

ROZ HLEDY

MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ

ČASOPIS PRO ZÁJEMCE O MATEMATIKU, FYZIKU A INFORMATIKU

ROČNÍK 94 (2019) • ČÍSLO 1

Vydává Jednota českých matematiků a fyziků
tel.: 222 090 708-9, e-mail: jcmf@math.cas.cz
za podpory MFF UK Praha a FJFI ČVUT Praha



Vycházejí 4 čísla v kalendářním roce

Obálku navrhl Bohuslav Šír

Sazbu programem \TeX připravil RNDr. Miloslav Závodný

Adresa redakce: MFF UK, V Holešovičkách 2, 182 00 Praha 8–Troja
e-mail: rozhledy@jcmf.cz

Internetové stránky časopisu: <http://www.jcmf.cz/casopisy.html>

Vytiskla Tiskárna Pohlline, Zálesí 1126/88, 142 00 Praha 4

Distribuci pro předplatitele provádí v zastoupení vydavatele
MYRIS TRADE, s. r. o.

Budova A, 3. patro, Tůrkova 828/20, 149 00 Praha 4
tel.: 296 371 202, fax: 296 371 201, e-mail: myris@myris.cz

ISSN 0035-9343

MK ČR E4691

© Jednota českých matematiků a fyziků, Praha 2019

Redakční rada

Vedoucí redaktorka:

RNDr. Marie Snětinová, Ph.D., MFF UK Praha

Redaktorka pro matematiku:

doc. Ing. Lubomíra Dvořáková, Ph.D., FJFI ČVUT Praha

Redaktor pro fyziku:

doc. RNDr. Mgr. Vojtěch Žák, Ph.D., MFF UK Praha

Členové redakční rady:

doc. RNDr. Zdeněk Drozd, Ph.D., MFF UK Praha

RNDr. Petr Hanuš, FSv ČVUT Praha

doc. RNDr. Jaroslav Hora, CSc., FPE ZČU Plzeň

PhDr. Miroslava Jarešová, Ph.D., SPŠST a VOŠ Chrudim

prof. RNDr. Ivo Kraus, DrSc., FJFI ČVUT Praha

doc. RNDr. Jan Kříž, Ph.D., PřF UHK Hradec Králové

doc. RNDr. Miroslav Lávička, Ph.D., FAV ZČU Plzeň

RNDr. Miroslav Randa, Ph.D., PdF ZČU Plzeň

RNDr. Jan Šlégr, Ph.D., PřF UHK Hradec Králové

prof. RNDr. Pavel Tlustý, CSc., PedF JU České Budějovice

doc. RNDr. Pavel Töpfer, CSc., MFF UK Praha

prof. Ing. Bohumil Vybíral, CSc., PřF UHK Hradec Králové

RNDr. Vladimír Wagner, CSc., ÚJF AV ČR Řež

Slovo úvodem

Vážené čtenářky, vážení čtenáři,

v ruce držíte první číslo 94. ročníku časopisu *Rozhledy matematicko-fyzikální*.

Tento časopis vznikl již v roce 1921 a má tedy za sebou velmi dlouhou historii. Během jeho existence proběhla ve světě i u nás řada významných historických událostí. Časopis prošel druhou světovou válkou, přečkal i vpád vojsk Varšavské smlouvy v roce 1968 a následnou okupaci Československa. Žádná politická událost nedonutila vydavatele časopis zrušit. Ten tak vycházel pravidelně až do roku 2002, kdy byla jeho činnost na tři roky pozastavena. Od roku 2005 byl však časopis znovu obnoven a od té doby se mimo jiné věnuje i péči o talentované mladé lidi.

Během života časopisu se odehrála i spousta důležitých událostí na poli vědy a techniky. Vzpomeňme tedy ve zkratce alespoň tyto: V roce 1957 (mimochodem, od tohoto roku nese časopis dnešní název) odstartovala do vesmíru první lidmi vytvořená družice Sputnik. Tím pro lidstvo začala dlouhá cesta dobývání vesmíru. V letošním roce budeme slavit 50 let od úspěšné mise Apollo 11, kdy Neil Armstrong a Edwin Aldrin přistáli na povrchu Měsíce. Tento „obrovský skok pro lidstvo“ je však stále jen jedním z mnoha mezníků, ač skutečně obdivuhodným, kterých člověk na své cestě za poznáním prozatím dosáhl.

Není to samozřejmě jen fyzika, ve které jsme dosáhli obrovských úspěchů, ale i další vědecké obory. Časopis *Rozhledy* se zaměřuje na tři z nich – na fyziku, matematiku a informatiku. Zájemcům o tyto disciplíny přinášíme jak zajímavé poznatky z historie, tak i zprávy o nejnovějších objevech a událostech. Máte možnost rozšířit si své znalosti, dozvědět se o praktických aplikacích matematiky, fyziky i informatiky, nebo si přečíst rozhovory se zajímavými osobnostmi, které se těmto oborům věnují.

Je ohromující, že časopis, který poprvé vyšel v roce, kdy Albert Einstein získal Nobelovu cenu za fyziku, si i po téměř sto letech dokáže najít své příznivce. Pevně věřím, že tomu tak bude i nadále. My pro to uděláme maximum.

Za redakční radu: *Marie Snětinová (vedoucí redaktorka)*

Antipalindromická čísla

Ľubomíra Dvořáková, FJFI ČVUT, Praha

David Ryzák, MFF UK, Praha

Abstrakt. Každý zná jistě palindromy: slova, která se čtou stejně zepředu i pozpátku (např. krk, rotor, nepotopen). Palindromická čísla, tj. čísla, která mají palindromický zápis v nějaké přirozené bázi, jsou dobře matematicky prostudovaná. V článku představíme pojem antipalindromická čísla a poznatky o nich a porovnáme je s palindromickými čísly. Zejména vypíchneme překvapivý výsledek týkající se dělitelnosti a prvočísel mezi antipalindromickými čísly.

1. Palindromy pod lupou

Nikoho jistě nepřekvapí, že v přirozených jazycích obzvlášť dlouhé palindromy nenajdeme. Nejdelšími palindromickými slovy v češtině jsou příčestí typu ‚nepochopen‘, ‚nepotopen‘, ‚nezasazen‘, ‚nezařazen‘. V angličtině je nejdelším palindromickým slovem ‚tattarrattat‘. Jeho vítězství ovšem není zcela zaslužené, protože nejde o běžné slovo, nýbrž o fantazii Jamese Joyce, který ve svém románu *Odysseus* [1] použil tento neologismus k označení energického poklepání na dveře:

“I was just beginning to yawn with nerves thinking he was trying to make a fool of me when I knew his tattarrattat at the door.”

Zajímavější jsou pak palindromické věty. Palindromy z nich vzniknou, pokud zapomeneme na mezery mezi slovy, případně i na diakritiku. V češtině patří mezi nejznámější palindromické věty:

„Bažantu padá za záda putna žab.“

„Jelenovi pivo nelej.“

„Kobyła má malý bok.“

Ale zajímavé jsou i palindromy číselné, zvlášť když se k nim váže nějaké alespoň částečně doložené vysvětlení. Například s položením základního kamene Karlova mostu je spojován palindrom ze samých lichých cifer 135797531. Podle historika astronomie Zdeňka Horského mohl být

základní kámen položen 9. července 1357 v 5:31. V tu chvíli prý byla příznivá konstelace Slunce a Saturnu. Palindrom je tedy sestaven z údajů: rok–den–měsíc–hodina–minuty.

2. (Anti)palindromická čísla

Začneme formální definicí palindromického čísla a nově definujeme antipalindromické číslo.

Definice 1. Nechtě $b \in \mathbb{N}, b \geq 2$. Uvažujme přirozené číslo m , jehož zápis v bázi b má tvar

$$m = i_n b^n + \dots + i_1 b + i_0,$$

kde $i_0, i_1, \dots, i_n \in \{0, 1, \dots, b - 1\}$ a $i_n \neq 0$. Potom m nazveme

1. *palindromickým číslem* v bázi b , pokud cifry splňují podmínku:

$$i_j = i_{n-j} \quad \text{pro každé } j \in \{0, 1, \dots, n\}, \quad (1)$$

2. *antipalindromickým číslem* v bázi b , pokud cifry splňují podmínku:

$$i_j = b - 1 - i_{n-j} \quad \text{pro každé } j \in \{0, 1, \dots, n\}. \quad (2)$$

Říkáme, že přirozené číslo je *palindromické*, resp. *antipalindromické*, pokud existuje báze, v níž má tuto vlastnost.

Příklad 1. Uvažujme nyní různé báze b a podívejme se, jak vypadají antipalindromická čísla v těchto bázích:

- V bázi $b = 10$ je antipalindromickým číslem např. 395 406.
- V bázi $b = 3$ je antipalindromickým číslem např. $1\ 581 = (2011120)_3$.
- V bázi $b = 2$ je antipalindromickým číslem např. $52 = (110100)_2$.

Věta 1. *Pokud má antipalindromické číslo lichý počet cifer v bázi b , pak je b liché číslo. Navíc prostřední cifra má pak hodnotu $\frac{b-1}{2}$.*

Důkaz. Označme cifry uvažovaného antipalindromického čísla v bázi b jako i_0, i_1, \dots, i_{2n} . Podle definice antipalindromického čísla splňuje prostřední cifra i_n rovnost $2i_n = b - 1$. Z toho vyplývá, že cifra i_n je celé číslo jen pro b liché. Navíc platí $i_n = \frac{b-1}{2}$. \square

Věta 2. *Pokud je antipalindromické číslo v bázi b zároveň palindromickým v bázi b , pak je b liché číslo a všechny cifry jsou rovny $\frac{b-1}{2}$.*

Důkaz. Mějme antipalindromické číslo v bázi b s ciframi i_0, i_1, \dots, i_n . Aby bylo zároveň palindromickým, musí platit $i_j = i_{n-j}$ pro každé $j \in \{0, 1, \dots, n\}$. Z definice antipalindromického čísla zároveň plyne, že $i_j + i_{n-j} = b - 1$. Dostáváme tedy $i_j = \frac{b-1}{2}$ pro každé $j \in \{0, 1, \dots, n\}$, a báze b je tudíž nutně lichá. \square

2.1. Dělitelnost

V této kapitole připomeneme známý výsledek týkající se dělitelnosti palindromických čísel. Představíme nové výsledky pro dělitelnost antipalindromických čísel. Z těchto poznatků poté odvodíme, jak je to s výskytem prvočísel mezi palindromickými a antipalindromickými čísly.

2.1.1. Dělitelnost palindromických čísel

Věta 3. *Palindromické číslo se sudým počtem cifer v bázi b je dělitelné $b + 1$.*

Důkaz. Uvažujme palindromické číslo

$$m = i_n b^n + i_{n-1} b^{n-1} + \dots + i_1 b + i_0$$

pro lichá n . Můžeme spárovat jednotlivé dvojice

$$i_{n-j} b^{n-j} + i_j b^j = i_j (b^{n-j} + b^j),$$

protože definice palindromického čísla říká, že $i_{n-j} = i_j$. Díky sudému počtu cifer můžeme tímto způsobem spárovat všechny dvojice $i_{n-j} b^{n-j}$ a $i_j b^j$ pro $j \in \{0, 1, \dots, \frac{n-1}{2}\}$. Dokažme, že pro palindromické číslo upravené spárováním koeficientů platí

$$m = i_0 (b^n + 1) + i_1 (b^{n-1} + b) + \dots + i_k (b^{n-k} + b^k) \equiv 0 \pmod{b + 1},$$

kde $k = \frac{n-1}{2}$.

Všechny členy kongruence můžeme zapsat i jako $i_j b^j (b^{n-2j} + 1)$ pro $j \in \{0, 1, \dots, \frac{n-1}{2}\}$, a protože vždy $2j < n$, tak v každém členu kongruence najdeme člen $b^{n-2j} + 1$, kde $n - 2j \geq 1$. Zbývá tedy ukázat, že

$b^\ell + 1 \equiv 0 \pmod{b+1}$ pro lichá přirozená čísla ℓ , a to plyne ze známého vzorce pro rozklad:

$$b^\ell + 1 = (b+1)(b^{\ell-1} - b^{\ell-2} + \dots - b + 1) \equiv 0 \pmod{b+1}.$$

Tím je dokázáno, že $b+1$ je dělitelem palindromických čísel se sudým počtem cifer. \square

2.1.2. Dělitelnost antipalindromických čísel

V desítkové soustavě známe tvrzení, které říká, že přirozené číslo je dělitelné 9, právě když jeho ciferný součet je dělitelný 9. Zobecníme nyní toto tvrzení pro soustavy s libovolným přirozeným základem b .

Lemma 4. *Nechť m je přirozené číslo a jeho zápis v bázi b je roven $i_n b^n + i_{n-1} b^{n-1} + \dots + i_1 b + i_0$. Potom m je dělitelné $b-1$, právě když jeho ciferný součet v bázi b je dělitelný $b-1$, tj. $(i_n + i_{n-1} + \dots + i_1 + i_0) \equiv 0 \pmod{b-1}$.*

Důkaz. Jelikož $b^\ell - 1 = (b-1)(b^{\ell-1} + b^{\ell-2} + \dots + b + 1)$, dostáváme kongruenci $b^\ell \equiv 1 \pmod{b-1}$ pro každé $\ell \in \{1, 2, \dots, n\}$. Z vlastností kongruencí pak plyne, že $i_\ell b^\ell \equiv i_\ell \pmod{b-1}$, tudíž také platí

$$i_n b^n + i_{n-1} b^{n-1} + \dots + i_1 b + i_0 \equiv i_n + i_{n-1} + \dots + i_1 + i_0 \pmod{b-1}.$$

\square

Věta 5. *Antipalindromické číslo se sudým počtem cifer v bázi b je dělitelné číslem $b-1$.*

Důkaz. Uvažujme antipalindromické číslo

$$m = i_n b^n + i_{n-1} b^{n-1} + \dots + i_1 b + i_0$$

pro liché n . Podle lemmatu 4 máme kongruenci

$$i_n b^n + i_{n-1} b^{n-1} + \dots + i_1 b + i_0 \equiv i_n + i_{n-1} + \dots + i_1 + i_0 \pmod{b-1}.$$

Podle definice antipalindromického čísla platí $i_{n-j} + i_j = b-1$ pro každé $j \in \{0, 1, \dots, n\}$. Ze sudého počtu cifer pak plyne

$$i_n + i_{n-1} + \dots + i_1 + i_0 = (b-1) \frac{n+1}{2} \equiv 0 \pmod{b-1},$$

tudíž antipalindromické číslo m je dělitelné číslem $b-1$. \square

Věta 6. *Antipalindromické číslo s lichým počtem cifer v bázi b je dělitelné číslem $\frac{b-1}{2}$.*

Důkaz. Uvažujme antipalindromické číslo

$$m = i_{2n}b^{2n} + i_{2n-1}b^{2n-1} + \dots + i_1b + i_0.$$

Z definice antipalindromického čísla s lichým počtem cifer vyplývá, že všechny cifry kromě prostřední i_n lze spárovat $i_{2n} + i_0, i_{2n-1} + i_1, \dots, i_{n+1} + i_{n-1}$ vždy se součtem $b - 1$. Ciferný součet čísla $m - i_nb^n$ je tedy dělitelný číslem $b - 1$, a tedy podle lemmatu 4 je také přímo $m - i_nb^n$ dělitelné číslem $b - 1$, a tudíž samozřejmě i číslem $\frac{b-1}{2}$. Jelikož prostřední cifra podle věty 1 splňuje $i_n = \frac{b-1}{2}$, dozvěděli jsme se zatím, že číslo $m - \frac{b-1}{2}b^n$ je dělitelné $\frac{b-1}{2}$. Tím je dokázáno, že také antipalindromické číslo m je dělitelné číslem $\frac{b-1}{2}$. \square

2.1.3. Prvočísla mezi palindromickými a antipalindromickými čísly

Dělitelnost a prvočísla spolu úzce souvisí. Pojdme se tedy podívat, jak to s nimi vypadá mezi palindromickými a antipalindromickými čísly. Z věty 3 víme, že palindromická čísla se sudým počtem cifer v bázi b jsou dělitelná číslem $b + 1$. Proto nejsou prvočísla s výjimkou případu, kdy $b + 1$ je prvočíslo a 11 je pak jeho příslušný palindromický zápis (se sudým počtem cifer) v bázi b .

Palindromických prvočísel můžeme najít spoustu v naší desítkové soustavě, např. 101, 131, 353, 757, \dots , viz posloupnost A002385 v OEIS [3]. Nejvyšší dosud známé palindromické prvočíslo v bázi 10 je $10^{474500} + 999 \cdot 10^{237249} + 1$. Zda existuje nekonečně mnoho palindromických prvočísel není známé. Ví se ovšem, že např. Mersennova a Fermatova prvočísla¹⁾ jsou palindromická v bázi 2. Pokud tedy existuje nekonečně mnoho Mersennových či Fermatových prvočísel, pak je i nekonečně mnoho palindromických prvočísel. Ale i v jiných bázích b není složité palindromická prvočísla najít, např.

$$(111)_8 = 73,$$

$$(212)_3 = 23,$$

$$(B222B)_{16} = 729\,643.$$

¹⁾Mersennova prvočísla jsou tvaru $2^p - 1$, kde p je nutně prvočíslo. Fermatova prvočísla jsou tvaru $2^{2^n} + 1$.

Zatímco palindromická prvočísla existují v různých bázích, antipalindromická prvočísla se vyskytují vzácně. Rozebereme tři případy v závislosti na hodnotě báze b .

Báze $b > 3$

Věta 7. *Nechť je dána báze $b > 3$.*

- *Pak existuje maximálně jedno antipalindromické prvočíslo p v bázi b splňující $p < b$, a to $p = \frac{b-1}{2}$.*
- *Antipalindromické prvočíslo p v bázi b splňující $p \geq b$ neexistuje.*

Důkaz.

- Jelikož cifry v soustavě o základu b mají hodnoty od 0 do $b - 1$, má každé číslo $p < b$ jednociferný zápis v bázi b . Jediné jednociferné antipalindromické číslo v bázi b je číslo $\frac{b-1}{2}$, viz věta 1. Odtud již plyne první tvrzení věty.
- Druhé tvrzení plyne z dělitelnosti antipalindromických čísel (věty 5 a 6). □

Báze $b = 2$

Věta 8. *V bázi 2 existuje jediné antipalindromické prvočíslo p , a to $p = 2$ se zápisem 10.*

Důkaz. Z definice antipalindromického čísla vyplývá, že poslední cifra jeho zápisu v bázi 2 bude 0. Každé antipalindromické číslo má tedy zápis tvaru $2^n + i_{n-1}2^{n-1} + \dots + i_12$, tudíž je dělitelné dvěma. Jediné takové prvočíslo je 2. □

Báze $b = 3$

Věta 9. *V bázi $b = 3$ existují antipalindromická prvočísla. Nutně mají lichý počet cifer a navíc minimálně tři cifry. Nejmenším takovým antipalindromickým prvočíslem je číslo 13.*

Důkaz. O bázi 3 víme z věty 5, že antipalindromická čísla se sudým počtem cifer v této bázi jsou dělitelná dvěma. Pro antipalindromická čísla s lichým počtem cifer plyne z věty 6 pouze triviální fakt, že jsou dělitelná číslem 1, a tak všechna antipalindromická prvočísla v bázi 3 mají lichý počet cifer. Jediné jednociferné antipalindromické číslo v bázi 3 je číslo 1. Pro všechna antipalindromická prvočísla v bázi $b = 3$ tak platí, že mají

MATEMATIKA

alespoň tři cifry a prostřední cifra je rovna jedné. Nejmenším takovým antipalindromickým prvočíslem v bázi 3 je tudíž číslo 13 se zápisem 111. \square

Kolik antipalindromických prvočísel v bázi $b = 3$ existuje? To je otázka, na kterou bohužel neznáme odpověď. Uvedeme alespoň, co bližšího lze říci o jejich tvaru.

Lemma 10. *Antipalindromická čísla v bázi 3 začínající cifrou 2 jsou dělitelná číslem 3.*

Důkaz. Mějme antipalindromické číslo

$$m = i_n 3^n + i_{n-1} 3^{n-1} + \cdots + i_1 3 + i_0,$$

přičemž $i_n = 2$. Jelikož $i_n + i_0 = 2$, musí být $i_0 = 0$. Odtud již plyne dělitelnost m číslem 3. \square

Věta 11. *Všechna antipalindromická prvočísla v bázi 3 jsou ve tvaru $6k + 1$, kde $k \in \mathbb{N}$.*

Důkaz. Uvažujme antipalindromické prvočísla

$$m = i_{2n} 3^{2n} + i_{2n-1} 3^{2n-1} + \cdots + i_1 3 + i_0$$

(počet cifer je nutně lichý podle věty 9). Podle lemmatu 10 je $i_{2n} = 1$ a $i_0 = 1$ a z věty 1 vyplývá, že $i_n = 1$. Spárujme spolu jednotlivé členy antipalindromického čísla m (kromě i_0, i_n, i_{2n}): $i_{2n-j} 3^{2n-j} + i_j 3^j$, $j \in \{1, \dots, n-1\}$. Dokažme, že pro každé $j \in \{1, \dots, n-1\}$ existuje $s \in \mathbb{N}$ splňující

$$3^j (i_{2n-j} 3^{2n-2j} + i_j) = 6s.$$

V závorce můžeme předpokládat pouze 3 možnosti pro cifry: $i_{2n-j} = 2$, $i_j = 0$, nebo $i_{2n-j} = i_j = 1$, nebo $i_{2n-j} = 0$, $i_j = 2$. Ve všech těchto případech rovnost platí, protože v závorce bude sudé číslo. Dostáváme proto rovnost

$$\begin{aligned} m &= i_{2n} 3^{2n} + i_n 3^n + i_0 + 6\ell \\ &= 3^{2n} + 3^n + 1 + 6\ell \\ &= 3^n (3^n + 1) + 1 + 6\ell \end{aligned}$$

pro nějaké nezáporné celé číslo ℓ . Odtud je vidět, že m je skutečně tvaru $6k + 1$ pro nějaké přirozené k . \square

3. Další vlastnosti antipalindromických čísel

V článku jsme definovali antipalindromická čísla v přirozené bázi a zkoumali jejich dělitelnost. Zajímavý byl výsledek, který říká, že v každé přirozené bázi různé od tří existuje maximálně jedno antipalindromické prvočíslo. Tento výsledek je překvapivý ve srovnání s palindromickými čísly, pro která není těžké nacházet palindromická prvočísla v různých bázích. Tento článek vznikl na základě středoškolské odborné činnosti [2]. Výsledky, které jsme odvodili, ale v článku je neuvádíme, zahrnují počet antipalindromických čísel po nějakou mez, mezery mezi sousedními antipalindromickými čísly, jednoduchý vzorec pro pořadí antipalindromických čísel, výskyty palindromických mezi antipalindromickými čísly a naopak, mocniny mezi antipalindromickými čísly.

4. Úlohy pro čtenáře

Pokud čtenáře naše hrátky se zápisem čísel zaujaly a chtěl by si sám vyzkoušet něco podobného, může dokázat některé vlastnosti duhových čísel. Za nápad zkoumat duhová čísla děkujeme Josefu Tkadlecovi.

Definice 2. Nechť $b \in \mathbb{N}, b \geq 2$. Přirozené číslo m , jehož zápis v bázi b obsahuje každou cifru od 1 do $b - 1$ právě jednou a neobsahuje cifru 0, nazveme *duhové* v bázi b . Přirozené číslo nazveme *duhové*, pokud existuje báze, v níž je duhové.

Příklad 2. Uvažujme nyní různé báze b a podívejme se, jak vypadají duhová čísla v těchto bázích:

- V bázi $b = 10$ je duhovým číslem např. 123 456 789.
- V bázi $b = 2$ je jediným duhovým číslem 1.
- V bázi $b = 3$ je duhovým číslem např. $5 = (12)_3$ nebo $7 = (21)_3$.

Úlohy pro čtenáře:

1. Najděte všechna duhová prvočísla. Odpověď 5 a 7.
2. Najděte největšího společného dělitele všech duhových čísel v bázi 10. Odpověď 9.
3. Určete nejmenší a největší mezeru mezi sousedními duhovými čísly v bázi 10. (Duhová čísla m a n v bázi 10, $m < n$, jsou sousedy, pokud neexistuje duhové číslo k v bázi 10 splňující $m < k < n$.) Odpověď 9 a 14 691 357.

Chcete-li si své řešení nechat zkontrolovat, pošlete je na emailovou adresu autorky: lubomira.dvorakova@fjfi.cvut.cz

Literatura

- [1] Joyce, J.: *Ulysses*. Sylvia Beach's Shakespeare and Company, Paris, 1922.
- [2] Ryzák, D.: *Antipalindromy*. SOČ práce, obor Matematika a statistika, roč. 40 (2018),
dostupné z: <http://www.soc.cz/archiv-minulych-rocniku/>
- [3] on-line encyclopedia of integer sequences: <https://oeis.org/A002385>

Lékařské testy individuální a skupinové

Jan Vybíral, FJFI ČVUT, Praha

Abstrakt. Lékařské testy zná z běžného života každý z nás. Díky jejich nedokonalosti – vyjádřené pojmy senzitivita a specificita – se jejich vyhodnocení neobejde bez pojmů z elementární statistiky. Metoda skupinových testů (*group testing*), vyvinutá během druhé světové války, je oproti tomu stále aktivní pole vědeckého zájmu; původní článek Roberta Dorfmana z roku 1943 zaznamenává stále přes čtyřicet citací ročně. V této práci se pokusíme seznámit čtenáře se základy tohoto oboru, a to včetně teoretických i praktických cvičení.

1. Klasické lékařské testy

Diagnostika nemocí je prováděna lékařskými testy. Reálné testy ale nejsou ideální – ideální test by každého nemocného označil za nemocného a každého zdravého za zdravého. U každého v praxi používaného testu je tedy možné, že zdravý jedinec bude bohužel označen za nemocného (tzv. falešná pozitivita) nebo že nemocný jedinec bude označen za zdravého (tzv. falešná negativita).

Senzitivitou testu (neboli citlivostí testu) se nazývá pravděpodobnost, že nemocný pacient bude označen jako nemocný. Specificita testu je naopak pravděpodobnost, že zdravý jedinec bude označen za zdravého. Ideální test by tedy měl mít senzitivitu i specificitu rovnu jedné.

Cvičení 1.

1. (Hypotetický) test na rakovinu plic má senzitivitu 95 % a specificitu 98 %. Interpretujte tyto dva údaje.
2. Přibližně 1,5 % mužů ve věku 50 let trpí rakovinou plic. Jaká je pravděpodobnost, že padesátiletý muž s pozitivním testem na rakovinu plic jí opravdu trpí?
3. V populaci žen ve věku 50 let je zastoupení nemocných s rakovinou plic nižší, asi 0,5 %. Jaká je v tomto případě pravděpodobnost, že padesátiletá žena s pozitivním testem opravdu trpí rakovinou plic?
4. Je známo několik tisíc nemocí, které se vyskytují jen zřídka (tzv. vzácná onemocnění) a které postihují méně než 0,05 % populace (tedy nejvýše jednu ze dvou tisíc osob). Předpokládejme, že nějaká vzácná nemoc postihuje „jen“ 0,02 % populace a že testy na tuto nemoc mají stejné parametry (tedy senzitivitu i specificitu) jako výše. Jaká je nyní pravděpodobnost, že pozitivně testovaná osoba touto nemocí opravdu trpí?

Simpsonův paradox¹⁾ upozorňuje na jeden jednoduchý efekt, který může snadno vést ke špatné interpretaci dat z klinických testů (a ostatně i jakýchkoliv jiných dat). Řekněme, že ledvinové kameny je možné léčit dvěma způsoby – postup A zahrnuje všechny druhy operací, tedy složité invazivní zákroky. Postup B spočívá v mnohem šetrnější terapii punkcí. Při jednom klinickém testu ([1]) byly sledovány různé případy pacientů s ledvinovými kameny (rozdělené do dvou skupin podle velikosti – malé a velké) a úspěšnost jednotlivých metod. Léčba A byla úspěšná v 81 z 87 případů léčby malých kamenů a v 192 z 263 v léčbě velkých kamenů. U léčby B byla tato úspěšnost 234 z 270 u malých kamenů a 55 z 80 u velkých kamenů. Protože

$$93 \% \doteq \frac{81}{87} > \frac{234}{270} \doteq 87 \% \quad \text{a} \quad 73 \% \doteq \frac{192}{263} > \frac{55}{80} \doteq 69 \%,$$

zdá se být léčba A úspěšnější jak pro léčbu malých, tak léčbu velkých kamenů. Protože ale

$$78 \% = \frac{81 + 192}{87 + 263} < \frac{234 + 55}{270 + 80} \doteq 83 \%,$$

¹⁾Nejedná se o Homera Simpsona, ale o Edwarda Hugha Simpsona.

zdá se být léčba B paradoxně úspěšnější v léčbě ledvinových kamenů bez ohledu na velikost.

Rozdíl je samozřejmě dán tím, že méně invazivní metoda byla často volena pro léčbu malých kamenů, kde jsou ale obě metody podstatně úspěšnější než při léčbě velkých kamenů. Ať jde o malé nebo velké kameny, je podle těchto dat úspěšnější metoda A. Přesvědčení, že celkově je lepší metoda B, není správné. Sčítat počty úspěchů u různě závažných případů ($81 + 192$, resp. $234 + 55$) je zavádějící.

2. Skupinové testy

V průběhu druhé světové války se americká armáda potýkala s doslova delikátním problémem (popsaným v [2]). Bylo zapotřebí podrobit lékařským testům velký počet vojáků.²⁾ Teoreticky sice stačilo každému vojáku odebrat vzorek krve a otestovat každý vzorek zvlášť, ale tyto testy byly finančně nákladné a v daném množství nerealizovatelné. Navíc se dalo předpokládat, že nemocných vojáků bude jen mizivé procento ze všech testovaných. Tak vznikla metoda skupinového testování, tzv. *group testing*.

Uvažujme skupinu N jedinců (tedy oněch vojáků), které je třeba otestovat. Někteří z nich jsou zdraví, někteří nemocní. Pokud si je nějakým způsobem seřadíme (např. podle abecedy), tak jejich zdravotní stav je možné popsat posloupností Z , která má N nul a jedniček. Tedy např. pokud $N = 5$ a $Z = (0, 1, 0, 0, 1)$, tak druhý a pátý voják jsou nakaženi, ostatní jsou zdraví. Posloupnost Z na začátku testování neznáme a testováním ji chceme přesně určit. Pro jednoduchost budeme v této části předpokládat, že prováděné testy jsou ideální, tedy že senzitivita i specifita testů je rovna jedné.

Metoda skupinového testování je založena na nápadu, kdy vybereme nějakou podskupinu vojáků, smícháme jejich vzorky (nebo alespoň části jejich vzorků) a otestujeme tuto směs. Pokud jsou testy dostatečně senzitivní, tak bude možné tímto způsobem zjistit, zda alespoň jeden z vojáků dané podskupiny byl nakažen. Tím tedy můžeme “otestovat” hned několik vojáků najednou; při negativním testu budeme vědět, že jsou všichni zdraví, ale při pozitivním testu se pouze dozvíme, že některý z nich byl nakažený. Nebude tedy možné s jistotou říct, který z nich byl nakažen. To bude možné přesně říct až po dalších testech.

²⁾V naší úloze to nebude hrát žádnou roli, ale není důvod zapírat, že hledanou nemocí byl syfilis.

Cvičení 2.

1. Předpokládejme, že předem víme, že z dané skupiny N vojáků je nejvýše jeden nakažený. Jak máme volit výběr podskupin, abychom s co nejmenším počtem testů zjistili, který (pokud vůbec nějaký) je nakažený?
2. Je vámi nalezený postup optimální (tj. je počet testů skutečně minimální)?

Tento postup lze sice zobecnit, i pokud víme, že počet nakažených vojáků je nejvýše k , kde $k \geq 1$, navržená metoda má ale jednu zásadní nevýhodu. Tou je neúměrná velikost vybraných podskupin – až $N/2$. To klade nerealistické nároky na senzitivitu testů. Jedno z možných řešení tohoto problému je dáno poněkud překvapivým přístupem, kdy členy testované podskupiny vybereme náhodně.

Zvolme tedy nejprve reálný parametr $0 < p < 1$ a vyberme do testované skupiny každého vojáka s pravděpodobností p . Matematicky můžeme tento postup modelovat pomocí nezávislých náhodných proměnných x_i , $1 \leq i \leq N$,

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{s pravděpodobností } p, \\ 0 & \text{s pravděpodobností } 1 - p. \end{cases}$$

Pokud $x_i = 1$, tak i -tý voják bude do výběru zařazen; pokud $x_i = 0$, do výběru zařazen nebude.

Cvičení 3.

1. Jaký je průměrný počet vojáků zařazených do testovacího vzorku?
2. Jaká je pravděpodobnost, že vybraných vojáků bude více (nebo méně) než n , kde n je nějaké přirozené číslo mezi 1 a N ?
3. Jaký je rozptyl počtu vybraných vojáků?
4. Pro $N = 10^5$ a $p = 0,01$ udělejte histogram počtu náhodně vybraných vojáků při $R = 1$, $R = 10^3$, $R = 10^5$ a $R = 10^7$ nezávislých opakováních výběru. Porovnejte tyto výsledky vzájemně a s vypočtenou pravděpodobností.

Celé testování velkého počtu vojáků samozřejmě nebude možné provést jedním výběrem a jedním testem, jak jsme ostatně viděli už ve cvičení 2. Proces výběru a testování tedy bude nutné několikrát opakovat – počet těchto opakování označme přirozeným číslem m . Celý test

N vojáků proběhne tedy odběrem vzorků všech vojáků a výběrem m podskupin, jejichž vzorky budou smíchány a otestovány. Nakonec bude naším úkolem navrhnout algoritmus, který zkombinuje informaci o výběrech a jejich výsledcích a rozhodne, které vojáky test označí za nakažené a které za zdravé.

Cvičení 4.

1. Navrhněte matematické označení pro výběr m testovacích skupin.
2. Do kolika testovacích vzorků bude každý voják v průměru zařazen?
3. Pokud nějaký voják nebude nikdy vybrán, nebude z výsledků testů nikdy možné určit, zda byl, nebo nebyl nakažen. Jaká je pravděpodobnost, že jeden pevně zvolený voják nebude nikdy vybrán?
4. Jaká je pravděpodobnost, že alespoň jeden z vojáků nebude zařazen do žádného výběru?

Poté, co provedeme m výběrů a testů, musíme rozhodnout, který z vojáků je či není nakažený. Navržený algoritmus je velice jednoduchý: Voják bude celým testovacím procesem označen za nakaženého, pokud všechny testy, do nichž byl vybrán, vyjdou pozitivně.³⁾

Cvičení 5.

1. Jaká je pravděpodobnost, že navržený testovací postup s parametry k, m, N, p funguje korektně, tedy že pro každého vojáka bylo správně určeno, zda je, či není nakažený?
2. Pro dané $\varepsilon > 0$ určete, kolik opakování testu bude stačit provést, má-li být pravděpodobnost úspěchu celého algoritmu větší než $1 - \varepsilon$.
3. Výsledek ověřte numerickou simulací – pro $N = 100\,000$, $k = 20$, $p = 0,02$ a různá m zjistěte empirickou pravděpodobnost, jak často bude s těmito parametry daný test úspěšný.

3. Návod y a řešení

V této sekci naznačíme možné postupy řešení úloh a cvičení.

³⁾V souladu s obvyklou konvencí, kdy prázdný obecný kvantifikátor je pravdivý, bude voják, který nebyl zařazen do žádného výběru, označen také za nakaženého.

Cvičení 1:

1. Test odhalí nemocného pacienta s pravděpodobností 95 % a zdravého jedince neoznačí jako nemocného s pravděpodobností 98 %.
2. Úlohu lze řešit (alespoň) dvěma, navzájem ovšem podobnými způsoby.
 - a) Nemocných mužů daného věku je 1,5 % a 95 % z nich má pozitivní test. Celkem trpí tedy $0,95 \cdot 0,015 = 0,01425$, tj. 1,425 % mužů ve věku 50 let rakovinou plic a má i pozitivní test. Naopak, zdravých mužů je 98,5 % a 2 % z nich mají pozitivní test. Tedy $0,985 \cdot 0,02 = 0,0197$, tj. 1,97 % mužů daného věku má pozitivní test, ale rakovinou plic netrpí. Celkem má tedy 3,395 % všech padesátiletých mužů pozitivní test. Ze všech mužů s pozitivním testem jich ale rakovinou plic trpí pouze $1,425/3,395 \doteq 0,42 = 42$ %. Hledaná pravděpodobnost je tedy 42 %.
 - b) Úlohu lze řešit také použitím pojmu podmíněné pravděpodobnosti. Máme-li dva jevy A a B , pak pravděpodobnost, že nastane A , pokud nastává B , označíme

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Tuto definici je možné použít, jen pokud $P(B) > 0$. Podmíněná pravděpodobnost tedy udává, v kolika procentech případů nastává jev A , uvažujeme-li celkově jen případy, kdy už víme, že nastává jev B .

Označme X zdravotní stav padesátiletého muže. Tedy $X = 1$, pokud má daný muž rakovinu plic, a $X = 0$, pokud je zdravý. V případě, že testy provádíme na náhodně vybraných mužích z celé populace⁴⁾, můžeme ztotožnit X s náhodnou proměnnou, pro kterou platí $P(X = 1) = \pi = 0,015$ a $P(X = 0) = 1 - \pi = 0,985$. Dále označíme T výsledek testu padesátiletého muže, tedy $T = 1$, pokud je testovaný muž testem označen za nemocného (tj. test je pozitivní), a $T = 0$, pokud test je negativní. I veličinu T tedy můžeme interpretovat jako náhodnou proměnnou, která ale není

⁴⁾Tento předpoklad není téměř nikdy splněn dokonale – obvykle jsou testování lidé podle nějakého klíče či předvýběru; například proto, že u nich existuje podezření na danou nemoc, nebo proto, že se přihlásili do klinické studie.

nezávislá na X . Parametry testu lze pomocí tohoto označení přepsat jako

$$P(T = 1|X = 1) = \frac{P(T = 1 \& X = 1)}{P(X = 1)} = p = 0,95,$$

$$P(T = 0|X = 0) = \frac{P(T = 0 \& X = 0)}{P(X = 0)} = q = 0,98.$$

Úlohou je poté spočítat $P(X = 1|T = 1)$. Nejprve ovšem vypočteme (srovnejte s předcházejícím postupem!)

$$P(T = 1 \& X = 1) = \frac{P(T = 1 \& X = 1)}{P(X = 1)} \cdot P(X = 1) = p\pi$$

a z $P(X = 0) = P(X = 0 \& T = 0) + P(X = 0 \& T = 1)$ obdržíme

$$\begin{aligned} P(T = 1 \& X = 0) &= P(X = 0) - P(T = 0 \& X = 0) = \\ &= 1 - \pi - \frac{P(T = 0 \& X = 0)}{P(X = 0)}P(X = 0) = \\ &= 1 - \pi - (1 - \pi)q = (1 - \pi)(1 - q). \end{aligned}$$

Tyto vztahy použijeme k finálnímu výpočtu:

$$\begin{aligned} P(X = 1|T = 1) &= \frac{P(X = 1 \& T = 1)}{P(T = 1)} = \frac{p\pi}{P(T = 1)} = \\ &= \frac{p\pi}{P(T = 1 \& X = 1) + P(T = 1 \& X = 0)} = \\ &= \frac{p\pi}{p\pi + (1 - q)(1 - \pi)}. \end{aligned}$$

Dosazení $\pi = 0,015$, $p = 0,95$ a $q = 0,98$ dává opět 42 %.

3. Dosazení $\pi = 0,005$, $p = 0,95$ a $q = 0,98$ dává 19,3 %. Padesátiletá žena s pozitivním testem trpí tedy rakovinou plic s pravděpodobností 19,3 %.
4. Pro $\pi = 0,0002$, $p = 0,95$ a $q = 0,98$ dostaneme 0,94 %, tedy méně než jedno procento.

Na závěr ještě jedno varování k interpretaci výsledků tohoto cvičení. Navržené výpočty jsou správné za předpokladu, že testy byly prováděny osobám náhodně vybraným z celé populace, tedy při plošném screeningu. Rakovinové (i jiné) testy jsou ale obvykle prováděny především těm, u kterých existuje nějaké podezření. Celkově vzato bude tedy pravděpodobnost, že daná osoba při pozitivním testu danou nemocí opravdu trpí, asi vyšší než uvádějí předchozí cvičení.

Cvičení 2: Metodou půlení intervalu lze najít potenciálního nakaženého při $\lceil \log_2(N) \rceil$ testech. Pokud ale provedeme testů méně, tak bude buď existovat voják, který nebyl zařazen ani do jedné testovací skupiny, nebo budou existovat dva vojáci, kteří budou při každém testu testováni společně. Pokud je tedy nakažený jen jeden z nich, menší počet testů nebude stačit.

Cvičení 3:

1. Střední hodnotu počtu vybraných vojáků lze spočítat různými způsoby. Každá z náhodných proměnných x_1, \dots, x_N má střední hodnotu

$$1 \cdot p + 0 \cdot (1 - p) = p.$$

Počet vybraných vojáků je dán součtem $x_1 + \dots + x_N$ a jeho průměrná hodnota je součtem průměrných hodnot, tedy pN .

Druhý způsob využívá binomické věty a definice střední hodnoty – a je podstatně pracnější. Nejprve si uvědomíme, že pravděpodobnost, že vybraných vojáků bude právě l je

$$\binom{N}{l} p^l (1 - p)^{N-l} \quad \text{pro } l = 0, \dots, N.$$

Mimochodem, z binomické věty pak plyne, že

$$\sum_{l=0}^N \binom{N}{l} p^l (1 - p)^{N-l} = (p + (1 - p))^N = 1,$$

což odpovídá tomu, že vybraný počet vojáků musí být právě jedno celé číslo od nuly do N . Střední hodnota počtu vybraných vojáků je potom (podle definice) rovna

$$\begin{aligned} & \sum_{l=0}^N l \cdot P(\text{bylo vybráno právě } l \text{ vojáků}) = \\ &= \sum_{l=0}^N \binom{N}{l} p^l (1-p)^{N-l} \cdot l = \sum_{l=1}^N \frac{N!}{(l-1)!(N-l)!} p^l (1-p)^{N-l} = \\ &= pN \sum_{l=0}^{N-1} \binom{N-1}{l} p^l (1-p)^{N-l-1} = pN(p + (1-p))^{N-1} = pN. \end{aligned}$$

2. Pravděpodobnost, že vybraných vojáků bude alespoň n je

$$\sum_{l=n}^N \binom{N}{l} p^l (1-p)^{N-l}.$$

3. Úlohu lze opět řešit alespoň dvěma způsoby. Rozptyl x_i je (z definice) roven

$$p(1-p)^2 + (1-p)(-p)^2 = p(1-p).$$

Rozptyl součtu nezávislých(!) náhodných proměnných je roven součtu jejich rozptylů,⁵⁾ výsledek je tedy $Np(1-p)$.

Nebo (a opět podstatně pracněji) se lze dopracovat téhož opět užitím definice a binomické věty, kterýžto postup přenecháme pilnému čtenáři.

Cvičení 4:

- Pro $1 \leq i \leq N$ a $1 \leq j \leq m$ budeme uvažovat nezávislé proměnné x_i^j , kde opět $x_i^j = 1$ s pravděpodobností p a $x_i^j = 0$ s pravděpodobností $1-p$. (Zdůrazněme, že j je zde horní index a ne mocnina.) Do j -tého výběru budou zařazeni vojáci s pořadovými čísly $\{i: x_i^j = 1\}$.
- Pravděpodobnost zařazení daného vojáka do jednoho výběru je p , celkem tedy bude v průměru zařazen do pm výběrů.
- Pravděpodobnost, že daný voják nebude zařazen do žádného výběru je $(1-p)^m$.

⁵⁾Předpoklad nezávislosti je nutný, bez něj toto tvrzení neplatí.

4. Spočítat danou pravděpodobnost je sice možné z principu inkluze a exkluze, ale velice technické a výsledná formule je prakticky těžko použitelná. Danou pravděpodobnost lze ale snadno omezit shora – tedy najít poměrně jednoduchý výraz, jehož hodnota bude vždy o něco málo vyšší. Označme jako X_i událost „ i -tý voják nebyl zařazen do žádného výběru“, tedy $x_i^1 = \dots = x_i^m = 0$. Událost X – aspoň jeden voják nebyl zařazen do žádného výběru – je pak sjednocením $X = X_1 \cup \dots \cup X_N$, a tedy

$$P(X) \leq \sum_{i=1}^N P(X_i) = N(1-p)^m.$$

Pokud je výraz napravo větší než jedna, je tento odhad triviální – každá pravděpodobnost je nejvýše rovna jedné. Pro parametry, které budou později důležité, je to však vcelku dobrý odhad. Chceme-li například, aby $P(X) \leq \varepsilon < 1$, stačí volit m tak velké, aby

$$N(1-p)^m < \varepsilon,$$

tedy

$$m > \frac{\ln(\varepsilon) - \ln(N)}{\ln(1-p)} = \frac{\ln(N) + \ln(1/\varepsilon)}{\ln(1/(1-p))}.$$

Při pevném ε a p roste tedy počet nutných opakování výběru m pouze logaritmicky s N – metoda se tedy zdá být opravdu vhodná pro velké počty testovaných jedinců.

Cvičení 5:

- Úlohu vyřešíme postupně v několika krocích.
 - Pokud je nějaký voják nakažený, tak všechny testy, do kterých byl vybrán, vyšly pozitivně. Může se ale stát, že nějaký zdravý voják byl v testu vždy s nějakým nakaženým vojákem a všechny testy, do kterých byl vybrán, tak vyšly pozitivně. Může tedy dojít k falešné pozitivitě.
 - Označme $\tau(i)$ počet testovacích skupin, do kterých byl vybrán i -tý voják. Jedná se tedy o náhodnou veličinu, která nabývá hodnot od 0 do m . Má binomické rozdělení, tedy platí

$$P(\tau(i) = l) = \binom{m}{l} p^l (1-p)^{m-l}, \quad i = 1, \dots, N, \quad l = 0, \dots, m.$$

- (c) Pravděpodobnost, že do jednoho výběru nebyl zařazen žádný nakažený voják je $(1 - p)^{\varkappa} \geq (1 - p)^k$, kde $\varkappa \leq k$ je počet nakažených vojáků. Naopak pravděpodobnost, že do výběru byl zařazen aspoň jeden nakažený voják, je $1 - (1 - p)^{\varkappa} \leq 1 - (1 - p)^k$. Vezměme jedno i pevné a nechť $\tau(i) = l$; tedy i -tý voják byl vybrán do l testů. Dále předpokládejme, že tento voják nakažený nebyl. Pak pravděpodobnost, že ve všech těchto l testech byl i nějaký nakažený voják, je nejvýše $[1 - (1 - p)^k]^l$.
- (d) Připomeňme, že nás zajímají jen zdraví vojáci, protože pouze u nich může vést postup k chybě. Předpokládejme tedy, že i -tý voják je zdravý. Označme A_i tu událost, že s i -tým vojákem byl v testu vždy i nějaký jiný nakažený voják. Pokud nastane A_i , tak všechny testy, kterých se i -tý voják účastnil, vyšly pozitivně, a my ho tudíž falešně označíme za nemocného. Zbývá odhadnout pravděpodobnost této události:

$$\begin{aligned} P(A_i) &= \sum_{l=0}^m P(A_i \ \& \ \tau(i) = l) = \sum_{l=0}^m P(A_i | \tau(i) = l) P(\tau(i) = l) \leq \\ &\leq \sum_{l=0}^m [1 - (1 - p)^k]^l \binom{m}{l} p^l (1 - p)^{m-l} = \\ &= \sum_{l=0}^m \binom{m}{l} [p(1 - (1 - p)^k)]^l (1 - p)^{m-l} = \\ &= (p - p(1 - p)^k + 1 - p)^m = (1 - p(1 - p)^k)^m. \end{aligned}$$

- (e) Tento odhad platí pro každého zdravého vojáka, kterých je nejvýše N . Pravděpodobnost, že tedy existuje aspoň jeden voják, se kterým byl v každém testu i nějaký nakažený voják, je tedy opět nejvýše N -krát větší, tedy

$$N(1 - p(1 - p)^k)^m.$$

2. Má-li být daný výraz menší než $\varepsilon > 0$, potřebujeme zvolit parametry testu tak, aby

$$N(1 - p(1 - p)^k)^m < \varepsilon$$

tj.

$$\ln(N) + m \ln [1 - p(1 - p)^k] < \ln(\varepsilon),$$

neboli

$$m > \frac{\ln(N) + \ln(1/\varepsilon)}{-\ln(1 - p(1 - p)^k)}.$$

3. Pro dané parametry a $\varepsilon = 0,01$ vychází cca $m = 1\,200$, tedy přibližně osmdesátkrát méně testů, než kdybychom testovali každého vojáka individuálně. Velikost testovacích skupin je v průměru $pN = 2\,000$.

V programu Matlab lze jeden test se zvolenými parametry N , m , p a k simulovat například následujícím skriptem:

```

=====
N=100000; % pocet vojaku
m=1200; % pocet mereni
p=0.02; % pravdepodobnost zahrnuti do vzorku
k=20; % maximalni pocet nakazenych vojaku

Z=zeros(N,1); % vektor oznacujici zdravotni stav vojaku
for j=1:k
    Z(randi(N,1))=1;
end

X=binornd(1,p,[m,N]);
% mxN matice, kazdy radek je jedno mereni

mereni=sign(X*Z); % vysledky jednotlivych mereni

Y=sign(transpose(X)*(mereni-ones(m,1)))+1;
% vojaci oznaceni testem za nakazene

if Y == Z % pokud Z=Y, test byl uspesny, jinak ne
    test=1;
else
    test=0;
end
=====

```

Spuštěním skriptu ve smyčce je dále možné experimentálně ověřit četnost úspěšnosti či neúspěšnosti testu. Při pěti průchodech s $R = 1000$ opakováními bylo po řadě dosaženo 986, 990, 995, 994 a 991 úspěšných testů, což je ve výborné shodě s předchozím výpočtem.

Literatura

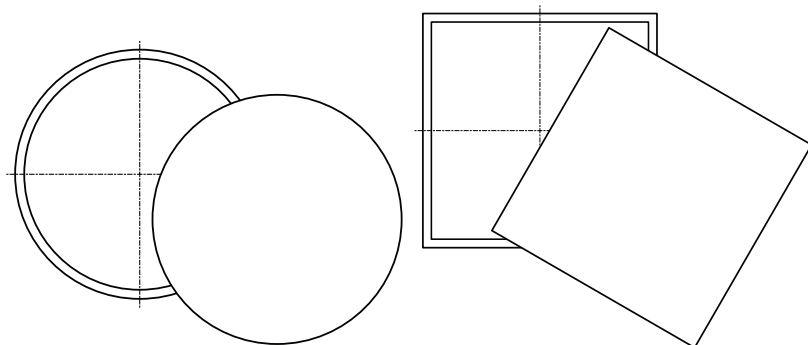
- [1] Charig, C. R., Webb, D. R., Payne, S. R., Wickham, J. E.: Comparison of treatment of renal calculi by open surgery, percutaneous nephrolithotomy, and extracorporeal shockwave lithotripsy. *British Medical Journal*, roč. 292 (1986), s. 879–882.
- [2] Dorfman, R.: The detection of defective members of large populations. *The Annals of Mathematical Statistics*, roč. 14 (1943), s. 436–440.

Proč jsou kanály kulaté

Eduard Šubert, Praha

Viděli jste někdy na ulici víko od kanálu? A bylo kulaté? Ale proč by mělo být kulaté?

Kruh má totiž takovou praktickou vlastnost: konstantní průměr. Nehledě na to, jak kruhové víko otočíte, do kruhového kanálu nemůže nikdy spadnout (obr. 1a).



(a) Kruh

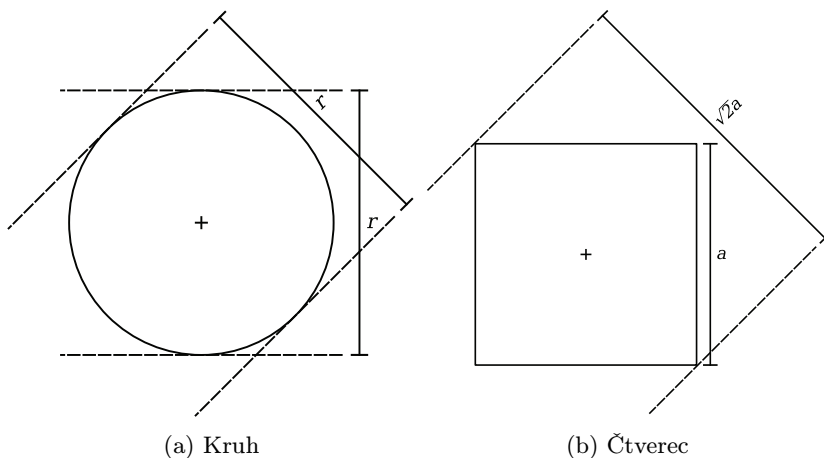
(b) Čtverec

Obr. 1: Jaké víko může spadnout do kanálu?

Naproti tomu třeba takové čtvercové víko má stranu kratší než úhlopříčku. Když tedy víko nevhodně otočíte, může se propadnout (obr. 1b). Nejen, že byste pak museli víko z kanálu vytáhnout, ale mohlo by spadnout na hlavu dělníkovi, který se vydal opravovat kanalizaci, a to je

nepřijatelné. Je tedy kruhové víko pro kanál jedinou správnou volbou? Žádný jiný tvar se tak dobře nehodí? To tedy ne! Postačí kterýkoliv tvar konstantní šířky.

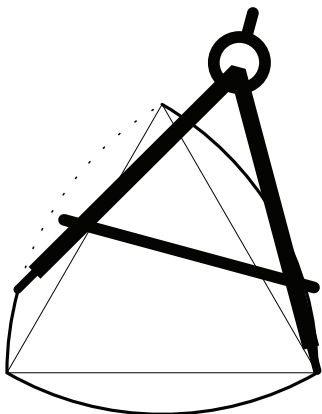
Šířka tvaru je jednoduše řečeno to, co byste naměřili posuvným měřítkem, neboli šuplerou. I když kruh libovolně otočíte, naměříte pokaždé stejnou šířku, jeho průměr (obr. 2a). Kruh je tedy tvarem konstantní šířky. Šířka čtverce je různá podle toho, jak ho změříte, nejméně je rovna délce strany a nejvíce délce úhlopříčky. Čtverec tedy konstantní šířku nemá (obr. 2b).



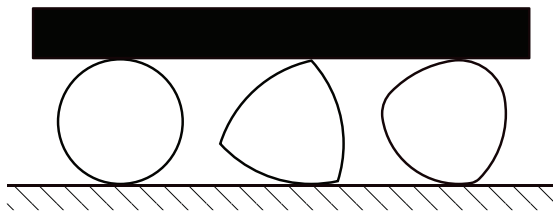
Obr. 2: Měření šířky tvaru

Nejznámějším tvarem konstantní šířky je hned po kruhu trojúhelník Franze Reuleauxe, který vznikne „zakulacením“ rovnostranného trojúhelníka. Už z jeho konstrukce (obr. 3) by mělo být zřejmé, že má konstantní šířku – naproti každému vrcholu je část kružnice se středem právě v tomto vrcholu. V americkém městě San Francisku dokonce existuje kanál s víkem tohoto tvaru.

Ale to není ani zdaleka všechno, tvarů konstantní šířky existuje nekonečně mnoho. Praktické nejsou jen na víka od kanálu, ale i na stěhování. Po hranolech s průřezem takového tvaru můžete valit piano úplně stejně dobře jako po válcích (obr. 4), protože na takové stěhování potřebujete právě konstantní šířku. Kola u automobilu vám ale nenahradí, na to potřebujete konstantní poloměr a ten má z definice pouze kruh.



Obr. 3: Konstrukce Reuleauxova trojúhelníku



Obr. 4: Stěhování po tvarech konstantní šířky

Měření tvarů konstantní i nekonstantní šířky posuvným měřítkem můžete vidět ve videu „Proč jsou kanály kulaté?“ na YouTube kanálu „Na ubrousek“ [1].

Literatura

- [1] Šubert, E.: *Proč jsou kanály kulaté?* Na ubrousek, 2017.
<https://eduardsubert.com/proc-jsou-kanaly-kulate>
- [2] Němec, M.: *Křivky s konstantní šířkou.* Diplomová práce, Katedra didaktiky matematiky, MFF UK, Praha, 2013.
<https://is.cuni.cz/webapps/zzp/download/120138144/?lang=cs>

Vážení zeměkoule

Zdeněk Drozd, Marie Snětinová, Kateřina Žilavá, MFF UK, Praha

Úvod

Pokud jste navštívili některou z akcí Matematicko-fyzikální fakulty UK a zavítali jste do posluchárny T2 v trojské budově fakulty, asi jste si všimli podivného zařízení na zdi vedle dveří (obr. 1). Do místnosti tam vyčnívá masivní ocelové rameno, na kterém jsou dvě velké olověné koule. Při bližší prohlídce jste si mohli všimnout dalších součástí, které už tak nápadné nejsou. Nejspíš jste usoudili, že jde o model nějakého měřicího zařízení – pravděpodobně to bude něco historického... Dále jste se potom nejspíš věnovali tomu, kvůli čemu jste přišli – zajímavé přednášce, pásmu demonstračních pokusů nebo něčemu dalšímu. Monstru nad dveřmi jste asi další pozornost nevěnovali.



Obr. 1: Cavendishovy váhy v posluchárně T2 (budova MFF UK, V Holešovičkách 2, Praha 8)

Co to tam tedy vlastně je? Jde o unikátní funkční model gravitačních vah – které bývají nazývány vahami Cavendishovými. Henry Cavendish (1731–1810) pomocí takovéhoho zařízení provedl řadu měření, z nichž bylo nakonec možné určit hmotnost Země. Naše zařízení je sice menší než to, které měl k dispozici Henry Cavendish, přesto ale i s ním můžeme Zemi zvážít s poměrně dobrou přesností. Pojďme se ale nejprve seznámit s tím, jak Cavendish ke svému slavnému experimentu došel.

Trocha historie neboli co pokusu předcházelo

Ve druhé polovině 17. století spatřilo světlo světa slavné dílo Isaaca Newtona *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (Matematické principy přírodní filosofie). Mimo jiné výsledky Newtonova bádání je zde uveden pozoruhodný výsledek, který dnes označujeme jako Newtonův gravitační zákon. Podle tohoto zákona se dvě tělesa přitahují silou, která je úměrná jejich hmotnostem a nepřímo úměrná druhé mocnině jejich vzájemné vzdálenosti. Zatímco závislost této síly, kterou dnes nazýváme gravitační síla, na hmotnosti těles byla zřejmá, pokles síly s druhou mocninou vzdálenosti v Newtonově době zcela průkazný nebyl. Zcela přelomovým tvrzením pak bylo, že síla, kterou se přitahují nebeská tělesa, je stejného typu jako ta, která působí mezi tělesy pozemskými. Až do té doby totiž bylo všeobecně uznáváno tvrzení, že děje, které se odehrávají pod sférou Měsíce, se řídí jinými zákony než děje odehrávající se nad touto sférou. Důmyslné experimenty Galilea Galileiho, objevy Johanna Keplera a Newtonovy výsledky tyto starověké představy postupně vyvrátily.

Pojďme se zamyslet nad Newtonovým gravitačním zákonem trochu podrobněji, abychom zjistili, proč jím bylo tolik učenců včetně Henryho Cavendishe tak fascinováno. V době vydání *Principií* bylo možné zapsat tento zákon následovně (samozřejmě za předpokladu důvěry v onu závislost úbytku gravitační síly se čtvercem vzdálenosti):

$$F_g \sim \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}. \quad (1)$$

F_g zde označuje gravitační sílu, m_1 , m_2 hmotnosti přitahujících se těles a r je jejich vzdálenost. Vztah jsme zapsali tak, jak jsme zvyklí v naší době, v *Principiích* byste takovýto způsob jeho zápisu hledali marně.

Něco zde, jak tušíte, citelně chybí. Abychom mohli sílu, kterou na sebe dvě tělesa působí, vypočítat, museli bychom kromě hmotností a vzdálenosti těles znát ještě konstantu úměrnosti. Dnes jí říkáme gravitační konstanta a značíme ji G (v Čechách bývá také značena řeckým písmenem kappa, zůstaneme ale u G , které je ve světě obvyklejší). Newtonův gravitační zákon můžeme potom zapsat ve tvaru

$$F_g = G \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}. \quad (2)$$

Zákon jsme zapsali pouze ve skalárním tvaru. Jeho vektorový zápis zatím potřebovat nebudeme. Právě gravitační konstanta G je to, co lze

změřit našimi gravitačními vahami, ale nepředbíhejme. Pojdme se ve zkratce podívat na to, jakými cestami se k určení její velikosti lidé dostávali.

Roku 1774 podnikli pánové Maskelyne a Burrow expedici k hoře Schiehallion ve Skotsku. Jejich cílem bylo potvrdit závislost $1/r^2$ z Newtonova gravitačního zákona. Proč se kvůli tomu vypravili k této hoře? Hora Schiehallion je jednou z hor Skotské vysočiny a naši badatelé předpokládali, že pokud budou u jejího úpatí velmi přesně měřit směr, kterým míří závěs olovnice, projeví se gravitační přitažlivost mezi horou a olovnicí. Budou-li horu obcházet a měřit směr, kterým olovnice míří, mělo by se ukázat, že se olovnice nepatrně naklání k hoře. Hora Schiehallion má poměrně jednoduchý symetrický tvar. Lze tedy určit její objem a badatelé doufali v to, že budou po úspěšném měření schopni určit její hmotnost, a tedy i průměrnou hustotu. Měření nepatrných odchylek olovnice od svislého směru bylo samozřejmě velmi náročné. Metodu, jak toto měření provádět, navrhl právě Henry Cavendish. Podílel se na organizaci expedice, dohlížel na přípravu přístrojů, následně kontroloval naměřená data, přispíval k jejich analýze apod. Sám se ale expedice nezúčastnil. Byl to totiž plachý samotář a podivín. Měl problémy komunikovat s lidmi a raději vše sledoval z bezpečí svého sídla. Jeho otec, lord Charles Cavendish, byl velmi bohatý a vzdělaný. Od svých šestnácti let byl lord Charles Cavendish členem parlamentu a velmi intenzivně se zajímal o vědu. Roku 1727 se stal členem londýnské Královské společnosti (Royal Society), která mu za vynález maximum-minimálního teploměru udělila roku 1757 Copleyho medaili. Tuto medaili londýnská Královská společnost uděluje už od roku 1731 jako své nejvyšší vědecké ocenění. Lord Cavendish umožnil synu Henrymu získat vzdělání na prestižních školách té doby. Při studiu na univerzitě v Cambridge se Henry Cavendish spřátelil s Johnem Michellem, který měl později velkou zásluhu na sestrojení přístroje, který dnes nazýváme Cavendishovými gravitačními vahami.

Výsledky expedice k hoře Schiehallion byly nadmíru uspokojivé. Početilo se prokázat, že gravitační síla skutečně klesá s druhou mocninou vzdálenosti a Královská společnost považovala výsledky expedice za finální důkaz platnosti Newtonova gravitačního zákona. Za provedená měření byla Maskelynemu s Burrowem roku 1775 udělena Copleyho medaile.

Výsledků měření zmíněné expedice se roku 1778 ujal Charles Hutton a vypočítal s jejich pomocí průměrnou hustotu hory Schiehallion. Vyšlo

mu, že je 4,5krát větší než hustota vody. (V té době bylo běžné udávat výsledky měření ve formě porovnání s jinými známými hodnotami. My bychom spíše napsali $\rho = 4,5 \text{ g/cm}^3$, byla ale jiná doba.) Hutton tento výsledek publikoval a poděkoval za pomoc při matematickém zpracování Cavendishovi. Nevíme ale bohužel, kterého Cavendishe měl na mysli – jestli otce, nebo syna.

Metoda nepatrného vychýlení olovnice k hoře byla sice důmyslná, bylo s ní ale spojeno několik problémů. Kromě toho, že vyžadovala velmi precizního a trpělivého experimentátora, byly její výsledky v některých ohledech diskutabilní. Je zvolená hora dobrým reprezentantem materiálu, ze kterého se skládá Země? Neměla by jiná hora jinou hustotu? A je odchylka olovnice skutečně způsobena gravitační silou? Henry Cavendish společně se svým přítelem Johnem Michellem hledali lepší měřicí metodu. Dnes už nejspíše nezjistíme, kdo byl autorem myšlenky zkonstruovat k tomuto účelu speciální torzní váhy. První zmínka se objevuje v dopise Cavendishe Michellovi z roku 1783. V dopise se Cavendish ptá, jak pokračují přípravy experimentu [1], a z dotazů je zřejmé, že Michell váhy konstruoval. Oba měli zájem na tom, sestrojít nějakou „domácí aparaturu“. Cavendishovi vyhovovala představa, že bude moci experimentovat v ústraní a s nikým přitom moc nekomunikovat, vyhovovalo to jeho plaché a samotářské povaze. Michell, jakožto duchovní, byl příliš zaměstnán, než aby si mohl dovolit odjet na nějakou expedici, nebo experimentovat mimo svůj domov.

Roku 1783 zemřel Cavendish otec a Henry zdědil panství s celým obrovským majetkem. Vyhlédl si dům, do nějž plánoval Michellem zkonstruovanou aparaturu přestěhovat. To se skutečně o dva roky později stalo. Cesta k úspěchu byla ale ještě dlouhá. Roku 1793 John Michell zemřel a Henry Cavendish pokračoval ve vývoji aparatury sám. Nechal v domě vybudovat speciální místnost „odrušenou“ od vlivů okolí, aparaturu kompletně přestavěl a celý podzim roku 1797 a jaro roku 1798 se věnoval měření. Výsledky publikoval 21. 6. 1798 v článku *Experiments to determine the density of the earth* [2]. Jak článek vypadal? Měl úctyhodných 57 stran a pravděpodobně by obstál i u dnešních recenzentů. V úvodu je (poněkud zhuštěná) teorie, která zabírá pouze dvě a půl stránky, zbytek je věnován výsledkům měření a hlavně rozboru chyb měření a způsobu jejich korekce. A jaké tedy byly parametry původních Cavendishových vah? Bylo to úctyhodné zařízení, jehož dominantou byly dvě olovené koule, každá o hmotnosti 158 kg. Přesnost, které Henry Cavendish dosáhl, byla udivující. Hodnota gravitační konstanty

určená z jeho měření je $G = 6,754 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{kg}^{-1}$ [3]. (Porovnejte s hodnotou uvedenou v dnešních tabulkách.)

S pomocí známé hodnoty gravitační konstanty mohl Cavendish vypočítat hmotnost Země. Stačilo použít Newtonův gravitační zákon, za jednu z hmotností dosadit hledanou hmotnost Země, jako druhou hmotnost vzít hmotnost libovolného závaží a pomocí přesného siloměru změřit, jakou silou je závaží přitahováno k Zemi. Za vzdálenost r se dosadí poloměr Země (ten byl v Cavendishově době známý).

Jak gravitační váhy fungují?

Princip Cavendishových vah je ve své podstatě jednoduchý. Je to podobné, jako když chcete měřit tíhu (resp. hmotnost) tělesa pružinou. V tom případě byste nejprve určili tuhost pružiny k , která udává, jak velká síla by na pružinu musela působit, aby se protáhla o 1 metr (muselo by přitom navíc jít o pružnou deformaci pružiny, to znamená, že pokud by deformační síla přestala působit, pružina by se vrátila do původního tvaru). Pokud jste někdy tuto definici tuhosti pružiny slyšeli, byli jste k ní asi poněkud skeptičtí. Co když budu mít pružinu, která má délku, dejme tomu, 10 cm. Jak ji protáhnu o metr? Je to myšleno poněkud „obrazně“, kdyby bylo možné pružinu o metr protáhnout, byla by síla, která to způsobila, číselně rovna tuhosti pružiny. Důležité je to, že když víte, jaká je tuhost pružiny, můžete si ji zkalibrovat pro měření neznámých sil. Dokážete totiž určit, jaké prodloužení odpovídá zatížení pružiny silou jednoho newtonu, a vyrobit vhodnou měřicí stupnici (taktó fungují pružinové siloměry). Pro deformaci pružiny platí vztah

$$F = -k\Delta x, \quad (3)$$

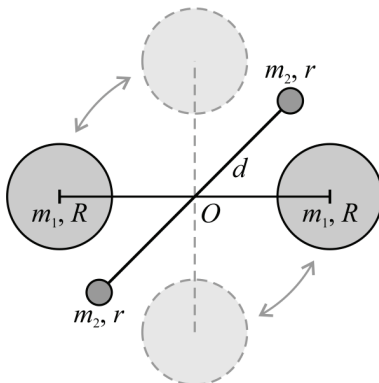
kde F je síla působící na pružinu, k tuhost pružiny a Δx prodloužení pružiny. Je snadné dopočítat neznámou sílu, když změříme prodloužení pružiny, které způsobila.

Tuhost pružiny byste mohli určit pomocí vhodného kalibračního závaží. Šlo by to i jinak? Bylo by možné například změřit periodu kmitů závaží zavěšeného na naší pružině. Pro tuto periodu platí vztah

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}. \quad (4)$$

Ze známých hodnot periody kmitů pružiny T a hmotnosti m závaží byste tuhost k již snadno určili.

Cavendishovy gravitační váhy jsou v podstatě také siloměrem. Je to ale siloměr důmyslný a velmi citlivý. Na obr. 2 je znázorněno schéma gravitačních vah při pohledu shora.



Obr. 2: Schéma Cavendishových vah (pohled shora)

Hlavními součástmi vah jsou dvě velké olovené koule, každá o hmotnosti m_1 a poloměru R . Koule jsou umístěny na nosníku, kterým je možné otáčet tak, jak je ve schématu zakresleno šipkami. Mezi koulemi je umístěno torzní kyvadélko tvořené kuličkami o hmotnostech m_2 připevněnými na tyčce délky d . Kyvadélko je ve svém těžišti zavěšeno na tenkém kovovém vlákně (v našem případě je z molybdenu, který má dlouhodobě stabilní mechanické vlastnosti). Torzní kyvadélko tedy může kmitat v prostoru mezi velkými koulemi. Vše je nastaveno tak, aby kyvadélko bylo umístěno symetricky mezi velkými koulemi. V rovnovážné poloze jsou tedy vzdálenosti středů malých kuliček a velkých koulí stejné.

Zařízení si můžeme představit jako torzní siloměr nebo přesněji jako měřič momentů sil. Pokud jej vychýlíme z rovnovážné polohy, zkroutí se vlákno, na kterém visí, a to se ho snaží vrátit zpět. Mezi momentem vychylující síly M a úhlem pootočení α (v radiánech) platí vztah

$$M = -D\alpha, \tag{5}$$

kde D vyjadřuje tzv. *direkční moment vlákna*. Je to analogická veličina k tuhosti pružiny. Direkční moment vyjadřuje, jak velký moment síly by musel působit, aby se vlákno zkroutilo o 1 radián (resp. aby se o tento úhel stočilo kyvadélko). Podobně jako u prve zmíněného případu s pružinou můžeme direkční moment určit pomocí periody kmitů torzního

kyvadélka. Přímé měření, tedy vychýlení kyvadla o určitý úhel a změření odpovídajícího momentu síly, by zde bylo obtížné. Direkční moment vlákna by také bylo možné vypočítat z jeho průměru, délky a ze známé hodnoty modulu pružnosti ve smyku molybdenu; bylo by to ale dost nepřesné. Ve výpočtu bychom museli počítat se čtvrtou mocninou poloměru vlákna; chyba v určení poloměru by se tedy výrazně projevila. Vlákno je navíc ve skutečnosti vyrobeno ze slitiny molybdenu a modul pružnosti ve smyku dostatečně přesně neznáme.

Pro periodu kmitů torzního kyvadla platí

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{D}}, \quad (6)$$

kde J je moment setrvačnosti kyvadla.

Protože známe parametry kyvadélka (rozměry a hmotnosti kuliček i spojovací tyčky), není problém vypočítat jeho moment setrvačnosti J a následně direkční moment D . Výpočtem direkčního momentu jsme vlastně provedli kalibraci našeho torzního siloměru (nebo chcete-li „momentoměru“).

V dalším kroku přesuneme velké koule „na doraz“ do jedné z krajních poloh, počkáme, až se torzní kyvadélko zastaví, a určíme jeho polohu. Potom přetočíme koule do druhé krajní polohy, torzní kyvadélko se ustálí v trochu jiné poloze, kterou opět zaznamenáme. Malá změna polohy kyvadélka je způsobena gravitačními silami, kterými na něj působí velké koule. Měli bychom tedy být schopni tuto sílu z naměřených hodnot vypočítat. Pokud se to podaří, můžeme z výsledku zjistit, jakou silou na sebe působí dvě tělesa o hmotnosti 1 kg, jsou-li od sebe vzdálena 1 m. A právě tento údaj je to, co hledáme – gravitační konstanta G . Vypadá to sice jednoduše, ale skutečný postup je trochu náročnější. Budeme se mu věnovat v navazujícím článku v příštím čísle.

Literatura

- [1] Falconer, I.: Henry Cavendish: the man and the measurement. *Meas. Sci. Technol.*, roč. 10 (1999), s. 470–477.
- [2] Cavendish, H.: Experiments to determine the density of the earth. *Phil. Trans. R. Soc.*, roč. 88 (1798), s. 469–526 (Reprint: Thorpe, E. (ed): The Scientific Papers of the Honourable Henry Cavendish, FRS. Cambridge University Press, Cambridge, 1921, s. 249–286).
- [3] Brož, J., Roskovec, V.: *Základní fyzikální konstanty*. SPN, Praha, 1988.

Hranice Mendělejevovy tabulky prvků

Vladimír Wagner, Ústav jaderné fyziky AV ČR, FJFI ČVUT, Praha

V tomto roce se slaví 150. výročí Mendělejevovy tabulky prvků. V této souvislosti byl rok 2019 vyhlášen „Mezinárodním rokem periodické tabulky“. Pozornost věnovaná tomuto výročí je plně oprávněná. Jde totiž o jeden z nejvýznamnějších objevů v dějinách lidstva, který tvoří základy chemie i fyziky.

Periodická tabulka prvků

Mendělejev ukázal, jak lze popsat chemické vlastnosti prvků. Zjistil, že jsou periodickou funkcí jejich relativních atomových hmotností. To mu umožnilo předpovědět existenci nových, dosud neznámých prvků a jejich vlastnosti. V té době jich bylo známo 62 a v tabulce byla řada bílých míst. Po jejich zaplnění se chemici a fyzikové soustředili na hledání stále těžších prvků.

Dnes víme, že periodicitu v tabulce je dána strukturou atomu. Ten se skládá z atomového jádra, kde je soustředěna téměř veškerá jeho hmotnost, a elektronového obalu. Jádro obsahuje kladně nabitě protony a elektricky nenabitě neutrony. Protože velikost náboje protonu a elektronu je stejná, liší se pouze znaménkem, musí mít neutrální atom stejný počet protonů v jádře jako elektronů v obalu. Uspořádání elektronového obalu určuje chemické vlastnosti prvků.

Identita prvku je určena počtem protonů v jádře. Počet neutronů může být pro příslušný prvek různý. Každý prvek tak má řadu různých izotopů, které se liší právě počtem neutronů v jádře. Počet neutronů má vliv na stabilitu jádra a jeho další vlastnosti, neovlivňuje však chemické vlastnosti atomu.

Na mapu jader tak můžeme přidávat nové izotopy známých prvků s větším či menším počtem neutronů. Můžeme také nahradit jeden nebo více neutronů hyperonem a dostat tak hyperjádra. Zde je ještě větší prostor pro hledání nových hyperjader. Periodickou soustavu prvků můžeme dále rozšiřovat směrem ke stále těžším prvkům. Po doplnění bílých míst v tabulce se tak hledání nových prvků soustředilo na ty stále těžší. Dnes se tak snažíme produkovat a tím prokázat existenci tzv. supertěžkých jader.

Produkce supertěžkých prvků

Problémem je, že jádra těžší než bismut nemají stabilní izotop. Uran a thorium mají izotopy s poločasem rozpadu srovnatelným s existencí Země, takže se tyto prvky a produkty jejich rozpadu v přírodě stále vyskytují. Prvky těžší než uran však musíme připravovat uměle pomocí jaderných reakcí. Některé z těch jen o málo těžších, než je uran, se daří připravovat pomocí ozařování uranu intenzivními neutronovými toky. Supertěžké prvky je však nutné získávat v reakcích lehčího až středně těžkého iontu urychleného urychlovačem s těžkým jádrem terče. Dříve se nově vzniklé prvky identifikovaly pomocí chemické analýzy. Ovšem s růstem jejich hmotnosti dramaticky klesala pravděpodobnost jejich produkce, tím i dosažitelné množství a přesnost chemické analýzy.

Existují tři typy přeměny nestabilních jader, při kterých se jedno jádro mění na jiné. Jde o přeměnu beta, kdy se neutron mění na proton nebo proton na neutron. V rozpadu alfa se vyzáří jádro helia a počet neutronů i počet protonů se sníží o dva. U těch nejtěžších jader může také docházet k samovolnému štěpení jader, kdy se původní jádro rozštěpí na dvě středně těžká jádra a navíc se emituje ještě několik samostatných neutronů. Kromě toho může jádro při tzv. přeměně gama ještě vyzářit energii ve formě záření gama. V tomto případě však máme stále stejné jádro, jen s nižší energií.

Nestabilní velmi těžká jádra se většinou rozpadají přeměnou alfa nebo samovolným štěpením. V takovém případě pak dostaneme sekvenci rozpadů alfa v některých případech přerušenu samovolným štěpením. Rozpad beta se hlavně pro supertěžká jádra vyskytuje jen ve velmi omezené míře.

Další pokrok v produkci supertěžkých prvků závisel na nalezení metody bezrozporné identifikace jednotlivých atomů. Ta využívá právě identifikaci jednotlivých rozpadů alfa v sekvenci a identifikaci konečných jader. Zařízení, která takovou analýzu umožňovala, začala pracovat v německé laboratoři GSI Darmstadt a v mezinárodním ústavu SÚJV Dubna v Rusku. Při reakcích vznikají různá jádra. Nejdříve je tak vhodné vybrat pomocí elektrických a magnetických polí supertěžká jádra s hledaným poměrem náboje a hmotnosti. Jádra, která projdou selektorem, jsou zachycena v zastavovací fólii, která je obklopena detektory alfa částic. Ty uloví všechny tyto částice vzniklé v sekvenci postupných rozpadů. Ta končí u jádra, které se rozpadne samovolným štěpením nebo má velmi dlouhý poločas rozpadu. Poslední jádra sekvence a parametry jejich roz-

padu (energie zachycené částice alfa, doprovodné gama záření, poločas rozpadu, ...) jsou známy a umožňují jádra přesně identifikovat. Počet alfa částic, které vznikly před známými jádry, pak umožňuje určit počáteční jádro sekvence rozpadů.

Právě zmíněné laboratoře byly těmi hlavními, které spolu s ostatními přispěly k tomu, že dnes je známo již 118 prvků. Čtyři, které doplnily a uzavřely sedmou periodu Mendělejevovy periodické tabulky, byly uznány v roce 2015. Dostaly jména nihonium (^{113}Nh), moscovium (^{115}Mc), tennessine (^{117}Ts) a oganesson (^{118}Og). Oganesson uzavírá sedmou periodu a stejně jako třeba xenon, krypton, argon či radon by měl být z chemického hlediska vzácným plynem. Jestli jím je opravdu, zatím nevíme.

Otázka, zda se periodicitu pozorovaná v Mendělejevově tabulce projevuje i pro takto těžké prvky, je hlavní příčinou, proč se uvedený výzkum dělá. Kvůli zvyšujícímu se náboji jádra a rostoucímu elektrickému poli se hlavně elektrony v nejnižších slupkách stávají relativistickými a to může ovlivnit celou strukturu elektronového obalu. Očekává se, že už nejsme daleko od potenciálního zlomu v jeho vlastnostech a vlastnostech periodické tabulky. Zatím nejtěžší prvek, u kterého se podařilo zkoumat chemické vlastnosti, je prvek flerovium (^{114}Fl). Zdá se, že až po toto protonové číslo chemické vlastnosti odpovídají poloze v Mendělejevově tabulce. Zkoumání chemie jednotlivých atomů je jednou z největších výzev chemie a fyziky, kterou se daří realizovat.

Studijní text k Fyzikální olympiádě 2019

Produkce a studium supertěžkých prvků je jednou z nejzajímavějších oblastí jaderné fyziky a chemie. Proto jsme se rozhodli vybrat toto téma pro studijní text k Fyzikální olympiádě v roce 2019 [1]. V něm po historickém úvodu a seznámení s problematikou následuje popis praktické fyziky spojené s touto oblastí experimentální jaderné fyziky s uvedením řešených příkladů, které výklad názorně osvětlují. Nejdříve se čtenář v této kapitole seznámí se zákonitostmi, které platí na mikroskopické úrovni. Při popisu mikrosvěta se nelze obejít bez speciální teorie relativity a kvantové fyziky. Je třeba vzít v úvahu, že objekty mikrosvěta mají běžně rychlosti blízké rychlosti světla. Zároveň mají objekty s rozměry srovnatelnými s atomem a atomovým jádrem řadu podivných kvantových vlastností. Mají například tzv. duální povahu, což znamená, že chování mikroskopických objektů lze někdy popisovat stejně jako vlny, v jiných případech je podobné chování hmotných bodů, ale jsou i případy, kdy se chovají nepodobně čemukoli, co známe z běžného života.

Je také výhodné využívat jednotky vhodné velikosti. Náboj se vyjadřuje v násobcích velikosti náboje elektronu e . Jako jednotka energie se používá elektronvolt [eV], což je kinetická energie, kterou získá částice s nábojem o velikosti rovné náboji elektronu, pokud je urychlena potenciálovým rozdílem jednoho voltu. Používané násobné jednotky pak jsou kiloelektronvolty [keV], megaelektronvolty [MeV] a gigaelektronvolty [GeV]. Podobně rychlost se vztahuje k rychlosti světla ve vakuu c . Díky proslulému Einsteinovu vztahu $E = mc^2$ i hmotnost udáváme pomocí odpovídající energie [MeV/ c^2] a podobně udáváme hybnost v [MeV/ c].

V druhé části textu jsou popsány ty vlastnosti atomových jader, které určují jejich stabilitu a způsoby rozpadu. Silná interakce, která drží neutrony a protony pohromadě v jádře, má omezený dosah a každý nukleon může interagovat jen s limitovaným počtem okolních nukleonů. Roste tak pomaleji s počtem neutronů a protonů než elektrická odpudivá síla, která má nekonečný dosah, s počtem protonů. Proto musí u těžkých jader růst počet neutronů rychleji než protonů. Těžká jádra tak mají pro nejstabilnější izotopy jiný poměr mezi počtem protonů a neutronů než jádra lehká. Zároveň se projevuje skutečnost, že se jedná o fermiony. Tedy částice, které se podřizují Pauliho vylučovacímu principu, a může tak být v konkrétním stavu pouze jedna. To vede k tomu, že pro specifické počty protonů a neutronů (tzv. magická čísla) jsou jádra stabilnější. A právě tato vlastnost umožňuje existenci supertěžkých prvků. Teoretické předpovědi založené na slupkovém modelu předpovídají ostrov jader s delší dobou života pro počet protonů okolo 114 a neutronů 184.

Supertěžká jádra vznikají splynutím dvojice lehčích jader. Jde o dva objekty s kladným elektrickým nábojem, které se vzájemně odpuzují. Aby byla elektrostatická síla překonána, je lehčí jádro urychleno a srazí se s těžkým jádrem terče. Třetí část studijního textu se proto věnuje pohybu nabitých částic a iontů v elektrických a magnetických polích a principům různých urychlovačů. Při srážce jader a jejich rozpadu se uplatňují zákony zachování energie a hybnosti. Čtvrtá část textu je tak zaměřena na kinematiku jaderných reakcí a rozpadů. V páté části se text věnuje popisu pravděpodobností reakcí pomocí veličiny účinný průřez. Po prostudování těchto částí a řešených příkladů je možné porozumět tomu, jak se v současnosti supertěžké prvky produkují a jak tuto produkci fyzikálně popisujeme.

Vytvořená supertěžká jádra jsou nestabilní a dochází k jejich rozpadu prostřednictvím sekvence rozpadů alfa. Popis rozpadů radioaktivních ja-

der umožňuje rozpadový zákon, jehož rozboru a využití se věnuje šestá část. Radioaktivitě a jejímu popisu byl věnován i článek *Detekce přítomnosti radionuklidů v atmosféře* v tomto časopisu [2].

Poslední, sedmá část je zaměřena na základní vlastnosti elektronového obalu atomu supertěžkých prvků. Ten je specifický zvláště tím, že hlavně jeho vnitřní elektrony mají rychlosti blízké rychlosti světla a jsou relativistické. Při jeho popisu je využit jednoduchý kvantový Bohrov model atomu.

Na závěr studijního textu je umístěno několik neřešených příkladů, které doplňují řešené ve všech částech předchozího textu. Snahou bylo vytvořit pro středoškolačka srozumitelný návod pro pohyb v jaderném světě se zaměřením na pochopení produkce a výzkumu nových jader, zvláště supertěžkých. Cílem bylo, aby porozuměl experimentálními metodám, které se zde využívají, např. fungování urychlovačů a detekce částic.

Studijní materiál *Hranice Mendělejevovy tabulky* [1] si přiblížíme dvěma tématy, která se v textu rozebírají.

První ukázka: Nástroje a jednotky využívané v mikrosvětě

V mikrosvětě se na jedné straně setkáváme s extrémně malými hodnotami některých veličin (vzdálenost, náboj, energie, ...), na druhé straně naopak některé veličiny mohou snadno nabývat hodnot extrémně velkých, např. rychlost tak může být velmi blízká rychlosti světla. Je tak třeba při řešení fyzikálních úloh používat přiměřené jednotky a fyzikální teorie, které umožňují tyto procesy a jevy popsat.

Rozměr atomu je zhruba 10^{-10} m, tedy 0,1 nm. Je tak rozumné při popisu rozměrů atomů využívat jednotku nanometr. Rozměr jádra je zhruba 10^{-15} m = 1 fm, zde se tak využívá jednotka femtometr. Velikost náboje elektronu je stejná jako protonu a v jednotkách SI je v současnosti udaná s přesností na čtyři platné cifry jako $1,602 \cdot 10^{-19}$ C. Náboj ve světě atomů, jader a elementárních částic je tak vhodné vyjadřovat v násobcích velikosti náboje elektronu e . Pokud částici s nábojem $1e$ urychlíme pomocí potenciálového rozdílu (napětí) 1 V, získá kinetickou energii jeden elektronvolt (1 eV). Takto zavedená jednotka energie a její násobky (keV, MeV či GeV) se využívají pro energii v mikrosvětě. Protože kinetickou energii E_k , kterou získá při urychlení napětím U náboj Q , dostaneme ze vztahu $E_k = QU$, platí pro vztah mezi elektronvoltem a jednotkou energie v SI (joulem) s přesností na čtyři platné číslice: $1 \text{ eV} = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J}$.

První nutnou teorií, bez které se při popisu mikrosvětla neobejdeme, je speciální teorie relativity. Ta umožňuje popsat pohyb částic s rychlostmi blízkými rychlosti světla. Rychlosti částic jsou většinou v mikrosvětě o mnoho řádů větší než v našem známém prostředí a mohou se rychlosti světla dost blížit, proto je vhodné je vyjadřovat právě v jednotkách rychlosti světla. Vyjádřeno v jednotkách SI je to $c = 2,997\,924\,58 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Vzhledem k definici metru a sekundy je tato hodnota přesná. Pracujeme tak s relativní rychlostí vzhledem k rychlosti světla, kterou značíme $\beta = v/c$.

U relativistických částic je kinetická energie srovnatelná s energií spojenou s klidovou hmotností objektu nebo větší a je tak vhodné pracovat s celkovou energií E částice. Ta je dána její klidovou energií E_0 a kinetickou energií E_k :

$$E = E_0 + E_k. \quad (1)$$

Podívejme se na klíčové vztahy, které se při popisu relativistických částic používají. Jejich odvození je ve studijním textu pro řešitele Fyzikální olympiády [3]. Klidová energie je dána slavným Einsteinovým vztahem:

$$E_0 = m_0 c^2. \quad (2)$$

Vztah mezi celkovou energií E , klidovou energií E_0 a rychlostí v je:

$$E = \frac{E_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}. \quad (3)$$

Vztah mezi celkovou energií E , klidovou energií E_0 a hybností p je pak:

$$E^2 = E_0^2 + p^2 c^2. \quad (4)$$

Einsteinův vztah umožňuje vyjadřovat hmotnost nebo hybnost v energetických jednotkách. Hmotnosti částic tak lze vyjadřovat v MeV/c^2 či GeV/c^2 a hybnosti pak v MeV/c a GeV/c .

Rozhodování, kde vystačíme s nerelativistickým přiblížením a kde musíme zapojit speciální teorii relativity, závisí na přesnosti, kterou u řešení požadujeme. V běžném případě, například při urychlování na nerelativistickém urychlovači cyklotronu, vystačíme s nerelativistickým přiblížením. Hranicí je situace, kdy kinetická energie je zhruba jedno procento klidové energie a rychlost je přibližně 0,14c.

Stejně tak je při popisu částic v mikrosvětě potřeba využívat kvantovou fyziku. Jednou z jejich základních vlastností je to, že každý objekt

má zároveň vlnové a částicové vlastnosti. Světlo a elektromagnetické záření má tak nejen vlnové vlastnosti, ale také částicové. Energie a hybnost elektromagnetického záření se vyzářuje, pohlcuje i šíří v diskrétní kvantované podobě ve formě částic – fotonů.

V kvantové fyzice je potřeba nová fundamentální konstanta – tzv. Planckova konstanta h . Jde o fyzikální konstantu, která má stejný rozměr jako moment hybnosti. V jednotkách SI je její experimentálně určená hodnota $h = 6,626\,070\,15 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ [4]. Při řešení našich úloh vystačíme s přesností na čtyři platné cifry $h = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$. V jednotkách využívaných v mikrosvětě je to pak $h = 4,136 \cdot 10^{-15} \text{ eV} \cdot \text{s}$, zde už uvádíme jen hodnotu s přesností na čtyři platné cifry. Velice často se využívá redukovaná hodnota Planckovy konstanty \hbar :

$$\hbar = \frac{h}{2\pi}. \quad (5)$$

Velice vhodné je pak při výpočtech využívat součin redukované hodnoty Planckovy konstanty a rychlosti světla, který má snadno zapamatovatelnou hodnotu vyjádřenou v jednotkách spojených s mikrosvětlem (uvádíme hodnotu s přesností na čtyři platné cifry):

$$\hbar c = 197,3 \text{ MeV} \cdot \text{fm} = 197,3 \text{ eV} \cdot \text{nm} \doteq 200 \text{ eV} \cdot \text{nm}.$$

Energie fotonů je dána jejich frekvencí f nebo vlnovou délkou λ a dá se vyjádřit právě pomocí Planckovy konstanty:

$$E = hf = \frac{hc}{\lambda} = \frac{2\pi\hbar c}{\lambda}. \quad (6)$$

Naopak částice, jako jsou elektrony a protony, mají také vlnový charakter a svoji charakteristickou tzv. de Broglieho vlnovou délku λ :

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{2\pi\hbar c}{pc} \Rightarrow pc = \frac{2\pi\hbar c}{\lambda}. \quad (7)$$

Ze vztahu je vidět, že de Broglieho vlnová délka λ je nepřímo úměrná hybnosti p .

Pokud využijeme relativistický vztah mezi celkovou energií E , hybností p a klidovou energií E_0 v případě fotonu a fakt, že klidová energie je v jeho případě nulová, dostaneme:

$$E^2 = E_0^2 + p^2c^2 = 0 + p^2c^2 \Rightarrow E = pc. \quad (8)$$

Dosadíme-li za energii fotonu ze vztahu mezi jeho energií a vlnovou délkou (6), pak dostaneme i pro foton stejný vztah mezi jeho vlnovou délkou a hybností jako v případě částic s nenulovou klidovou hmotností:

$$pc = \frac{2\pi\hbar c}{\lambda}.$$

Vlnová délka také ukazuje, jaká je nejistota v určení polohy dané částice. Pokud takovou částici využíváme pro určení rozměru či polohy jiného objektu, nemůže být nejistota určení těchto veličin menší než její vlnová délka.

Ukázkový příklad 1. Vypočítejte rychlosti (vyjádřete je jako $\beta = v/c$), hybnosti, poměry mezi relativistickou a klidovou hmotností a de Broglieho vlnové délky protonů urychlených na urychlovačích v laboratoři CERN, nejdříve na protonovém synchrotronu PS ($E_k = 28$ GeV), potom na LHC ($E_k = 7$ TeV).

Řešení. Kinetické energie jsou dokonce větší než klidová energie protonu, která je okolo 1 GeV (přesněji 938,272 081 MeV). Je tak třeba počítat relativisticky. Relativistický vztah mezi celkovou energií E a klidovou energií E_0 je:

$$E = E_0 + E_k = \frac{E_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}. \quad (9)$$

Umocníme:

$$(E_0 + E_k)^2 = \frac{E_0^2}{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} \Rightarrow 1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2 = \frac{E_0^2}{(E_0 + E_k)^2}.$$

Vyjádříme rychlost protonu:

$$\frac{v}{c} = \sqrt{1 - \frac{E_0^2}{(E_0 + E_k)^2}}. \quad (10)$$

Vyjádříme číselně.

Pro PS:

$$\beta = \frac{v}{c} = \sqrt{1 - \frac{(0,938 \text{ GeV})^2}{(0,938 \text{ GeV} + 28 \text{ GeV})^2}} \doteq 0,999 475,$$

FYZIKA

pro LHC:

$$\beta = \frac{v}{c} = \sqrt{1 - \frac{(0,938 \text{ GeV})^2}{(0,938 \text{ GeV} + 7000 \text{ GeV})^2}} \doteq 0,999999910.$$

Relativistickou hmotnost m lze získat pomocí Einsteinova vztahu z celkové energie částice:

$$E = mc^2 \Rightarrow m = \frac{E}{c^2} = \frac{E_0 + E_k}{c^2}.$$

Poměr mezi relativistickou a klidovou hmotností je:

$$\frac{m}{m_0} = \frac{\frac{E_0 + E_k}{c^2}}{\frac{E_0}{c^2}} = \frac{E_0 + E_k}{E_0}.$$

Číselně:

pro PS:

$$\frac{m}{m_0} = \frac{0,938 \text{ GeV} + 28 \text{ GeV}}{0,938 \text{ GeV}} \doteq 30,9,$$

pro LHC:

$$\frac{m}{m_0} = \frac{0,938 \text{ GeV} + 7000 \text{ GeV}}{0,938 \text{ GeV}} \doteq 7464.$$

Vztah mezi celkovou energií E , hybností p a klidovou energií E_0 je (využijeme vztahy (1) a (4)):

$$E^2 = (E_0 + E_k)^2 = E_0^2 + p^2 c^2 \Rightarrow p^2 c^2 = 2E_k E_0 + E_k^2.$$

Součin hybnosti a rychlosti světla je:

$$pc = \sqrt{2E_k E_0 + E_k^2}. \quad (11)$$

Dosadíme číselně.

Pro PS:

$$pc = \sqrt{2 \cdot 28 \text{ GeV} \cdot 0,938 \text{ GeV} + (28 \text{ GeV})^2} \doteq 28,9 \text{ GeV},$$

pro LHC:

$$pc = \sqrt{2 \cdot 7000 \text{ GeV} \cdot 0,938 \text{ GeV} + (7000 \text{ GeV})^2} \doteq 7001 \text{ GeV}.$$

Vyjádříme de Broglieho vlnovou délku λ (využijeme vztahy (7) a (11)):

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar c}{pc} = \frac{2\pi\hbar c}{\sqrt{2E_k E_0 + E_k^2}}. \quad (12)$$

Dosadíme číselně.

Pro PS:

$$\lambda = \frac{2 \cdot \pi \cdot 197,3 \text{ MeV} \cdot \text{fm}}{28,9 \text{ GeV}} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 197,3 \text{ MeV} \cdot \text{fm}}{28\,900 \text{ MeV}} \doteq 0,043 \text{ fm},$$

pro LHC:

$$\lambda = \frac{2 \cdot \pi \cdot 197,3 \text{ MeV} \cdot \text{fm}}{7\,000 \text{ GeV}} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 197,3 \text{ MeV} \cdot \text{fm}}{7 \cdot 10^6 \text{ MeV}} \doteq 0,18 \cdot 10^{-3} \text{ fm}.$$

Rychlosti protonů, které opustí urychlovače PS a LHC, jsou $0,999\,475c$ a $0,999\,999\,991\,0c$. Je vidět, že už na protonovém synchrotronu PS jsou protony urychleny na rychlost velmi blízkou rychlosti světla. U LHC se rychlost protonů liší od rychlosti světla zanedbatelně. V tomto případě se jedná o tzv. ultrarelativistické přiblížení, kdy klidová energie je zanedbatelná oproti kinetické. Vztah mezi hybností a energií se tak blíží vztahu pro foton, tedy vztahu (8). Hybnosti protonů jsou u PS a LHC $28,9 \text{ GeV}/c$ a $7\,000 \text{ GeV}/c$. Poměry mezi relativistickou a klidovou hmotností jsou u urychlovače PS $30,9$ a u LHC pak téměř $7\,464$. To znamená, že objekt urychlený pomocí PS má hmotnost téměř 31 krát větší než v klidu a u LHC je to téměř $7\,500$ krát. De Broglieho vlnová délka protonu na PS je $0,043 \text{ fm}$ a na LHC dokonce $0,18 \cdot 10^{-3} \text{ fm}$. Znamená to, že tak velké detaily ve struktuře atomového jádra či protonu můžeme zkoumat.¹⁾ Urychlovač LHC tak může zkoumat detaily, které jsou o čtyři řády menší, než je rozměr protonu. I proto, aby se zkoumaly stále jemnější rozměrové podrobnosti, se budují stále větší urychlovače.

Druhá ukázka: Nestabilita jader, radioaktivita a rozpadový zákon

Ve druhé ukázce se budeme věnovat rozpadům radioaktivních jader. Jádra mohou být stabilní, ale daleko více jich je nestabilních. Kvan-

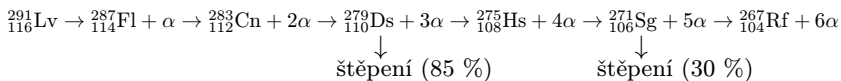
¹⁾Je třeba připomenout, že rozměr protonu je zhruba 1 fm . Při srážkách protonů s touto energií se již srážejí jednotlivé částice, které proton tvoří a které se označují jako partony. Proton má velice složitou strukturu vytvářenou velmi intenzivním kvantovým polem silné interakce. Partony tak lze spojit s kvarky a gluony (částice zprostředkující silnou interakci). Ty mají z našeho současného pohledu rozměry bodové, v každém případě o mnoho řádů menší, než je rozměr protonu.

tová fyzika je nutná i pro popis průběhu přeměny radioaktivních jader. U jednotlivého konkrétního nestabilního jádra nemůžeme říci, kdy se rozpadne. Známe jen pravděpodobnost, že se dané jádro rozpadne za časovou jednotku. Tato veličina, která je konstantní a nezávisí na předchozí době existence nestabilního jádra, se označuje jako *rozpadová konstanta* λ . Jednotkou této veličiny je $[\lambda] = \text{s}^{-1}$. Převrácená hodnota rozpadové konstanty je tzv. *střední doba života* $\tau = 1/\lambda$.

Rozpadovému zákonu je věnován již zmíněný článek [2]. Zde si popíšeme řešení jiného typu úlohy, která analyzuje sekvenci rozpadů alfa končící samovolným štěpením. Právě supertěžké prvky se rozpadají takovým způsobem. Jde o příklad, který je v textu zařazen mezi neřešené.

Ukázkový příklad 2. Jádro livermoria ^{291}Lv se může rozpadat velmi dlouhou kaskádou šesti rozpadů alfa až na jádro rutherfordia ^{267}Rf , které se rozpadá pouze samovolným štěpením. V řadě rozpadů jsou však dvě místa, kde se jádro může rozpadnout buď štěpením, nebo rozpadem alfa. Jde o darmstadtium ^{279}Ds (85 % štěpení) a seaborgium ^{271}Sg (30 % štěpení). Jaká je pravděpodobnost, že řada rozpadů skončí až u rutherfordia? Jaká je pravděpodobnost, že při produkci 40 jader ^{291}Lv budeme pozorovat 8 případů rozpadu alfa ^{279}Ds a zároveň 5 případů rozpadu alfa ^{271}Sg ?

Řešení. Při rozpadu alfa se zmenšuje počet protonů o dva a celkový počet nukleonů o čtyři. Pomocí Mendělejevovy tabulky tak lze sestavit danou rozpadovou řadu:



Jednotlivé rozpady jsou nezávislé děje, takže celková pravděpodobnost po sobě jdoucích rozpadů je dána součinem pravděpodobností postupně po sobě jdoucích rozpadů. Pokud dochází v daném kroku pouze k rozpadu alfa, je jeho pravděpodobnost 100 %. Pokud může dojít jak k rozpadu alfa, tak ke štěpení, je jejich pravděpodobnost p_α a $1 - p_\alpha$. Pravděpodobnost rozpadu alfa zároveň v případě darmstadtia i seaborgia je $p = p_\alpha(\text{Ds}) \cdot p_\alpha(\text{Sg})$. Číselně:

$$\begin{aligned}
 p_\alpha(\text{Ds}) &= 1 - 0,85 = 0,15, & p_\alpha(\text{Sg}) &= 1 - 0,30 = 0,70, \\
 p &= 0,15 \cdot 0,70 = 0,105 = 10,5 \%.
 \end{aligned}$$

Pravděpodobnost, že se rozpadová řada dostane až k rutherfordiu, je 10,5 %.

Dále máme zjistit, jaká je pravděpodobnost, že z pozorovaných 40 případů rozpadu livermoriuma má 8 případů vést i k rozpadu alfa darmstadtia a 5 i k rozpadu alfa seaborgia. Přeměnu 40 jader darmstadtia můžeme chápat jako 40 náhodných nezávislých pokusů se dvěma možnými výsledky. Příznivý výsledek má nastat právě 8krát. Jde o kombinace (nezáleží na pořadí). Počet kombinací je dán vztahem:

$$C_8(40) = \binom{40}{8} = \frac{40!}{8! \cdot 32!} = 76\,904\,685,$$

$$p(\text{Ds}) = C_8(40) \cdot p_\alpha^8 \cdot (1 - p_\alpha)^{32}.$$

Pro výpočet pravděpodobnosti p můžeme se stejným výsledkem použít Bernoulliho schéma. Číselně ($p_\alpha = 0,15$, $1 - p_\alpha = 0,85$):

$$p(\text{Ds}) = \binom{40}{8} \cdot p_\alpha^8 \cdot (1 - p_\alpha)^{32} =$$

$$= 76\,904\,685 \cdot 0,15^8 \cdot 0,85^{32} \doteq 0,108\,66 \doteq 10,9 \, \%.$$

V našem případě vznikne pouze 8 jader seaborgia a z nich požadujeme 5 případů rozpadu alfa a 3 štěpení. V tomto případě je počet kombinací:

$$C_5(8) = \binom{8}{5} = \frac{8!}{5! \cdot 3!} = 56,$$

$$p(\text{Sg}) = C_5(8) \cdot p_\alpha^5 \cdot (1 - p_\alpha)^3.$$

Číselně ($p_\alpha = 0,70$, $1 - p_\alpha = 0,30$):

$$p(\text{Sg}) = \binom{8}{5} \cdot p_\alpha^5 \cdot (1 - p_\alpha)^3 = 56 \cdot 0,70^5 \cdot 0,30^3 \doteq 0,254\,1 \doteq 25,4 \, \%.$$

Jde o dva nezávislé děje a pravděpodobnost jejich současného uskutečnění dostaneme jako součin jejich pravděpodobností:

$$p = p(\text{Ds}) \cdot p(\text{Sg}) = 0,108\,66 \cdot 0,254\,1 \doteq 0,027\,6 \doteq 0,028 = 2,8 \, \%.$$

Pravděpodobnost, že jádro livermoriuma ^{291}Lv kaskádou rozpadů alfa dospěje až k jádru rutherfordia ^{267}Rf , je 10,5 %. Pravděpodobnost, že při produkci 40 jader ^{291}Lv budeme pozorovat 8 případů rozpadu alfa ^{279}Ds a zároveň 5 případů rozpadu alfa ^{271}Sg , je 2,8 %.

Literatura

- [1] Wagner, V., Vícha, V., Janout, Z.: *Hranice Mendělejevovy tabulky*. Studijní text pro řešitele FO a ostatní zájemce o fyziku, dostupné z: <http://fyzikalniolympiada.cz/texty/supertezke.pdf>
- [2] Wagner, V.: Detekce přítomnosti radionuklidů v atmosféře. *Rozhledy matematicko-fyzikální*, roč. 92 (2017), č. 2, s. 10–22.
- [3] Šedivý, P.: *Kapitoly ze speciální teorie relativity*. Studijní text pro řešitele FO a ostatní zájemce o fyziku, dostupné z: <http://fyzikalniolympiada.cz/texty/str2.pdf>
- [4] *Resolutions of the 26th CGPM*, 2018, dostupné z: <https://www.bipm.org/utils/common/pdf/CGPM-2018/26th-CGPM-Resolutions.pdf>

* * * * *

POZOROVAL HVĚZDY A SPADL DO JÁMY

Za prvního evropského vědce, filozofa, matematika a fyzika je považován Thalés z Milétu. Ať už byly jeho vědecké výsledky a zásluhy jakékoliv, k zajištění nesmrtelnosti mu stačí jediná, mimochodem překrásná, geometrická věta o obvodovém úhlu nad průměrem kružnice spjatá s jeho jménem. Dokud bude existovat naše civilizace, budou žáci na celém světě v hodinách geometrie jeho jméno vyslovovat.

O Thalétovi se také traduje první evropská anekdota. Zaznamenal ji Platón v dialogu Theaitétos. Sókrates v něm říká: „Když Thalés, zkoumaje hvězdy a hledě vzhůru, spadl do studně, tu se mu jedna thrácká služka, chytrá a vtipná, prý posmívala, že se snaží znát věci na nebi, ale co je před ním a u jeho nohou, že mu zůstává neznámo.“ Tuto historku, kterou Platón možná skutečně slyšel od Sókrata, můžeme považovat za předobraz anekdot o roztržitých profesorech, kteří zapomínají deštníky, padají ze schodů, vaří hodinky na řetízku a sledují přítom vajíčko, zapomínají, kde zaparkovali auto a zda vůbec přijeli autem.

Ale už Platón si uvědomoval, že anekdota má hlubší podtext. Vědec, který je zaujat zkoumáním přírody a je na stopě jejím zákonům, prožívá takové vzrušení a zaujetí, že nedbá na běžné životní konvence a starosti a zapomíná na své okolí. V historii vědy máme mnoho takových příkladů. A můžeme říci, že je štěstím pro lidstvo, že vždy byli a budou myslitelé, kteří budou obracet svůj zrak vzhůru k nebi a nebudou se ohlížet na jámy a příkopy, posměšky, překážky a nebezpečí nebo malý plat.

I. Štoll: Historky o slavných fyzicích a matematicích

Matematika pro život

Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská ve spolupráci s Pedagogickou fakultou Univerzity Karlovy pořádala 25. ledna 2019 jednodenní akci s názvem Matematika pro život. Na programu kurzu byly ukázky aplikací matematiky v průmyslové i akademické praxi.



Přednášky představily použití matematiky v nejrůznějších oborech, například:

- použití lineární algebry ve zpracování obrazu,
- modelování dopravních systémů,
- použití metod strojového učení v bankovníctví,
- matematické modelování v medicíně a biologii,
- matematické metody teoretické fyziky.

Přednášeli přední odborníci v jednotlivých oborech:

- RNDr. Iveta Hnětynková, Ph.D. (MFF UK): Umí počítače počítat?
- RNDr. Jiří Kottas, CSc. (matematik, bankéř, fotograf): Matematika a podvodníci: Historiky z kreditního podsvětí.

- doc. Mgr. Milan Krbálek, Ph.D. (FJFI ČVUT): Detekce interakčních sil v proudu vozidel aneb obecnější pohled na pojem vzdálenosti v matematice.
- prof. RNDr. Michal Křížek, DrSc. (MÚ AV ČR): Matematika je všude kolem nás: o aplikacích matematiky.
- Ing. Tomáš Oberhuber, Ph.D. (FJFI ČVUT): Matematika v medicíně.
- Ing. Tomáš Pevný, Ph.D. (FEL ČVUT & Cisco Systems): Použití středoškolské matematiky ve strojovém učení.
- RNDr. Vladimír Wagner, CSc. (ÚJF AV ČR): Matematika pro jadernou fyziku.
- doc. RNDr. Barbara Zitová, Ph.D. (ÚTIA AV ČR): Co nevidíme ve fotografii.

Kurz měl hojnou účast zejména z řad středoškolských profesorů matematiky a má velmi pozitivní ohlasy. Byly pořízeny kvalitní záznamy přednášek, které jsou k dispozici na YouTube kanálu:

www.youtube.com/channel/UCMwjxViEHA9ADU1Ur8A5Daw

Jan Vybíral (FJFI ČVUT, Praha)

Soutěž ČMS pro mladé

Česká matematická společnost ve snaze podpořit popularizační a vědeckou činnost mladších kolegů a kolegyň vyhlásila nedávno v souladu s tradicí soutěž na podporu akcí pro studenty a mladé kolegy pro rok 2019. Soutěž se několik let těší značné pozornosti a úspěšným uchazečům může mírně pomoci s rozpočtem jejich akcí.

Termín pro podávání návrhů je do 31. 5. 2019.

Detaily je možné nalézt na internetové stránce ČMS:

<http://jcmf.cz/cms>

Luboš Pick (předseda ČMS)

Soustředění mladých fyziků a matematiků

Ačkoliv většina středoškoláků nechce během prázdnin o škole ani slyšet, najdou se mezi nimi tací, kteří rádi tráví svůj volný čas s matematikou a fyzikou. Pro takové nadšené žáky připravují studenti, absolventi a zaměstnanci Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy každoročně Soustředění mladých fyziků a matematiků.

Čtrnáctidenní soustředění, které se odehrává v různých objektech po celé České republice, je určeno pro žáky ve věku 14 až 19 let. V minulosti jsme navštívili například šumavský Zadov či Nekoř v Orlických horách.

Program soustředění je rozdělen na dvě základní části – odbornou a mimoodbornou. V rámci odborného programu jsou zařazeny kurzy a projekty z fyziky, matematiky, ale i informatiky. Kurzy a projekty si účastníci vybírají na začátku soustředění z mnoha nabízených variant podle vlastních preferencí. Pravidelný odborný program bývá proložen odbornými přednáškami od lektorů z MFF UK či jiných vědeckých institucí. Na závěr soustředění si účastníci zažijí i konferenci, kde ostatním účastníkům a vedoucím představí výsledky své práce. Zároveň ke svým projektům sepisují odbornou dokumentaci, ve které popisují postup práce a praktické informace k tvorbě projektu.

Mimoodborný program má své místo pravidelně v odpoledních hodinách. Účastníci si tak mohou odpočinout od odborného programu a zažít spoustu skvělých aktivit. Kromě sportovně zaměřených her zařazujeme do programu často hry strategické a šifrovací, které bývají mezi našimi účastníky velmi oblíbené. Nezapomínáme ale ani na celodenní výlet, taneční večery či táborák.

Pro navození atmosféry vozíme na soustředění tematické kostýmy, ve kterých se vedoucí i účastníci každý den setkávají během večere a pravidelného večerního setkání. Pokyny k výrobě kostýmu zasíláme přihlášeným účastníkům během dubna, aby měli dostatek času na jeho zdokonalení.

Přípravy na letošní ročník, který se bude konat v termínu 20. 7.–3. 8. 2019 v Cholině u Slapské přehrady, jsou již v plném proudu. Podrobnější informace a fotky z proběhlých ročníků jsou k nalezení na naší facebookové stránce či webových stránkách kdf.mff.cuni.cz/tabor, kde se nachází také přihláška na aktuální rok.



Pokud si s námi chcete užít čtrnáct dní zábavy, bádání a tvoření, neváhejte a přidejte se k nám!

Jana Machalická, hlavní vedoucí

TCN: Léto přeje aktivním

Letní soustředění TCN aneb „Tudy cesta nevede“ pořádají studenti Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT pro studenty středních škol již devatenáct let. Tradičně probíhá první dva srpnové týdny a od roku 2015 se soustředění pravidelně koná v penzionu Krakonoš v Bílém Potoce pod Smrkem. V posledních letech se ho účastní přibližně 25 studentů nejen z České republiky. Třebaže je tábor určen především pro studenty se zájmem o matematiku, fyziku a další přírodní vědy, nejsou věkáemka (večerní kurzy matematiky) zdaleka jediným oblíbeným bodem programu.

Celotáborová hra, tvořící rámec všech táborových aktivit, zahrnuje různé typy více či méně sportovních a logických her, při kterých je nutno spoлеhnout se zejména na schopnosti svého týmu. Program je pak doplněn o přednášky pozvaných hostů (jde především o pracovníky FJFI ČVUT, ÚJV Řež apod.), přednášky organizátorů, minikonference se studentskými projekty (od účastníků, kteří chtějí přispět svým zajímavým pokusem) a už zmíněné kurzy algebry či analýzy. Ty se snaží poměrně neformálně studentům přiblížit vysokoškolský styl výuky matematiky. Mají být nápomocné hlavně těm, kteří na TCN tráví své pomaturitní prázdniny a chystají se nastoupit na technicky zaměřenou vysokou školu. Jestliže doposud neslyšeli o pojmech, jako jsou vektorový prostor, lineární (ne)závislost, báze, limita nebo derivace, mohou se s nimi seznámit zde, což poté může usnadnit úspěšný vstup do prvního semestru na vysoké škole. Neméně důležitý je i den věnovaný exkurzi na vědecké či technologicky zaměřené pracoviště (v minulých letech jimi byly například Technická univerzita v Liberci, firma Crytur nebo úložiště jaderného odpadu Richard) a celodenní turistický výlet po okolních vrcholech Jizerských hor. Na závěr je třeba zmínit ještě odpočinkový program, zahrnující například hraní všemožných stolních her a ping-pongu, taneční večery, oblíbené koupání v blízké řece nebo bazénu a večerní zpívání u táboráku.



Skupinové foto z výšlapu k rozhledně na Smrku v roce 2018

A jaký že byl loňský rok? V roce 2018 se soustředění zúčastnilo 22 studentů a 9 organizátorů. Sešel se dobrý kolektiv lidí, celé dva týdny se nesly jako vždy v příjemném duchu a daly vzniknout i spoustě nových přátelství. Účastníci byli postaveni před nelehký úkol – ve zpožděném Jizerskohorském expresu řádil krvelačný vrah a oni jej museli během dvou týdnů odhalit. Nejlépe dřív, než by se mu podařilo zbavit se ostatních cestujících. Body do celotáborové hry (trefně překřtěné jako věrnostní ČD body a sbírané během jednotlivých soutěží a her) pak mohli vyměnit za indicie a důvěrné informace od ostatních, které by je na stopu vraha navedly. K překvapení většiny cestujících nakonec nebyl vrahem ani vysloužilý generál, ani strojvedoucí či lékař, ale byl jím mile, leč lstivě vystupující jaderňák. Na zahradníka, ač by se z logiky věci nabízel jako ideální adept na vraždícího maniaka, naneštěstí nemohl padnout ani stín podezření, neboť se stal vrahovou první obětí. Experimentálně tak bylo ověřeno, že lidové moudro „vrahem je zahradník“ je výrokem nepravdivým.

Program byl opět velmi různorodý. Některé hry rozvíjely schopnost účastníků myslet nekonvenčně a kreativně – z těchto her lze jmenovat například originálně pojatý Scrabble, kde se uznává vše, kromě normálních (= nudných) a oposlouchaných slov, či třeba Cestu, kde měli účastníci na určité trase hned několik stanovišť, kde byla prověřena jejich týmová spolupráce, jazykově-poetické schopnosti a paměť na rozličná slovní spojení a novotvary.

Další série her byla naopak zaměřená na strategické myšlení a umění využít předností každého z týmu. Mezi těmito je možné zmínit Běh marodů, kdy byl každý „běžec“ stížen jistou neschopností. Účastníci, kteří dostali pásku přes oči, si tak mohli relativně odpočinout na stanovišti, kde jejich kolegové z týmu řešili zapeklitou šifru ve formě vlakového jízdního řádu, nicméně i na ně došlo při následujícím úkolu, kde museli za pomoci svých kolegů (němých, se svázanýma rukama anebo zákazem došlapovat na jednu/obě nohy) projít dráhu s fotbalovým míčem a vstřelit branku. Při hře Obchodníci pak studenti využili své marketingové, obchodní a vyjednávací schopnosti. Všechny tyto hry byly zároveň strategické i fyzicky náročné – pokud tým vsadil na nepropracovanou strategii, musel svůj výsledek dohánět ve fyzických úkolech či běháním pro některé nezbytné herní komponenty a body.

Většina večerů se pak nesla v matematickém duchu díky VKM. Účastníci se nejen před těmito hodinami, strávenými tentokrát nad lineární algebrou, mohli posilnit oblíbenou točenou kofolou, kterou hltali stejně

jako věty o vektorových prostorech. Během dne nechyběly přednášky od hostů, kterých celkem dorazilo devět, mezi nimi tradičně děkan FJFI prof. Igor Jex a tajemník fakulty Ing. Leopold Vrána. Z dalších můžeme připomenout prof. Borise Tomášika, od kterého si účastníci vyslechli, zda relativistická hmotnost závisí na rychlosti či nikoliv, a Ing. Marka Ruščáka, který vykládal o aktuálním vývoji modulárního jaderného reaktoru. Nedílnou součástí odborného programu byla i exkurze do již zmíněné firmy Crytur, zabývající se syntetickou tvorbou krystalů, kde bylo možné si prohlédnout přístroje na jejich pěstování, kontrolu růstu či opracování.



Ukázka ze hry Běh marodů

Na závěr bychom vás rádi pozvali na letošní ročník, který se bude odehrávat v duchu imunitního systému bojujícího s mnoha nástrahami okolního (mikro)světa. Termín konání je 27. 7. – 10. 8. 2019. Pokud se k nám chcete přidat, stačí vyplnit webový formulář dostupný na stránkách TCN (<https://tcn.fjfi.cvut.cz/>). Nebo poslat jakékoli dotazy na email: berespav@fjfi.cvut.cz.

Těšíme se na vás!

Za organizátory soustředění

David Grund

NAŠE SOUTĚŽ

Naše soutěž

Milí čtenáři,

oznamujeme, že pro tuto chvíli ukončujeme Naši soutěž. Všem čtenářům, kteří se soutěže v minulých letech účastnili, moc děkujeme a gratulujeme nejlepším řešitelům.

Dále předkládáme řešení úloh z předchozích čísel.

Řešení úloh z čísla 2/2018

Úloha 71 V rovnoběžníku $ABCD$ se stranami celočíselných délek a, b , $a \neq b$, sestrojíme osy vnitřních úhlů. Tyto osy ohraničují čtyřúhelník $KLMN$.

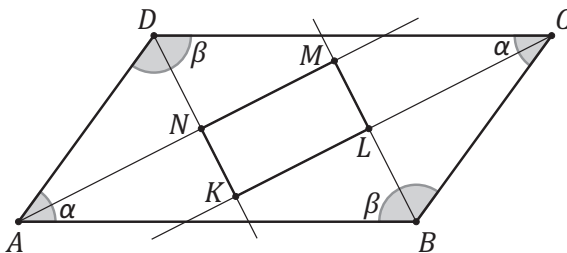
- Dokažte, že $KLMN$ je pravoúhelník.
- Najděte poměry $a : b$ všech takových rovnoběžníků, pro něž je celočíselný podíl obsahů

$$S(ABCD) : S(KLMN) \quad \text{nebo} \quad S(KLMN) : S(ABCD).$$

(Jaroslav Zhouf)

Řešení: Bez újmy na obecnosti předpokládejme ve všech úvahách $a > b$.

a) Načtneme obrázek, který vystihuje jednu z možných situací, kdy všechny body K, L, M, N leží uvnitř rovnoběžníku $ABCD$ (pro případ, kdy K, M leží na obvodu či vně rovnoběžníku $ABCD$ lze použít analogické úvahy).



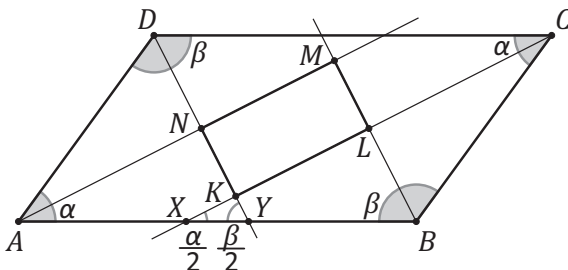
Obr. 1: Osy vnitřních úhlů rovnoběžníku ohraničující čtyřúhelník

Označme $|\angle A| = |\angle C| = \alpha$ a $|\angle B| = |\angle D| = \beta$; tedy podle věty o součtu vnitřních úhlů čtyřúhelníku dostáváme $\alpha + \beta = 180^\circ$. Vezměme

nyní například $\triangle AND$, jehož dva vnitřní úhly mají velikost $\alpha/2$ a $\beta/2$ (strany leží v osách úhlů rovnoběžníku $ABCD$), a proto s využitím věty o součtu vnitřních úhlů trojúhelníku dostáváme $|\sphericalangle AND| = 90^\circ$, tedy $|\sphericalangle MNK| = 90^\circ$. Obdobnými úvahami získáme rovněž

$$|\sphericalangle NKL| = |\sphericalangle KLM| = |\sphericalangle LMN| = 90^\circ.$$

b) Doplňme do obrázku body X a Y – po řadě průsečíky strany AB s osami $\sphericalangle C$ a $\sphericalangle D$ (je-li $ABCD$ pravoúhelník, pak tyto průsečíky splynou).



Obr. 2: Doplnění bodů X a Y do obrázku

Snadno nahlédneme, že $\triangle AYD$ je rovnoramenný ($|AD| = |AY| = b$) a také $\triangle XBC$ je rovnoramenný ($|XB| = |BC| = b$). Tedy

$$|AX| = |YB| = a - b.$$

Dále si stačí uvědomit, že úsečka NK vzniká jako průmět úsečky AX do osy $\sphericalangle D$ a úsečka KL vzniká jako průmět úsečky YB do osy $\sphericalangle C$. Při promítání se uplatní kosinus úhlu, který je vymezen přímkou, ze které se promítá, a přímkou, do které se promítá, tedy

$$|KL| = |BY| \cdot \cos \frac{\alpha}{2} = (a - b) \cos \frac{\alpha}{2},$$

$$|NK| = |AX| \cdot \cos \frac{\beta}{2} = (a - b) \cos \frac{\beta}{2}.$$

Nyní již stačí spočítat obsahy obou čtyřúhelníků

$$S_1 = S(ABCD) = ab \sin \alpha,$$

$$S_2 = S(KLMN) = (a - b)^2 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2}$$

NAŠE SOUTĚŽ

a určit jejich poměry $S_1 : S_2$ a $S_2 : S_1$. Platí

$$\begin{aligned}\frac{S_1}{S_2} &= \frac{ab \sin \alpha}{(a-b)^2 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2}} = \frac{2ab \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{(a-b)^2 \cos \frac{\alpha}{2} \cos(90^\circ - \frac{\alpha}{2})} = \\ &= \frac{2ab \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{(a-b)^2 \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\alpha}{2}},\end{aligned}$$

a tedy dostáváme

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{2ab}{(a-b)^2} \quad \text{a} \quad \frac{S_2}{S_1} = \frac{(a-b)^2}{2ab}.$$

Zbývá určit, kdy jsou výše uvedené poměry celočíselné.

V první řadě zdůrazníme, že hledáme poměry $a : b$, kde $a, b \in \mathbb{Z}^+$, $a > b$. Lze tedy předpokládat, že hledaná čísla a, b jsou nesoudělná, tedy $D(a, b) = 1$.

(b.1) Ptáme se, kdy je poměr

$$\frac{2ab}{(a-b)^2}$$

celočíselný.

Pokud je $a - b$ sudé, tedy $a - b = 2m$, $m \in \mathbb{Z}^+$, pak musí být obě čísla lichá (sudost je vyloučena vzhledem k předpokladu $D(a, b) = 1$). Potom dostáváme

$$\frac{ab}{2m^2}$$

a muselo by platit $2|a$, nebo $2|b$, což však nemůže nastat (lichá čísla). Poměr tedy nebude v tomto případě nikdy celočíselný.

Nechť je $a - b$ liché číslo, tedy $a - b = 2m + 1$, $m \in \mathbb{Z}_0^+$. Snadno nahlédneme, že vlastnost je splněna pro $a - b = 1$.

Předpokládejme dále, že $a - b \geq 3$, tedy $(a - b)^2$ buďto dělí a , anebo b – nicméně jen jedno z nich, a to vzhledem k podmínce $D(a, b) = 1$. Totéž platí i pro číslo $a - b$, které rovněž dělí jen jedno z čísel a, b . Nechť $a - b$ dělí a , potom existuje $\ell \in \mathbb{Z}$ takové, že $(a - b)\ell = a$, tedy $a(\ell - 1) = b\ell$. Jelikož a, b jsou nesoudělná, potom musí být $\ell = ka$ a $\ell - 1 = kb$. Po odečtení dostaneme $1 = k(a - b)$, tedy $k = a - b = 1$. Nicméně $a - b$ je dle předpokladu větší než 1. Obdobně pro případ, kdy $a - b$ dělí b . Poměr tedy nebude v tomto případě nikdy celočíselný.

(b.2) Ptáme se, kdy je poměr

$$\frac{(a-b)^2}{2ab}$$

celočíslný.

Zřejmě by pak muselo platit $2|(a-b)^2$, $a|(a-b)^2$ a $b|(a-b)^2$. Vezměme např. podmínku $a|(a-b)^2$, ze které plyne $a|b^2$, což však pro nesoudělná čísla a, b splněno být nemůže. Uvedený poměr tedy nebude nikdy celočíselný.

Shrnutí: Pro $a > b$ jde o poměry ve tvaru

$$a : b = (k + 1) : k, \quad \text{kde } k \in \{1, 2, 3, \dots\}.$$

Pokud bychom naopak předpokládali $a < b$, pak by šlo o převrácené poměry ve tvaru $k : (k + 1)$.

Úloha 72 Korková krychle

Korkové těleso tvaru krychle o délce hrany a , hmotnosti m_1 a hustotě $\rho_1 = 250 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ je ve vzduchu o molární hmotnosti $M_m = 29 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ a teplotě $t = 20 \text{ }^\circ\text{C}$ při atmosférickém tlaku $p_a = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ vyváženo na rovnoramenných vahách závažím o hmotnosti $m_2 = 600 \text{ g}$ a hustotě $\rho_2 = 7800 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. Jaká by byla hmotnost korkové krychle ve vakuu? Určete také délku hrany korkové krychle.

Řešte nejprve obecně, potom pro dané hodnoty.

Vzduch považujte při řešení úlohy za ideální plyn, molární plynová konstanta $R = 8,31 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$.

(Miroslava Jarešová)

Řešení: Označme ρ hustotu vzduchu při tlaku p_a a teplotě t , V_1 objem korku, V_2 objem závaží, které vyvažuje korek.

Pro rovnováhu na rovnoramenných vahách platí podmínka

$$m_1 - V_1 \cdot \rho = m_2 - V_2 \cdot \rho.$$

Po dosazení za $V_1 = \frac{m_1}{\rho_1}$, $V_2 = \frac{m_2}{\rho_2}$ do výše uvedené rovnice dostaneme

$$m_1 - \frac{m_1}{\rho_1} \rho = m_2 - \frac{m_2}{\rho_2} \rho,$$

po úpravě

$$m_1 \left(1 - \frac{\rho}{\rho_1} \right) = m_2 \left(1 - \frac{\rho}{\rho_2} \right),$$

NAŠE SOUTĚŽ

z čehož

$$m_1 = \frac{1 - \frac{\varrho}{\varrho_2}}{1 - \frac{\varrho}{\varrho_1}} m_2 = \frac{\varrho_1(\varrho_2 - \varrho)}{\varrho_2(\varrho_1 - \varrho)} m_2.$$

Dále platí $\varrho = \frac{M_m}{V_m}$. Molární objem V_m určíme ze stavové rovnice ideálního plynu pro 1 mol: $p_a V_m = RT$, z čehož

$$V_m = \frac{RT}{p_a}.$$

Po dosazení za V_m do vztahu pro ϱ dostaneme

$$\varrho = \frac{p_a M_m}{RT}.$$

Po dosazení za ϱ do vztahu pro m_1 dostaneme

$$m_1 = \frac{\varrho_1 \left(\varrho_2 - \frac{p_a M_m}{RT} \right)}{\varrho_2 \left(\varrho_1 - \frac{p_a M_m}{RT} \right)} m_2 = \frac{\varrho_1 (\varrho_2 RT - p_a M_m)}{\varrho_2 (\varrho_1 RT - p_a M_m)} m_2.$$

Délku hrany krychle určíme ze vztahu $a = \sqrt[3]{\frac{m_1}{\varrho_1}}$. Pro dané hodnoty $m_1 = 603$ g, $a = 13,4$ cm.

Řešení úloh z čísla 3/2018

Úloha 73 Reálná čísla a, b jsou parametry, navíc a je vícenásobným kořenem rovnice

$$x^6 - ax^5 + x^4 - ax^3 + x^2 + 2bx + b^2 = 0.$$

Určete všechny reálné kořeny této rovnice. Provedte diskusi vzhledem k parametrům a, b .

(Jaroslav Zhouf)

Řešení: Jelikož a je kořen, platí

$$a^6 - a^6 + a^4 - a^4 + a^2 + 2ba + b^2 = (a + b)^2 = 0.$$

Parametry tedy splňují $b = -a$. Vydělme

$$(x^6 - ax^5 + x^4 - ax^3 + x^2 - 2ax + a^2) : (x - a) = x^5 + x^3 + x - a.$$

Jelikož a je vícenásobný kořen, platí

$$a^5 + a^3 + a - a = a^3(a^2 + 1) = 0.$$

Tudíž $a = 0$ a $b = 0$. Hledáme tak vlastně kořeny rovnice

$$x^6 + x^4 + x^2 = x^2(x^4 + x^2 + 1) = 0.$$

Protože

$$x^4 + x^2 + 1 \geq 1 \quad \text{pro každé } x \in \mathbb{R},$$

je jediným kořenem $x = 0$, a to dvojnásobným.

Úloha 74 *Izolované nádoby*

Do dvou tepelně izolovaných nádob postupně nalijeme vodu o stejné hmotnosti $M = 2$ kg. Voda v první nádobě bude mít teplotu $t_1 = 70$ °C, voda v druhé nádobě bude mít teplotu $t_2 = 15$ °C. Část vody o hmotnosti m přelijeme z první nádoby do druhé, po ustálení bude teplota vody v druhé nádobě t'_2 . Potom stejné množství vody o hmotnosti m opět přelijeme do první nádoby a necháme ustálit, teplota vody v první nádobě bude $t'_1 = 65$ °C. Určete

- teplotu t'_2 vody v druhé nádobě na konci děje,
- hmotnost m vody, která byla přelita z první nádoby do druhé a pak zpět do první.

Tepelnou kapacitu nádob zanedbejte. Řešte nejprve obecně, potom pro dané hodnoty.

(*Miroslava Jarešová*)

Řešení:

a) Vzhledem k tomu, že $t_1 > t_2$, je změna teploty vody v první nádobě na konci děje $t_1 - t'_1$; voda odevzdala teplo

$$Q = cM(t_1 - t'_1).$$

Protože soustava je izolovaná, přijala voda v druhé nádobě stejné teplo Q ; platí tedy

$$cM(t_1 - t'_1) = cM(t'_2 - t_2),$$

z čehož

$$t'_2 = t_1 - t'_1 + t_2.$$

b) Voda o hmotnosti m předá po přelití v druhé nádobě teplo

$$Q' = cm(t_1 - t'_2).$$

Stejně teplo přijme voda v druhé nádobě. Platí proto

$$cm(t_1 - t'_2) = cM(t'_2 - t_2),$$

po dosazení za t'_2 z části a)

$$m[t_1 - (t_1 - t'_1 + t_2)] = M(t_1 - t'_1),$$

po úpravě

$$m(t'_1 - t_2) = M(t_1 - t'_1),$$

z čehož

$$m = \frac{t_1 - t'_1}{t'_1 - t_2} M.$$

Pro dané hodnoty $t'_2 = 20$ °C, $m = 0,2$ kg.

Řešení úloh z čísla 4/2018

Úloha 75 Jistý jazyk používá pouze dva různé znaky a, b . V tomto jazyce jsou přípustná jen taková slova, v nichž mohou stát vedle sebe nejvýše dva stejné znaky. Označíme-li p_n počet přípustných slov délky n , $n \in \mathbb{N}$, dokažte, že platí

$$p_{n+3} = 2p_{n+1} + p_n, \quad p_1 = 2, \quad p_2 = 4, \quad p_3 = 6.$$

(Jaroslav Zhouf)

Řešení: Přípustná slova délky jedna jsou a, b , tudíž $p_1 = 2$. Přípustná slova délky dva jsou aa, ab, ba, bb , proto $p_2 = 4$. Přípustná slova délky tři jsou $aab, aba, abb, baa, bab, bba$, tedy $p_3 = 6$.

Rozdělíme nyní slova délky $n+3$, $n \in \mathbb{N}$, do šesti disjunktních množin:

- A je množina slov s příponou aab : každé ze slov množiny A vznikne přidáním přípony aab k přípustnému slovu délky n končícímu písmenem b , proto A obsahuje $p_n/2$ slov.
- B je množina slov s příponou bba : slova množiny B vzniknou záměnou písmen $a \leftrightarrow b$ ve slovech množiny A , proto B také obsahuje $p_n/2$ slov.

- C je množina slov s příponou aba : slova množiny C vzniknou ze slov délky $n + 1$ končících písmenem a přidáním přípony ba , tudíž C obsahuje $p_{n+1}/2$ slov.
- D je množina slov s příponou abb : slova množiny D vzniknou ze slov délky $n + 1$ končících písmenem a přidáním přípony bb , tudíž D obsahuje $p_{n+1}/2$ slov.
- E je množina slov s příponou bab : slova množiny E vzniknou záměnou písmen $a \leftrightarrow b$ ve slovech množiny C , proto E také obsahuje $p_{n+1}/2$ slov.
- F je množina slov s příponou baa : slova množiny F vzniknou záměnou písmen $a \leftrightarrow b$ ve slovech množiny D , proto F také obsahuje $p_{n+1}/2$ slov.

Odtud

$$p_{n+3} = |A| + |B| + |C| + |D| + |E| + |F| = p_n + 2p_{n+1}.$$

Úloha 76 *Lodky*

Na hladině vody jsou dvě lodky v klidu zády u sebe. V každé sedí chlapec. Chlapec na první loďce o celkové hmotnosti m_1 tlačí pádlem konstantní silou po dobu Δt do druhé loďky o celkové hmotnosti m_2 . Druhá loďka tak dosáhne vzhledem k hladině vody rychlosti o velikosti v_2 . Určete

- konečnou velikost vzájemné rychlosti v obou loděk,
- velikost síly F , kterou chlapec působil,
- změnu vzdálenosti Δd mezi loďkami během silového působení chlapce,
- práci W , kterou chlapec během působení síly F vykonal,
- poměr kinetických energií druhé a první loďky.

Odporové síly zanedbejte. Řešte nejprve obecně, pak pro $m_1 = 240$ kg, $m_2 = 160$ kg, $v_2 = 0,90$ m · s⁻¹, $\Delta t = 1,5$ s.

(Josef Jírů)

Řešení:

a) Označme v_1 velikost rychlosti první loďky vzhledem k vodě. Ze zákona zachování hybnosti $m_1 v_1 = m_2 v_2$ plyne

$$v_1 = \frac{m_2}{m_1} v_2.$$

NAŠE SOUTĚŽ

Jelikož se loďky pohybují od sebe, je velikost vzájemné rychlosti rovna součtu velikostí jejich rychlostí vzhledem k vodě

$$v = v_1 + v_2 = \frac{m_1 + m_2}{m_1} v_2 = 1,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

b) Podle 2. Newtonova pohybového zákona platí

$$F = \frac{m_2 v_2}{\Delta t} = 96 \text{ N}.$$

c) Změna vzdálenosti loďek během vzájemného působení je součtem drah ujetých rovnoměrně zrychleným pohybem za dobu Δt

$$\Delta d = \frac{1}{2} v_1 \Delta t + \frac{1}{2} v_2 \Delta t = \frac{1}{2} (v_1 + v_2) \Delta t = \frac{1}{2} v \Delta t = \frac{m_1 + m_2}{2m_1} v_2 \Delta t$$

$$\Delta d = 1,1 \text{ m}.$$

d) Chlapec vykonal práci, která je rovna součtu kinetických energií obou loďek:

$$W = E_{k1} + E_{k2} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2.$$

Po dosazení za v_1 z úlohy a) dostaneme

$$W = \frac{1}{2} m_1 \left(\frac{m_2}{m_1} v_2 \right)^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{m_2 (m_1 + m_2)}{2m_1} v_2^2 = 108 \text{ J}.$$

e) Platí

$$\frac{E_{k2}}{E_{k1}} = \frac{\frac{1}{2} m_2 v_2^2}{\frac{1}{2} m_1 v_1^2} = \frac{m_2 v_2^2}{m_1 \left(\frac{m_2}{m_1} v_2 \right)^2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{3}{2}.$$

Výzva k zasílání článků

Vážené studentky, vážení studenti!

- ➔ Řešíte zajímavou fyzikální, matematickou či informatickou práci?
- ➔ Týká se vaše seminární práce některého z výše uvedených oborů?
- ➔ Podílíte se na zajímavém F, M, I projektu?
- ➔ Chcete představit výsledky své práce také ostatním?
- ➔ Organizujete seminář, tábor, soutěž nebo nějakou jinou akci týkající se F, M, I pro středoškoláky?
- ➔ Máte nějaký jiný námět, který by se měl objevit v tomto časopise?

Napište článek a zašlete nám jej do *Rozhledů!*

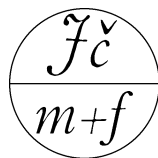
Přijímáme články shrnující původní práce, přehledové články či krátká sdělení. Váš příspěvek bude po recenzi uveřejněn v jednom z následujících čísel našeho časopisu.

Články zasílejte na adresu: rozhledy@jcmf.cz

ROZHLEDY

matematicko-fyzikální

Ročník 94 (2019), číslo 1



OBSAH

M. Snětinová: Slovo úvodem	1
Ľ. Dvořáková, D. Ryzák: Antipalindromická čísla	2
J. Vybíral: Lékařské testy individuální a skupinové	10
E. Šubert: Proč jsou kanály kulaté	22
Z. Drozd, M. Snětinová, K. Žilavá: Vážení zeměkoule	25
V. Wagner: Hranice Mendělejevovy tabulky prvků	32
J. Vybíral: Matematika pro život	45
L. Pick: Soutěž ČMS pro mladé	46
J. Machalická: Soustředění mladých fyziků a matematiků	47
D. Grund: TCN: Léto přeje aktivním	48
Naše soutěž	52

Pokyny pro autory

Příspěvky dodávejte na adresu redakce v elektronické podobě. Nejlépe napsané ve formátu \LaTeX , přijatelný je i formát Plain \TeX , je akceptovatelný i text připravený editorem Word či podobným.

Pokud jde o obrázky, je žádoucí, aby byly připraveny v reprodukovatelné podobě. Každý obrázek nechť je v samostatném souboru, nejlépe ve formátu eps nebo pdf. Přípustná je též bitmapa v dostatečném rozlišení.

Ke každému zasílanému příspěvku (ne u soutěží, zpráv a recenzí) přiložte krátkou anotaci v českém jazyce. Dále je žádoucí, aby u každého příspěvku byla uvedena literatura, na kterou je v textu odkazováno.