováděno v oblouku o velikosti  $270^\circ$ , což je na grafech zobrazeno v oblasti od  $0^\circ$  do  $135^\circ$  proti směru hodinových ručiček a  $0^\circ$  až  $135^\circ$  ve směru hodinových ručiček (na stupnici  $0^\circ$  až  $225^\circ$ ).



Obr. 9: Výsledné grafy série G (nanočástice o průměru 34 nm) s laserem 415 nm



Obr. 10: Výsledné grafy série G (nanočástice o průměru 34 nm) s laserem 930 nm

Na obr. 9 a 10 je patrné, že stejné roztoky rozptylují dvě různé vlnové délky odlišným způsobem. Nejenže je v některých místech větší intenzita světla, ale různé vlnové délky se rozptylují v různých směrech (na obr. 10 je například silnější Rayleighův rozptyl než na obr. 9).

Jak již bylo zmíněno, Mieův a Rayleighův rozptyl se liší také směrovým rozložením rozptýleného světla. Na grafech je zřetelnější Rayleighův

rozptyl, který je symetrický ve směru dopředu a dozadu. Tato symetrie se však častěji objevuje v přiblížených grafech vpravo. Rozptyl světla by byl méně patrný, pokud bychom graf nezvětšili, protože intenzita rozptýleného světla nebyla dostatečně silná.

Několik měření, a tím i grafů, bylo bohužel ovlivněno různými problémy. Často se v některých místech objevoval extrémní skok intenzity, zejména tam, kde se světlo přiblížilo ke konstrukci. Další nepřesnost může být způsobena tím, že od naměřené intenzity nebyla odečtena intenzita okolního světla v laboratoři.

## Závěr

Cílem experimentu bylo simulovat reflexní mlhovinu a ověřit, že v takovém prostředí dochází k Rayleighovu rozptylu světla. Tento cíl se podařilo splnit, jak je vidět z grafů naměřených dat. Experiment byl úspěšný nejen sám o sobě, ale také umožnil účastníkům pracovat na vědeckém problému, seznámit se s novými technologiemi, navrhnout řešení a analyzovat výsledky. Na konci akce byly výsledky prezentovány před zaměstnanci laserových center a zástupci Akademie věd.

Je však třeba podotknout, že dosažené výsledky nebyly vždy zcela přesné, protože experiment byl prováděn pod časovým tlakem. Cíle se podařilo dosáhnout díky spolupráci a nadšení všech členů týmu. Experiment by se navíc neuskutečnil bez podpory organizátorů Talentové akademie, kteří účastníkům tuto příležitost poskytli.

Na další ročníky Talentové akademie se lze přihlásit prostřednictvím jejich webových stránek <https://www.hilase.cz/o-nas/popularizace-vedy/talentova-akademie/>. Soutěž je určena pro středoškolské studenty, a to i bez předchozích vědeckých zkušeností. Nabízí možnost provést experiment v profesionálních podmínkách s pomocí vědců.

## Literatura

- [1] Hecht, J.: *Laser: Fundamental principles*. Encyclopædia Britannica, cit. 8/2/2024, Dostupné z: <https://www.britannica.com/technology/laser/Fundamental-principles>.
- [2] Hahn, D. W.: *Light Scattering Theory*. Department of Mechanical and Aerospace Engineering, University of Florida, 2009, Dostupné z: <http://plaza.ufl.edu/dwhahn/RayleighandMieLightScattering.pdf>.



- [3] Britannica, T. Editors of Encyclopaedia: *Rayleigh scattering*. Encyclopædia Britannica, cit. 8/2/2024, Dostupné z: <https://www.britannica.com/science/Rayleigh-scattering>.
- [4] Šolc, M., Švestka, J., Vanýsek, V.: *Fyzika hvězd a vesmíru*. Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1983.
- [5] NSF: *All we are is dust in the interstellar wind*. U.S. National Science Foundation, Alexandria, cit. 10/2/2024, Dostupné z: <https://new.nsf.gov/news/all-we-are-dust-interstellar-wind>.
- [6] Hubblesite: *Stars and Nebulas*. Space Telescope Science Institute, Baltimore, Maryland, cit. 10/2/2024, Dostupné z: <https://hubblesite.org/science/stars-and-nebulas>.
- [7] Mathis, J. S.: *Nebula: Historical survey of the study of nebulae*. Encyclopædia Britannica, cit. 10/2/2024, Dostupné z: <https://www.britannica.com/science/nebula/Historical-survey-of-the-study-of-nebulae>.
- [8] Mathis, J. S.: *Reflection nebula*. Encyclopædia Britannica, cit. 10/2/2024, Dostupné z: <https://www.britannica.com/science/reflection-nebula>.



Reflexní mlhovina NGC 1999 v souhvězdí Orionu (zdroj: [https://cs.wikipedia.org/wiki/Reflexn%C3%AD\\_mlhovina#](https://cs.wikipedia.org/wiki/Reflexn%C3%AD_mlhovina#))

## Opravdu krátký záblesk

*Věra Krajčová*

Laser není jen ukazovátko. Je to zdroj světla s naprosto ojedinělými vlastnostmi, který umožnil například sestavení hologramu. Jeho výjimečnost tkví v tom, že jde o zdroj koherentní („učesané“ vlnění o stejné frekvenci, fázi a o stejném směru kmitání) a monochromatický (o jedné vlnové délce). Navíc je toto světlo vyzařováno ve formě úzkého svazku i na velké vzdálenosti. První laser byl sestaven v roce 1960.

Zjednodušeně si můžeme laser (Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation) představit jako nějaké aktivní prostředí (například krystal rubínu, plyn CO<sub>2</sub>, He-Ne), které je mezi dvěma rovnoběžnými zrcadly. Pomocí výbojky (nebo chemickou reakcí nebo elektronovým svazkem...) dodáme do aktivního prostředí energii, která vybudí většinu elektronů aktivního prostředí ze základní energetické hladiny do vyšší energetické hladiny (excitace elektronů). Z ní ale v mžiku sestupují do tzv. metastabilní hladiny, kde vyčkávají. V okamžiku, kdy se objeví stimulující foton, vrátí se elektron do základní energetické hladiny, přičemž dojde k vyzáření (emisi) kvanta energie ve formě stejného fotonu jako byl ten stimulující. Tento foton poté interaguje s dalším excitovaným elektronem, čímž se spouští lavinovitá stimulovaná emise fotonů se stejnou frekvencí a fází. Díky zrcadlům fotony opakovaně prochází prostředím a interagují s dalšími elektrony, a tím exponenciálně narůstá tok fotonů. Jakmile intenzita světla přesáhne určitou mez, je svazek fotonů vyzářen přes polopropustné zrcadlo ven. Podle toho, jaké máme aktivní prostředí, může být tento paprsek z oblasti infračerveného, viditelného světla i ultrafialového záření.

Druhů laserů je spousta. Nezávisí jen na aktivním prostředí, ale i na tom, jestli laser pracuje v pulsech nebo kontinuálně a jaký výkon při svém vyzařování vydává. A výkon laseru úzce souvisí právě s dobou vyzařování. Vždyť výkon je definován jako energie vyzářená za čas. Tedy logicky: čím kratší je doba záblesku při stejném množství vyzářené energie, tím má laser větší výkon.

Jak významný tento nástroj je, dokazuje i to, že v roce 2023 byla za vygenerování a výzkumnou práci s lasery s attosekundovými impulsy udělena Nobelova cena za fyziku, a to třem vědcům: Ferenci Krauszovi,

Pierru Agostinimu a Anne Geneviève L'Huillierové (teprve 5. žena, která získala Nobelovu cenu za fyziku). Týmu Anne Geneviève L'Huillierové se v roce 2003 podařilo získat nejkratší laserový pulz o délce 170 attosekund.

Dnes již i česká odborná pracoviště pracují s lasery, jejichž pulsy trvají pikosekundy ( $10^{-12}$  s). V centru ELI Beamlines v Dolních Břežanech dokonce vyvíjejí lasery s pulsy až attosekundovými ( $10^{-18}$ ). Výkony těchto laserů se udávají v petawattech ( $10^{15}$  W). Vzhledem k opravdu krátké délce jejich impulsů je konstrukce těchto laserů poměrně složitá, více si o tom můžete přečíst přímo na stránkách ELI Beamlines:

<https://www.eli-beams.eu/cs/vyzkum/lasery/>

### Úkol

Zkuste vypočítat, jak dlouhý, resp. krátký, je záblesk laseru (v metrech). Jak dlouhý bude u laserů pikosekundových, resp. laserů attosekundových? S jakými objekty byste mohli tyto délky porovnat?

### Řešení

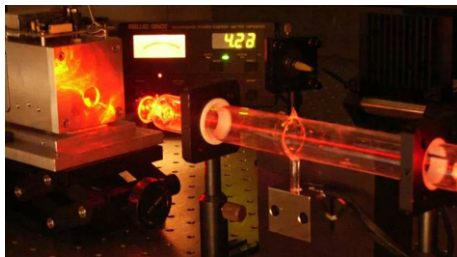
Laserový paprsek je proud fotonů pohybující se rovnoměrně přímočaře rychlostí světla  $c \doteq 3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ , dobu pulsu známe. Délku pulsu  $s$  tedy vypočteme podle vzorce pro dráhu rovnoměrného přímočarého pohybu  $s = c \cdot t$ , kde  $t$  je doba pulsu. U pikosekundových laserů

$$s = 3 \cdot 10^8 \cdot 10^{-12} \text{ m} = 3 \cdot 10^{-4} \text{ m},$$

u attosekundových laserů

$$s = 3 \cdot 10^8 \cdot 10^{-18} \text{ m} = 3 \cdot 10^{-10} \text{ m}.$$

Délku pulsu 0,3 mm si asi představit dokážeme (např. průměr tuhy do mikrotužky), ale záblesk o délce průměru jednoho atomu?



Obr. 1: Zdroj: Lasery v metrologii a interferometrii (J. Lazar, Ústav přístrojové techniky AV ČR)

## Astro Pi Challenge – Pošli svůj kód do vesmíru

Věra Krajčová

Pokud už jsi objevil radost z programování v Pythonu nebo naopak potřebuješ nějaký impuls k tomu, abys začal programovat, je tu pro tebe soutěž Astro Pi, která ti umožní provádět experimenty na palubě Mezinárodní vesmírné stanice ISS na oběžné dráze Země. Využívat přitom budete Astro Pi VIS a Astro Pi IR, dva mikropočítače Astro Pi (Raspberry Pi) umístěné na ISS, které jsou vybavené sadou senzorů monitorujících okolní prostředí.

Nejdříve je potřeba vytvořit malý tým kamarádů ve věku do 19 let, a poté se rozhodnout, jestli se zúčastnit jen jednodušší nebo i obtížnější kategorie.

První *Astro Pi: Mise Zero* je určená úplným začátečníkům a zabere maximálně jednotky hodin. Úkolem je pobavit astronauty na Mezinárodní vesmírné stanici tím, že jim pomocí programu, který napíšete, zobrazíte vzkaz a obrázek se svým jménem.



# ASTRO PI

MISSION ZERO

## ZPRÁVY

Druhá *Astro Pi: Mise Space Lab* je určena týmům starších žáků s programovacími zkušenostmi a jejím cílem je změřit rychlost pohybu stanice v době, kdy jejich kód běží na počítači na ISS. Během maximálně tří minut musí program pořídit snímky zemského povrchu či oblačnosti a ze zaznamenaných změn vypočítat rychlost. Analýza získaných snímků a výpočty musí proběhnout v počítači Astro Pi na palubě ISS (tedy není možné stáhnout data a analýzu provést na zemi). Kód musí končit uložení změřené hodnoty rychlosti. Vítězem se stane tým, jehož výsledek se nejvíce přiblíží skutečné hodnotě rychlosti stanice.



## ASTRO PI

### MISSION SPACE LAB

Astro Pi Challenge pořádá ESA Education a ESERO ve spolupráci s Raspberry Pi Foundation. Letošní ročník probíhá od 16. 9. 2024 s koncem během února až března 2025. Více informací a aktuality najdete na stránkách <https://www.eserocz.cz/astro-pi>.

Vydává Jednota českých matematiků a fyziků  
tel.: 222 090 708-9, e-mail: jcmf@math.cas.cz  
za podpory MFF UK Praha a FJFI ČVUT Praha



Vycházejí 4 čísla v kalendářním roce

Obálku navrhl Bohuslav Šír

Sazbu programem  $\text{\TeX}$  připravil RNDr. Miloslav Závodný

Adresa redakce: MFF UK, V Holešovičkách 2, 182 00 Praha 8–Troja  
e-mail: rozhledy@jcmf.cz

Internetové stránky časopisu: <https://rozhledy.jcmf.cz/>

Vytiskla Tiskárna Matula, Olomoucká 27, 618 00 Brno

Distribuci pro předplatitele provádí v zastoupení vydavatele  
MediaCall, s. r. o.

Vídeňská 546/55, 639 00 Brno

tel.: +420 532 165 165, e-mail: [export@mediacall.cz](mailto:export@mediacall.cz)

web: [www.zahranicnitisk.com](http://www.zahranicnitisk.com)

ISSN 0035-9343

MK ČR E4691

© Jednota českých matematiků a fyziků, Praha 2024

---

## Redakční rada

Vedoucí redaktorka:

doc. Ing. Lubomíra Dvořáková, Ph.D., FJFI ČVUT Praha

Redaktorka pro matematiku:

doc. Ing. Lubomíra Dvořáková, Ph.D., FJFI ČVUT Praha

Redaktor pro fyziku:

RNDr. Věra Krajčová, Ph.D., FJFI ČVUT Praha

Členové redakční rady:

prof. RNDr. Vlastimil Dlab, DrSc., F.R.S.C., Praha

doc. RNDr. Zdeněk Drozd, Ph.D., MFF UK Praha

RNDr. Petr Hanuš, FSv ČVUT Praha

doc. RNDr. Jaroslav Hora, CSc., FPE ZČU Plzeň

prof. RNDr. Ivo Kraus, DrSc., FJFI ČVUT Praha

doc. RNDr. Jan Kříž, Ph.D., PřF UHK Hradec Králové

prof. RNDr. Miroslav Lávička, Ph.D., FAV ZČU Plzeň

RNDr. Pavel Pokorný, Ph.D., VŠCHT Praha

RNDr. Miroslav Randa, Ph.D., PdF ZČU Plzeň

RNDr. Filip Studnička, Ph.D., PřF UHK Hradec Králové

doc. RNDr. Jan Šlégr, Ph.D., PřF UHK Hradec Králové

prof. RNDr. Pavel Tlustý, CSc., PedF JU České Budějovice

doc. RNDr. Pavel Töpfer, CSc., MFF UK Praha

RNDr. Vladimír Wagner, CSc., ÚJF AV ČR Řež

## Setkání nad matematikou

Ahoj!

Baví vás matika?

A bydlíte poblíž Plzně?

Pak máme akci přímo pro vás.

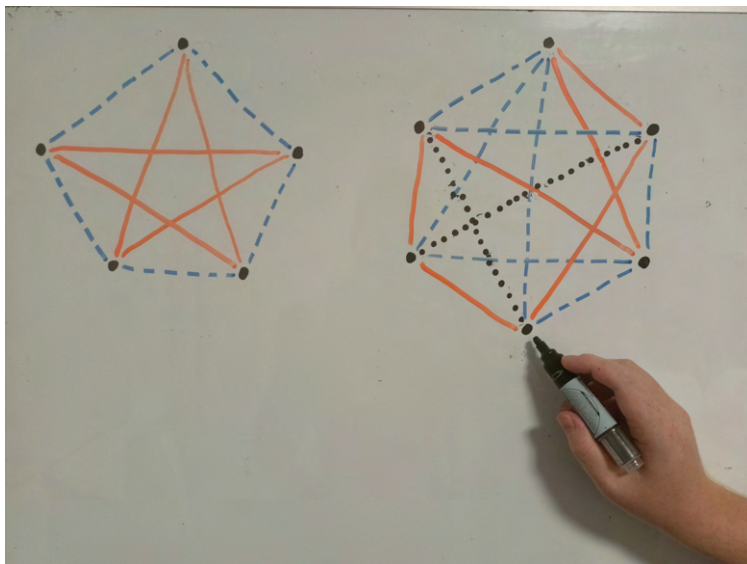
Přijďte na setkání nad matematikou,  
která se konají každý pátek večer od 18.00 hod.

Jsme skupinka kamarádů, takže atmosféra je zcela neformální  
a nemusíte se ničím stresovat.

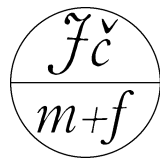
V případě zájmu se podívejte na naši stránku

<https://mathsessions.klusik.cz/>

a kontaktuje nás přes odkaz na stránce.



# ROZHLEDY matematicko-fyzikální Ročník 99 (2024), číslo 3



---

## OBSAH

L. Spíchal: Pythagorejské průměry, kontraharmonický průměr a zlatý řez v pravouhlém trojúhelníku . . . . .	1
J. Fiala, M. Hrubešová, T. Roskovec: Některá využití harmonického průměru ve výuce matematiky na střední škole . . . . .	13
P. Gajdoš: Transcendentní čísla a konstrukce pravítkem a kružítkem	25
J. M. Nájares Romero: Přirozená čísla ve zlomcích . . . . .	34
Matematické oříšky: Průměry, kam se podíváš . . . . .	39
J. Herzig: Astronomická soutěž Supernova umožňuje studentům proniknout do tajů astrofyziky . . . . .	41
V. Krajčová: Příští zastávka: Vesmír . . . . .	44
N. Faryadová: Modelování rozptylu světla v mlhovinách v rámci Talentové akademie ELI Beamlines a HiLASE . . . . .	45
V. Krajčová: Opravdu krátký záblesk . . . . .	57
V. Krajčová: Astro Pi Challenge – Pošli svůj kód do vesmíru . . . .	59

---

## Pokyny pro autory

Příspěvky dodávejte na adresu redakce v elektronické podobě. Nejlépe napsané ve formátu  $\text{L}^{\text{T}}\text{E}^{\text{X}}$ , přijatelný je i formát Plain $\text{T}^{\text{E}}\text{X}$ , je akceptovatelný i text připravený editorem Word či podobným.

Pokud jde o obrázky, je žádoucí, aby byly připraveny v reprodukovatelné podobě. Každý obrázek nechtě je v samostatném souboru, nejlépe ve formátu pdf nebo eps. Přípustná je též bitmapa v dostatečném rozlišení.

Ke každému zasílanému příspěvku (ne u soutěží, zpráv a recenzí) přiložte krátkou anotaci v českém jazyce. Dále je žádoucí, aby u každého příspěvku byla uvedena literatura, na kterou je v textu odkazováno.