

# ROZ HLEDY

**MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ**

ČASOPIS PRO ZÁJEMCE O MATEMATIKU, FYZIKU A INFORMATIKU

ROČNÍK 99 (2024) • ČÍSLO 4

## O jednom mýtickém trojúhelníku

*Dalibor Martišek, Šlapanice*

Motto

*La mathématique est l'art de donner le même nom à des choses différentes.*

Matematika je umění dávat stejné jméno různým věcem.

Henri Poincaré (1908)

Co mají rostliny společného s bloudící želvou, hrací kostkou, chrámovými věžemi, koncem světa a binomickým rozvojem? Pokud vůbec nějaká společná vlastnost existuje, najdeme ji pomocí matematiky. Matematika je totiž schopna nacházet někdy až neuvěřitelné souvislosti. A je to právě jen matematika, která nám i na tuto otázku odpoví: souvislosti se v tomto případě skrývají v jednom správně vykrájeném trojúhelníku.

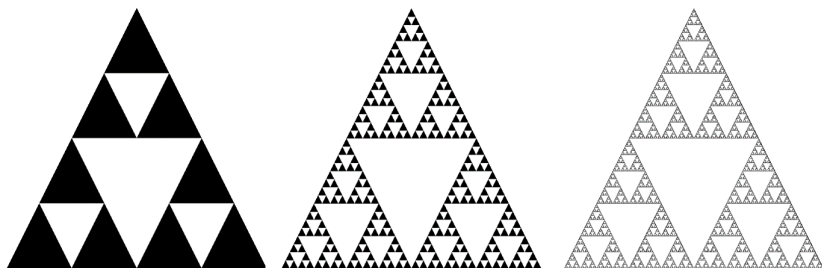
Trojúhelník je jedním ze základních geometrických útvarů. Každý, kdo úplně nezapomněl učivo ZŠ, jistě zná součet velikostí jeho vnitřních úhlů, výšky, těžnice, kružnici opsanou i vepsanou, vzorečky pro obvod, obsah a možná i mnoho dalšího. Co by na tom mělo být zajímavého, či dokonce mytického? S trojúhelníkem můžeme začít kouzlit v okamžiku, kdy jeho konstrukci opakujeme do nekonečna. Jedna taková konstrukce je poměrně známá a uváděly ji i některé články na stránkách Rozhledů (Panešová 2020, Dlab 2022, Martišek 2022). Zde ji připomeneme v krátké úvodní kapitole.

**Sierpiňského trojúhelník**

Autorem této konstrukce je Waclaw Franciszek Sierpiński (Sierpiński 1915): sestroj libovolný trojúhelník a vyjmi z něho vnitřek trojúhelníku určeného jeho středními příčkami. Na tři zbývající trojúhelníky aplikuj tutéž konstrukci, s devíti následujícími trojúhelníky proved' totéž a takto pokračuj do nekonečna (na obr. 1 jsme takto vyjímali bílé trojúhelníky z trojúhelníku černého).

Tento útvar má „nekonečný obvod“ a „nulový obsah“. Tyto poněkud nezvyklé pojmy byly vysvětleny v článku (Martišek 2022). Před sto

lety byl tento trojúhelník jedním z impulsů k zásadnímu přehodnocení pojmů dimenze a míra. Dnes tuto konstrukci můžeme považovat za kuriozitu s nepopíratelným kouzlem (viz např. Dlab 2022). Obsah a obvod ovšem nejsou ani zdaleka jedinými kouzelnickými triky, které má tento trojúhelník v rukávu.



Obr. 1: Druhý, pátý a šestý krok konstrukce rovnoramenného Sierpiňského trojúhelníku

### Aristid Lindenmayer a jeho jazykový koutek

Aristid Lindenmayer byl maďarský biolog, který se zabýval morfologií růstu řas. V roce 1968 navrhl formální matematický systém umožňující do té doby zcela nevídané geometrické konstrukce, které se dnes ani zdaleka neomezují jen na svůj původní účel. Lindenmayerovy systémy (L-systémy) jsou něco mezi velmi jednoduchými, ale zcela formálními jazyky, a jednoduchými, ale zcela formálními matematickými teoriemi.

Každý lidský jazyk lze formálně definovat množinou přípustných symbolů (abecedou) – množinou „základních“ slov, v češtině např.  $\{byt; les; \dots\}$  a gramatikou, která umožňuje odvozovat další slova a slovní spojení  $\{nábytek; v lese; \dots\}$ . Jedním z vrcholů tisíce let trvajícího vývoje matematiky bylo poznání, že pokud se mají matematici vyhnout nejasnostem a paradoxům, musí postupovat právě takto. Každá matematická teorie dnes musí být (alespoň v principu) schopna postupovat od seznamu povolených znaků, např.  $\{p; q; \dots; \neg; \vee; \wedge; \Rightarrow; ( ); \dots\}$ , přes množinu „základních“ posloupností těchto znaků, tj. „slov“, či „vět“, které považuje za pravdivé (axiomy), např.  $\{p \Rightarrow p; p \vee \neg p; \dots\}$ , a „gramatiku“ – pravidla odvozování, která umožňují z těchto „pravd“ odvozovat další tvrzení této teorie – matematické věty. V gramatice je například uvedeno, že k posloupnosti znaků  $p \Rightarrow p$  lze vždy zprava připsat znaky  $\vee q$  (v tomto pořadí), tj. že z axiomu  $p \Rightarrow p$  lze vždy odvodit větu  $p \Rightarrow p \vee q$ .

Zatímco u složitější matematické teorie (např. euklidovské geometrie) je tento striktně formální popis extrémně obtížný a u přirozeného jazyka již prakticky nemožný, popis L-systému je většinou velmi jednoduchý.

**Příklad 1.**

abeceda:  $\{F; G; +; -\}$

axiom:  $F$

gramatika:  $\{F \mapsto G - F - G; G \mapsto F + G + F\}$

(tedy každý znak  $F$  lze přepsat uspořádanou pěticí znaků  $G - F - G$  a každý znak  $G$  pěticí  $F + G + F$ ).

Jak tedy bude vypadat naše teorie?

Axiom:  $F$

1. věta:  $G - F - G$ .

Dalším přepisem můžeme z této první věty „odvodit“ sedm dalších vět: třemi způsoby můžeme přepsat právě jedno písmeno, třemi způsoby právě dvě písmena, nebo můžeme přepsat všechna tři. Dále budeme přepisovat vždy všechna písmena. Tedy:

2. věta:

$$\begin{array}{ccccccc}
 G & & - & & F & & - & & G \\
 \downarrow & & & & \downarrow & & & & \downarrow \\
 F + G + F & - & G & - & F & - & G & - & F + G + F.
 \end{array}$$

3. věta:

$$G - F - G + F + G + F + G - F - G - F + G + F - G - F - G - F + G + F - G - F - G + F + G + F + G - F - G,$$

atd.

To je tzv. syntaktická stránka jazyka či teorie – zatím jsme zcela formálně seskupovali a přepisovali nějaké znaky. Každý jazyk i každá teorie má ale také stránku sémantickou. Každá skupina znaků musí mít nějaký význam. Česky se domluvíme pouze s někým, kdo si pod uspořádanými trojicemi znaků *byt* či *les* představuje (alespoň zhruba) totéž co my.

Abychom zjistili, co je na příkladu 1 tak mimořádného a co to má společného s trojúhelníkem, dodáme mu význam (naší teorii budeme interpretovat). Představme si želvu (nebo jakékoliv jiné zvířátko) v nějakém bludišti. Její poloha je v každém okamžiku určena bodem, ve kterém



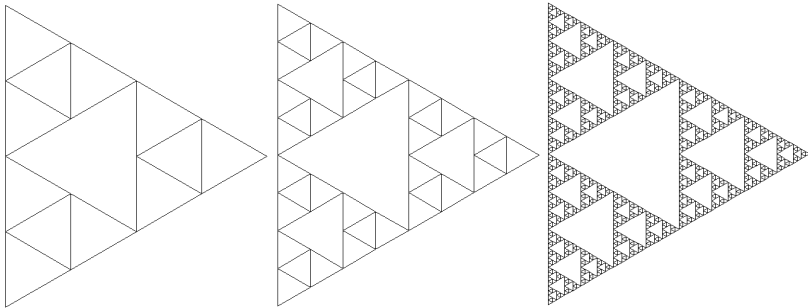
**Příklad 2.**

abeceda:  $\{F; G; +; -\}$

axiom:  $F - -G - -G$

gramatika:  $\{F \mapsto F - -G + +F + +G - -F; G \mapsto GG\}$

Čtenář se může pokusit nakreslit axiom a první popř. druhou větu. Další věty může sestrojít počítač (viz obr. 4). Tento systém sestrojuje obvody trojúhelníků, které postupně odebírá Sierpiňského konstrukce z předchozí kapitoly.



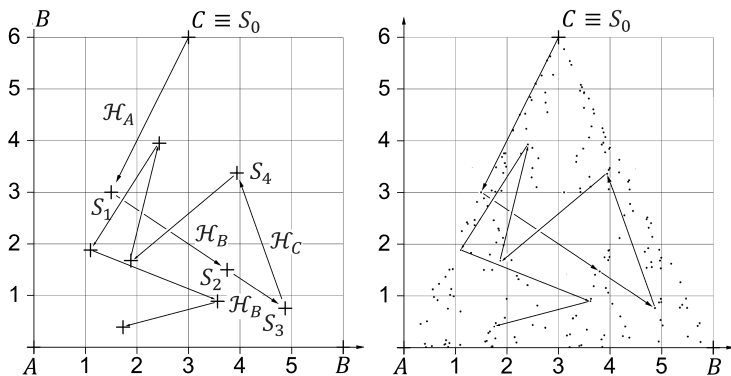
Obr. 4: Interpretace L-systému z př. 2. Zleva: druhá, třetí a šestá věta

L-systémy sestrojují tento trojúhelník jako křivku. To vypadá na první pohled velmi podivně, ale z topologického hlediska je Sierpiňského trojúhelník skutečně křivka (viz např. Martišek 2022). L-systém z příkladu 2 a obr. 4 je jako „cesta z bludiště“ značně neefektivní. Želva se totiž stále častěji ocitá na stejném místě, protože její cesta stále častěji protíná sama sebe. Z topologického hlediska je ovšem velmi ilustrativní. Sierpiňského trojúhelník je totiž křivka, která protíná sama sebe v každém svém bodě. Další magický kousek tohoto kouzelného geometrického útvaru.

**Tvořivá náhoda**

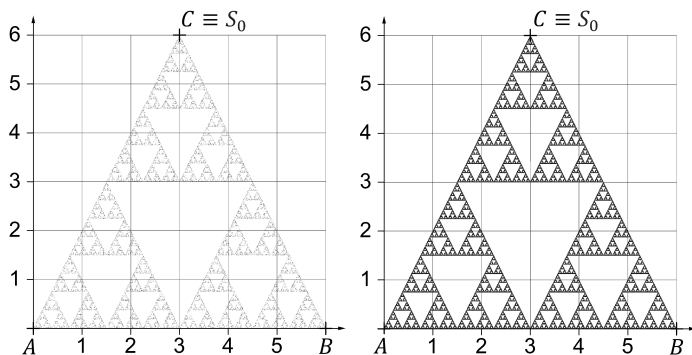
V rovině souřadnicové soustavě sestrojme body  $A[0; 0]$ ,  $B[6; 0]$ ,  $C[3; 6]$  a uvažujme stejnolehlosti  $\mathcal{H}_A$ ,  $\mathcal{H}_B$ ,  $\mathcal{H}_C$  se středy v bodech  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , všechny s koeficientem 0,5. Jeden z bodů  $A$ ,  $B$ ,  $C$  (kterýkoliv) považujme za startovací a označme ho  $S_0$ . Hoďme obyčejnou hrací kostkou. Sestrojme bod  $S_1$  takto: jestliže padla jednička nebo dvojka, je bod  $S_1$  obrazem bodu  $S_0$  ve stejnolehlosti  $\mathcal{H}_A$ , pokud to byla trojka nebo čtyřka, použijeme stejným způsobem stejnolehlost  $\mathcal{H}_B$ ; ve zbylých dvou případech je  $S_1 = \mathcal{H}_C(S_0)$ . Hoďme znovu a stejným způsobem sestrojme bod  $S_2$  jako

obraz bodu  $S_1$ . Takto pokračujeme libovolně dlouho. Dostaneme náhodnou posloupnost bodů  $S_n$ , pro kterou platí  $S_{n+1} = \mathcal{H}_A(S_n)$  s pravděpodobností  $1/3$ ,  $S_{n+1} = \mathcal{H}_B(S_n)$  s pravděpodobností  $1/3$  a  $S_{n+1} = \mathcal{H}_C(S_n)$  s pravděpodobností  $1/3$ . Na obr. 5 vlevo vidíme posloupnost bodů generovanou hody 2; 3; 4; 6; 1; 5; 2; 4; 1. Vpravo tatáž posloupnost po sto hodech.



Obr. 5: Bod zobrazovaný ve třech stejnohledech náhodně vybíraných hrací kostkou

Počítač může sestavit desetitisíce či statisíce členů této posloupnosti a poskytnout zajímavý výsledek. Na obr. 6 vlevo prvních 20 000 členů, vpravo prvních 500 000 členů.



Obr. 6: Posloupnost bodů generovaná třemi stejnohleďmi a hrací kostkou dle obr. 5

Útvar na obr. 6 vpravo připomíná Sierpiňského trojúhelník, ale není to Sierpiňského trojúhelník. Je to jen jeho konečná podmnožina – půl milionu izolovaných bodů. Tento útvar má nulový nejen obsah, ale i délku. Pravděpodobnost, že se nám stejným způsobem podaří podruhé sestrotit tutéž množinu, je  $3^{-500000} \approx 10^{-238560}$ .

### Struktury skryté v Pascalově trojúhelníku

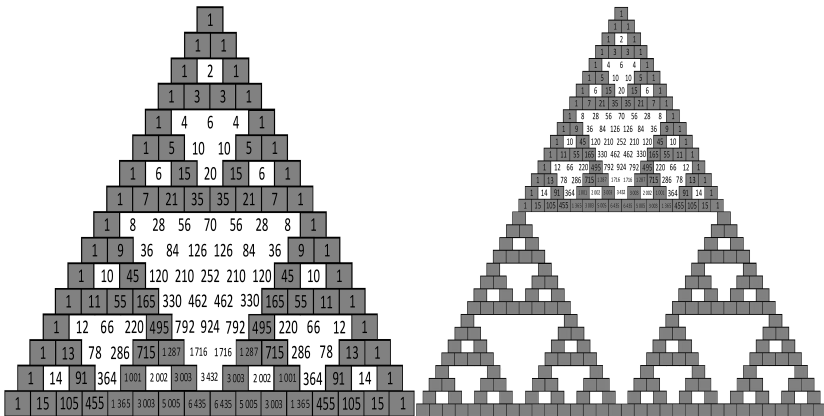
Pascalův trojúhelník tvoří, jak známo, koeficienty binomického rozvoje

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

zapsané pro jednotlivá  $n = 0, 1, 2, \dots$  do řádků pod sebou. Každý řádek začíná a končí jedničkou, vnitřní čísla řádků  $n = 2, 3, 4, \dots$  dostaneme jako součet dvou nejbližších čísel v předchozím řádku, neboť pro  $n > 1, 1 \leq k \leq n - 1$  platí

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}.$$

To ovšem není ani zdaleka jediná zajímavost tohoto trojúhelníku. Na obr. 7 vidíme šestnáct, resp. třicet dva řádků Pascalova trojúhelníku s odlišenými lichými a sudými koeficienty.

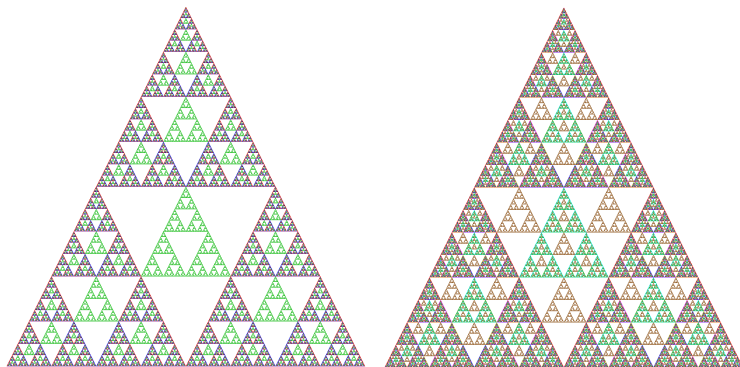


Obr. 7: Liché a sudé koeficienty Pascalova trojúhelníku. Vlevo 16 řádků, vpravo 32 řádků



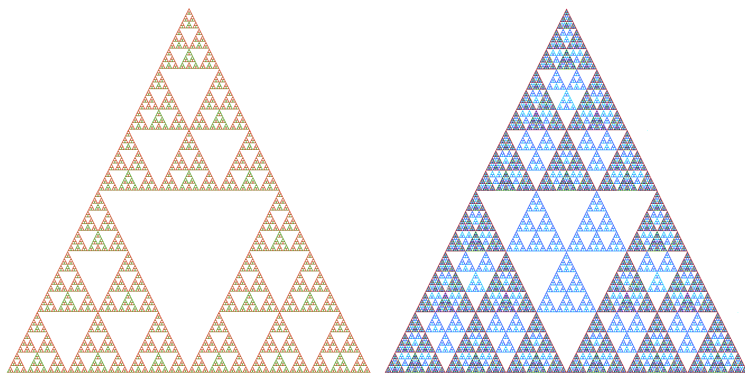
## MATEMATIKA

Na obr. 8 vidíme 1024 řádků Pascalova trojúhelníku s vyznačenými zbytky po dělení koeficientů čtyřmi (vlevo) a osmi (vpravo). Liché zbytky po vydělení čtyřmi, resp. osmi, reprezentují liché koeficienty, prvních šestnáct, resp. třicet dva řádků, se tedy rovná množinám na obr. 7. Sudé zbytky tvoří nové struktury – další a další „Sierpiňského trojúhelníky“ (uvozovky jsou zde namísto – tyto struktury tvoří samozřejmě vždy jen konečný počet koeficientů).



Obr. 8: 1024 řádků Pascalova trojúhelníku. Vlevo: zbytky po dělení čtyřmi (1; 2; 3). Vpravo: zbytky po dělení osmi (1; 2; 3; 4; 5; 6; 7)

Na obr. 9 máme zbytky koeficientů po dělení třemi (vlevo) a devíti (vpravo).



Obr. 9: 1458 řádků Pascalova trojúhelníku. Vlevo zbytky po dělení třemi (1; 2), vpravo po dělení devíti (1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8)

Vidíme další zajímavé variace na téma Sierpiňského trojúhelník. Tyto útvary sestrojil počítač. Může zkonstruovat i složitější útvary využívající dělitelnosti dalšími čísly. Bude pak generovat stále složitější sestavy zobecněných Sierpiňského trojúhelníků, které jsou zajímavým geometrickým ztvárněním jednoduchých vět o dělitelnosti.

### Hanojské věže – mýtus, anebo skutečnost?

Někde v džungli jihovýchodní Asie stojí tajemný klášter se třemi věžemi – věží stvoření, věží života a věží zkázy. V okamžiku zrození světa bylo v první věži naskládáno na sobě 64 zlatých kotoučů od největšího po nejmenší. Tamní mnichové přenášejí denně jeden kotouč tak, aby všechny kotouče dostali do věže zkázy. Protože musejí pokládat vždy menší kotouč na větší, mohou používat věž života jako „mezisklad“. V okamžiku, kdy dostanou všechny kotouče do věže zkázy, nastane konec světa. Postupovat mají co nejrychleji. Za každé „zbytečné“ prodloužení lidské existence (například přenesením jednoho kotouče tam a zpět) zaplatí lidstvo nějakým neštěstím.

Tuto pověst dával k lepšímu jeden nejmenovaný člen francouzské společnosti pro pokrok v přírodních vědách na jejím zasedání v roce 1891. Matematik Édouard Lucas, který byl rovněž přítomen, se mu vysmál. Tuto báchorku si prý vymyslel on, a to jako reklamu na svůj hlavolam se 3 kolíky a několika kotouči různých velikostí, který nazval Hanojské věže.

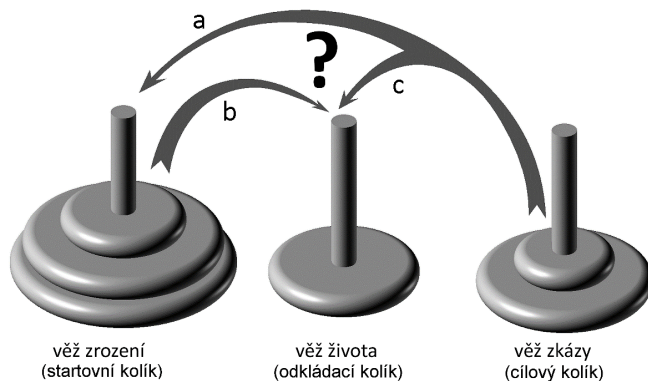
Společnost pak zasedla ke slavnostní večeři. Jeden z číšníků při Lucasově obsluze rozbil nádobí tak nešťastně, že jeden střep zasáhl matematika do tváře. Zranění se druhý den zanítilo a Lucas za několik dní zemřel. Okolnosti jeho smrti dodnes nebyly přesvědčivě vysvětleny. Jedna z verzí je poněkud děsivá: svět dostal jeden den existence navíc a Lucas několik dní utrpení a smrt za pohrdání legendami.

### Řešení hlavolamu Édouarda Lucase krok po kroku

Na obr. 10 vidíme jednu z možných pozic tohoto hlavolamu se šesti kotouči. Šipky naznačují tři možné legální kroky, tj. možná přemístění menšího kotouče na větší. Který krok v této pozici je optimální, tj. vede k nejrychlejšímu řešení?

První krok začíná vždy přemístěním nejmenšího kotouče z věže zrození (startovního kolíku). Je-li počet kotoučů sudý, první krok končí na věži života (odkládacím kolíku), je-li počet kotoučů lichý, končí na věži zkázy (cílovém kolíku). Druhý (a pak každý další sudý) krok je v každém

případě „vynucený“ – nemáme-li opět přemísťovat nejmenší kotouč zpět, můžeme přemístit jediný další kotouč, a to jediným způsobem. V každém dalším lichém kroku opět přemísťujeme nejmenší kotouč. Pokud je to možné, ve stejném směru o stejnou délku, jako v předchozím lichém kroku, pokud to možné není, změníme směr a délku kroku.



Obr. 10: Hanojské věže se 6 kotouči (hlavolam matematika Édouarda Lucase)

Celé řešení tak zcela určuje „cyklický“ pohyb nejmenšího kotouče v lichých krocích, a to v případě sudého počtu kotoučů:

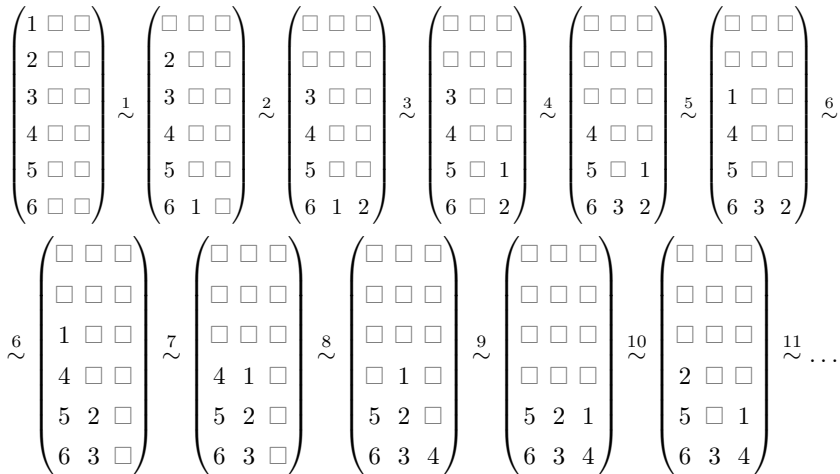
startovní → odkládací → cílový → startovní ...

v případě lichého počtu kotoučů:

startovní → cílový → odkládací → startovní ...

Tento cyklus funguje bez ohledu na pořadí, v jakém jsou kolíky fyzicky uspořádány<sup>1)</sup>. V pozici na obr. 10 tak můžeme okamžitě vyloučit šipku c, neboť při sudém počtu kotoučů končí optimální krok nejmenšího kotouče z cílového kolíku na kolíku startovním. Zbývá rozhodnout, zda k této pozici vede lichý či sudý počet kroků, tj. zda je na řadě nejmenší, anebo větší (druhý nejmenší) kotouč. K tomu můžeme zrekonstruovat posloupnost kroků vedoucích ze startovní pozice, například následujícím schématem:

<sup>1)</sup>Pro čtenáře znalého modulární aritmetiky poznamenejme, že při pořadí kolíků („startovní; odkládací; cílový“) = (0;1;2) je pozice  $K$  nejmenšího kotouče po jeho  $k$ -tém přemístění dána vztahem  $K = k \bmod 3$  (při sudém počtu kotoučů), resp. vztahem  $K = (3 - k) \bmod 3$  (při lichém počtu kotoučů). V pozici na obr. 10 je  $k \bmod 3 = 2 \Rightarrow (k + 1) \bmod 3 = 0$ , takže nejmenší kotouč z této pozice půjde na startovní kolík.



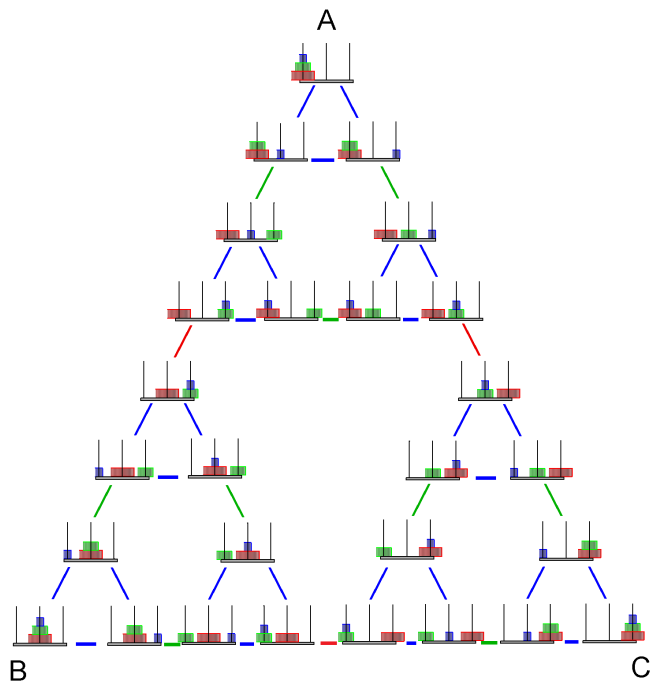
Sloupce v jednotlivých závorkách značí kolíky, čísla velikosti kotoučů. Vlnovka značí jeden krok. Z tohoto schématu je zřejmé, že desátým krokem vedoucím do pozice na obr. 10 bylo přenesení kotouče č. 2 z odkládacího na startovní kolík. Na řadě je tedy jedenáctý krok – šesté přemístění nejmenšího kotouče a šipka označená na obr. 10 písmenem a.

### Stavový prostor hanojských věží

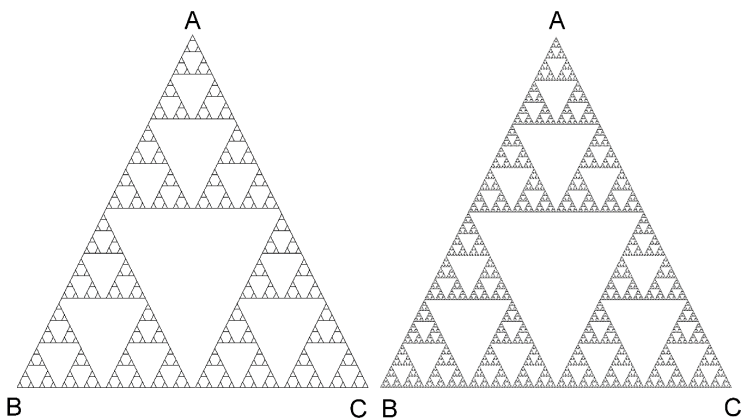
Každá posloupnost legálních kroků určuje legální pozici hlavolamu, je tedy možné sestrojít tzv. stavový prostor, tj. množinu všech legálních kroků a pozic. Na obr. 11 vidíme stavový prostor pro tři kotouče, na obr. 12 pak pro šest a dvanáct kotoučů. Stavovým prostorem pro počet kotoučů  $n \rightarrow \infty$  je Sierpiňského trojúhelník.

Ze stavových prostorů pro jednotlivá  $n$  je zřejmé, že nejrychlejší cesta z prvního na třetí kolík vede po straně  $AC$  trojúhelníku  $ABC$ . Každá „odbočka“ dovnitř trojúhelníku znamená zbytečný krok. Na druhou stranu – stavový prostor obsahuje všechny legální stavy i cesty mezi nimi a umožňuje tak „optimálně vyřešit“ nejen startovní, ale jakoukoliv (i neoptimální) legální pozici.

Rovněž stavový prostor obsahuje řešení úlohy při libovolném uspořádání kolíků na skutečném hlavolamu. Z trojúhelníku  $ABC$  totiž můžeme vyčíst nejen optimální cestu z prvního kolíku na třetí ( $A \rightarrow C$ ), ale také cestu opačnou – ze třetího kolíku na první ( $C \rightarrow A$ ). Zbývající dvě strany obsahují optimální cesty z prvního na prostřední kolík a zpět ( $A \leftrightarrow B$ ), resp. z prostředního na pravý a zpět ( $B \leftrightarrow C$ ).



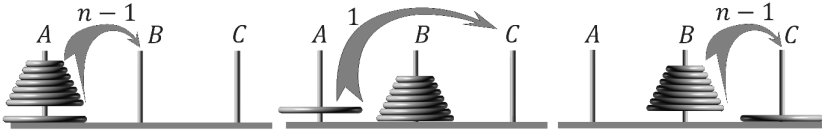
Obr. 11: Možné pozice hanojských věží pro tři kotouče



Obr. 12: Možné pozice hanojských věží pro šest (vlevo) a dvanáct (vpravo) kotoučů

### Rekurzivní řešení hanojských věží aneb rozděl a panuj

Toto řešení je založeno na velmi jednoduché úvaze. Na cílový kolík je třeba jako první umístit největší kotouč. K tomu je ovšem potřeba  $n - 1$  kotoučů, které jsou nad ním, nějak přenést na kolík odkládací (opět v pořadí od největšího po nejmenší), viz obr. 13 vlevo. Po přenesení největšího kotouče na cílový kolík (obr. 13 uprostřed) pak znovu přenést  $n - 1$  kotoučů tentokrát z odkládacího kolíku na cílový (obr. 13 vpravo). Původní úlohu o  $n$  kotoučích jsme tak rozdělili na dvě stejné úlohy s menším počtem kotoučů. Ty řešíme stejným způsobem. Původní úlohu tak rozdělujeme na stále větší počet stále jednodušších úloh, které jednoduše „opanujeme“ – každou nakonec vyřešíme přesunutím jediného kotouče.



Obr. 13: Rekurzivní řešení hanojských věží

Tento rekurzivní postup je pro lidský mozek velmi obtížný a pro větší počet kotoučů nerealizovatelný. Člověk není schopen držet v paměti la-  
vinovitě rostoucí počet úloh typu „čtyři kotouče přenes z C na A“. Pro paměť počítače je to však hračka. Krátký pseudokód příslušné rekurzivní procedury vypadá takto:

```

Procedura Přenes n {kotoučů}; {z kolíku} A; {na kolík} B; {odkládej na kolík} C
Když je n > 1, pak
    Přenes n-1 {kotoučů}; {z kolíku} A; {na kolík} C; {odkládej na kolík} B
    Napiš zprávu „přenes kotouč z“ A „na“ B
    Přenes n-1 {kotoučů}; {z kolíku} C; na kolík B; {odkládej na kolík} A
    
```

Pak už v programu stačí jediný řádek – procedura, ve které zadáme počet kotoučů a kolíky v pořadí startovací, cílový, odkládací, tedy např.

Přenes 6 {kotoučů}; {z kolíku} A; {na kolík} B; {odkládej na kolík} C  
a program napíše řešení po jednotlivých krocích:

- přenes kotouč z A na C
- přenes kotouč z A na B
- přenes kotouč z C na B
- .....
- přenes kotouč z C na B.

Pořadí kolíků v zápisu procedury *Přenes* opět nemusí nijak korespondovat se skutečným uspořádáním kolíků na hlavolamu – kolík A nemusí být vlevo, může být i uprostřed, anebo vpravo; podobně kolíky B; C. Kolík A navíc nemusí být startovní, ale opět libovolný. Zavoláme-li proceduru ve tvaru *Přenes 7; B; A; C*, přenášíme sedm kotoučů z kolíku B na kolík A, odkládáme na C, přitom tyto kolíky mohou být na skutečném hlavolamu kdekoliv. Konečně – rekurzivní postup nikde a nijak explicitně neřeší paritu počtu kotoučů. Tato otázka se vyřeší zcela přirozeně sama paritou potřebné rekurze, která nemusí programátora vůbec zajímat.

Rekurzivní algoritmy se pro svoji efektivitu používají v programátorské praxi velmi často, například pro násobení mnohaciferných čísel (Karatsuba 1962), uspořádání řady čísel podle velikosti či jmen podle abecedy (quick sort), v grafických programech při vyplňování oblastí danou barvou (seed fill) apod.

### Kdy nastane konec světa?

Jestliže v návodu pro šest kotoučů spočítáme instrukce, zjistíme, že je jich 63 (toto počítání můžeme samozřejmě rovněž svěřit počítači). Po několika dalších pokusech s různým počtem kotoučů můžeme vyslovit domněnku, že počet přenesení pro  $n$  kotoučů je  $2^n - 1$ . Důkaz, který tuto domněnku změní v matematickou větu, je hezké a jednoduché cvičení na matematickou indukci: Je-li na kolících jen jeden kotouč, je počet přenesení  $2^1 - 1 = 1$ . Předpokládejme, že pro  $n$  kotoučů je třeba  $2^n - 1$  přenesení.  $n + 1$  kotoučů pak přeneseme tak, že nejdříve přeneseme  $n$  kotoučů ze startovního kolíku na kolík odkládací (viz obr. 13) – to je podle indukčního předpokladu  $2^n - 1$  přenesení, pak přeneseme největší kotouč ze startovního kolíku na cílový, a pak opět  $n$  kotoučů, tentokrát z odkládacího na cílový, tj. dalších  $2^n - 1$  přenesení. Celkem tak dostáváme  $(2^n - 1) + 1 + (2^n - 1) = 2^{n+1} - 1$  přenesení. Pro tajemné mnichy to znamená  $2^{64} - 1 = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,615$  přenesení a pro lidstvo právě tolik dnů existence. Představme si, že budeme chtít pro mnichy vytisknout návod s jednotlivými instrukcemi, jak disky přenášet. Každá instrukce bude na jednom řádku, na stránce dejme tomu šedesát řádků, tiskárna nechť chrlí jednu stránku za sekundu. Pak jen tisk tohoto návodu bude trvat téměř deset miliard let. Kdybychom začali tisknout v okamžiku, kdy vznikla naše Země, nebudeme dnes s návodem ani v polovině.

## Závěr

Mnoho matematických objevů nese jméno jednoho člověka. Většina z nich však zrála delší dobu v hlavách mnoha matematiků. A tak například Eulerovo číslo  $e$  není tak docela Eulerovo a Cardanovy vzorce objevili zřejmě nezávisle na sobě Scipione del Ferro a Nicolo Fontana zvaný Tartaglia. Gaussovu křivku poprvé sestrojil Abraham de Moivre půl století před Gaussovým narozením, Pythagorovu větu znali a používali Babyloňané, Indové a Číňané nejméně tisíc let před Pythagorem.

Ani Sierpiňského trojúhelník není v tomto směru výjimkou. Už půl století před Sierpiňským si ho nejspíš všiml Édouard Lucas, když promýšlel svoje hanojské věže, a možná, že o něm věděl už Blaise Pascal, když studoval vlastnosti binomických koeficientů. Ostatně i jejich uspořádání do trojúhelníku bylo známo indickým a perským matematikům několik století před Pascalem.

Sierpiňského trojúhelník je však přece jen něčím výjimečný. Objevuje se ve značně překvapivých souvislostech a díky hanojským věžím je i součástí na první pohled děsivé, ve skutečnosti však až příliš optimistické pověsti. Číslo  $2^{64} - 1$  navíc vyjadřuje nejen počet dnů, které má podle legendy lidstvo dáno ke své existenci, ale i počet zrn pšenice, která žádal Sissa ben Dahir na indickém králi Šahramovi jako odměnu za vynález šachové hry. Náhoda? Na to necht' si odpoví každý sám.

## Literatura

- [1] Dlab, V.: Kouzlo Sierpiňského trojúhelníku. *Rozhledy matematicko-fyzikální*, roč. 97 (2022), č. 2, s. 1–5.
- [2] Karatsuba, A., Ofman, Y.: Multiplication of Many-Digital Numbers by Automatic Computers. *Proceedings of the USSR Academy of Sciences*, roč. 145 (1962), s. 293–294.
- [3] Lindenmayer, A.: Mathematical models for cellular interaction in development. *J. Theoret. Biology*, roč. 18 (1968), s. 280–315.
- [4] Martišek, D.: Jak to vlastně je? Fraktály. *Rozhledy matematicko-fyzikální*, roč. 98 (2023), č. 3, s. 15–33.
- [5] Panešová, K.: Hausdorffova dimenze fraktálních množin. *Rozhledy matematicko-fyzikální*, roč. 95 (2020), č. 3, s. 1–7.
- [6] Sierpiński, W.: Sur une courbe dont tout point est un point de ramification. *Compt. Rend. Acad. Sci. Paris.*, roč. 160 (1915), s. 302–305.



## Některá využití harmonického průměru ve výuce fyziky a ve finančnictví a ekonomii

*Jan Fiala, Marika Hruběšová, Tomáš Roskovec*

*Pedagogická fakulta, Jihočeská univerzita, České Budějovice*

**Abstrakt.** Článek navazuje na publikovaný příspěvek o harmonickém průměru a rozšiřuje jej o další aplikace harmonického průměru. Tentokrát se autoři zaměřili na využití harmonického průměru při řešení středoškolských úloh z fyziky a v oblasti finančnictví a v ekonomii. Širokou paletou praktických početních úloh je doloženo specifické a praktické využití harmonického průměru.

### Úvod

V článku [1] jsme se podrobně zabývali harmonickým průměrem: bylo představeno jeho zavedení a geometrická interpretace a byly připomenuty některé jeho vlastnosti. Pro potřebu dále v článku řešených úloh připomeneme pouze definici harmonického průměru a jeho vážené varianty.

**Definice 1.** Prostý harmonický průměr, označený  $\bar{x}_H$ ,  $n$  kladných<sup>1)</sup> reálných čísel (hodnot sledovaného kvantitativního znaku  $x$ )  $x_1, x_2, \dots, x_n$  je definován jako podíl počtu hodnot  $n$  a součtu  $n$  převrácených hodnot čísel  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , tj.

$$\bar{x}_H = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}}. \quad (1)$$

Speciálně pro  $n = 2$  bude mít vzorec (1) tvar

$$\bar{x}_H = \frac{2}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}} = \frac{1}{\frac{1}{2} \left( \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} \right)} = \frac{2x_1x_2}{x_1 + x_2}.$$

Jsou-li data setříděna do tabulky rozdělení četností, tj. hodnota  $x_1$  se vyskytuje  $k_1$ -krát,  $x_2$  se vyskytuje  $k_2$ -krát atd., můžeme vzorec (1) psát ve tvaru

$$\bar{x}_H = \frac{\sum_{i=1}^n k_i}{\sum_{i=1}^n \frac{k_i}{x_i}}, \quad (2)$$

<sup>1)</sup>Blíží-li se aspoň jedna z hodnot  $x_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , nule, blíží se také hodnota harmonického průměru nule.

kde  $k_i$  jsou četnosti jednotlivých hodnot, a mluvíme o váženém harmonickém průměru. Na rozdíl od vzorce (1) je celkový počet dat  $\sum_{i=1}^n k_i$  a nikoli  $n$ ,  $n$  značí počet různých hodnot dat, která se v sadě vyskytují. Obecně: přiřadíme-li hodnotám  $x_i$  váhy  $w_i > 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , pak je vážený harmonický průměr definován jako podíl

$$\bar{x}_H = \frac{w_1 + w_2 + \dots + w_n}{\frac{w_1}{x_1} + \frac{w_2}{x_2} + \dots + \frac{w_n}{x_n}} = \frac{\sum_{i=1}^n w_i}{\sum_{i=1}^n \frac{w_i}{x_i}}. \quad (3)$$

Pro  $w_1 = w_2 = \dots = w_n$  dostaneme vzorec (1) a pro  $w_i = k_i$  vzorec (2). Rozdíl mezi vzorcem (2) a (3) je ten, že váhy  $w_i > 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , mohou být na rozdíl od  $k_i$  neceločíselné, což je výhodné například při řešení úloh na výpočet průměrné hustoty při míchání různých látek.

Úvodem pouze zopakujeme, že harmonický průměr je vhodný při výpočtu střední hodnoty nerovnoměrně rozložených dat kolem aritmetického průměru, nebo když se v souboru dat vyskytují extrémně vysoké hodnoty. Využití harmonického průměru je však značně omezené jeho definicí a vychází z povahy otázky, kterou v úloze řešíme. Harmonický průměr lze použít pouze tehdy, má-li smysl uvažovat o součtu převrácených hodnot znaku. I když je užití harmonického průměru značně specifické ([3, s. 34]), ukážeme v úlohách, jak je používán například ve fyzice či finančnictví a ekonomii.

### Harmonický průměr ve fyzice

Ve fyzice se harmonický průměr využívá například při výpočtu průměrné rychlosti, v úlohách o společné práci, hustotách sloučenin, při výpočtech hodnot odporů zapojených paralelně, nebo v optice.

**Příklad 1.** Řidič jel trasu z Jindřichova Hradce do Českého Krumlova průměrnou rychlostí 80 km/h a cestu zpět průměrnou rychlostí 64 km/h. Jaká je průměrná rychlost na celé trase?

*Řešení.* Při řešení využijeme poznatků z fyziky. Průměrná rychlost je podíl celkové vzdálenosti uražené za určitý čas a tohoto času. Vyjdeme ze známého vzorce  $s = v \cdot t$ . Cestou tam ujelo auto dráhu  $s = v_1 \cdot t_1$ , cestou zpět ujelo dráhu  $s = v_2 \cdot t_2$ ,  $v_1 = 80$  km/h,  $v_2 = 64$  km/h. Celková dráha je  $2s$ , celkový čas je  $t_1 + t_2$ . Vyjádříme  $t_1$  a  $t_2$ :  $t_1 = s/v_1$ ,  $t_2 = s/v_2$ . Průměrná rychlost  $v_p$  je tedy

$$v_p = \frac{2s}{t_1 + t_2} = \frac{2s}{\frac{s}{80} + \frac{s}{64}} \text{ km/h,}$$

odkud po úpravě máme

$$v_p = \frac{2}{\frac{1}{80} + \frac{1}{64}} \text{ km/h} = 71,\bar{1} \text{ km/h.} \quad (4)$$

Auto dosáhlo průměrné rychlosti  $71,\bar{1}$  km/h.

**Poznámka.** Zlomek v rovnosti (4) vyjadřuje prostý harmonický průměr podle vzorce (1) obou zadaných rychlostí, tedy v čitateli je počet zadaných hodnot a ve jmenovateli jejich převrácené hodnoty. Pro  $n$  úseků téže délky  $s$  lze pak průměrnou rychlost vyjádřit vztahem

$$v_p = \frac{n \cdot s}{\frac{s}{v_1} + \frac{s}{v_2} + \dots + \frac{s}{v_n}} = \frac{n}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \dots + \frac{1}{v_n}}. \quad (5)$$

Ze vztahu (5) poněkud překvapivě vyplývá, že výsledná průměrná rychlost  $v$  vlastně na celkové dráze  $s$  vůbec nezávisí.

**Příklad 2.** Cyklistický závod je rozdělen na tři stejně dlouhé etapy, na nichž jel závodník postupně rychlostí 12 km/h, 20 km/h a 32 km/h. Jaká byla jeho průměrná rychlost na trase v celé délce závodu?

*Řešení.* Průměrná rychlost cyklisty je dána vztahem (5) a je rovna prostému harmonickému průměru podle vzorce (1) zadaných rychlostí

$$v_p = \frac{3}{\frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{32}} \text{ km/h} \doteq 18,2 \text{ km/h.}$$

Po zaokrouhlení na desetiny byla průměrná rychlost cyklisty 18,2 km/h.

**Příklad 3.** Cyklistický závod je rozdělen na čtyři různě dlouhé etapy, na nichž jel závodník různou průměrnou rychlostí (viz tab. 1). Jaká byla jeho průměrná rychlost na trase v celé délce závodu?

Etapa	1.	2.	3.	4.
Délka trasy [km]	40	25	20	10
Rychlost [km/h]	12	20	32	34

Tabulka 1: Délky tras a průměrné rychlosti cyklisty v závodu

*Řešení.* Celková dráha cyklisty je rovna součtu délek jednotlivých etap závodu. Celkový čas je roven součtu časů strávených cyklistou na jednotlivých úsecích. Jednotlivé časy jsou rovny poměrům jednotlivých drah a

příslušných rychlostí. Z předchozích úvah vyplývá, že průměrná rychlost cyklisty je podle (3) rovna váženému harmonickému průměru zadaných rychlostí s váhami odpovídajícími délce úseků  $w_1 = 40$  km,  $w_2 = 25$  km,  $w_3 = 20$  km a  $w_4 = 10$  km:

$$v_p = \frac{s}{t} = \frac{\sum_{i=1}^n s_i}{\sum_{i=1}^n t_i} = \frac{\sum_{i=1}^n s_i}{\sum_{i=1}^n \frac{s_i}{v_i}} = \frac{40 + 25 + 20 + 10}{\frac{40}{12} + \frac{25}{20} + \frac{20}{32} + \frac{10}{34}} \text{ km/h} \doteq 17,3 \text{ km/h.}$$

Průměrná rychlost cyklisty byla po zaokrouhlení na desetiny 17,3 km/h.

**Poznámka.** V následujících příkladech řešíme slitiny či směsi a jejich objem a hmotnost. Zatímco hmotnost směsi je nutně součet hmotností částí, u objemu to tak v některých případech být nemusí (např. 1 litr hrachu a 1 litr písku vytvoří menší objem než očekávané 2 litry, 1 litr vody a 1 litr cukru také nebude mít objem 2 litry). Vzorce používáme, s touto redukcí objemu nepočítají. V některých aplikacích, jako je například slévání kovů, je tato nepřesnost nepatrná a je zanedbávána.

**Příklad 4.** Uvažujte slitinu dvou kovů o hmotnostech  $m_1 = m_2 = 10\,000$  kg a objemech  $V_1 = 1 \text{ m}^3$  a  $V_2 = 2 \text{ m}^3$ . Jaká bude výsledná hustota takto vzniklé směsi?

*Řešení.* Vyjdeme ze vzorce pro výpočet hustoty  $\rho = m/V$ . Celková hmotnost směsi bude součtem hmotností obou složek, tedy 20 000 kg, celkový objem bude součtem objemů jednotlivých složek směsi, tedy  $3 \text{ m}^3$ . Výsledná směs bude mít hustotu

$$\rho = \frac{m_1 + m_2}{V_1 + V_2} = \frac{20\,000 \text{ kg}}{3 \text{ m}^3} = 6\,666,\bar{6} \text{ kg/m}^3.$$

Odvoďme obecný vzorec, jak spočítat hustotu celku z hustoty částí. Uvažujme vzorec pro výpočet hustoty  $\rho = m/V$ ,  $m_1, m_2$  jsou hmotnosti složek,  $V_1, V_2$  objemy složek a  $w = m_1/(m_1+m_2) = m_1/m$  je hmotnostní zlomek první složky slitiny, tj. kolik z celkové hmotnosti směsi tvoří první látka. Analogicky hmotnostní zlomek druhé složky je  $1 - w$ . Platí:

$$\rho = \frac{m_1 + m_2}{V_1 + V_2} = \frac{m}{V_1 + V_2}.$$

Převraťme hodnoty na obou stranách a za  $m$  dosaďme  $m = m_1/w$  a  $m = m_2/(1 - w)$ . Postupně upravíme:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{V_1}{m} + \frac{V_2}{m} = \frac{wV_1}{m_1} + \frac{(1-w)V_2}{m_2} = \frac{w}{\frac{m_1}{V_1}} + \frac{(1-w)}{\frac{m_2}{V_2}}.$$

## MATEMATIKA

Při označení hustot složek  $\rho_1$  a  $\rho_2$  dostáváme vzorec výsledné hustoty slitiny se dvěma složkami  $\rho$  ve tvaru

$$\frac{1}{\rho} = \frac{w}{\rho_1} + \frac{1-w}{\rho_2}, \quad (6)$$

kde  $w$  je hmotnostní zlomek první složky, zde  $w = 0,5$  (nebo také 50 %), neboť jsou oba kovy zastoupeny na celkové hmotnosti slitiny stejným dílem. Ze vzorce (6) vyjádříme  $\rho$  a dosadíme  $w = 0,5$ ,  $\rho_1 = 10\,000 \text{ kg/m}^3$  a  $\rho_2 = 5\,000 \text{ kg/m}^3$ :

$$\rho = \frac{2}{\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}} = \frac{2}{0,0003} \text{ kg/m}^3 = 6\,666,\bar{6} \text{ kg/m}^3. \quad (7)$$

Hustota slitiny je po zaokrouhlení na setiny  $6\,666,67 \text{ kg/m}^3$ .

**Poznámka.** Vzorec (7) je prostý harmonický průměr hustot  $\rho_1$  a  $\rho_2$  podle vzorce (1), který bylo možné využít s ohledem na to, že váhy obou složek jsou stejné (0,5).

**Příklad 5.** Uvažujte slitinu dvou kovů o hmotnostech  $m_1 = 30\,000 \text{ kg}$  a  $m_2 = 20\,000 \text{ kg}$  a objemech  $V_1 = 4 \text{ m}^3$  a  $V_2 = 5 \text{ m}^3$ . Jaká bude výsledná hustota takto vzniklé slitiny?

*Řešení.* Stejně jako u příkladu 4 lze vyjít z jednoduché úvahy: slitina bude mít celkovou hmotnost  $m = 50\,000 \text{ kg}$  a celkový objem  $V = 9 \text{ m}^3$ . Hledaná hustota slitiny je tedy

$$\rho = \frac{m_1 + m_2}{V_1 + V_2} = \frac{50\,000 \text{ kg}}{9 \text{ m}^3} = 5\,555,\bar{5} \text{ kg/m}^3.$$

Ve vzorci (6) představují koeficienty  $w$  a  $1-w$  váhy, kterými jsou procentuální části hmotností kovů zastoupených ve slitině, zde platí  $w = m_1/(m_1 + m_2) = 30\,000/(30\,000 + 20\,000) = 0,6$ . Hustota  $\rho_1 = 7\,500 \text{ kg/m}^3$  a  $\rho_2 = 4\,000 \text{ kg/m}^3$ . Ze vzorce (6) vyjádříme  $\rho$  a po dosazení dostaneme

$$\rho = \frac{1}{\frac{w}{\rho_1} + \frac{1-w}{\rho_2}} = \frac{1}{\frac{0,6}{7\,500} + \frac{0,4}{4\,000}} \text{ kg/m}^3 = 5\,555,\bar{5} \text{ kg/m}^3. \quad (8)$$

Hustota slitiny je po zaokrouhlení na setiny  $5\,555,56 \text{ kg/m}^3$ .

**Poznámka.** Vzorec (8) je vážený harmonický průměr hustot  $\rho_1$  a  $\rho_2$  s vahami  $w$  a  $1 - w$  (tj. podíly hmotností jednotlivých složek ve slitině, jejichž součet je vždy 1) podle vzorce (3). Vzorec (8) lze rozšířit pro konečný přirozený počet  $n$  složek slitiny, jejichž hmotnostní podíly označíme hmotnostním zlomkem  $w_i = m_i/m$ . Tento vzorec lze odvodit

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{\sum_{i=1}^n V_i} = \frac{m}{\sum_{i=1}^n \frac{m_i}{\rho_i}} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{m_i}{m} \frac{1}{\rho_i}} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n w_i \frac{1}{\rho_i}},$$

což je vážený harmonický průměr hustot jednotlivých složek, jejichž zastoupení ve směsi je dáno hmotnostními zlomky  $w_i$ .

Alternativně lze úlohy řešit objemovými zlomky, kde  $\varphi_i = V_i/V$  je podíl objemu složky v celkovém objemu, dostáváme

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i}{V} = \frac{\sum_{i=1}^n V_i \rho_i}{V} = \sum_{i=1}^n \frac{V_i}{V} \rho_i = \sum_{i=1}^n \varphi_i \rho_i,$$

což je vážený aritmetický průměr hustot jednotlivých složek s vahami rovnými objemovým zlomkům  $\varphi_i = V_i/V$ .

**Příklad 6.** První, nejstarší, stroj vyrobí výrobek za 4 hodiny, druhý za 3 hodiny, třetí za 2,5 hodiny a čtvrtý, nejmodernější, za 2 hodiny. Jak dlouho by průměrně trvalo vyrobit daný výrobek jednomu stroji?

*Řešení.* První stroj vyrobí za hodinu  $\frac{1}{4}$  výrobku, druhý stroj vyrobí  $\frac{1}{3}$  výrobku, třetí stroj vyrobí  $\frac{1}{2,5}$  výrobku a čtvrtý stroj vyrobí  $\frac{1}{2}$  výrobku. Úvahou lze tedy spočítat průměrné trvání výroby jako součet těchto zlomků vydělený čtyřmi, jeho převrácená hodnota je doba nutná k výrobě jednoho výrobku. Podrobněji řečeno, označme  $x$  dobu, za kterou by výrobek vyrobil průměrný stroj. Pak průměrná doba  $x$  je řešením rovnice

$$x \cdot \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2,5} + \frac{1}{2} \right) = 4,$$

z toho

$$x = \frac{4}{\frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2,5} + \frac{1}{2}} \doteq 2,7. \quad (9)$$

Průměrný stroj potřebuje na výrobu výrobku po zaokrouhlení na desítiny 2,7 hodiny.

**Poznámka.** Zlomek (9) je prostý harmonický průměr časů výroby daného výrobku jednotlivými stroji podle vzorce (1). Při řešení úlohy lze postupovat i tak, že uvažujeme např. dobu 30 hodin a ptáme se, kolik výrobků vyrobí jednotlivé stroje za tuto dobu. První stroj vyrobí 7,5 výrobku, druhý 10 výrobků, třetí 12 výrobků a čtvrtý, nejrychlejší, stroj vyrobí 15 výrobků, tedy za 30 hodin vyrobí všechny stroje dohromady 44,5 výrobku. Celková doba práce všech strojů byla  $4 \cdot 30 = 120$  hodin, tedy na jeden výrobek je potřeba průměrně  $\frac{120}{44,5} \doteq 2,7$  hodiny.

**Příklad 7.** Celkem čtyři výrobní stroje pracovaly po různou dobu a vyrobily různý počet těchto výrobků (viz tab. 2). Jaká je průměrná doba, za kterou vyrobí průměrný stroj jeden výrobek?

Stroj	1	2	3	4
Doba práce stroje [h]	8	6	4	2
Počet výrobků	6	5	4	3

Tabulka 2: Doby práce strojů a počty vyrobených výrobků

*Řešení.* Počty výrobků, které vyrobí jednotlivé stroje za jednu hodinu, jsou po řadě  $\frac{6}{8}$ ,  $\frac{5}{6}$ ,  $\frac{4}{4}$  a  $\frac{3}{2}$  výrobku. Za jednu hodinu společné práce je tedy souhrnný čas práce 4 h, na všech strojích se vyrobí dohromady  $\frac{6}{8} + \frac{5}{6} + 1 + 1,5 = \frac{49}{12}$  výrobku. Průměrná doba potřebná na výrobu jednoho výrobku je tedy v hodinách

$$\frac{4}{\frac{49}{12}} = \frac{48}{49} \doteq 0,976. \quad (10)$$

Průměrná doba potřebná na výrobu jednoho výrobku je po zaokrouhlení na tisícinu 0,976 hodiny.

**Poznámka.** Zlomek  $\frac{4}{\frac{49}{12}}$  v rovnosti (10) je prostým harmonickým průměrem časů potřebných na výrobu jednoho výrobku na jednotlivých strojích podle vzorce (1):

$$\frac{4}{\frac{49}{12}} = \frac{4}{\frac{1}{\frac{1}{4}} + \frac{1}{\frac{1}{6}} + \frac{1}{\frac{1}{4}} + \frac{1}{\frac{1}{3}}}.$$

**Příklad 8.** Bazén se pouze čerpadlem A vyčerpá za 8 hodin ( $t_1$ ), samostatně čerpadlem B za 6 hodin ( $t_2$ ). Za jak dlouho ( $t$ ) se bazén vyčerpá, budou-li pracovat obě čerpadla současně?

*Řešení.* Odvodíme nejdříve vzorec pro obecný případ s více čerpadly, do něhož pak snadno dosadíme hodnoty ze zadání. Označme  $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$  průtoky při zapojení prvního, druhého až  $n$ -tého čerpadla. Pak

$$Q_1 = \frac{V}{t_1}, \quad Q_2 = \frac{V}{t_2}, \quad \dots, \quad Q_n = \frac{V}{t_n},$$

kde  $V$  je objem bazénu. Pro zapojení všech  $n$  čerpadel je celkový průtok roven součtu jednotlivých průtoků, tedy  $Q = Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n$ , a výsledný čas čerpání je

$$t = \frac{V}{Q} = \frac{V}{\sum_{i=1}^n Q_i} = \frac{V}{\sum_{i=1}^n \frac{V}{t_i}} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{t_i}}. \quad (11)$$

Vzorec (11) má pro  $n = 2$  tvar:

$$t = \frac{1}{\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2}} = \frac{1}{2} \frac{2}{\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2}}. \quad (12)$$

Pravá strana vzorce (12) naznačuje, že výsledný čas je polovinou harmonického průměru obou časových údajů. Po dosazení hodnot ze zadání do vztahu (12) dostaneme v hodinách

$$t = \frac{1}{\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2}} = \frac{t_1 \cdot t_2}{t_1 + t_2} = \frac{6 \cdot 8}{6 + 8} \doteq 3,43.$$

Vyčerpání bazénu pomocí obou čerpadel bude trvat přibližně 3,43 hodiny.

**Příklad 9.** Uvažujme dva rezistory zapojené paralelně<sup>2)</sup>, první s odporem  $30 \Omega$  a druhý s odporem  $70 \Omega$ . Jakou hodnotu odporu by musely mít dva totožné rezistory, aby nahradily původní rezistory s různou hodnotou odporu při zachování stejného celkového odporu?

*Řešení.* Při paralelním zapojení je napětí  $U$  na všech takto zapojených rezistorech stejné a celkový proud  $I$  je roven součtu proudů na jednotlivých rezistorech, tedy hodnota výsledného odporu je

$$R = \frac{U}{I} = \frac{U}{\sum_{i=1}^n I_i} = \frac{U}{\sum_{i=1}^n \frac{U}{R_i}} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i}}. \quad (13)$$

<sup>2)</sup>V paralelním zapojení jsou spolu spojeny vstupní svorky vedle sebe zapojených zařízení a výstupní svorky vedle sebe zapojených zařízení.



Pro dva rezistory  $R_1$  a  $R_2$  má vztah (13) tvar

$$R = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}. \quad (14)$$

Vzorec (14) lze upravit do tvaru

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}, \quad (15)$$

který je studentům znám z hodin fyziky. Po dosazení do některého ze vzorců (14) nebo (15) dostaneme  $R = 21 \Omega$ . Každý z rezistorů zapojených paralelně tedy musí mít hodnotu odporu  $42 \Omega$ , aby byl zachován celkový odpor  $21 \Omega$ .

**Poznámka.** Pokud by byly rezistory zapojeny sériově, pak průměrný odpor je aritmetickým průměrem zapojených rezistorů. Celkový odpor je v případě sériového zapojení rezistorů roven součtu odporů jednotlivých zapojených rezistorů.

### Harmonický průměr ve finančnictví a ekonomii

**Příklad 10.** Jeden kus zboží prvního druhu stojí  $2,5 \text{ €}$ , 1 kus druhého druhu zboží stojí  $3 \text{ €}$ . Nakoupíte zboží prvního druhu za  $30 \text{ €}$  a zboží druhého druhu také za  $30 \text{ €}$ . Kolik činí průměrná jednotková cena zboží z výše uvedených dvou druhů zboží?<sup>3)</sup>

*Řešení.* Snadno spočteme, kolik kusů kterého zboží jsme koupili. Zakoupili jsme 12 ks zboží prvního druhu a 10 ks zboží druhého druhu celkem za  $60 \text{ €}$ . Průměrná cena jednoho kusu zboží je  $\frac{60}{22} = 2,7\overline{2} \text{ €}$ , což je harmonický průměr ceny  $2,5 \text{ €}$  prvního druhu zboží a  $3 \text{ €}$  druhého druhu zboží, tedy

$$\frac{2}{\frac{1}{2,5} + \frac{1}{3}} = \frac{15}{5,5} = 2,7\overline{2}.$$

**Příklad 11.** Jeden kváskový chléb stojí v pekařství *Dobrý chleba*  $2,5 \text{ €}$ , jeden žitný chléb stojí tamtéž  $3 \text{ €}$ . Majitel potravin Na Růžku nakoupil v pekařství kváskové chleby za  $30 \text{ €}$  a žitné chleby za  $54 \text{ €}$ . Kolik činí průměrná cena jednoho chleba?

---

<sup>3)</sup>Podle [2].

*Řešení.* Celkem bylo nakoupeno 12 ks kváskového chleba a 18 ks žitného celkem za 84 €. Průměrná cena jednoho kusu chleba je  $\frac{84}{30} = 2,8$  €, což je vážený harmonický průměr ceny 2,5 € za jeden kváskový chléb s váhou  $w_1 = 30$  a ceny 3 € s váhou  $w_2 = 54$ , tedy podle vzorce (3) dostaneme

$$\frac{30 + 54}{\frac{30}{2,5} + \frac{54}{3}} = \frac{630}{225} = 2,8.$$

Průměrná cena jednoho chleba činí 2,8 €.

Na akciových trzích se využívají různé indexy (ukazatele), jako například poměr aktuální ceny akcie ( $P$ ) a zisku ( $E$ ) za posledních 12 měsíců, tedy  $P/E$ . Ukazatel  $P/E$  je pro obchodníky s akciemi a investory klíčovým ukazatelem, který naznačuje, jaký násobek zisku momentálně stojí daná akcie. Ukazatel  $P/E$  tedy pomáhá investorům posoudit hodnotu a potenciální návratnost investice do takové akcie.

**Příklad 12.** Vypočítejte průměrnou hodnotu koeficientu  $P/E$  (poměr aktuální ceny akcie a zisku za ni) pro portfolio složené ze dvou částí: 30 % tvoří akcie firmy A, která má kapitál ve výši 200 miliard dolarů a možný zisk z akcií 10 miliard dolarů, a 70 % tvoří akcie firmy B, která má kapitál 1 miliardu dolarů a zisk 1 milión dolarů.

*Řešení.* Ukazatel  $P/E$  firmy A má hodnotu  $P/E = \frac{200}{10} = 20$ , firma B má hodnotu  $P/E = \frac{1}{0,001} = 1000$ . Pokud si neuvědomíme, že je vhodný vážený harmonický průměr, můžeme uvažovat takto.  $P/E$  portfolia spočítáme jako poměr celkové ceny dělené celkovým ziskem. Pokud nakoupíme za  $x$  dolarů, pak  $0,3 \cdot x$  utratíme za firmu A se ziskem spočítaným z koeficientu firmy děleného jejím  $P/E = 20$ , tedy zisk je  $0,3 \cdot x/20$ . Analogicky zaplatíme  $0,7 \cdot x$  za firmu B s  $P/E = 1000$  se ziskem  $0,7 \cdot x/1000$ . Celková cena je tedy  $0,3x + 0,7x = x$  a celkový zisk  $x(0,3/20 + 0,7/1000)$ . Podíl těchto čísel odpovídá ukazateli  $P/E$ , nezávisí na celkové velikosti portfolia  $x$  a je váženým harmonickým průměrem ukazatelů  $P/E$  obou částí portfolia s vahami  $w_1 = 0,3$  a  $w_2 = 0,7$ ,

$$P/E = \frac{x(0,3 + 0,7)}{x\left(\frac{0,3}{20} + \frac{0,7}{1000}\right)} \doteq 63,7,$$

dle vzorce (3).<sup>4)</sup>

<sup>4)</sup>Koeficient  $P/E$  nemá žádné jednotky a jeho využití je omezené více faktory.

**Příklad 13.** Investor Honza rád obchoduje s akciemi. Předpokládejme, že si Honza koupí za částku  $g$  [€] akcie při kurzu  $k_1$  € za 1 akcii, v dalším měsíci koupí Honza za  $g$  [€] další akcie při kurzu  $k_2$  € za 1 akcii a tak dále, až za posledních  $g$  [€] si Honza koupí akcie v  $n$ -tém měsíci při kurzu  $k_n$  € za 1 akcii. Jaký je průměrný kurz, za který Honza nakoupil akcie?

*Řešení.* Celková investovaná částka za všechny akcie představuje součin  $n \cdot g$  €. Je-li kurz  $k$  € za 1 akcii, pak získá Honza  $\frac{1}{k}$  akcie/€. Pak celkový počet koupených akcií je roven součtu

$$\frac{g}{k_1} + \frac{g}{k_2} + \dots + \frac{g}{k_n}.$$

Průměrný kurz, za který Honza nakupoval akcie, je tedy

$$\frac{n \cdot g}{\frac{g}{k_1} + \frac{g}{k_2} + \dots + \frac{g}{k_n}}.$$

Po vykrácení  $g$  ve zlomku dostaneme

$$\frac{n}{\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \dots + \frac{1}{k_n}}, \tag{16}$$

což je vzorec pro výpočet harmonického průměru (3) hodnot jednotlivých kurzů, za které Honza nakupoval akcie.

**Poznámka.** Ze vztahu (16) je zřejmé, že výsledná hodnota průměrného kurzu nezávisí na hodnotě  $g$  v eurech, za kterou Honza akcie pravidelně nakupoval, neboť částka byla shodná pro všechny uvažované měsíce.

**Příklad 14.** Pan Koukal si postupně ve čtyřech měsících vyměnil různou naspořenou finanční částku v korunách za eura (viz tabulka 3). Jaký byl průměrný kurz, za který pan Koukal vyměnil koruny za eura?

Měsíc	1	2	3	4
Kurz [Kč/€]	24,10	23,80	24,50	25,10
Částka [Kč]	5 543	7 140	5 390	5 020

Tabulka 3: Výměny korun za eura

*Řešení.* Pan Koukal nakoupil celkem 950 € za celkem 23 093 Kč. Průměrná hodnota směnného kurzu je tedy

$$\frac{23\,093 \text{ Kč}}{950 \text{ €}} \doteq 24,3 \text{ Kč/€}.$$

Stejný výsledek obdržíme, pokud při výpočtu využijeme vážený harmonický průměr podle vzorce (3) s vahami  $w_1$ ,  $w_2$ ,  $w_3$  a  $w_4$ , tj. investovanými částkami:

$$\frac{5\,543 + 7\,140 + 5\,390 + 5\,020}{\frac{5\,543}{24,10} + \frac{7\,140}{23,80} + \frac{5\,390}{24,50} + \frac{5\,020}{25,10}} = \frac{23\,093}{950} \doteq 24,3.$$

Průměrný kurz činil po zaokrouhlení na desetiny 24,3 Kč/€.

### Závěr

Aplikace harmonického průměru je zajímavým a užitečným učivem, které nachází své specifické a nezastupitelné uplatnění při řešení úloh z různých předmětů, například fyziky, finančnictví a ekonomie.

### Literatura

- [1] Fiala, J., Hrubešová, M., Roskovec, T.: Některá využití harmonického průměru ve výuce matematiky na střední škole. *Rozhledy matematicko-fyzikální*, roč. 99 (2024), č. 3, s. 13–24.
- [2] Henze, N.: *Harmonisches Mittel: Gesunder Menschenverstand und Beispiele*. 2024 [online video]. In: Youtube, stochastikclips, <https://www.youtube.com/watch?v=2DKnmUPxJNw>.
- [3] Hindls, R., Arltová, M., Hronová, S., Malá, I., Marek, L., Pecáková, I., Řezanková, H.: *Statistika v ekonomii*. Professional Publishing, Příbram, 2018.

## Průměrná vzdálenost dvou bodů na kružnici

*Pavel Pokorný, VŠCHT Praha*

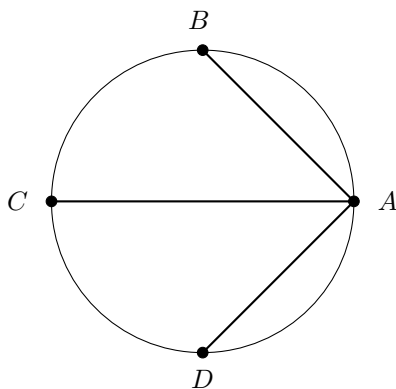
**Abstrakt.** Ukážeme, jak spočítat průměrnou vzdálenost dvou náhodně zvolených bodů na kružnici. Ale zejména si ukážeme nástroje a metody, jak lze podobné úlohy řešit.

### Konečný počet poloh

Bez újmy na obecnosti můžeme uvažovat kružnici o poloměru  $R = 1$ , protože v případě kružnice o poloměru  $R$  náš výsledek vynásobíme tímto poloměrem.

*Doporučení:* Dovolujeme si navrhnout ctěnému čtenáři, aby v tuto chvíli přerušil čtení tohoto textu a pokusil se nejdříve úlohu vyřešit vlastními silami.

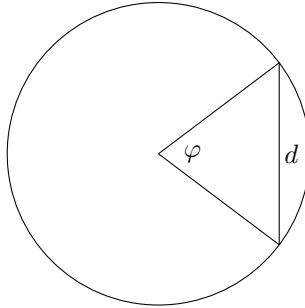
Uvažujme nejdříve malý počet možných poloh bodů rovnoměrně rozmístěných na jednotkové kružnici, např. 4 polohy, viz obrázek.



První bod lze volit v libovolné poloze, např.  $A$ . Druhý bod se může nacházet v jedné ze čtyř poloh ( $A$ ,  $B$ ,  $C$  nebo  $D$ ).

Označme  $d_N$  průměrnou vzdálenost dvou bodů na jednotkové kružnici, jestliže se body mohou nacházet v  $N$  polohách rovnoměrně rozmístěných po kružnici. Pro čtyři polohy snadno dostaneme průměrnou vzdálenost  $d_4 = (0 + \sqrt{2} + 2 + \sqrt{2})/4 = (1 + \sqrt{2})/2 \doteq 1,207$ . Nás zajímá  $d_N$  pro  $N$  jdoucí k nekonečnu.

Vzdálenost dvou bodů, jejichž průvodiče svírají úhel  $\varphi$  je  $d = 2 \sin \frac{\varphi}{2}$ , viz obrázek.



Uvažujme  $N$  možných poloh rovnoměrně rozmístěných po kružnici. Označme je po řadě indexem  $n = 1, \dots, N$ . Pak úhel mezi průvodiči jednoho pevného bodu v poloze  $N$  a bodu v poloze  $n$  je  $\varphi = n2\pi/N$  a jejich vzdálenost je  $d = 2 \sin \frac{n\pi}{N}$ . Pak průměrná vzdálenost je

$$d_N = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N 2 \sin \frac{n\pi}{N}.$$

To je zobecnění našeho předchozího výsledku  $d_4 = (1 + \sqrt{2})/2$ . Nás zajímá, k čemu se blíží  $d_N$ , když se  $N$  blíží k nekonečnu. To si spočítáme nejdříve numericky a z numerického výsledku se pokusíme uhádnout přesnou hodnotu. Potom si spočítáme i přesnou hodnotu analyticky. To provedeme tak, že najdeme vztah pro součet sinů aritmetické posloupnosti a budeme uvažovat limitu pro  $N$  jdoucí k nekonečnu. A nakonec si ukážeme použití integrálu.

## 1. Numerický experiment

Začneme malým numerickým experimentem. Jednoduchým programem v jazyku C

```
#include<stdio.h>
#include<math.h>
int main()
{
    int n,N=10000000;
    double x,y,a=0;
```

```

for(n=0;n<N;n++) {
  x = M_PI*n/(double)N;
  y = sin(x);
  a += y;
};
a = 2 * a / N;
printf("%10d  %.15G  %G\n",N,a,a-4/M_PI);
return(0);
}

```

dostaneme hodnotu  $d_{10^7} \doteq 1,273239544735$ . Jazyk C volíme proto, že programy v něm napsané běží velice rychle. Např. tento program, který provedl 10 milionů vyčíslení funkce sinus, trval na běžném počítači typu notebook s procesorem Intel Core i7 pouhých 64 ms. Stejný výpočet podle programu napsaného v jazyce Python trvá 25krát déle.

Podívejme se, jak lze z tohoto přibližného numerického výsledku uhádnout přesnou hodnotu. Počítačový algebraický systém Maple obsahuje funkci `identify`, která při zavolání `identify(1.273239544735)` dá výsledek  $\frac{4}{\pi}$ . V jiných matematických softwarových nástrojích jsme podobnou funkci nenašli. Ale počítačový algebraický systém Mathematica umožňuje spolupráci s umělou inteligencí a výsledkem je také výraz  $\frac{4}{\pi}$ . K tomuto přesnému výsledku brzo dospějeme i my.

## 2. Součet sinů algebraické posloupnosti

Mezi goniometrickými funkcemi platí mnoho vztahů. Některé z nich se učí ve školách, některé se i odvozují. Dopřejme si dnes ten luxus a odvodme si vztah pro součet sinů aritmetické posloupnosti včetně všech pomocných vztahů, které při tom budeme potřebovat. Toto provedeme dvojím způsobem. Nejdříve bez použití komplexních čísel. A potom za pomoci komplexních čísel. Podrobnosti uvádíme v dodatku. Společný závěr je

$$\sum_{n=1}^N \sin(n\alpha) = \frac{\sin(N\frac{\alpha}{2}) \sin((N+1)\frac{\alpha}{2})}{\sin(\frac{\alpha}{2})}.$$

Nás to zajímá pro  $\alpha = \frac{\pi}{N}$ . Dosazením dostaneme

$$\begin{aligned} d_N &= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N 2 \sin \frac{n\pi}{N} = \frac{2}{N} \frac{\sin(N\frac{\pi}{2N}) \sin((N+1)\frac{\pi}{2N})}{\sin(\frac{\pi}{2N})} = \\ &= \frac{2}{N} \frac{\sin((N+1)\frac{\pi}{2N})}{\sin(\frac{\pi}{2N})} = \frac{4}{\pi} \frac{\frac{\pi}{2N}}{\sin(\frac{\pi}{2N})} \sin\left(\frac{N+1}{N} \frac{\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

Nyní nás zajímá, kam se blíží  $d_N$  pro  $N$  jdoucí do nekonečna. Zlomek  $\frac{\pi}{2N}$  se blíží nule a výraz  $x/\sin(x)$  se pro  $x$  jdoucí k nule blíží k jedné (jak ukazujeme v dodatku). Dále, zlomek  $\frac{N+1}{N}$  se blíží k jedné, argument sinu za zlomkem se tedy blíží k  $\frac{\pi}{2}$  a sinus se tedy blíží k jedné. Tím dostáváme výsledek, že průměrná vzdálenost dvou bodů na kružnici je rovna

$$d = \frac{4}{\pi},$$

jak jsme již tušili na základě našeho numerického experimentu.

### 3. Použití integrálu

Když se vrátíme k našemu numerickému experimentu, tak je možné si uvědomit, že součet hodnot sinů lze také získat nakreslením grafu funkce sinus např. na milimetrový papír a pro jednotlivé intervaly argumentu sčítat počet čtverečků mezi osou  $x$  a grafem funkce. Tedy zjistit plochu pod grafem funkce sinus. A právě toto je základní aplikace určitého integrálu. Tedy střední hodnota výrazu

$$2 \sin \frac{\varphi}{2}$$

pro  $\varphi \in (0, 2\pi)$  je

$$\begin{aligned} d &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 2 \sin \frac{\varphi}{2} d\varphi = \frac{1}{2\pi} \left[ -4 \cos \frac{\varphi}{2} \right]_0^{2\pi} = \\ &= \frac{1}{2\pi} (-4 \cos \pi - (-4 \cos 0)) = \frac{4}{\pi}. \end{aligned}$$

Vidíme, že když použijeme vyšší teorii, tak je výpočet většinou mnohem kratší.

### Závěr

Spočítat plochu pod grafem jednoduché kladné spojitě funkce pomocí určitého integrálu, jak jsme si právě ukázali, je snadné. Někdy je potřeba stanovit plochu pod grafem naměřené funkce. K tomu lze dnes použít analogově-digitální převodník a integrál počítat numericky. Jak se to ale dělalo dříve, když nebyly k dispozici počítače? Autor čestně prohlašuje, že se osobně setkal se zaměstnancem Československé akademie věd, který stanovoval plochu pod křivkou naměřenou a zakreslenou liniovým zapisovačem na papír tak, že obrazec pod křivkou nůžkami vystříhl a zvažil na laboratorních vahách. To je dnes již neuvěřitelné.



Při této příležitosti lze zmínit ještě jinou metodu, jak stanovit průměrnou hodnotu funkce sinus. Když necháme dopadnout tenký dlouhý předmět, např. jehlu na papír, na kterém jsou nakreslené rovnoběžné přímkami velmi blízko sebe, tak počet přímek, které náhodně umístěná jehla protne, je úměrný sinu úhlu, který svírá jehla s přímkami. Tak se nabízí následující experiment. Budeme opakovaně házet jehlu na papír s přímkami a budeme si zapisovat počet přímek, které jehla protne. Pak střední hodnota tohoto počtu vydělená délkou jehly vyjádřené opět v počtu přímek, je střední hodnota funkce  $|\sin x|$ , což je  $\frac{2}{\pi}$ . A odtud opět dostaneme střední vzdálenost dvou bodů na jednotkové kružnici  $\frac{4}{\pi}$ .

A nebo naopak, když víme, že střední hodnota funkce sinus na intervalu  $\langle 0; \pi \rangle$  je  $\frac{2}{\pi}$ , tak tento experiment s jehlou lze použít pro netradiční odhad hodnoty čísla  $\pi$ .

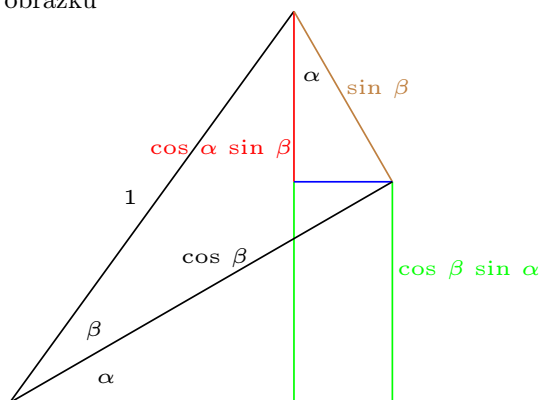
Alternativně, místo abychom házeli opakovaně jednou jehlou, můžeme použít velké množství jehel a hodit je najednou.

To je varianta Buffonovy úlohy o jehle, viz např. [1].

Tuto úlohu, kdy jsme hledali střední vzdálenost dvou bodů na kružnici lze zobecnit na hledání střední vzdálenosti dvou bodů na jiných množinách, viz např. článek *Mean line segment length* na wikipedii.

### Dodatek

Z tohoto obrázku



je vidět, že platí

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

a z grafu funkcí  $\sin$  a  $\cos$  je vidět, že platí

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x \quad \text{a} \quad \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x.$$

Přičtením  $\frac{\pi}{2}$  k  $\alpha$  ve vztahu pro sinus součtu dostaneme

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

a vynásobením  $\beta$  číslem  $-1$  dostaneme

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

a odečtením posledních dvou vztahů dostaneme užitečný vztah

$$\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta) = 2 \sin \alpha \sin \beta.$$

Ten použijeme pro odvození vztahu pro součet sinů aritmetické posloupnosti. V součtu

$$\begin{aligned} &\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \cos\left(3\frac{\alpha}{2}\right) + \cos\left(3\frac{\alpha}{2}\right) - \cos\left(5\frac{\alpha}{2}\right) + \dots + \\ &\quad + \cos\left((2N-1)\frac{\alpha}{2}\right) - \cos\left((2N+1)\frac{\alpha}{2}\right) \end{aligned}$$

se kromě prvního a posledního členu všechny členy vyruší, tedy platí

$$\sum_{n=1}^N \cos\left((2n-1)\frac{\alpha}{2}\right) - \cos\left((2n+1)\frac{\alpha}{2}\right) = \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \cos\left((2N+1)\frac{\alpha}{2}\right).$$

Zde všechny rozdíly cosinů nahradíme součinem sinů podle vztahu, který jsme si odvodili výše, a po vydělení dvěma dostaneme

$$\sum_{n=1}^N \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \sin(n\alpha) = \sin\left(N\frac{\alpha}{2}\right) \sin\left((N+1)\frac{\alpha}{2}\right).$$

Na levé straně můžeme ze součtu vytknout výraz  $\sin \frac{\alpha}{2}$  a za podmínky, že je nenulový, což v našem případě platí, jím můžeme rovnost vydělit a dostáváme kýžený výraz pro součet sinů aritmetické posloupnosti

$$\sum_{n=1}^N \sin(n\alpha) = \frac{\sin\left(N\frac{\alpha}{2}\right) \sin\left((N+1)\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}.$$

Ukažme si ještě jiný způsob, jak lze tento vztah odvodit s použitím komplexních čísel. Použijeme imaginární jednotku  $i$ , pro kterou platí  $i^2 = -1$  a použijeme užitečný vztah

$$\exp(i\varphi) = \cos \varphi + i \sin \varphi$$

(zápisem  $\exp(x)$  rozumíme  $e^x$ ). Ten nám dovolí vyjádřit sinus jako imaginární část komplexního čísla

$$\sin \varphi = \operatorname{Im} \exp(i\varphi)$$

a převést součet sinů na součet geometrické posloupnosti. Proto si nejdříve připravíme součet geometrické posloupnosti. Označme

$$S = \sum_{n=1}^N q^n.$$

Vynásobením číslem  $q$  dostaneme

$$qS = \sum_{n=2}^{N+1} q^n.$$

Odečtením dostaneme

$$(q - 1)S = q^{N+1} - q.$$

Za podmínky  $q \neq 1$  můžeme vydělit výrazem  $(q - 1)$  a dostaneme

$$S = q \frac{q^N - 1}{q - 1}.$$

Nyní napíšeme součet sinů jako imaginární část součtu geometrické posloupnosti s kvocientem  $q = \exp(i\alpha)$ , tu sečteme právě odvozeným vztahem a z výsledku určíme imaginární část s použitím vztahu

$$\exp(i\varphi) - \exp(-i\varphi) = 2i \sin \varphi.$$

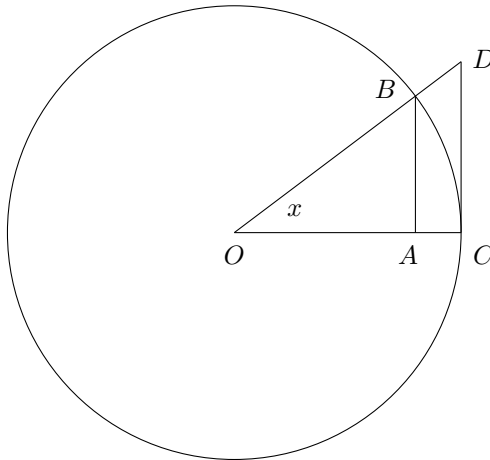
Tedy

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \sin(n\alpha) &= \operatorname{Im} \sum_{n=1}^N \exp(in\alpha) = \\ &= \operatorname{Im} \sum_{n=1}^N q^n = \operatorname{Im} q \frac{q^N - 1}{q - 1} = \operatorname{Im} \exp(i\alpha) \frac{\exp(iN\alpha) - 1}{\exp(i\alpha) - 1} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \operatorname{Im} \exp(i\alpha) \frac{\exp(iN\frac{\alpha}{2}) (\exp(iN\frac{\alpha}{2}) - \exp(-iN\frac{\alpha}{2}))}{\exp(i\frac{\alpha}{2}) (\exp(i\frac{\alpha}{2}) - \exp(-i\frac{\alpha}{2}))} = \\
 &= \operatorname{Im} \exp\left(i(N+1)\frac{\alpha}{2}\right) \frac{2i \sin\left(N\frac{\alpha}{2}\right)}{2i \sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin\left(N\frac{\alpha}{2}\right) \sin\left((N+1)\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}.
 \end{aligned}$$

To bylo tedy odvození součtu sinů aritmetické posloupnosti pomocí komplexních čísel. Dostali jsme stejný výsledek jako v předchozím odvození.

A ještě si ukážeme, že pro  $x$  blížící se k nule, se výraz  $\frac{x}{\sin x}$  blíží k jedné. K tomu nám poslouží tento obrázek



s jednotkovou kružnicí, malým úhlem  $x$ , trojúhelníkem  $OAB$  s plochou

$$P_{OAB} = \frac{1}{2} \cos x \sin x,$$

kruhovou výsečí  $OCB$  s plochou

$$P_{OCB} = \frac{1}{2} x$$

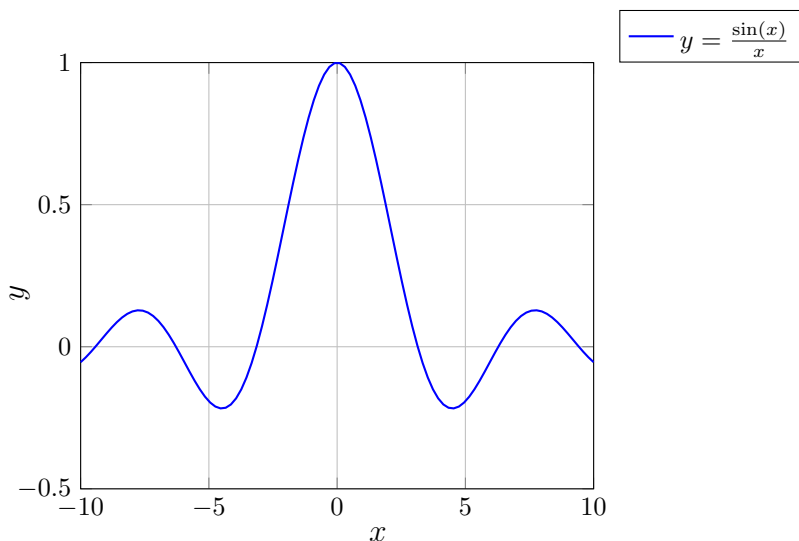
a trojúhelníkem  $OCD$  s plochou

$$P_{OCD} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} x.$$

Porovnáním ploch těchto tří útvarů dostaneme

$$\begin{aligned}
 P_{OAB} &< P_{OCB} < P_{OCD}, \\
 \frac{1}{2} \cos x \sin x &< \frac{1}{2} x < \frac{1}{2} \operatorname{tg} x, \\
 \cos x \sin x &< x < \frac{\sin x}{\cos x}, \\
 \cos x &< \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}.
 \end{aligned}$$

Pro  $x$  jdoucí k nule, se první i třetí výraz blíží k jedné, proto se k jedné blíží i výraz  $\frac{x}{\sin x}$  a také výraz  $\frac{\sin x}{x}$ . Pro představu je užitečné načrtnout si graf funkce  $y = \frac{\sin x}{x}$  viz následující obrázek. Pro  $x = 0$  tento zlomek není definován, ale pro  $x$  blížící se k nule se blíží k jedné. Nabízí se tedy tuto funkci v nule dodefinovat jedničkou.



### Literatura

- [1] Dvořáková, E.: Vyzkoušejte metodu Monte Carlo. *Rozhledy matematicko-fyzikální*, roč. 94 (2019), č. 2, s. 1–11.

# Poznámky o kombinačních číslech, posloupnostech (především aritmetických) a polynomech

*Vlastimil Dlab, Bzí u Železného Brodu*

Věnováno památce mého učitele profesora Tomáše Augustina

## 1. Úvod

Je tomu už více než 70 let, co mě, zásluhou mého vynikajícího učitele pana profesora Tomáše Augustina, uchvátil zájem o strukturu kombinačních čísel (viz [2]). Dnes se k tomuto tématu vracím, abych poukázal na velmi blízký vztah mezi třemi matematickými objekty: kombinačními čísly  $\binom{n}{k}$ , posloupnostmi  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_k, \dots)$ , především aritmetickými, a polynomy  $P(x)$ , přičemž se omezíme na jejich hodnoty  $P(k)$  pro přirozená čísla  $k = 1, 2, \dots$  členy posloupností a koeficienty polynomů mohou být libovolná čísla. V tomto článku prezentujeme celý výklad pro případ, kdy jsou tato čísla racionální. Ve vývoji matematiky hrají velmi důležitou roli posloupnosti celých čísel. Záhy však uvidíme, že se v našem pojednání na celá čísla omezit nemůžeme.

Souvislosti mezi těmito objekty ilustrují v elementární míře podstatu matematiky zdůrazňovanou všemi významnými matematiky. V nedávné době to byli především Michael Francis Atiyah a Israel Moiseevich Gelfand, kteří tuto jednotu, celistvost matematiky termínem „Unity of Mathematics“ vyjadřovali. Vzpomínám, že moje diskuze s těmito matematiky vždy směřovaly k tomuto tématu. Zatímco Atiyah „jednotu“ vztahoval především na vzájemné vazby mezi matematikou a fyzikou, Gelfand viděl „celistvost“ v celém panoramatu matematiky.

Do hodin matematiky patří nové úlohy, pojmy a zajímavosti, které vzbudí pozornost a zájem žáků. A to je přesně to, co bychom měli ve svých příspěvcích přinášet. V dnešním článku přinášíme nové hříčky: Diferenční trojúhelník a jeho rozšíření na (nekonečný) diferenční čtverec. Ty slouží k tomu, abychom poukázali na těsné souvislosti mezi celočíselnými polynomy a aritmetickými posloupnostmi a tím přiblížili a vysvětlili Pólyovu větu ([12, 13]). Doufáme, že získané poznatky povedou k hlubšímu studiu, které ponecháme zvědavým čtenářům. Poznamenejme, že tento postup byl už naznačen v článku [9]. Rozsáhlejší článek naleznete na adrese uvedené v [2].

## 2. Ilustrace: Co se v článku dozvíme?

Nejprve se dohodneme, že číslem budeme v tomto článku rozumět číslo racionální. Podstatná část naší prezentace se bude týkat celých čísel, jejichž obor budeme v článku značit  $\mathbb{Z}$ . Obor racionálních čísel budeme značit písmenem  $\mathbb{Q}$ .<sup>1)</sup>

Připomeňme definici kombinačních čísel  $\binom{n}{k}$  definovaných pro přirozená čísla  $1 \leq k \leq n$  takto:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)\cdots 2 \cdot 1},$$

$$\binom{n}{0} = 1 \text{ pro libovolné } n \geq 0 \text{ a } \binom{n}{k} = 0 \text{ pro přirozená čísla } k > n \geq 0.$$

Tato definice si zaslouhuje rozšíření, které budeme v naší stati používat. Kombinační symboly definují funkce  $\Phi_k$ ,  $k \in \{1, 2, \dots, n, \dots\}$ , racionální (nebo reálné či komplexní) proměnné  $x$

$$\Phi_k(x) = \binom{x}{k} = \frac{x(x-1)\cdots(x-k+1)}{k(k-1)\cdots 2 \cdot 1}$$

a

$$\Phi_0(x) = \binom{x}{0} = 1.$$

Uvidíme, že tyto funkce budou hrát zcela zásadní roli v popisu takzvaných celočíselných polynomů, tj. polynomů, jejichž hodnoty v přirozených číslech jsou celá čísla. Graf funkce  $\Phi_7(x)$  na obr. 1 ilustruje chování těchto funkcí.

Uvažujme nyní polynom  $P(x) = x^3 + 2x^2 - 7x - 7$  a s ním spojené schéma

$$\mathbf{a}_1 = P(1) = -11 \quad \mathbf{a}_2 = P(2) = -5 \quad \mathbf{a}_3 = P(3) = 17 \quad \mathbf{a}_4 = P(4) = 61$$

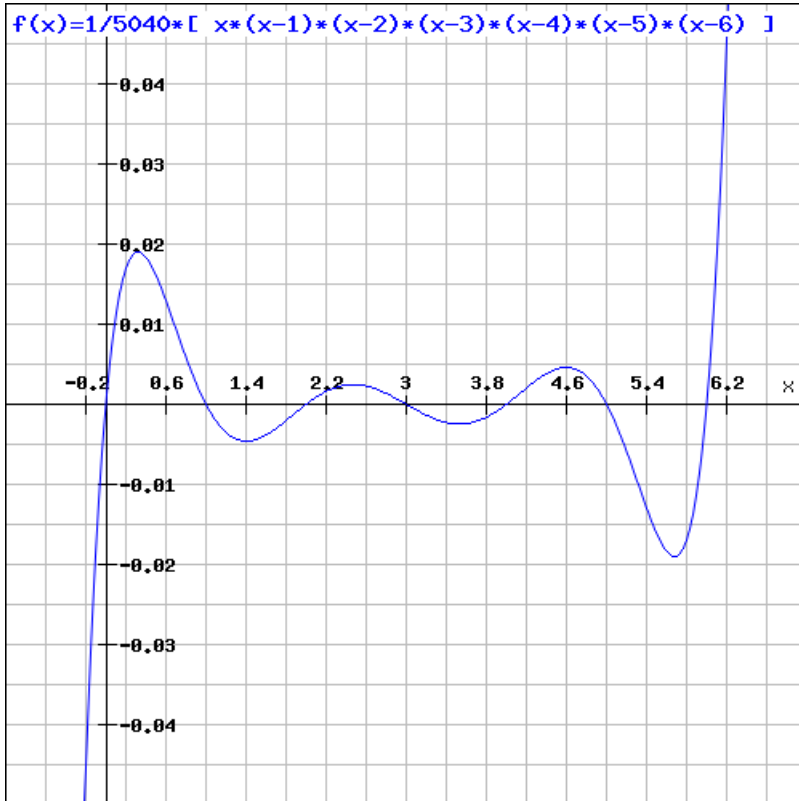
$$\mathbf{b}_1 = a_2 - a_1 = 6 \quad \mathbf{b}_2 = a_3 - a_2 = 22 \quad \mathbf{b}_3 = a_4 - a_3 = 44$$

$$\mathbf{c}_1 = b_2 - b_1 = 16 \quad \mathbf{c}_2 = b_3 - b_2 = 22$$

$$\mathbf{d}_1 = c_2 - c_1 = 6$$

---

<sup>1)</sup>Podotkneme, že mnohé z našich výsledků platí pro libovolné prvky z oboru, v němž je možno sčítat, odčítat (tj. přičítat číslo opačné), násobit a dělit (tj. násobit číslem převráceným, inverzním), tedy např. čísla z libovolného číselného komutativního tělesa, jako je pole reálných či komplexních čísel.



Obr. 1: Graf funkce  $\Phi_7(x)$

Nyní definujme polynom

$$Q(n) = a_1 \binom{n-1}{0} + b_1 \binom{n-1}{1} + c_1 \binom{n-1}{2} + d_1 \binom{n-1}{3} =$$

$$= a_1 \Phi_0(n-1) + b_1 \Phi_1(n-1) + c_1 \Phi_2(n-1) + d_1 \Phi_3(n-1).$$

$Q(n)$  je tedy

$$-11 + 6(n-1) + \frac{16}{2}(n-1)(n-2) + \frac{6}{6}(n-1)(n-2)(n-3) =$$

$$= n^3 + 2n^2 - 7n - 7.$$



MATEMATIKA

Polynom  $P(x)$  je zcela určen čtyřmi hodnotami (pro  $x = 1, 2, 3, 4$ )

$$-11, -5, 17, 61,$$

kteřé jsou v jednoznačném vztahu s čtveřicí čísel

$$-11, 6, 16, 6.$$

Předchozí tabulku můžeme totiž doplnit na schéma

$$\begin{array}{cccccccccc}
 -11 & -5 & 17 & 61 & 133 & 239 & 385 & 577 & 821 & 1123 & \dots \\
 6 & 22 & 44 & 72 & 106 & 146 & 192 & 244 & 302 & \dots & \\
 16 & 22 & 28 & 34 & 40 & 46 & 52 & 58 & \dots & & \\
 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & \dots & & & \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & & & & 
 \end{array} \tag{1}$$

kde

$$\begin{aligned}
 P(5) &= 133, & P(6) &= 239, & P(7) &= 385, \\
 P(8) &= 577, & P(9) &= 821, & \dots & 
 \end{aligned}$$

Samozřejmě, tento postup lze použít pro každý polynom tvaru

$$P(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D:$$

$$\begin{array}{cccc}
 A + B + C + D & 8A + 4B + 2C + D & 27A + 9B + 3C + D & 64A + 16B + 4C + D \\
 7A + 3B + C & 19A + 5B + C & 37A + 7B + C & \\
 12A + 2B & 18A + 2B & & \\
 6A & & & 
 \end{array}$$

Odtud

$$\begin{aligned}
 &(A + B + C + D) + (7A + 3B + C)(n - 1) + \\
 &+ (6A + B)(n - 1)(n - 2) + A(n - 1)(n - 2)(n - 3) = \\
 &= An^3 + Bn^2 + Cn + D = P(n).
 \end{aligned}$$

Ve 4. sekci podáme důkaz pro polynomy libovolného stupně.

Uvědomme si, že jsme našli jednoduchou cestu, jak určit (jednoznačně) polynom stupně  $d$  na základě jeho hodnot pro  $x = 1, 2, \dots, d$ . Podejme příklad, který nám ukáže, že celočíselné hodnoty polynomu stupně  $d$  pro  $x = 1, 2, \dots, d$  sice zaručují, že hodnoty ve všech celých číslech jsou celočíselné, ale nezaručují, že jeho koeficienty jsou celočíselné. Nebudme překvapeni. Vždyť už polynom

$$P(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x,$$

který jsme prostě označili

$$\Phi_2(x) = \binom{x}{2},$$

má pro celočíselná  $x$  celočíselné hodnoty.

Zopakujme si postup: Hledáme kubický polynom  $P(x)$ , pro nějž

$$P(1) = 3, \quad P(2) = 2, \quad P(3) = 8, \quad P(4) = 5.$$

Zkonstruujeme příslušné schéma

<b>3</b>	<b>2</b>	<b>8</b>	<b>5</b>	-23	-92	-218	-417	...
-1	<b>6</b>	<b>-3</b>	-28	-69	-126	-199	...	
<b>7</b>	<b>-9</b>	-25	-41	-57	-73	...		(2)
<b>-16</b>	-16	-16	-16	-16	...			
0	0	0	0	...				

a dostáváme hledaný polynom

$$\begin{aligned} P(n) &= 3 \binom{n-1}{0} + (-1) \binom{n-1}{1} + 7 \binom{n-1}{2} + (-16) \binom{n-1}{3} = \\ &= 3 - n + 1 + \frac{7}{2}(n^2 - 3n + 2) + \left(-\frac{16}{6}\right)(n^3 - 6n^2 + 11n - 6), \end{aligned}$$

tj.

$$P(n) = -\frac{8}{3}n^3 + \frac{39}{2}n^2 - \frac{245}{6}n + 27.$$

Tento polynom má pro všechna přirozená čísla  $n$  celočíselné hodnoty, které vytvářejí speciální posloupnost

$$a_1 = 3, a_2 = 2, a_3 = 8, a_4 = 5, a_5 = -23, a_6 = -92, a_7 = -218, \\ a_8 = -417, a_9 = -705, a_{10} = -1098, \dots;$$

budeme ji nazývat aritmetickou posloupností třetího řádu. Schémata (1) a (2) budeme nazývat *diferenční trojúhelníky*.

V této sekci jsme poukázali na velmi těsný vztah mezi polynomy a posloupnostmi. Tento vztah je zprostředkovan kombinacími čísel, využitím jejich vlastností. Vzhledem k rozsahu tohoto tématu se budeme roli kombinačních čísel a jejich významu věnovat v separátním článku. Zde se tedy zaměříme na posloupnosti celých čísel a na celočíselné polynomy, především na Pólyovu větu [12, 13] (viz hlavní věta ve 4. sekci). V našich úvahách budeme využívat Al-Karajiho (953–1029) rovnost

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}. \quad (3)$$

Připomeneme-li si, že číslo  $\binom{n+1}{k}$  udává počet  $k$ -prvkových podmnožin  $(n+1)$ -prvkové množiny, rovnost (3) se stává zřejmou. Zvolíme-li totiž v  $M$  jeden prvek, který označíme  $m_*$ , podmnožiny, které mají  $k$  prvků jsou dvojího druhu: Ty, které obsahují prvek  $m_*$  (je jich  $\binom{n}{k-1}$ ), a ty, které prvek  $m_*$  neobsahují, a těch je  $\binom{n}{k}$ . Tím dostáváme vzorec (3).

### 3. Metoda: Diferenční trojúhelník a diferenční čtverec.

Zcela zásadní pro naši další práci je pojem diferenčního trojúhelníku  $\mathbb{T}_{ij\ n}$  a (jeho nekonečného rozšíření) diferenčního čtverce  $\mathbb{S}_{ij}$ . Uvedme jejich definice.

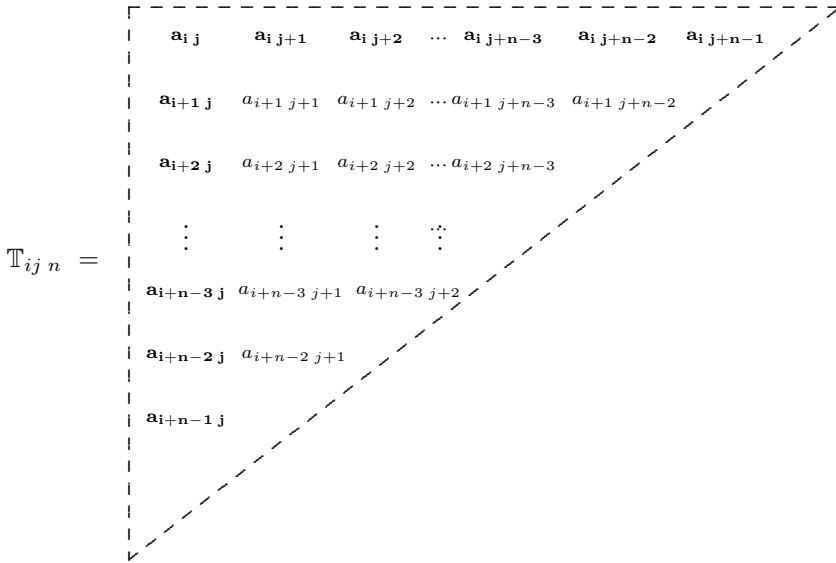
**Definice.** Soubor celých čísel  $a_{r\ s} \in \mathbb{Z}$ , která jsou přiřazena množině všech mřížových bodů roviny tvořící trojúhelník  $\mathbb{T}_{ij\ n}$  (viz obr. 2), a která splňují pro všechna  $r, s \in \mathbb{Z}$  rovnost

$$a_{r\ s+1} = a_{r\ s} + a_{r+1\ s} \quad (4)$$

pro všechna  $i \leq r < i+n, j \leq s < j+n$ , budeme nazývat *diferenční trojúhelník*.<sup>2)</sup>

---

<sup>2)</sup>Připomeňme si opět, že diferenční schéma lze definovat (a je užitečné) v případě, kdy  $a_{ij}$  jsou prvky jakýchkoli číselných oborů.



Obr. 2. Diferenční trojúhelník  $\mathbb{T}_{ij}^n$

Ihned vidíme, že řádek (tj. posloupnost)

$$\mathbf{r}_{ij}^{(n)} = (a_{ij}, a_{i,j+1}, \dots, a_{i,j+n-1})$$

stejně jako sloupec

$$\mathbf{s}_{ij}^{(n)} = (a_{ij}, a_{i+1,j}, \dots, a_{i+n-1,j})$$

určí jednoznačně celý diferenční trojúhelník  $\mathbb{T}_{ij}^n$ . Tyto dvě posloupnosti jsou spolu těsně svázané. Jejich vztah bude s využitím kombinačních čísel popsán v tvrzení 1.

Rozšířením  $n$ -tic  $\mathbf{r}_{ij}^{(n)}$  a  $\mathbf{s}_{ij}^{(n)}$  na nekonečné posloupnosti obdržíme nekonečné rozšíření trojúhelníku  $\mathbb{T}_{ij}^n$  na  $\mathbb{T}_{ij}^\infty$ , které se stává nekonečným *diferenčním čtvercem*  $\mathbb{S}_{ij}$ . Zdůrazňeme, že vztahy (4) zůstanou zachovány. Obr. 3 představuje diferenční čtverec  $\mathbb{S}_{11}$ .

$$\mathbb{S}_{11} = \begin{array}{|cccccc|} \hline \mathbf{a}_{1\ 1} & \mathbf{a}_{1\ 2} & \mathbf{a}_{1\ 3} & \cdots & \mathbf{a}_{1\ n-1} & \mathbf{a}_{1\ n} & \mathbf{a}_{1\ n+1} & \cdots \\ \hline \mathbf{a}_{2\ 1} & a_{2\ 2} & a_{2\ 3} & \cdots & a_{2\ n-1} & a_{2\ n} & a_{2\ n+1} & \cdots \\ \hline \mathbf{a}_{3\ 1} & a_{3\ 2} & a_{3\ 3} & \cdots & a_{3\ n-1} & a_{3\ n} & a_{3\ n+1} & \cdots \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \hline \mathbf{a}_{n-1\ 1} & a_{n-1\ 2} & a_{n-1\ 3} & \cdots & a_{n-1\ n-1} & a_{n-1\ n} & a_{n-1\ n+1} & \cdots \\ \hline \mathbf{a}_n & a_n & a_n & \cdots & a_n & a_n & a_n & \cdots \\ \hline \mathbf{a}_{n+1\ 1} & a_{n+1\ 2} & a_{n+1\ 3} & \cdots & a_{n+1\ n-1} & a_{n+1\ n} & a_{n+1\ n+1} & \cdots \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \hline \end{array}$$

Obr. 3. Diferenční čtverec  $\mathbb{S}_{11}$

Budeme pracovat především s trojúhelníky  $\mathbb{T}_{11\ n}$ . Každé tvrzení týkající se diferenčního trojúhelníku  $\mathbb{T}_{11\ n}$  lze přepsat do tvrzení týkajícího se libovolného diferenčního trojúhelníku  $\mathbb{T}_{ij\ n}$ . Toho využijeme v důkaze tvrzení 1.

Formulujme toto slibované tvrzení.

**Tvrzení 1.** *V diferenčním trojúhelníku  $\mathbb{T}_{11\ n}$  platí<sup>3)</sup>*

$$a_{1\ n} = \sum_{t=1}^n \binom{n-1}{t-1} a_{t\ 1} \tag{5}$$

a

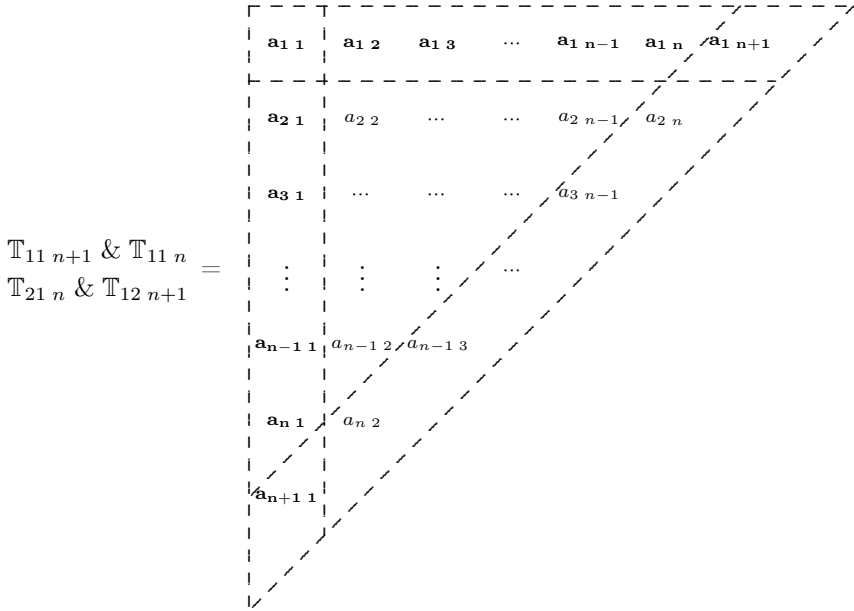
$$a_{n\ 1} = \sum_{t=1}^n (-1)^{n-t} \binom{n-1}{t-1} a_{1\ t}. \tag{6}$$

*Důkaz* těchto vztahů je překvapivě jednoduchý (užitím matematické indukce a opakovaně rovnosti (3)).

Vidíme ihned, že platí pro  $n = 1$  (a  $n = 2$ ). Předpokládejme, že vzorce platí pro  $n$  a prezentujme indukční krok, tj. platnost těchto vzorců pro  $n+1$ . Naše úvahy se týkají diferenčních trojúhelníků  $\mathbb{T}_{11\ n+1}$ ,  $\mathbb{T}_{11\ n}$ ,  $\mathbb{T}_{21\ n}$  a  $\mathbb{T}_{12\ n+1}$  vyobrazených na následujícím obr. 4.

---

<sup>3)</sup>Výraz (5) ve tvaru  $a_{1\ k} = \sum_{t=1}^k \binom{k-1}{t-1} a_{t\ 1}$  platí pro všechna přirozená čísla  $1 \leq k \leq n$ .



$$\begin{matrix} \mathbb{T}_{11\ n+1} \ \& \ \mathbb{T}_{11\ n} \\ \mathbb{T}_{21\ n} \ \& \ \mathbb{T}_{12\ n+1} \end{matrix} =$$

Obr. 4. Diferenční trojúhelníky  $\mathbb{T}_{11\ n+1}$ ,  $\mathbb{T}_{11\ n}$ ,  $\mathbb{T}_{21\ n}$  a  $\mathbb{T}_{12\ n+1}$   
 Předpokládáme tedy pro  $n$  platnost vzorců (5) a

$$a_{2\ n} = \sum_{t=1}^n \binom{n-1}{t-1} a_{t+1\ 1} = \sum_{t=2}^{n+1} \binom{n-1}{t-2} a_{t\ 1}. \tag{7}$$

Potom, užitím (5) a (7),

$$\begin{aligned} a_{1\ n+1} &= a_{1\ n} + a_{2\ n} = \\ &= \binom{n-1}{0} a_{1\ 1} + \sum_{t=2}^n \left[ \binom{n-1}{t-2} + \binom{n-1}{t-1} \right] a_{t\ 1} + \binom{n-1}{n-1} a_{n+1\ 1} = \\ &= \binom{n}{0} a_{1\ 1} + \sum_{t=2}^n \binom{n}{t-1} a_{t\ 1} + \binom{n}{n} a_{n+1\ 1} = \sum_{t=1}^{n+1} \binom{n}{t-1} a_{t\ 1}. \end{aligned}$$

Zcela stejným postupem lze dokázat vzorec (6). Předpokládáme pro  $n$  platnost vzorců (6) a

$$a_{n\ 2} = \sum_{t=1}^n (-1)^{n-t} \binom{n-1}{t-1} a_{1\ t+1} = \sum_{t=2}^{n+1} (-1)^{n+1-t} \binom{n-1}{t-2} a_{1\ t}. \tag{8}$$

Užitím (6) a (8) dostáváme

$$\begin{aligned}
 a_{n+1} &= a_n - a_{n-1} = (-1)^n \binom{n-1}{0} a_{11} + \\
 &+ \sum_{t=2}^n (-1)^{n+1-t} \left[ \binom{n-1}{t-2} + \binom{n-1}{t-1} \right] a_{1t} + \binom{n-1}{n-1} a_{1n+1} = \\
 &= (-1)^n \binom{n}{0} a_{11} + \sum_{t=2}^n (-1)^{n+1-t} \binom{n}{t-1} a_{1t} + \binom{n}{n} a_{1n+1} = \\
 &= \sum_{t=1}^{n+1} (-1)^{n+1-t} \binom{n}{t-1} a_{1t}.
 \end{aligned}$$

Tím je důkaz proveden.

Zopakujme znovu: Každá posloupnost  $\{a_n = a_{1n} \mid n \geq 1\}$  definuje diferenční čtverec  $S_{11}$  a platí

$$a_n = \sum_{t=1}^n a_{t1} \binom{n-1}{t-1}.$$

Tak například pro Fibonacciho posloupnost ( $a_{11} = F_1 = 1, a_{12} = F_2 = 1, a_{13} = F_3 = 2, \dots, a_{1n} = F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \dots$ ) platí ( $a_{11} = 1, a_{21} = 0, a_{31} = F_1 = 1, a_{41} = -F_2 = -1, \dots, a_{n1} = (-1)^n F_{n-2}, \dots$ ), jak ukazují diferenční čtverec této posloupnosti

$F_1$	$F_2$	$F_3$	$F_4$	$F_5$	$F_6$	$\dots$	$F_n$	$\dots$
0	$F_1$	$F_2$	$F_3$	$F_4$	$F_5$	$\dots$	$F_{n-1}$	$\dots$
$F_1$	0	$F_1$	$F_2$	$F_3$	$F_4$	$\dots$	$F_{n-2}$	$\dots$
$-F_2$	$F_1$	0	$F_1$	$F_2$	$F_3$	$\dots$	$F_{n-3}$	$\dots$
$F_3$	$-F_2$	$F_1$	0	$F_1$	$F_2$	$\dots$	$F_{n-4}$	$\dots$
$-F_4$	$F_3$	$-F_2$	$F_1$	0	$F_1$	$\dots$	$F_{n-5}$	$\dots$
$F_5$	$-F_4$	$F_3$	$-F_2$	$F_1$	0	$\dots$	$F_{n-6}$	$\dots$
$-F_6$	$F_5$	$-F_4$	$F_3$	$-F_2$	$F_1$	$\dots$	$F_{n-7}$	$\dots$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$

Pro  $F_n$ ,  $n \geq 3$  tedy dostáváme

$$F_n = 1 + \sum_{t=1}^{n-2} (-1)^{t+1} \binom{n-1}{t+1} F_t,$$

což přináší celou řadu vztahů mezi členy Fibonacciho posloupnosti. Například

$$F_8 = 1 + \binom{7}{2} F_1 - \binom{7}{3} F_2 + \binom{7}{4} F_3 - \binom{7}{5} F_4 + \binom{7}{6} F_5 - \binom{7}{7} F_6.$$

Ke každé posloupnosti

$$\mathbf{a} = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n})$$

je přirozeným způsobem (často vyžadovanou aplikací) přiřazena posloupnost jejích částečných součtů:

$$\mathbf{s} = (s_{11}, s_{12}, \dots, s_{1n}),$$

kde  $s_{1k} = \sum_{t=1}^k a_{1t}$  pro  $1 \leq k \leq n$ .

Tyto částečné součty  $s_{1n}$  popisuje následující tvrzení.

**Tvrzení 2.** Pro součet  $s_{1n} = \sum_{t=1}^n a_{1t}$  v diferenčním trojúhelníku  $\mathbb{T}_{11n}$  platí rovnost

$$s_{1n} = \sum_{t=1}^n \binom{n}{t} a_{t1}. \tag{9}$$

*Důkaz* je zprostředkován na obr. 5. Diferenční čtverec  $\mathbb{S}_{11}$  z obr. 3 rozšíříme přidáním nultého řádku

$$\mathbf{r}_{01}^{(\infty)} = (0, s_{11}, s_{12}, \dots, s_{1n}, \dots)$$

na diferenční čtverec  $\mathbb{S}_{01}$ . Užitím tvrzení 1 dostáváme v diferenčním trojúhelníku  $\mathbb{T}_{01n+1}$

$$s_{1n} = a_{0n+1} = 0 + \binom{n}{1} a_{11} + \binom{n}{2} a_{21} + \dots + \binom{n}{n} a_{n1},$$

což jsme chtěli dokázat.



$\mathbf{a}_{0\ 1}=0$	$\mathbf{a}_{0\ 2}=s_{1\ 1}$	$\mathbf{a}_{0\ 3}=s_{1\ 2}$	$\dots$	$\mathbf{a}_{0\ n-1}=s_{1\ n-2}$	$\mathbf{a}_{0\ n}=s_{1\ n-1}$	$\mathbf{a}_{0\ n+1}=s_{1\ n}$	$\dots$
$a_{1\ 1}$	$a_{1\ 2}$	$a_{1\ 3}$	$\dots$	$a_{1\ n-1}$	$a_{1\ n}$	$a_{1\ n+1}$	$\dots$
$\mathbf{a}_{2\ 1}$	$a_{2\ 2}$	$a_{2\ 3}$	$\dots$	$a_{2\ n-1}$	$a_{2\ n}$	$a_{2\ n+1}$	$\dots$
$\mathbf{a}_{3\ 1}$	$a_{3\ 2}$	$a_{3\ 3}$	$\dots$	$a_{3\ n-1}$	$a_{3\ n}$	$a_{3\ n+1}$	$\dots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$
$\mathbf{a}_{n-1\ 1}$	$a_{n-1\ 2}$	$a_{n-1\ 3}$	$\dots$	$a_{n-1\ n-1}$	$a_{n-1\ n}$	$a_{n-1\ n+1}$	$\dots$
$\mathbf{a}_n\ 1$	$a_n\ 2$	$a_n\ 3$	$\dots$	$a_n\ n-1$	$a_n\ n$	$a_n\ n+1$	$\dots$
$\mathbf{a}_{n+1\ 1}$	$a_{n+1\ 2}$	$a_{n+1\ 3}$	$\dots$	$a_{n+1\ n-1}$	$a_{n+1\ n}$	$a_{n+1\ n+1}$	$\dots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Obr. 5. Diferenční čtverec  $\mathbb{S}_{01}$ ,  $s_{1\ n} = \sum_{t=1}^n a_{1\ t} = \sum_{t=1}^n a_{t\ 1} \binom{n}{t}$

Zde by si měl každý s rovnostmi (5) a (9) pohrát. Tak např. pro posloupnost třetích mocnin přirozených čísel dostáváme (nekonečný) diferenční čtverec

1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000	...
7	19	37	61	91	127	169	217	271	331	...
12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	...
6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	...
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	...
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	...
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

a tedy

$$a_n = 1 + 7(n - 1) + 6(n^2 - 3n + 2) + (n^3 - 6n^2 + 11n - 6) = n^3$$

a

$$s_n = n + \frac{7}{2}(n^2 - n) + 2(n^3 - 3n^2 + 2n) + \frac{1}{4}(n^4 - 6n^3 + 11n^2 - 6n) =$$

$$= \left[ \frac{n(n+1)}{2} \right]^2.$$

#### 4. Aritmetické posloupnosti vyšších řádů a celočíselné polynomy.

V této závěrečné sekci shrneme a použijeme získané výsledky, především tvrzení 1 a tvrzení 2, k formulaci vztahů mezi aritmetickými posloupnostmi a polynomy.

Každé posloupnosti čísel  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_t, \dots)$  přiřadíme diferenční čtverec  $\mathbb{S}_{11}$ , který budeme nazývat diferenčním čtvercem příslušné posloupnosti. Tedy  $a_t = a_{1t}$  pro každé  $t = 1, 2, \dots$ . Budeme si nyní všimnout případů, kdy ve vzniklém čtverci vznikne nulový řádek, tak jako v předchozím příkladu u posloupnosti třetích mocnin přirozených čísel. Vyznačme takové případy následující definicí.

**Definice.** Posloupnost  $\mathbf{a} = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1t}, \dots)$  se nazývá *aritmetickou posloupností vyššího řádu*, jestliže diferenční čtverec  $\mathbb{S}_{11}$  obsahuje nulový řádek, tj. jestliže existuje  $m$  takové, že  $a_{mt} = 0$  pro všechna  $t \geq 1$ . Nejmenší  $d$  takové, že  $a_{d+2t} = 0$  pro všechna  $t \geq 1$ , nazveme *řádem* této aritmetické posloupnosti.

V této terminologii jsou aritmetické posloupnosti, jak je známe z elementární algebry, aritmetické posloupnosti řádu 1. Aritmetické posloupnosti, pro něž  $a_t = c \neq 0$  pro všechna  $t \geq 1$  jsou aritmetické posloupnosti řádu 0, zatímco posloupnost nul je aritmetickou posloupností řádu  $-1$ . Připomeňme, že pro každé  $n = 1, 2, \dots$  je částečná posloupnost  $\{b_t = a_{1n+t} \mid t \geq 1\}$  aritmetické posloupnosti  $\mathbf{a}$  řádu  $d$  aritmetickou posloupností téhož řádu  $d$ .

Jak jsme viděli v předchozí sekci, Fibonacciho posloupnost aritmetickou posloupností není. Podobně, žádná geometrická posloupnost  $(a_1, a_2 = a_1q, a_3 = a_1q^2, \dots, a_n = a_1q^{n-1}, \dots)$  s kvocientem  $q \neq 1$  není aritmetickou posloupností. Na druhé straně, posloupnost  $(a_n = n^d \mid n \geq 1)$  je aritmetickou posloupností řádu  $d$  pro libovolné přirozené číslo  $d$ .

Připomeňme rozšíření definice kombinačního čísla  $\binom{n}{k}$  pro libovolné číslo  $x$ , které vede na definici funkcí

$$\Phi_k(x) = \binom{x}{k} = \frac{x(x-1)\cdots(x-k+1)}{k(k-1)\cdots 2 \cdot 1}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad \Phi_0(x) = \binom{x}{0} = 1.$$

Proměnná  $x$  může být libovolné reálné či komplexní číslo.<sup>4)</sup> V tomto článku uvažujeme  $x$  reálné, ovšem hlavní výsledky se týkají celočíselných posloupností a polynomů, jejichž hodnoty jsou celá čísla.

**Definice.** Polynom, jehož hodnoty v celých číslech jsou celá čísla, budeme nazývat *celočíselným polynomem*.

Znovu připomeňme, že koeficienty celočíselného polynomu nemusí být celá čísla. To ukazují už polynomy  $\Phi_k$ , jejichž vedoucí koeficient je  $\frac{1}{k!}$ .

Malá Fermatova věta tvrdí, že pro každé prvočíslo  $p$  a každé celé číslo  $c$ , je  $c^p - c$  dělitelné prvočíslem  $p$ . To tedy znamená, že polynom

$$F_p(x) = \frac{1}{p}(x^p - x)$$

je celočíselným polynomem. Vhodný součin takových polynomů bude tedy celočíselný polynom, který bude obsahovat zcela libovolný (předem předepsaný) racionální koeficient.

Zcela základní je klasifikace celočíselných polynomů, kterou v roce 1915 publikoval George Pólya [12] a kterou formulujeme jako následující větu. Věta ukazuje, že celočíselné polynomy  $\Phi_k(x)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , tvoří bázi množiny všech celočíselných polynomů.

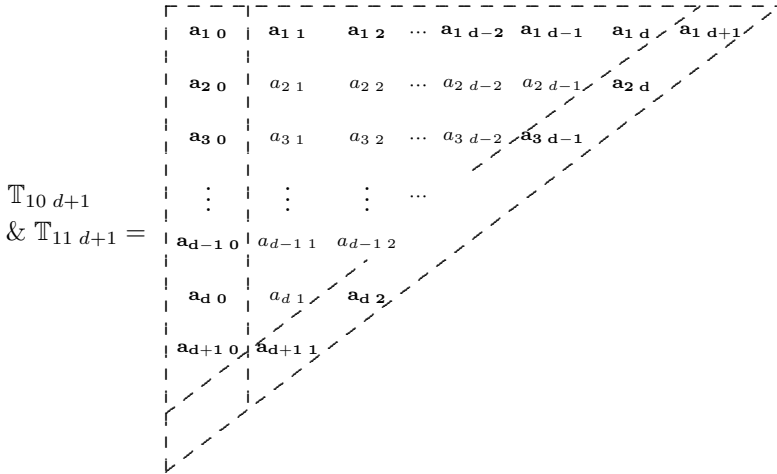
**Hlavní věta.** Každý celočíselný polynom  $P(x)$  stupně  $d$  lze jednoznačně vyjádřit jako celočíselnou lineární kombinaci polynomů  $\Phi_k(x)$ , tj. ve tvaru

$$P(x) = a_{10}\Phi_0(x) + a_{20}\Phi_1(x) + \cdots + a_{d+10}\Phi_d(x) = \sum_{t=0}^d a_{t+10}\Phi_t(x).$$

*Důkaz* plyne ihned z tvrzení 1 aplikovaného na diferenčních trojúhelnících  $\mathbb{T}_{10 \ d+1}$  a  $\mathbb{T}_{11 \ d+1}$ , které jsou určeny hodnotami  $a_{1 \ t} = P(t)$  pro  $t = 0, 1, 2, \dots, d+1$ .

---

<sup>4)</sup>Například  $\binom{\pi}{2}$  je reálné číslo  $\frac{\pi(\pi-1)}{2}$ , tj. hodnota kvadratického polynomu  $y = \frac{1}{2}(x - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{8}$  v bodě  $x = \pi$ .



Obr. 6. Diferenční trojúhelníky  $\mathbb{T}_{10\ d+1}$  a  $\mathbb{T}_{11\ d+1}$ , kde  $a_{1\ t} = P(t)$

Tvrzení 1 zaručuje vyjádření

$$P(x) = \sum_{t=0}^d a_{t+1\ 1} \Phi_t(x-1), \tag{11}$$

odkud posunutím proměnné  $x$  dostáváme

$$P(x) = \sum_{t=0}^d a_{t+1\ 0} \Phi_t(x). \tag{12}$$

Jednoznačnost tohoto vyjádření můžeme dokázat indukcí vzhledem ke stupni polynomu. Nejvyšší koeficient  $\frac{a_{d+1\ 0}}{d!}$  určuje jednoznačně člen  $a_{d+1\ 0}$ . Stupeň polynomu

$$Q(x) = P(x) - a_{d+1\ 0} \Phi_d(x) = \sum_{t=0}^{d-1} a_{t+1\ 0} \Phi_t(x) \tag{13}$$

se snížil a tedy jeho vyjádření ve tvaru (12) je jednoznačné.

Můžeme ještě dodat, že absolutní člen polynomu  $P(x)$  je ve vyjádření (12) triviálně  $a_{1\ 0}$ , zatím co ve vyjádření (11) je roven  $\sum_{t=0}^d (-1)^t a_{t+1\ 1}$ .

Definujeme-li  $P_0(x) = P(x)$  a  $P_t(x) = P_{t-1}(x + 1) - P_{t-1}(x)$  pro  $t = 1, 2, \dots, d$ , vidíme, že stupeň polynomu  $P_t(x)$  je  $d - t$  a jeho hodnoty tvoří v diferenčním trojúhelníku řádek  $t + 1$ .

Článek zakončíme ilustrací popsaných faktů užitím jednoduchého polynomu

$$P(x) = x^3 - 3x^2 + 1.$$

Tedy

$$P_0(x) = P(x), \quad P_1(x) = 3x^2 - 3x - 2, \quad P_2(x) = 6x, \quad P_3(x) = 6.$$

Obr. 7 popisuje diferenční čtverce  $\mathbb{S}_{1-3}$ ,  $\mathbb{S}_{10}$ ,  $\mathbb{S}_{11}$  a  $\mathbb{S}_{110}$ .

$P(-3)$	$P(-1)$	$P(0)$	$P(1)$	$P(2)$	$P(3)$	$P(4)$	$P(5)$	$P(6)$	$P(7)$	$P(8)$	$P(9)$	$P(10)$	$P(11)$
-53	-19	-3	1	-1	-3	1	17	51	109	197	321	487	701
34	16	4	-2	-2	4	16	34	58	88	124	166	214	268
-18	-12	-6	0	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Obr. 7. Diferenční čtverce  $\mathbb{S}_{1-3}$ ,  $\mathbb{S}_{10}$ ,  $\mathbb{S}_{11}$  a  $\mathbb{S}_{110}$

Pomocí těchto čtverců dostáváme následující vyjádření polynomu  $P(x)$ :

$$P(x) = -53 \binom{x+3}{0} + 34 \binom{x+3}{1} - 18 \binom{x+3}{2} + 6 \binom{x+3}{3},$$

$$P(x) = \binom{x}{0} - 2 \binom{x}{1} + 0 \binom{x}{2} + 6 \binom{x}{3},$$

$$P(x) = - \binom{x-1}{0} - 2 \binom{x-1}{1} + 6 \binom{x-1}{2} + 6 \binom{x-1}{3},$$

$$P(x) = 701 \binom{x-10}{0} + 268 \binom{x-10}{1} + 60 \binom{x-10}{2} + 6 \binom{x-10}{3}.$$

Obecně tedy (užitím diferenčního čtverce  $\mathbb{S}_{1t}$ ) platí

$$P(x) = P_0(t) \binom{x-t}{0} + P_1(t) \binom{x-t}{1} + P_2(t) \binom{x-t}{2} + P_3(t) \binom{x-t}{3}.$$

Čtenáři doporučujeme, aby si zvolil celočíselný polynom a vyjádřil ho ve tvaru lineární celočíselné kombinace funkcí  $\Phi_t(x)$ , tj. užitím báze  $\{\Phi_t(x) \mid t = 0, 1, 2, \dots\}$ . Porovnejte své výpočty pro volbu polynomu  $P(x) = x^5 - 3x^3 + x - 1$ .

Diferenční trojúhelníky  $\mathbb{T}_{10\ 6}$  a  $\mathbb{T}_{11\ 6}$  jsou

-1	-2	9	164	835	2754	7133
-1	11	155	671	1919	4379	
12	144	516	1248	2460		
132	372	732	1212			
240	360	480				
120	120					

a tedy

$$\begin{aligned} P(x) &= -\binom{x}{0} - \binom{x}{1} + 12\binom{x}{2} + 132\binom{x}{3} + 240\binom{x}{4} + 120\binom{x}{5} = \\ &= -2\binom{x-1}{0} + 11\binom{x-1}{1} + 144\binom{x-1}{2} + \\ &+ 372\binom{x-1}{3} + 360\binom{x-1}{4} + 120\binom{x-1}{5}. \end{aligned}$$

Bohatství celočíselných polynomů naznačuje též jednoduchý fakt, který zaručuje, že libovolnou konečnou posloupnost  $n$  čísel lze rozšířit na aritmetickou posloupnost řádu  $\leq n - 1$  (viz [6]). Prostě rozšíříme diferenční trojúhelník  $\mathbb{T}_{11\ n}$  určený danou posloupností na diferenční čtverec tím, že v příslušném čtverci definujeme  $a_{n1} = a_{n2} = \dots = a_{nk} = \dots$ , čímž v prvním řádku získáme aritmetickou posloupnost řádu  $\leq n - 1$ :

$$\mathbf{a} = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1k}, \dots).$$

Tento fakt je v některých publikacích často nepochopen a v některých vysvětlen (viz [8] a [11]).

## MATEMATIKA

Ilustrace následující úlohy ukazuje, že řešení může být neočekávané: Prodlužte šestičlennou posloupnost  $(1, 2, 3, 4, 5, -277)$  na aritmetickou posloupnost řádu pět. Nejprve zkonstruujeme příslušný diferenční trojúhelník

1	2	3	4	5	-277
1	1	1	1	-282	-1414
0	0	0	-283	-1132	-2830
0	0	-283	-849	-1698	-2830
0	-283	-566	-849	-1132	-1415
-283	-283	-283	-283	-283	-283

a odtud odvodíme celočíselný polynom

$$\begin{aligned} P(x) &= \binom{x-1}{0} + \binom{x-1}{1} + (-283) \binom{x-1}{5} = x + (-283) \binom{x-1}{5} = \\ &= -\frac{283}{120}x^5 + \frac{283}{8}x^4 - \frac{4811}{24}x^3 + \frac{4245}{8}x^2 - \frac{38711}{60}x + 283, \end{aligned}$$

který splňuje

$$P(1) = 1, \quad P(2) = 2, \quad P(3) = 3, \quad P(4) = 4, \quad P(5) = 5, \quad P(6) = -277$$

a definuje aritmetickou posloupnost pátého řádu.

## Literatura

- [1] Cahen, P.-J., Chabert, J.-L.: What you should know about integer-valued polynomials. *Amer. Math. Monthly*, roč. 123 (2015), č. 4, s. 311–3337.
- [2] Dlab, V.: Číslo kombinační klíčem  $k$  aritmetickým řadám vyšších stupňů, <https://www.delta42.com/Vlastimil%20Dlab/Prvni%20prace.pdf>, [https://www.delta42.com/Vlastimil%20Dlab/Prvni%20prace%20\(original\).pdf](https://www.delta42.com/Vlastimil%20Dlab/Prvni%20prace%20(original).pdf), <https://www.delta42.com/Vlastimil%20Dlab/Kombinace.Posloupnosti.pdf>.
- [3] Dlab, V.: Důkladné porozumění elementární matematice. *Učitel matematiky*, roč. 17 (2009), č. 3, s. 169–182.

- [4] Dlab, V.: Arithmetic progressions of higher order. *Teaching Math. and Comp. Science*, roč. 28 (2011), s. 1–15, česká verze: *Aritmetické posloupnosti vyšších řádů*, <http://www.karlin.mff.cuni.cz/katedry/kdm/literatura/aritm-posl.pdf>.
- [5] Dlab, V.: Aritmetické a geometrické posloupnosti, mnohočleny. *Ani jeden matematický talent nazmar*, JČMF – UHK, Hradec Králové, 2013, s. 36–44.
- [6] Dlab, V.: Aproximace geometrických posloupností. *Rozhledy matematicko-fyzikální*, roč. 90 (2015), č. 4, s. 1–5.
- [7] Dlab, V., Bečvář, J.: *Od aritmetiky k abstraktní algebře*. 2. vyd., ČVUT, Praha, 2022.
- [8] Dlab, V., Martišek, D.: Jedinákova posloupnost. *Učitel matematiky*, roč. 31 (2023), č. 4, s. 225–231.
- [9] Matematické oříšky: Hrátky s posloupnostmi celých čísel. *Rozhledy matematicko-fyzikální*, roč. 97 (2022), č. 4, s. 32–35.
- [10] Kuřina, F.: Chvála „biflování“. *Učitel matematiky*, roč. 18 (2010), č. 1, s. 49–52.
- [11] Kuřina, F.: Jedinákova posloupnost. *Učitel matematiky*, roč. 29 (2021), s. 95–98.
- [12] Pólya, G.: Ueber ganzwertige ganze funktionen. *Rend. Circ. Matem. Palermo*, roč. 40 (1915), s. 1–16.
- [13] Pólya, G.: Über ganzwertige polynome in algebraischen Zahlkörpern. *J. Reine Angew. Math.*, roč. 149 (1919), s. 97–116.
- [14] Studnička, F. J.: *Algebra pro vyšší třídy středních škol*. 2. vyd., Dr. Eduard Grégr a syn, Praha, 1877.
- [15] Veselý, V.: Aritmetické řady vyšších stupňů. *Rozhledy matematicko-přírodovědecké*, roč. 30 (1950/51), s. 16–22.
- [16] Vicovský, K.: O aritmetických řadách. *Rozhledy matematicko-přírodovědecké*, roč. 16 (1936/37), 47–48, s. 71–75.



## Parita kombinačních čísel

O kombinačních číslech si můžete přečíst v *Poznámkách o kombinačních číslech, posloupnostech, především aritmetických, a polynomech*. Kombinační čísla a Pascalův trojúhelník (definice viz článek *O jednom mýtickém trojúhelníku*) jsou bezedným zdrojem matematických oříšků a ty dnešní se týkají parity<sup>1)</sup> kombinačních čísel. Nejprve si ukážeme, jak šikovně rozhodnout o tom, zda je dané kombinační číslo sudé či liché. Algoritmus se opírá o následující větu, viz [1].

**Věta 1.** *Pokud  $n$  je sudé a  $k$  je liché číslo, pak  $\binom{n}{k}$  je sudé. Jinak platí<sup>2)</sup>*

$$\binom{n}{k} \equiv \binom{\lfloor n/2 \rfloor}{\lfloor k/2 \rfloor} \pmod{2}.$$

Důkaz necháme na čtenáři, ale poradíme, že se hodí následující dva vztahy  $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$  a  $(n-k) \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k}$ .

**Příklad 1.** Opakovaným využíváním věty 1 určíme paritu  $\binom{70}{38}$ :

$$\binom{70}{38} \equiv \binom{35}{19} \equiv \binom{17}{9} \equiv \binom{8}{4} \equiv \binom{4}{2} \equiv \binom{2}{1} \equiv 0 \pmod{2},$$

tedy  $\binom{70}{38}$  je sudé číslo.

Napovězme, že parita se velmi dobře počítá, pokud uvažujeme binární zápisy čísel. Připomeňme, že binární zápis přirozeného čísla  $n$  je posloupnost  $(a_d a_{d-1} \dots a_1 a_0)$ , kde číslice  $a_0, a_1, \dots, a_d \in \{0, 1\}$ , a  $n = a_d 2^d + a_{d-1} 2^{d-1} + \dots + a_1 2 + a_0$ .

Pro čtenáře máme následující úlohy:

- *Dokažte, že v  $n$ -tém řádku Pascalova trojúhelníku je počet lichých čísel roven  $2^{s(n)}$ , kde  $s(n)$  je součet číslic v binárním zápisu čísla  $n$ . Například  $n = 5 = 2^2 + 1$  má binární zápis (101) a součet číslic v něm je 2. Mezi kombinačními čísly  $\binom{5}{0} = 1 = \binom{5}{5}$ ,  $\binom{5}{1} = 5 = \binom{5}{4}$ ,  $\binom{5}{2} = 10 = \binom{5}{3}$  jsou skutečně  $4 = 2^2$  lichá čísla.*

Pro libovolné přirozené číslo  $n$  označme jako  $e(n)$  maximální mocninu dvojky, kterou je  $n$  dělitelné. Tedy pro  $n = 2^r \cdot \ell$ , kde  $\ell$  je liché číslo, je  $e(n) = r$ . Například  $112 = 2^4 \cdot 7$ , tudíž  $e(112) = 4$ .

<sup>1)</sup>Parita znamená sudost či lichost.

<sup>2)</sup>Dolní celá část reálného čísla  $x$  se značí  $\lfloor x \rfloor$  a je to největší celé číslo  $\leq x$ .

- Necht  $n \leq 2^j$ . Dokažte, že  $e(n!) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + \lfloor \frac{n}{2^2} \rfloor + \lfloor \frac{n}{2^3} \rfloor + \dots + \lfloor \frac{n}{2^j} \rfloor$ .
- Najděte jednoduchý vztah mezi  $n$ ,  $s(n)$  a  $e(n)$ .
- Vyjádřete  $e\left(\binom{n}{k}\right)$  pomocí  $s(n)$ ,  $s(k)$  a  $s(n-k)$ .

Minule měli čtenáři za úkol odpovědět na otázky týkající se průměrů. Začneme s úlohou snazší:

- *Běžec uběhl první polovinu dráhy (400 m) průměrnou rychlostí 10 km/h. Jakou průměrnou rychlostí musí uběhnout druhou polovinu dráhy (tedy dalších 400 m), aby průměrná rychlost celého běhu byla dvojnásobná, tedy 20 km/h?*

Vysvětleme, že úloha nemá řešení. Označme hledanou rychlost  $v_2$ . Průměrná rychlost  $v$  je celková dráha  $s$  vydělená celkovým časem  $t$ . Pro celkový čas platí

$$t = \frac{s/2}{10} + \frac{s/2}{v_2},$$

tudíž

$$s = vt = 20t = 20 \left( \frac{s}{20} + \frac{s}{2v_2} \right) = s + \frac{10s}{v_2}.$$

Vidíme, že rychlost  $v_2$  splňující takovou rovnici neexistuje. (Ani rychlost světla by běžci nestačila, aby dosáhl průměrné rychlosti 20 km/h.)

Řešení následující těžší úlohy je věnován samostatný článek v tomto čísle *Průměrná vzdálenost dvou bodů na kružnici* na str. 28.

- *Určete průměrnou vzdálenost bodů na kružnici.*

Na závěr úloha nematematická:

- *V češtině používáme termín průměr pro průměry aritmetické, geometrické apod., ale také pro průměr kružnice. V angličtině se stejná slova nepoužívají (mean vs. diameter). Proč zvolila čeština stejná pojmenování?*

Bohužel přesnou odpověď zatím neznáme. Podle Ústavu pro jazyk český se občas stane, že i dva objekty, které souvisejí jen vzdáleně, jsou pojmenovány stejně. V tomto případě je možná onou vzdálenou souvislostí fakt, že průměr kružnice je dvakrát vzdálenost bodů kružnice od středu, a průměr aritmetický, geometrický apod. vyjadřuje typickou, střední hodnotu.

#### Literatura

- [1] Aigner, M., Ziegler, G.: Proofs from THE BOOK. Springer-Verlag, Berlin, 2009.

## Měříme Coriolisovu sílu ve výtahu a v letadle

*Karel Rauner, Přeštice*

Coriolisova síla je ve fyzice Popelkou. Asi největší příčinou toho je, že je to síla setrvačná, která – stejně jako odstředivá síla – má původ nikoli v působení dalšího tělesa, ale v neinercialitě soustavy. Coriolisova síla vzniká při pohybu tělesa v soustavě rotující. V mnoha učebnicích, a to i vysokoškolských, zcela chybí, jinde jsou o ní jen zmínky spolu s jejími důsledky. Nejčastěji se zmiňuje opotřebení kolejnic, vymílání břehů řek a stáčení větrů. Populární je i šarlatánské vypouštění vody z nádoby poblíž rovníku.

Většinou se uvádějí příklady působení Coriolisovy síly při pohybu tělesa poledníkovým směrem. Na internetu jsou časté polemiky o tom, která kolejnice se více opotřebuje a na kterou stranu častěji vykolejí vlaky. I bez znalosti vzorce pro Coriolisovu sílu lze dojít ke správnému závěru jednoduchou úvahou. Pokud jede vlak na severní polokouli na sever, musí snižovat rychlost, kterou má ve směru na východ vlivem rotace Země. Logicky na něj musí působit odpovídající silou pravá kolejnice. Při pohybu ze severu na jih se naopak musí vlak roztáčet na větší rychlost, opět na něj proto silově působí pravá kolejnice. Na jednokolejných tratích, kde jezdí vlaky po stejných kolejích stejně často oběma směry, je tedy opotřebení obou kolejnic stejné. Na dvojkolejných tratích, na kterých se jezdí vždy po stejné straně (většinou vpravo, v některých státech však vlevo) se vždy více opotřebuje pravá kolejnice při pohledu ve směru jízdy. Stejnou úvahou dojdeme k tomu, že na jižní polokouli je tomu naopak: více se opotřebuje levá kolejnice.

Mnohem méně se uvádějí důsledky Coriolisovy síly při pohybu rovnoběžkovým směrem. Přitom lze směr působení Coriolisovy síly zjistit opět prostou úvahou. Pohybuje-li se těleso ze západu na východ, jeho rychlost se přičítá k obvodové rychlosti rotace Země a působí na něj větší odstředivá síla. Coriolisova síla bude proto působit nahoru, těleso bude „nadlehčovat“. Při pohybu opačným směrem se bude odstředivá síla snižovat, Coriolisova síla působí dolů.

Zkusíme v několika příkladech Coriolisovu sílu vypočítat a zjistit, zda by se nedala jednoduchým pokusem měřit. V soustavě rovnoměrně rotující úhlovou rychlostí  $\vec{\omega}$  působí na hmotný bod s hmotností  $m$  pohybující

se v soustavě rychlostí  $\vec{v}$  Coriolisova síla

$$\vec{F}_C = -2m \cdot \vec{\omega} \times \vec{v}.$$

Vzhledem k tomu, že u Země má  $\vec{\omega}$  směr zemské osy a míří na sever, lze jednoduchou analýzou vektorového součinu potvrdit všechny úvahy provedené v předchozím textu. Protože velikost úhlové rychlosti Země  $|\vec{\omega}|$  je

$$|\vec{\omega}| = \frac{2\pi}{86\,164} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} = 7,292 \cdot 10^{-5} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1},$$

kde číslo 86 164 je délka hvězdného dne v sekundách (perioda rotace Země), je velikost Coriolisovy síly při malých rychlostech poměrně malá.

Vzhledem k tvaru vektorového součinu je zřejmé, že Coriolisova síla je největší, je-li vektor rychlosti kolmý k vektoru  $\vec{\omega}$ . To platí jednak při pohybu po rovnoběžce, jednak při pohybu kolmo k zemské ose. Nejjednodušším případem pohybu kolmo k ose je pohyb výtahu na rovníku. Zkusme, jakou možnost bychom měli Coriolisovu sílu (případně zrychlení) měřit v takovém výtahu. Nejrychlejším výtahem v současnosti je rychlovýtah ve výškové budově v Šanghaji. Výtah se v této budově, vysoké 632 metrů, pohybuje rychlostí 73,8 km/h. Velikost Coriolisova zrychlení je

$$a_C = 2\omega v = 2 \cdot 7,292 \cdot 10^{-5} \cdot \frac{73\,800}{3\,600} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \doteq 0,003 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

Kdybychom tedy chtěli změřit Coriolisovo zrychlení kyvadlem s délkou 1 metru, jeho dolní konec by se vychýlil ze svislého směru o

$$1\,000 \text{ mm} \cdot \frac{0,003 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}}{9,78 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}} \doteq 0,3 \text{ mm}.$$

Číslo 9,78 je číselná hodnota tíhového zrychlení v  $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$  na rovníku. Je tedy zřejmé, že takto Coriolisovo zrychlení změřit nelze.

K dosažení měřitelných hodnot je třeba podstatně zvýšit rychlost. Nalézt soustavu, která se pohybuje kolmo k zemské ose velkou rychlostí, se nám ale nepodaří.<sup>1)</sup> Proto je třeba využít pohybu po rovnoběžce, který

<sup>1)</sup>Startující rakety sice dosahují velké rychlosti, nepohybují se ale ve svislém směru, většinou se stáčí k východu. Navíc rozhodně nelze považovat startující raketu za těleso pohybující se rovnoměrně. I možnosti experimentátora dostat se na takovou raketu jsou velmi omezené.

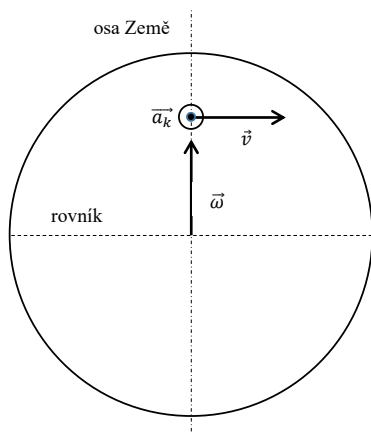
vykonávají letadla při letu ve směru západ–východ a východ–západ. To, že při těchto pohybech se mění tíhové zrychlení, je známo poměrně dlouho. Již koncem devatenáctého století se při výpravách lodí, které měly mapovat tíhové zrychlení v Atlantickém oceánu, zjistilo, že se při pohybu lodí různým směrem tíhové zrychlení mění. To vysvětlil maďarský šlechtic a fyzik Loránd Eötvös. Podle něj je jev také nazván: Eötvösův jev. Příspěvek Coriolisovy síly k tíhovému zrychlení je dán vztahem:

$$a_C = -2 \cdot \vec{\omega} \times \vec{v}.$$

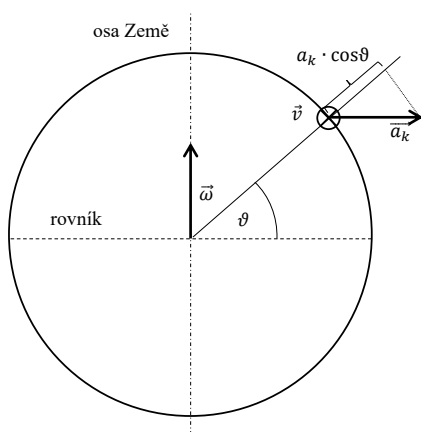
Při pohybu po rovnoběžce je svislá složka tohoto zrychlení

$$a_C = \pm 2\omega v \cdot \cos \vartheta,$$

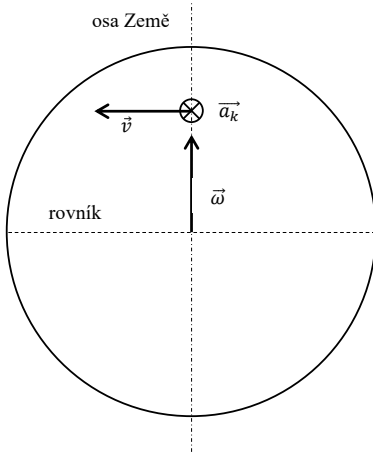
kde úhel  $\vartheta$  je zeměpisná šířka a  $v$  velikost rychlosti ve směru rovnoběžky. Znaménko + znamená, že se toto zrychlení přičítá k tíhovému zrychlení v klidu a platí pro pohyb východ–západ. Znaménko – platí pro pohyb západ–východ a znamená to, že se o tento příspěvek tíhové zrychlení proti klidovému snižuje. Orientace vektorů je naznačena na následujícím obrázku. Na nich značí symbol  $\odot$  vektor kolmý k nánkresně a mířící z ní ven, symbol  $\otimes$  vektor kolmý k nánkresně a mířící dovnitř.



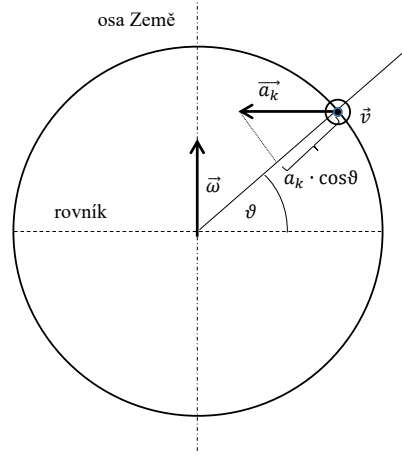
pohyb západ–východ, pohled z poledníkové roviny procházející pohybujícím se bodem



pohyb západ–východ, pohled z poledníkové roviny o 90° západněji



pohyb východ-západ, pohled z poledníkové roviny procházející pohybujícím se bodem



pohyb východ-západ, pohled z poledníkové roviny o  $90^\circ$  západněji

V dosavadních úvahách se nepočítalo s odstředivou silou, která vzniká při vodorovném pohybu i nad nerotující Zemí. Označíme-li velikost rychlosti v poledníkovém směru  $u$ , velikost rychlosti ve směru rovnoběžky  $v$  a poloměr Země  $R$ , je přídatné odstředivé zrychlení, které vždy klidové tíhové zrychlení snižuje.<sup>2)</sup>

$$a_o = \frac{v^2 + u^2}{R}.$$

Celková svislá složka přídatného zrychlení, tvořená Coriolisovým a odstředivým zrychlením bude tedy

$$a_p = \pm 2\omega v \cos \vartheta - \frac{v^2 + u^2}{R}.$$

Vyhodnotíme možnost měření v letadle. Pro jednoduchost budeme předpokládat, že letadlo letí nad rovníkem ( $\vartheta = 0$ ) rychlostí 1 000 km/h. Pak

$$a_C = \pm 2 \cdot 7,292 \cdot 10^{-5} \cdot \frac{10^6}{3600} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \doteq \pm 0,0405 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

<sup>2)</sup>Dosadíme-li za výslednou rychlost 1. kosmickou rychlost: 7,9 km/s, vyjde toto zrychlení  $9,78 \text{ m/s}^2$ , což je rovno tíhovému zrychlení, těleso by už letělo těsně nad zemí.

Znamená to, že tíhové zrychlení v letadle letícím nad rovníkem stálou rychlostí 1 000 km/h v konstantní výšce bude  $9,82 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$  při letu na západ,  $9,74 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$  při letu na východ. Pokud by se v takovém letadle vážil člověk, kterému by váha v klidu na letišti ukázala hmotnost 100 kg, váha by při letu na západ ukázala 100,4 kg, při letu na východ jen 99,6 kg. Je zřejmé, že digitální osobní váhy, které mají rozlišovací schopnost 0,1 kg, by tento rozdíl ukázaly i ve větších zeměpisných šířkách. Zvídavému experimentálnímu fyzikovi lze pak doporučit, aby si do letadla bral osobní váhu. Není ovšem vyloučeno, že svou činnost bude marně vysvětlovat ostatním cestujícím. Pokud bychom počítali ze vztahu pro  $a_p$ , budou uvedené údaje při  $a_p = (\pm 0,0405 - 0,0121) \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$  rovny 100,28 kg a 99,47 kg.

Eötvösův jev má ale i praktické důsledky. Letadlům letícím po stejné trase trvá let směrem na západ delší dobu než na východ, i spotřeba paliva je větší. Například přímý let Mnichov–New York trvá u jedné letecké společnosti 9 hodin 10 minut, zpáteční let stejnou společností jen 7 hodin 35 minut. Samozřejmě je tento rozdíl ovlivněn i převládajícími směry větru v letové výšce<sup>3)</sup>, příspěvek Coriolisovy síly však není zanedbatelný.

### Poznámka.

Možná, že někoho napadne, že ve vztahu pro  $a_p$  chybí odstředivá síla, která působí na hmotný bod, který je v klidu a je pouze unášen obvodovou rychlostí rotace Země:  $a_{ok} = \omega^2 R \cos \vartheta$ . Toto zrychlení má směr kolmý k zemské ose, jeho svislá složka je  $a_{o\perp} = \omega^2 R \cos^2 \vartheta$  a míří nahoru. Toto zrychlení je ale již zahrnuto v tíhovém zrychlení a je jednou z příčin, proč je na rovníku menší tíhové zrychlení než na pólu. Rozdíl způsobený odstředivou silou je roven

$$a_{o\perp} = \omega^2 R = (7,292 \cdot 10^{-5})^2 \cdot 6,378 \cdot 10^6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \doteq 0,034 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2},$$

rozdíl tíhových zrychlení na pólu a na rovníku je však

$$9,832 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} - 9,780 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} = 0,052 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

Je vidět, že výrazný vliv má i zploštění Země: na pólu by byla vzdálenost mořské hladiny od středu Země 6 357 km, na rovníku 6 378 km. Vzhledem k tomu, že Země má složitý tvar a ani rozložení hmoty neodpovídá homogenní kouli, nelze tento vliv jednoduše vypočítat.

---

<sup>3)</sup>Na této trase vane v letové výšce pravidelně západní vítr.

## Coriolisova síla – její odvození

*Pavel Pokorný, VŠCHT Praha*

Naším cílem je ukázat, že v soustavě rovnoměrně rotující úhlovou rychlostí  $\vec{\omega}$  působí na hmotný bod s hmotností  $m$  pohybující se v této soustavě rychlostí  $\vec{v}$  Coriolisova síla

$$\vec{F}_C = 2m\vec{v} \times \vec{\omega}.$$

Uvažujme pohyb hmotného bodu o hmotnosti  $m$  v rovině v inerciální vztažné soustavě, ve které polohu bodu vyjádříme komplexním číslem  $r_I$ . Označme čárkou derivaci podle času  $t$ . Uvažujme dále v této rovině neinerciální vztažnou soustavu, která se otáčí vůči inerciální soustavě konstantní úhlovou rychlostí  $\omega$  v kladném směru, tedy proti směru hodinových ručiček. V čase  $t$  jsou tyto dvě soustavy vzájemně otočeny o úhel  $\omega t$ . Polohu bodu v rotující soustavě označme komplexním číslem  $r_R$ . Otočení o úhel  $\omega t$  lze v komplexní rovině vyjádřit vynásobením komplexním číslem

$$e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i \sin(\omega t),$$

kde  $i$  je imaginární jednotka. Tedy

$$r_I = r_R e^{i\omega t}.$$

Derivací podle času  $t$  dostaneme rychlost a druhou derivací dostaneme zrychlení

$$\begin{aligned} r'_I &= r'_R e^{i\omega t} + i\omega r_R e^{i\omega t} \\ r''_I &= r''_R e^{i\omega t} + 2i\omega r'_R e^{i\omega t} - \omega^2 r_R e^{i\omega t}. \end{aligned}$$

Po vydělení výrazem  $e^{i\omega t}$  vyjádříme

$$r''_R = r''_I e^{-i\omega t} - 2i\omega r'_R + \omega^2 r_R.$$

Zde první člen je zrychlení způsobené vnější silou  $F_I$ , která uděluje zrychlení

$$r''_I = \frac{F_I}{m}$$



## FYZIKA

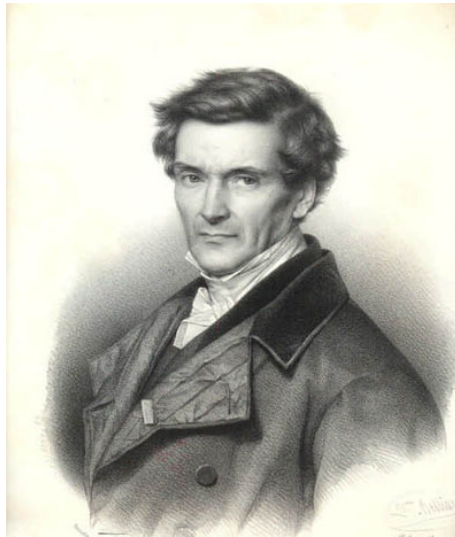
v inerciální soustavě a tedy zrychlení  $r_I'' e^{-i\omega t}$  v neinerciální soustavě. Druhý člen  $-2i\omega r_R'$  je právě Coriolisovo zrychlení, které odpovídá zdánlivé Coriolisově síle

$$F_C = -2i\omega v m,$$

kde  $v = r_R'$  je rychlost v neinerciální soustavě. Násobení komplexním číslem  $-i$  znamená, že Coriolisova síla působí doprava kolmo na směr rychlosti. A poslední třetí člen  $\omega^2 r_R$  je odstředivé zrychlení.

Označíme-li  $\vec{\omega}$  vektor ve směru osy otáčení podle pravidla pravé ruky o velikosti úhlové rychlosti  $\omega$  a  $\vec{v}$  vektor rychlosti v rotující soustavě, pak lze v 3D prostoru vyjádřit Coriolisovu sílu pomocí vektorového součinu

$$\vec{F}_C = 2m\vec{v} \times \vec{\omega}.$$



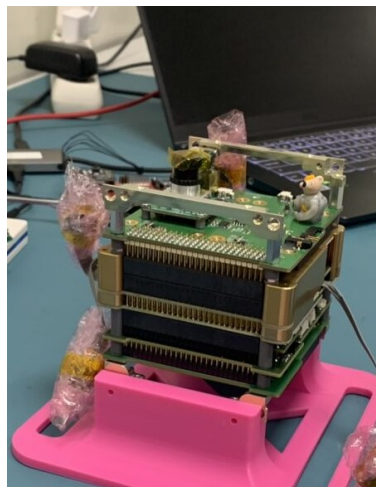
Gaspard-Gustave de Coriolis (1792–1843), zdroj: wikipedia

## Proč umělé družice nepadají na Zemi. Anebo padají?

Věra Krajčová, Jan Veselý

FJFI ČVUT v Praze – Planetárium Praha

Možná jste nedávno zaznamenali v médiích článek o tom, že družice pražského planetária Planetum 1 shořela v atmosféře. A to i se skleněným Hurvínkem, který jí „pilotoval“. Družice typu cubesat byla vypuštěna na oběžnou dráhu 25. května 2022 raketou Falcon 9 z Floridy a obíhala Zemi, a to z počátku ve výšce přes 520 km rychlostí přes 27 000 kilometrů za hodinu. Původně se předpokládalo, že bude družice „žít“ až deset let, ale díky zvýšené sluneční aktivitě v posledních letech, došlo k rychlejšímu zpomalování družice, a tím i k urychlení jejího zániku v atmosféře.

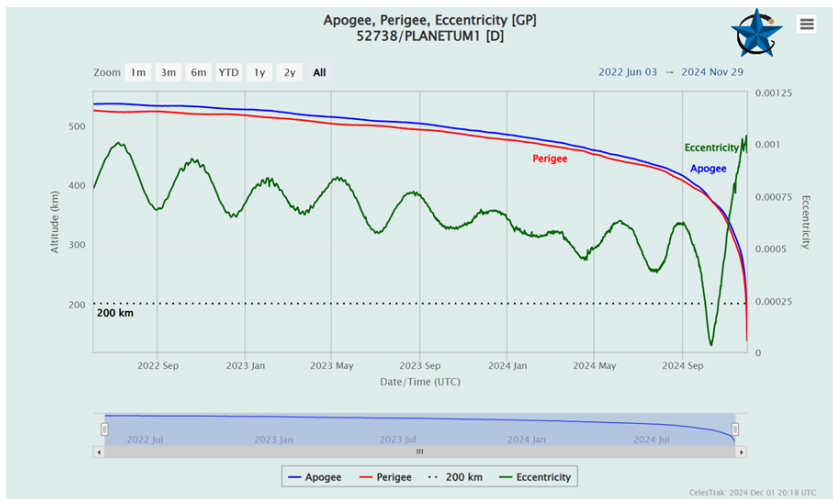


Obr. 1: Družice Planetum 1. Zdroj: <https://www.planetum.cz/druzice-planetum1/fotogalerie/>

Totíž když je sluneční aktivita vysoká, zvyšuje se intenzita solárního větru, což vede k expanzi zemské atmosféry, především její ionosféry. Tato expanze způsobuje větší tření mezi atmosférou a družicemi, které

obíhají na nízkých orbitách. Větší odpor atmosféry zpomaluje družice a způsobuje, že jejich oběžná rychlost klesá.

Dva roky po startu v květnu 2024 Planetum 1 klesla na výšku 450 km. Do konce října klesla o dalších 100 km a v pátek 29. listopadu okolo 13 hod. shořela v atmosféře někde nad Malajsií. Resp. klesla pod 150 km, což se pokládá za definitivní konec družice. Protože družice už nějakou dobu nevysílala radiový signál, není možné určit její konec přesně.



Obr. 2: Vývoj parametrů orbity družice Planetum 1. Modře je vyznačena výška apogea, červeně výška perigea a zeleně excentricita (obrázek ze dne 1. 12. 2024). Zdroj: <https://celestrak.org/NORAD/elements/graph-altitude.php?CATNR=52738>

Mezinárodní vesmírná stanice ISS (*International Space Station*) je také družicí Země. Obíhá ve výšce přibližně 400 km. K tomu, aby se nezřítla na povrch Země, se musí pohybovat dostatečně velkou tečnou rychlostí.

Na stanici působí gravitační síla. Kdybychom jí neudělili žádnou tečnou rychlost, ISS by prostě volným pádem spadla na Zem. Stanice se pohybuje po mírně eliptické trajektorii, kterou pro jednoduchost budeme považovat za kruhovou. Gravitace představuje dostředivou sílu

$$F_g = F_d$$

tedy

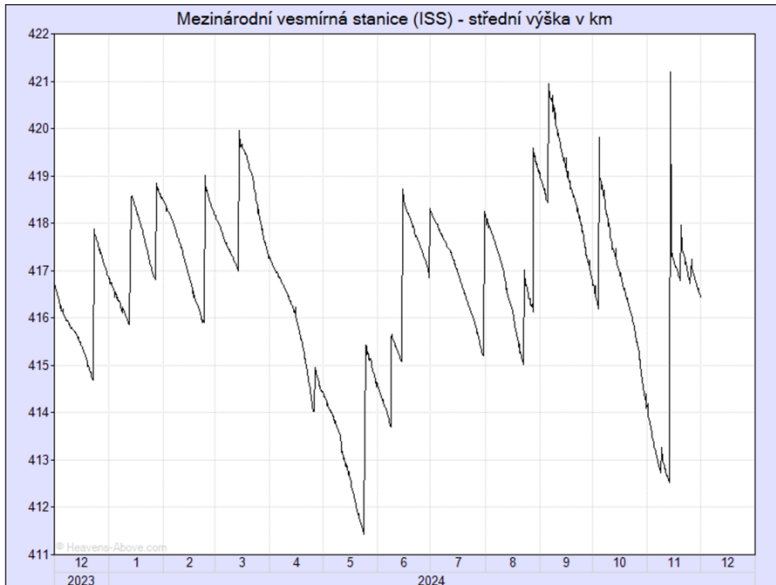
$$G \frac{Mm}{r^2} = m \frac{v^2}{r},$$

kde  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$  je gravitační konstanta,  $M = 5,972 \cdot 10^{24} \text{ kg}$  je hmotnost Země,  $r$  je vzdálenost ISS od středu Země (uvažujeme střední poloměr Země 6371 km plus 400 km nad Zemí, což je 6771 km) a  $m$  je hmotnost ISS (kterou ale k výpočtu znát nemusíme, protože se na obou stranách rovnice vykrátí). Z tohoto vztahu si vyjádříme rychlost

$$v = \sqrt{G \frac{M}{r}}$$

a dosadíme

$$v = \sqrt{6,67 \cdot 10^{-11} \frac{5,972 \cdot 10^{24}}{6771 \cdot 10^3}} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \doteq 7670 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$



Obr. 3: Orbitální výška vesmírné stanice ISS (obrázek ze dne 1. 12. 2024).

Zdroj: <https://heavens-above.com/IssHeight.aspx?lat=0&lng=0&loc=Unspecified&alt=0&tz=UCT>

Kdyby se stanice pohybovala těsně při povrchu Země, měla by její kruhová rychlost velikost 7,9 km/s. Tuto hodnotu nazýváme 1. kosmickou rychlostí. ISS tedy obíhá po své orbitě 400 km nad Zemí rychlostí 7,7 km/s. Kdyby nebyl vzduch, trajektorie ISS by se sama od sebe neměnila. Protože v této výšce přece jen nějaké částice vzduchu jsou, ISS se o ně brzdí a každý den klesá o cca 100 m. Proto je třeba, aby si stanice svoji rychlost a tím i výšku nad Zemí v průměru dvakrát do měsíce raketovými manévry zkorigovala. Kdy k tomuto „pšouknutí“ asi dojde, můžeme odvodit z grafu, který znázorňuje orbitální výšku ISS v průběhu roku.

Dané kruhové rychlosti odpovídá i doba oběhu družice okolo Země. Pro rovnoměrný pohyb pro kružnici platí

$$v = \frac{2\pi r}{T},$$

kde  $T$  je právě oběžná doba, respektive perioda. Odtud

$$T = \frac{2\pi r}{v}$$

a po dosazení

$$T = \frac{2\pi \cdot 6\,771 \cdot 10^3}{7\,670} \text{ s} \doteq 5\,545 \text{ s.}$$

ISS tedy vykoná jeden oběh okolo Země za 92 minut. Astronauti žijící na stanici zažijí každý den 16 východů a západů slunce, protože ale tráví většinu času v prostoru bez oken, většinu z nich nevidí!

Jak je to s Hurvínkem a ISS už víme, ale co Měsíc? Pokud vás to zajímá, podívejte se například na rozhovor Jana Šlégra z Přírodovědecké fakulty Univerzity Hradec Králové pro Český rozhlas <https://hradec.rozhlas.cz/otaceni-zeme-se-zpomaluje-protoze-mesic-se-od-nas-vzdaluje-rychlosti-jakou-8154065>.

#### Literatura

- [1] [https://www.esa.int/Science\\_Exploration/Human\\_and\\_Robotic\\_Exploration/International\\_Space\\_Station/Where\\_is\\_the\\_International\\_Space\\_Station](https://www.esa.int/Science_Exploration/Human_and_Robotic_Exploration/International_Space_Station/Where_is_the_International_Space_Station)
- [2] [https://www.esa.int/Science\\_Exploration/Human\\_and\\_Robotic\\_Exploration/International\\_Space\\_Station/Where\\_is\\_the\\_International\\_Space\\_Station](https://www.esa.int/Science_Exploration/Human_and_Robotic_Exploration/International_Space_Station/Where_is_the_International_Space_Station)

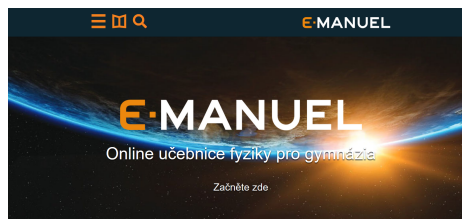
## E-MANUEL – online učebnice fyziky

Věra Krajčová

Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská ČVUT v Praze

Pokud studujete nebo učíte fyziku na střední škole, určitě jste se aspoň jednou dostali do situace, kdy jste měli chuť se podívat do učebnice, abyste našli odpověď na nějaký fyzikální problém. Ještě nedávno bohužel nebylo moc mezi učebnicemi na výběr. V podstatě jedinou kompletní českou učebnicí fyziky pro střední školy byla sada nakladatelství Prometheus. Ta se používá s menšími úpravami už od 90. let 20. stol. Problémem je, že ne každému tato sada vyhovuje. Tím nechci říct, že je špatná. Ale je potřeba alternativy.

Před rokem jsem poprvé narazila na online učebnici fyziky pro gymnázia E-MANUEL ([www.e-manuel.cz](http://www.e-manuel.cz)). Tento poetický název, při kterém si asi okamžitě vzpomenete na večerníček Maková panenka, vychází ve skutečnosti z francouzského slova *manuel de physique*, tedy učebnice fyziky. Nezapře tím své tvůrce, což jsou učitelé na francouzském gymnáziu v Brně. Učebnice jako taková vychází právě z výuky na francouzských školách, která je více mezioborová, především propojená s chemií. A předpona e-? No přece elektronická, volně dostupná komukoliv a odkudkoliv, z počítače, tabletu nebo i z mobilu.



Po půl roce práce s učebnicí e-manuel musím říct, že jsem nadšená. Logické členění kapitol, které jsou řazené jinak než v českých učebnicích, i průchod učivem mi naprosto vyhovuje. Líbí se mi i členění kapitol na motivaci, výklad, cvičení a praktika. Sama používám první dvě části. Obsahují kvalitní fotky k uvedení do problémů i pěkně zpracované a názorné grafy. Líbí se mi také interaktivní otázky, anebo třeba videa natočená ve spolupráci s přírodovědeckou fakultou Masarykovy univerzity v Brně.

## RECENZE

Je na nich vidět, že protagonisté Bára Mikulecká a Vojtěch Hanák mají s popularizací vědy velké zkušenosti a že je natáčení muselo hodně bavit.

Jediné, co brání práci s učebnicí v hodinách fyziky, je její poměrně dlouhá odezva, na což je potřeba si zvyknout. I když se snad již pracuje na zlepšení.


Online učebnici e-manuel můžu každému z vás doporučit. Třeba k procvičení učiva, doučení se látky nebo třeba i k zájmovému čtení. Co by však o ní řekli samotní autoři? Cituji: „Chtěli bychom, abyste fyziku dělali, ne se o ní jenom učili.“

Autory e-manuela Mirka Kuberu, Vojtu Beneše (oba z GML Brno) a Tomáše Nečase (Jaroška Brno) jsem požádala o krátký rozhovor.

*Věra: Co bylo úplně prvním impulzem k tvorbě vaší učebnice fyziky?*

Mirek: Nespokojenost s aktuálními středoškolskými učebnicemi fyziky. Tím, že s Vojtou učíme na bilingvním gymnáziu a používáme původní francouzské učebnice, nám bylo jasné, že české učebnice nemohou nikoho bavit. K informacím se v nich dostanete, ale ta forma!

Vojta: Z bilingvy jsme zvyklí neustále vyhledávat materiály v různých zdrojích a při výuce je kombinovat. Je to někdy ale opravdu unavující. Každý materiál má jiný formát. Chtěli jsme vytvořit učebnici, která by splňovala nejenom naše fyzikální nároky, ale také estetické.



The screenshot shows a digital interface for an e-manuel. At the top, there is a navigation bar with tabs: "1. Od atomů po galaxie", "Motivace", "Výklad", "Cvičení", and "Praktika". Below this, a secondary bar contains "Vědecká metoda", "Struktura hmoty", "Vesmír", and "Vědecký zápis čísel". The main content area features a historical painting of Alessandro Volta presenting his electric battery to Napoleon Bonaparte. Below the painting is a caption: "1.11 - Alessandro Volta představuje svůj elektrický článek Napoleonovi." and a small "Zdroj" link. A red upward-pointing arrow icon is visible in the bottom right corner of the interface.

*V čem je e-manuel opravdu jiný než klasická česká učebnice fyziky?*

Tomáš: Především svou koncepcí. Nečekejte stejné členění kapitol jako v běžných učebnicích. I když v některých částech je výklad poměrně klasický, ovlivnění francouzskou a anglickou literaturou je poměrně silné.

Mírek: Ano, moc se nám líbí motivační a přípravné aktivity. Menší experimenty, krátké články, které vás uvedou do tématu dané kapitoly.

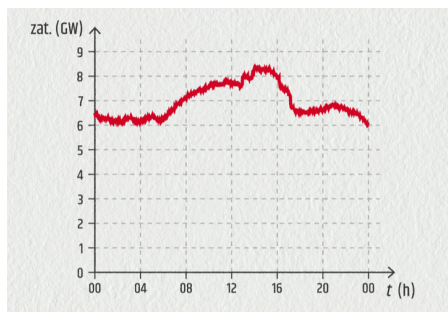
Vojta: A nezapomeň na praktika. Každá kapitola obsahuje prověřené návody na žákovské laboratorní experimenty. Všechny vycházejí z naší kantorské praxe a jsou prověřeny.

Mírek: Velká odlišnost od českých učebnic je také v tom, že se k jednomu tématu, třeba k mechanice nebo elektřině, vrátíme v průběhu celého cyklu vícekrát. Učení je pestřejší, protože střídáme témata a vracíme se k nim s lepšími matematickými nástroji. To mi vždycky na francouzském programu vyhovovalo. Tam je to krásně vyladěné!

*Při práci s učebnicí velmi oceňuji grafy, které jsou přehledné a velmi názorné. Z jakých zdrojů jste vycházeli?*

Mírek: Veškeré číselné hodnoty, ať už se jedná o ukázkou ve výkladu nebo v praktickém cvičení vycházejí z reálných hodnot naměřených přímo učiteli nebo odborníky ve vědecké praxi, pokud to neumožňuje technické vybavení školní laboratoře. Nesnáším, když mám s žáky zkoumat jev, jehož znázorněním je lineární funkce a všechny naměřené body leží na proložené přímce. Měřil ten autor někdy se studenty?!

Vojta: (smích)



20.35 – Zatížení elektrické sítě ČR v typickém všedním dni.

*Jak dlouho trvala samotná tvorba a je tento proces už ukončen?*

Tomáš: Samotná tvorba trvala tři roky, naše práce byla podpořena grantem ministerstva školství. To nám umožnilo zaplatit externí odborné pracovníky: grafiky, programátora, fotografa, ...

Vojta: Velmi nás bavilo vymýšlení videí na úvod kapitol. Mají zaujmout, navnadit ke studiu daného tématu. Naše role byla určit směr a pak jsme tvorbu této části svěřili zkušeným tvůrcům z Masarykovy univerzity.



## RECENZE

Mirek: Nezapomínejte, že jsme koncept měli napsaný již asi osm let před vlastní tvorbou. Celou tu dobu jsme marně sháněli financování! V okamžiku, když jsme to vzdali a chtěli psát „do šuplíku“, nás ještě popostrčil kolega ze školy, abychom zkusili další grant. Ten vyšel a my se mohli věnovat především tvorbě fyzikálního obsahu.

Tomáš: Ano, máš pravdu. Mohli jsme tak rovnou začít pracovat na našich kapitolách.

*Jste spokojeni jako autoři se svým dílem? Resp. udělali byste dnes něco v učebnici jinak?*

Mirek: Já ano. Jsem rád, že jsme ji dotáhli do úspěšného konce a že dnes, kdy po několika letech opět učím v češtině, ji mohu naplno používat. Občas dokonce myslím, že bychom ji měli přeložit do francouzštiny.

Vojta: To by se nám dost hodilo, ale kde na to najít čas?

Tomáš: Dali jsme si od tvorby trochu pauzu, s učebnicí pracujeme a sbíráme nápady, jak ji upravit, co změnit. Většinou jde o drobnosti, které lze snadno opravit. Co bychom dnes udělali jinak? Možná jsme měli více zkrátit vlastní výkladový text. Jako autoři jsme se nedokázali vyrovnat s tím, že na netu se čte trochu jinak než na papíře. Kratší výklad by učebnici asi slušel více.

*Máte nějaké vize, co bude s učebnicí dál?*

Vojta: Chtěli bychom ji především udržet ve formě. Aby byla neustále dobře dostupná, o problémech s načítáním víme a snažíme se to vyřešit. Musí být stále aktuální, odpovídat našemu poznání, takže když uvidíme, že něco nevyhovuje, můžeme to změnit. Elektronická verze nám to dobře umožňuje.

Tomáš: Celá učebnice pokrývá tříletý základní cyklus fyziky pro střední školu. Máme pár nápadů na témata, která by slušela výběrovému semináři pro studenty, kteří se rozhodnou z fyziky maturovat nebo třeba ji studovat na vysoké škole. Uvidíme, zda si na ni najdeme čas. Chuť by byla.

Mirek: Já bych si přál ještě více propojit fyziku s matematikou. Aby program výuky matematiky a fyziky na střední škole na sebe co nejvíce navazovaly, respektovaly se. Matematika je pro nás fyziky nástrojem ke zkoumání něčeho krásného. Nemohu však ať už v matematice nebo ve fyzice předbíhat myšlení žáků. Pro některé matematické koncepty prostě musí dospět.

Vydává Jednota českých matematiků a fyziků  
tel.: 222 090 708-9, e-mail: jcmf@math.cas.cz  
za podpory MFF UK Praha a FJFI ČVUT Praha



Vycházejí 4 čísla v kalendářním roce

Obálku navrhl Bohuslav Šír

Sazbu programem  $\text{\TeX}$  připravil RNDr. Miloslav Závodný

Adresa redakce: MFF UK, V Holešovičkách 2, 182 00 Praha 8–Troja  
e-mail: rozhledy@jcmf.cz

Internetové stránky časopisu: <https://rozhledy.jcmf.cz/>

Vytiskla Tiskárna Matula, Olomoucká 27, 618 00 Brno

Distribuci pro předplatitele provádí v zastoupení vydavatele  
MediaCall, s. r. o.

Vídeňská 546/55, 639 00 Brno

tel.: +420 532 165 165, e-mail: [export@mediacall.cz](mailto:export@mediacall.cz)

web: [www.zahranicnitisk.com](http://www.zahranicnitisk.com)

ISSN 0035-9343

MK ČR E4691

© Jednota českých matematiků a fyziků, Praha 2024

---

## Redakční rada

Vedoucí redaktorka:

doc. Ing. Lubomíra Dvořáková, Ph.D., FJFI ČVUT Praha

Redaktorka pro matematiku:

doc. Ing. Lubomíra Dvořáková, Ph.D., FJFI ČVUT Praha

Redaktor pro fyziku:

RNDr. Věra Krajčová, Ph.D., FJFI ČVUT Praha

Členové redakční rady:

prof. RNDr. Vlastimil Dlab, DrSc., F.R.S.C., Praha

doc. RNDr. Zdeněk Drozd, Ph.D., MFF UK Praha

RNDr. Petr Hanuš, FSv ČVUT Praha

doc. RNDr. Jaroslav Hora, CSc., FPE ZČU Plzeň

prof. RNDr. Ivo Kraus, DrSc., FJFI ČVUT Praha

doc. RNDr. Jan Kříž, Ph.D., PřF UHK Hradec Králové

prof. RNDr. Miroslav Lávička, Ph.D., FAV ZČU Plzeň

RNDr. Pavel Pokorný, Ph.D., VŠCHT Praha

RNDr. Miroslav Randa, Ph.D., PdF ZČU Plzeň

RNDr. Filip Studnička, Ph.D., PřF UHK Hradec Králové

doc. RNDr. Jan Šlégr, Ph.D., PřF UHK Hradec Králové

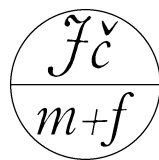
prof. RNDr. Pavel Tlustý, CSc., PedF JU České Budějovice

doc. RNDr. Pavel Töpfer, CSc., MFF UK Praha

RNDr. Vladimír Wagner, CSc., ÚJF AV ČR Řež



# ROZHLEDY matematicko-fyzikální Ročník 99 (2024), číslo 4



---

## OBSAH

D. Martišek: O jednom mýtickém trojúhelníku . . . . .	1
J. Fiala, M. Hrubešová, T. Roskovec: Některá využití harmonického průměru ve výuce fyziky a ve finančnictví a ekonomii . . . . .	16
P. Pokorný: Průměrná vzdálenost dvou bodů na kružnici . . . . .	28
V. Dlab: Poznámky o kombinačních číslech, posloupnostech (především aritmetických) a polynomech . . . . .	37
Matematické oříšky: Parita kombinačních čísel . . . . .	56
K. Rauner: Měříme Coriolisovu sílu ve výtahu a v letadle . . . . .	58
P. Pokorný: Coriolisova síla – její odvození . . . . .	63
V. Krajčová, J. Veselý: Proč umělé družice nepadají na Zemi. Anebo padají? . . . . .	65
V. Krajčová: E-MANUEL – online učebnice fyziky . . . . .	69

---

## Pokyny pro autory

Příspěvky dodávejte na adresu redakce v elektronické podobě. Nejlépe napsané ve formátu  $\LaTeX$ , přijatelný je i formát Plain $\TeX$ , je akceptovatelný i text připravený editorem Word či podobným.

Pokud jde o obrázky, je žádoucí, aby byly připraveny v reprodukovatelné podobě. Každý obrázek nechť je v samostatném souboru, nejlépe ve formátu pdf nebo eps. Přípustná je též bitmapa v dostatečném rozlišení.

Ke každému zasílanému příspěvku (ne u soutěží, zpráv a recenzí) přiložte krátkou anotaci v českém jazyce. Dále je žádoucí, aby u každého příspěvku byla uvedena literatura, na kterou je v textu odkazováno.