

ROZ HLEDY

MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ

ČASOPIS PRO ZÁJEMCE O MATEMATIKU, FYZIKU A INFORMATIKU

ROČNÍK 94 (2019) • ČÍSLO 2

Vydává Jednota českých matematiků a fyziků
tel.: 222 090 708-9, e-mail: jcmf@math.cas.cz
za podpory MFF UK Praha a FJFI ČVUT Praha



Vycházejí 4 čísla v kalendářním roce

Obálku navrhl Bohuslav Šír

Sazbu programem \TeX připravil RNDr. Miloslav Závodný

Adresa redakce: MFF UK, V Holešovičkách 2, 182 00 Praha 8–Troja
e-mail: rozhledy@jcmf.cz

Internetové stránky časopisu: <https://rozhledy.jcmf.cz/>

Vytiskla Tiskárna Pohlline, Zálesí 1126/88, 142 00 Praha 4

Distribuci pro předplatitele provádí v zastoupení vydavatele
MYRIS TRADE, s. r. o.

Budova A, 3. patro, Tůrkova 828/20, 149 00 Praha 4
tel.: 296 371 202, fax: 296 371 201, e-mail: myris@myris.cz

ISSN 0035-9343

MK ČR E4691

© Jednota českých matematiků a fyziků, Praha 2019

Redakční rada

Vedoucí redaktorka:

RNDr. Marie Snětinová, Ph.D., MFF UK Praha

Redaktorka pro matematiku:

doc. Ing. Lubomíra Dvořáková, Ph.D., FJFI ČVUT Praha

Redaktor pro fyziku:

doc. RNDr. Mgr. Vojtěch Žák, Ph.D., MFF UK Praha

Členové redakční rady:

doc. RNDr. Zdeněk Drozd, Ph.D., MFF UK Praha

RNDr. Petr Hanuš, FSv ČVUT Praha

doc. RNDr. Jaroslav Hora, CSc., FPE ZČU Plzeň

PhDr. Miroslava Jarešová, Ph.D., SPŠST a VOŠ Chrudim

prof. RNDr. Ivo Kraus, DrSc., FJFI ČVUT Praha

doc. RNDr. Jan Kříž, Ph.D., PřF UHK Hradec Králové

doc. RNDr. Miroslav Lávička, Ph.D., FAV ZČU Plzeň

RNDr. Miroslav Randa, Ph.D., PdF ZČU Plzeň

RNDr. Jan Šlégr, Ph.D., PřF UHK Hradec Králové

prof. RNDr. Pavel Tlustý, CSc., PedF JU České Budějovice

doc. RNDr. Pavel Töpfer, CSc., MFF UK Praha

prof. Ing. Bohumil Vybíral, CSc., PřF UHK Hradec Králové

RNDr. Vladimír Wagner, CSc., ÚJF AV ČR Řež

Vyzkoušejte metodu Monte Carlo

Ľubomíra Dvořáková, FJFI ČVUT, Praha

Abstrakt. Stochastická metoda Monte Carlo (tedy kombinující pravděpodobnost a statistiku) nachází uplatnění v mnoha oblastech: jaderná a částicová fyzika [4], termodynamika a statistická fyzika [5], předpověď počasí, počítačová grafika, filmové efekty, finanční matematika. My si vysvětlíme podstatu metody a ukážeme některé její aplikace, přičemž si vystačíme se znalostmi středoškolské matematiky obohatenými o pojmy náhodná veličina, střední hodnota a rozptyl.

1. Historie

Popis historie metody čerpáme z [3].

Metoda Monte Carlo byla formulována ve 40. letech 20. století a svého využití se dočkala ještě v průběhu druhé světové války. Jejími zakladateli byli S. Ulam a J. von Neumann, kteří v té době pracovali v americké Národní laboratoři Los Alamos, kde zkoumali chování neutronů. Především je zajímavé, jaké množství neutronů projde různými materiály (např. nádrží vody). Přes velké množství informací nebylo možné tento problém vyřešit teoreticky ani prakticky. K výsledku dopomohla až metoda Monte Carlo, kdy se autoři nechali inspirovat hazardní hrou ruleta (odtud také název Monte Carlo). Bylo jim známo, že k pohlčení neutronu jiným atomem dojde v přibližně jednom případě ze sta. Každé roztočení rulety by simulovalo pohyb neutronu. Pokud by se zastavila na dílku, který znázorňuje pohlčení neutronu, neutron by cestu neprošel. To by se opakovalo vždy tak dlouho, dokud by neutron nebyl pohlčen, nebo dokud by úspěšně neprošel celou cestu.

Ač je tento příklad velmi zjednodušený, podstatu metody Monte Carlo vystihuje. Simulace by byla pochopitelně velmi časově náročná, pokud by se skutečně pokaždé točilo ruletou. Autoři ale pracovali v době, kdy vývoj výpočetní techniky byl již v plném proudu, a proto pro tyto simulace mohli používat na dnešní dobu jednoduché počítače, které dobu simulace výrazně zkrátily.

2. Nutné znalosti z pravděpodobnosti a statistiky

U čtenáře předpokládáme znalosti pravděpodobnosti a statistiky na středoškolské úrovni (jak jsou obsaženy například v učebnici [1]). Vybudojeme nyní mírnou nadstavbu nad středoškolskými znalostmi. Nechť Ω značí množinu všech možných výsledků náhodného pokusu. *Náhodná veličina* je funkce $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, jejíž hodnota je jednoznačně určena výsledkem náhodného pokusu. Označme možné hodnoty X jako x_1, x_2, \dots, x_k . *Pravděpodobnostní funkce náhodné veličiny* X je funkce p , která je definována jako $p(x_i) = P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x_i\})^1$. Jde tedy o pravděpodobnost náhodného jevu, že náhodná veličina nabývá hodnoty x_i . *Střední hodnota náhodné veličiny* X se vypočítá jako

$$E(X) = \sum_{i=1}^k x_i p(x_i).$$

Zhruba řečeno, střední hodnota náhodné veličiny udává, jaký asi bude průměr získaných hodnot náhodné veličiny při mnoha opakováních náhodného pokusu.

Pro spolehlivý popis náhodné veličiny potřebujeme znát nejen střední hodnotu, kolem které se jednotlivé hodnoty soustřeďují, ale také vědět, jak daleko se od tohoto středu rozptylují. *Rozptyl* $D(X)$ je definován jako střední hodnota kvadrátů odchylek od střední hodnoty.

$$D(X) = \sum_{i=1}^k (x_i - E(X))^2 p(x_i) = \sum_{i=1}^k x_i^2 p(x_i) - E(X)^2.$$

Realizujeme-li N -krát náhodný pokus a označíme-li X_1, X_2, \dots, X_N realizované hodnoty náhodné veličiny X (hodnoty se mohou opakovat), pak *výběrový (aritmetický) průměr*

$$\bar{X} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i$$

dobře aproximuje střední hodnotu $E(X)$ pro N dostatečně velké. Dobrým odhadem rozptylu je pak *výběrový rozptyl*

$$s_X^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X})^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i^2 - \bar{X}^2.$$

¹⁾Používá se zkrácený zápis $P(X = x_i)$

3. Princip metody Monte Carlo

Hledáme-li hodnotu nějaké veličiny, pak nastávají následující možnosti.

- V nemnoha případech známe explicitní předpis pro zkoumanou veličinu.
- V některých případech známe algoritmus, který v konečně mnoha krocích s dostatečnou přesností vypočte hodnotu dané veličiny.
- Ve většině případů neznáme ani vzorec ani algoritmus. Pak je prostor pro metodu Monte Carlo, kdy vytváříme náhodné pokusy tak, aby se jejich výsledky s uspokojivou pravděpodobností blížily hledané hodnotě. Často lze hodnotu veličiny považovat za pravděpodobnost jistého náhodného jevu nebo obecněji za střední hodnotu $E(X)$ nějaké náhodné veličiny X . Jestliže vypočteme N nezávislých realizací X_1, X_2, \dots, X_N náhodné veličiny X , můžeme odhadnout $E(X)$ pomocí aritmetického průměru \bar{X} . Chyba $|E(X) - \bar{X}|$ je úměrná číslu $\frac{s_X}{\sqrt{N}}$ (jde ovšem o pravděpodobnostní odhad chyby).²⁾

4. Výpočet Ludolfova čísla π

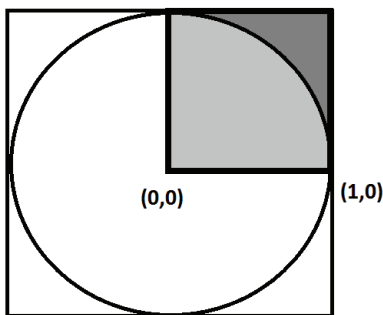
Určení čísla π metodou Monte Carlo je vhodná motivační úloha. Představme si, že máme čtverec o straně délky 2 se středem $(0, 0)$, do něhož je vepsán kruh o poloměru 1. Pro jednoduchost se omezíme na první kvadrant, viz obr. 1.

Zvolme ve čtverci náhodné body, jejichž rozdělení na ploše čtverce je rovnoměrné.³⁾ Pak pravděpodobnost P , že takto náhodně zvolený bod padne do čtvrtkruhu je rovna podle geometrické definice pravděpodobnosti $P = \frac{S_{\text{čtvrtkruh}}}{S_{\text{malý čtverec}}} = \frac{\pi}{4}$. Při odhadu P budeme postupovat následujícím způsobem. Generujeme $2N$ náhodných čísel $X_1, \dots, X_N, Y_1, \dots, Y_N$

²⁾Tento odhad získáme využitím tzv. Čebyševovy nerovnosti. Zvolíme-li dostatečně malé α a položíme $\varepsilon = \sqrt{\frac{D(X)}{N\alpha}}$, pak dostaneme odhad $P(|E(X) - \bar{X}| \leq \varepsilon) \geq 1 - \alpha$. Při fixovaném α tedy s pravděpodobností $1 - \alpha$ klesá chyba úměrně $\sqrt{\frac{D(X)}{N}}$. A jelikož odhadem $D(X)$ je s_X^2 , dostáváme, že chyba $|E(X) - \bar{X}|$ je úměrná číslu $\frac{s_X}{\sqrt{N}}$ pro dostatečně velké N .

³⁾Tento pojem je intuitivní, necháme ho tedy bez přesné definice, která by překračovala rámec středoškolského studia.

s rovnoměrným rozdělením na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$.⁴⁾ Dvojice (X_i, Y_i) pak představují souřadnice náhodných bodů ve čtverci. Pomocí podmínky $X_i^2 + Y_i^2 < 1$ zjistíme, kolik bodů leží ve čtvrtkruhu. Jejich počet označme N' . Relativní četnost $\frac{N'}{N}$ pak bude odhadem P a pro číslo π dostáváme odhad $\pi \doteq 4 \frac{N'}{N}$ pro dostatečně velké N .



Obr. 1: Ilustrace odhadu čísla π

Pro formulaci pomocí střední hodnoty definujeme náhodnou veličinu Z , která nabývá hodnoty 1, pokud (X, Y) leží ve čtvrtkruhu, kde X, Y jsou náhodné veličiny rovnoměrně rozdělené na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$, v opačném případě nabývá hodnoty 0. Potom

$$E(Z) = 1 \cdot P + 0 \cdot (1 - P) = P.$$

Její odhadem je právě relativní četnost $\frac{N'}{N}$ a odhadem rozptylu $D(Z)$:

$$s_Z^2 = \frac{N'}{N} - \left(\frac{N'}{N} \right)^2 \in \left\langle 0, \frac{1}{4} \right\rangle.$$

Jelikož chyba odhadu klesá úměrně $\frac{s_Z}{\sqrt{N}}$, chceme-li odhad pro π s přesností na pět desetinných míst, musíme provést řádově 10^{10} náhodných výběrů, proto tato metoda není pro praktický výpočet π s velkou přesností použitelná.

V programu Matlab vypadá skript pro odhad čísla π např. takto:

⁴⁾ Úspěch řešení může záviset na volbě generátoru pseudonáhodných čísel (při počítačových simulacích nepracujeme se skutečně náhodnými čísly získanými z fyzikálních procesů, ale s programy, které na základě nějakých předpisů dávají pseudonáhodná čísla). Úvahy o tomto problému jdou ale nad rámec našich aktuálních znalostí.

```

cetnost=0; % cetnost vyskytu nahodnych bodu ve ctvrtkruhu
N=108 % pocet nahodnych bodu
for i=1:N
    Xi=rand;
    Yi=rand;
    if Xi2 + Yi2 < 1
        cetnost=cetnost+1;
    end
end
odhadPi=4 * cetnost/N

```

Na základě teorie by měl program při tomto počtu náhodných bodů odhadnout π s chybou menší než

$$\sqrt{\frac{D(Z)}{0,01N}} \doteq \frac{10s_Z}{\sqrt{N}} = 0,0016$$

s pravděpodobností větší než 99 %. To je v dobrém souladu s výsledky programu: při 100 bězích jsme dostali odhady pro π v rozmezí 3,1413 až 3,1421, přičemž skutečná hodnota π je 3,14159...

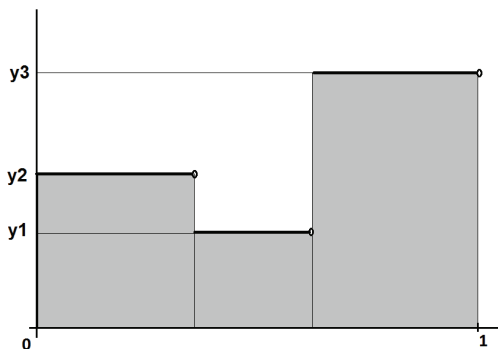
5. Výpočet plochy pod grafem funkce

Mějme nezápornou funkci f na intervalu $\langle a, b \rangle$, která je spojitá nebo má jen konečně mnoho bodů nespojitosti (typu skok). Zajímá nás obsah S plochy pod grafem funkce. Ukážeme dva způsoby výpočtu pomocí metody Monte Carlo [2].

1. Uvažujeme náhodnou veličinu X s rovnoměrným rozdělením na intervalu $\langle a, b \rangle$ a náhodnou veličinu Y danou vztahem $Y = f(X)$. Pak pro střední hodnotu veličiny Y platí $E(Y) = \frac{S}{b-a}$. Tomuto vztahu se dá s našimi znalostmi porozumět v případě, kdy f nabývá na $\langle a, b \rangle$ pouze konečně mnoha hodnot y_1, y_2, \dots, y_k . Potom totiž platí

$$E(Y) = \sum_{i=1}^k y_i p(y_i).$$

Graf jedné takové funkce je na obr. 2. Věřme, že vztah $E(Y) = \frac{S}{b-a}$ platí i v případě, kdy f nabývá nekonečně mnoha hodnot.



Obr. 2: Příklad funkce s konečně mnoha skoky a konečným oborem hodnot na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$

Střední hodnotu $E(Y)$ náhodné veličiny Y můžeme z druhé strany odhadnout pomocí aritmetického průměru jejích nezávislých N realizací $\bar{Y} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(X_i)$, kde X_1, X_2, \dots, X_N jsou nezávislé realizace náhodné veličiny X , tj. jsou to náhodná čísla s rovnoměrným rozdělením na intervalu $\langle a, b \rangle$. Odhadem rozptylu $D(Y)$ je

$$s_Y^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(X_i)^2 - \bar{Y}^2.$$

Pro obsah plochy tedy dostáváme odhad

$$S \doteq \frac{b-a}{N} \sum_{i=1}^N f(X_i)$$

pro dostatečně velké N .

2. Druhá metoda je založena na geometrické definici pravděpodobnosti. Postupujeme tedy analogicky jako při odhadu čísla π . Uvažujeme obdélník o stranách délky $b-a$ a h , který obsahuje graf funkce f . Zvolme v obdélníku náhodné body, jejichž rozdělení na ploše obdélníka je rovnoměrné. Pak pravděpodobnost, že takto náhodně zvolený bod padne do plochy pod grafem funkce f je rovna podle geometrické definice pravděpodobnosti $P = \frac{S}{(b-a)h}$.

Při výpočtu obsahu S budeme postupovat následujícím způsobem. Generujeme N náhodných čísel X_i s rovnoměrným rozdělením na in-

tervalu $\langle a, b \rangle$ a posloupnost N náhodných čísel Y_i s rovnoměrným rozdělením na intervalu $\langle 0, h \rangle$. Dvojice (X_i, Y_i) pak představují souřadnice náhodných bodů v obdélníku. Pomocí podmínky $Y_i < f(X_i)$ zjistíme, kolik bodů leží pod grafem funkce f . Jejich počet označme N' . Relativní četnost $\frac{N'}{N}$ pak bude odhadem pravděpodobnosti P a *pro obsah dostáváme odhad*

$$S \doteq (b - a)h \frac{N'}{N}$$

pro dostatečně velké N .

Pro formulaci pomocí střední hodnoty definujeme náhodnou veličinu Z , která nabývá hodnoty 1, pokud $Y < f(X)$, kde X, Y jsou náhodné veličiny s rovnoměrným rozdělením na $\langle a, b \rangle$, resp. $\langle 0, h \rangle$, v opačném případě nabývá hodnoty 0. Potom platí, že $E(Z) = P$. Jejím odhadem je právě relativní četnost $\frac{N'}{N}$. Odhadem rozptylu $D(Z)$ je

$$s_Z^2 = \frac{N'}{N} - \left(\frac{N'}{N} \right)^2.$$

Lze ukázat, že druhá metoda má větší nebo v optimálním případě stejný rozptyl jako první metoda, a bývá proto méně přesná. V konkrétních příkladech odhad chyby $\frac{s_Z}{\sqrt{N}}$, resp. $\frac{s_Z}{\sqrt{N}}$ pro ilustraci tohoto faktu počítáme. Ovšem je třeba mít na paměti, že při hodnocení účinnosti metod je třeba uvažovat i jejich časovou náročnost. Tím se může pro složitější funkce stát geometrická metoda výhodnější.

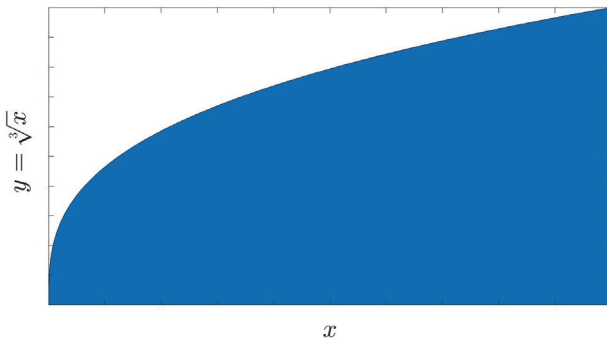
Příklad 1. Určete obsah plochy pod grafem funkce $f(x) = \sqrt[3]{x}$ pro $x \in (0, 1)$, viz obr. 3. V programu dle své volby implementujte obě výše uvedené metody a porovnejte jejich chybu pro rostoucí počet realizací N .

1. V programu Matlab vypadá skript při použití první metody např. takto:

```
prumerY=0; % aritmeticky prumer  $\bar{Y}$ 
sY2=0; % vyberovy rozptyl
N=106; % pocet nahodnych bodu
for i=1:N
    Xi=rand;
    Yi=nthroot(Xi,3); % dosadime  $Y_i = \sqrt[3]{X_i}$ 
    prumerY=prumerY+(1/N)*Yi;
    sY2=sY2+Yi2/N;
end
```

MATEMATIKA

```
odhadS=prumerY % odhad obsahu plochy pod grafem funkce
sY2=sY2-prumerY2;
sY=sqrt(sY2);
err=sY/sqrt(N) % odhad chyby
```



Obr. 3: Graf funkce $f(x) = \sqrt[3]{x}$ na intervalu $(0, 1)$

2. V programu Matlab vypadá skript při použití druhé metody např. takto:

```
cetnost=0; % cetnost vyskytu nahodnych bodu pod grafem funkce
sZ2=0; % vyberovy rozptyl
N=106; % pocet nahodnych bodu
for i=1:N
    Xi=rand; Yi=rand;
    if Yi < nthroot(Xi,3)
        cetnost=cetnost+1;
    end
end
odhadS=cetnost/N % odhad obsahu plochy pod grafem funkce
sZ2=odhadS-odhadS2;
sZ=sqrt(sZ2);
err=sZ/sqrt(N) % odhad chyby
```

Ti, kteří už znají pojem určitý integrál, si mohou odhady získané programy porovnat s přesnou hodnotou

$$S = \int_0^1 \sqrt[3]{x} dx = \frac{3}{4}.$$

Příklad 2. Určete obsah plochy ohraničené grafem funkce $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ a osou x pro $x \in (0, 1)$ a $f(0) = 1$. V programu podle své volby implementujte obě výše uvedené metody a porovnejte jejich chybu pro rostoucí počet realizací N .

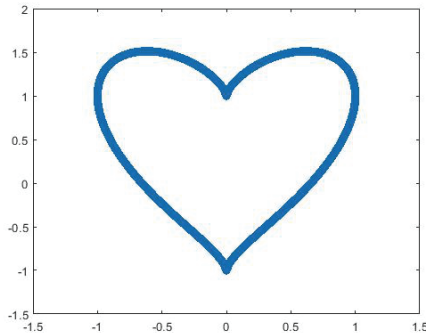
Skripty Matlabu budou vypadat podobně jako v příkladu 1, jen místo $\sqrt[3]{x}$ dosadíme v obou případech $\frac{\sin x}{x}$, tj. ve skriptu píšeme $\sin(Xi)/Xi$ místo $\text{nthroot}(Xi,3)$. Výsledek bude 0,946 s platností na tři desetinná místa (pro $N = 10^8$).

Tentokrát nemůžeme obsah plochy získat vyčíslením integrálu. Jde totiž o funkci, která nemá primitivní funkci zapsatelnou pomocí elementárních funkcí, a neobejdeme se bez použití integrování nekonečných řad.

Příklad 3. Určete obsah plochy ohraničené spojitou křivkou (obr. 4)

$$x^2 + (y - \sqrt[3]{x^2})^2 = 1.$$

I v tomto případě lze použít druhou z výše uvedených metod. Výsledek je 0,87 s platností na dvě desetinná místa.



Obr. 4: Graf křivky $x^2 + (y - \sqrt[3]{x^2})^2 = 1$

V programu Matlab vypadá skript např. takto:
`cetnost = 0; % cetnost vyskytu nahodnych bodu uvnitr krivky
N = 108; % pocet nahodnych bodu
for i=1:N`

```

    Xi = -1.5 + 3*rand;
    Yi = -1.5 + 3.5*rand;
    if Xi2 + (Yi-nthroot(Xi2,3))2 < 1
```

```

cetnost = cetnost + 1;
end
end
Sobd = 3 * 3.5; % Obsah obdelnika
odhadS = (cetnost/N) * Sobd % odhad obsahu plochy
% ohranicene krivkou

```

6. Buffonova úloha

Tato historická úloha může rovněž posloužit k výpočtu hodnoty čísla π . Navíc ji lze provést jako experiment (např. se zápalkami) o přestávkách ve třídě nebo i v rámci celé školy.⁵⁾

V roce 1773 Georges Louis Leclerc de Buffon popsal experiment, který dává do souvislosti číslo π a náhodné jevy. Původně byl problém formulovaný jako hra, kde dva hráči házeli bagetou na podlahu. Vyhrál ten, jehož bageta padla na čáru. Buffon si položil otázku, jaký vliv na hru má délka bagety a vzdálenost čar. Odpověď našel roku 1777. Zjednodušená verze této hry spočívá v házení jehly na rovinu, kde jsou narysované rovnoběžky, a opakováním takového experimentu lze získat odhad čísla π . Předpokládáme, že sousední rovnoběžky mají mezi sebou vzdálenost L a délka jehly je ℓ , přičemž $\ell < L$ (tedy jehla protne vždy nejvýše jednu přímkou). Předpokládáme, že d je vzdálenost středu jehly od nejbližší rovnoběžky a φ značí úhel, který svírá jehla s touto rovnoběžkou. Poloha jehly je tedy daná souřadnicemi (d, φ) , kde $0 \leq d \leq \frac{L}{2}$ a $0 \leq \varphi \leq \pi$. Jak si čtenář rozmyslí, jehla protne rovnoběžku, pokud $d \leq \frac{\ell}{2} \sin \varphi$. Příznivé případy jsou znázorněné na obr. 5 vybarvenou částí.

Obdélník $ABO\pi$ má obsah $S_1 = \frac{L}{2}\pi$ a vybarvená plocha má obsah

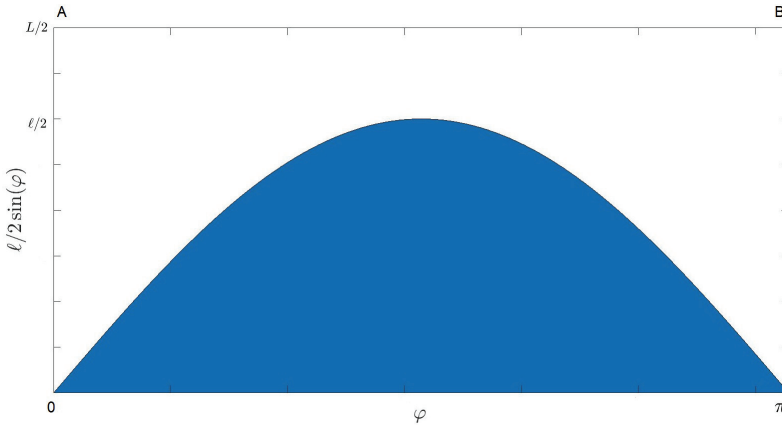
$$S_2 = \int_0^\pi \frac{\ell}{2} \sin \varphi \, d\varphi = \ell.$$

(Tento integrál buď umíme spočítat přímo, nebo ho vyčíslíme pomocí metody Monte Carlo jako obsah plochy pod grafem funkce $\frac{\ell}{2} \sin x$ na intervalu $(0, \pi)$.)

Pravděpodobnost, že jehla protne rovnoběžku, je rovna

$$P = \frac{S_2}{S_1} = \frac{\ell}{\frac{L}{2}\pi} = \frac{2\ell}{L\pi}.$$

⁵⁾17. prosince 2013 jsme na Jaderce (FJFI ČVUT v Praze) odhadovali Ludolfovo číslo π házením sirek po stole. Podívejte se, jak experiment dopadl a také proč tak dopadl na https://www.youtube.com/watch?v=zmHpm_tuvTg.



Obr. 5: Ilustrace případů, kdy jehla protne přímkou

Při praktickém pokusu můžeme pro jednoduchost volit vzdálenost rovnoběžek rovnu dvojnásobku délky jehly (nebo sirky apod.). Pravděpodobnost je pak přímo rovna $\frac{1}{\pi}$. My ji odhadneme relativní četností $\frac{N'}{N}$, kde N' je počet hodů, kdy jehla protla některou rovnoběžku, a N je počet všech hodů, přičemž N je třeba volit dostatečně velké.

Literatura

- [1] Calda, E., Dupač, V.: *Matematika pro gymnázia: Kombinatorika, pravděpodobnost, statistika*. Prometheus, Praha, 1996.
- [2] Dřímál, J., Trunec, D., Brablec, A.: *Úvod do Metody Monte Carlo*. Skripta, Masarykova univerzita, Brno, 2006, <http://www.physics.muni.cz/~trunec/mc.pdf>.
- [3] Fabian, F., Klumber, Z.: *Metoda Monte Carlo a možnosti jejího uplatnění*. Prospektrum, Praha, 1998.
- [4] Frýbort, J.: Monte Carlo není jenom hazard, *Rozhledy matematicko-fyzikální*, roč. 86 (2011), č. 3, s. 4–12.
- [5] Malijevský, Alex., Klumber, Z., Obdržálek, J., Malijevský, Anat.: Monte Carlo, stavové rovnice a tuhé koule. *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*, roč. 40 (1995), č. 2, s. 88–95.

Bertrandův paradox aneb není náhoda jako náhoda

Jiří Dvořák, MFF UK, Praha – Marie Snětinová, MFF UK, Praha

Abstrakt. V tomto příspěvku se zabýváme základy teorie pravděpodobnosti a zaměřujeme se na tzv. geometrickou pravděpodobnost. Představujeme zdánlivě velmi jednoduchý problém, u kterého se však ukáže, že má několik různých řešení. Tento problém je znám jako Bertrandův paradox. Předkládáme tři různá řešení problému a diskutujeme, proč si vzájemně neodporují.

Náhoda a pravděpodobnost

Představa, že některé jevy ve světě se odehrávají „náhodně“, nám usnadňuje jejich popis, zkoumání a předvídání. Pro zkoumaný jev (například hod kostkou) vytvoříme pravděpodobnostní model (může nastat šest různých výsledků a všechny jsou stejně pravděpodobné) a v rámci tohoto modelu můžeme odpovídat na různé otázky (jaká je pravděpodobnost, že padne liché číslo?). Naše odpovědi jsou pak platné v rámci tohoto modelu. Podstatnou otázkou samozřejmě zůstává, jak dobrý je zvolený model, jak blízko je skutečnosti (je kostka správně vyvážená nebo má některá strana větší šanci padnout?). To však už není otázka pravděpodobnosti.

Příkladem situace, kdy je užitečné řešit daný problém pomocí pravděpodobnostních úvah, je kromě hazardních her třeba rozhodování, kolik posádek má mít v dané denní době v pohotovosti stanice zdravotnické záchranné služby. Pokud je případů, ke kterým se vyjíždí, málo, stačí jedna posádka. Pokud se ale stává, že se vyskytne více případů krátce po sobě, je nutné mít k dispozici více posádek, aby dojezdový čas zůstal přiměřený. Samozřejmě není možné vědět, kolik případů se objeví zítra, za měsíc, za rok, můžeme se však na počet případů dívat jako na náhodné číslo a zařídit se podle toho. Dalším příkladem může být budování protipovodňových hrází: jak vysoká musí být hráz, aby v jednom roce přetekla s pravděpodobností nejvýše jedno promile?

Klasická pravděpodobnost

Nejjednodušší situací při studiu náhody je, když uvažujeme pouze konečný počet možných výsledků experimentu (takzvaných elementárních

jevů), přičemž jsou všechny výsledky stejně možné a žádný není zvýhodněn ani znevýhodněn. Množinu všech možných (navzájem různých) výsledků označíme $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$, kde jednotlivá ω_i jsou elementární jevy. Pravděpodobnost jevu A , kterému odpovídá k různých elementárních jevů, tj. $A = \{\omega_{i_1}, \dots, \omega_{i_k}\}$, je potom k/n , tedy podíl počtu elementárních jevů příznivých jevu A a celkového počtu elementárních jevů.

Učebnicovým příkladem je hod šestistěnnou kostkou: možných výsledků hodu je celkem 6, $\Omega = \{1, \dots, 6\}$, a předpokládáme-li férovost kostky, má každé číslo (každý elementární jev) pravděpodobnost $1/6$. Pravděpodobnost nějakého jevu, například $A = \{\text{na kostce padne liché číslo}\}$, je pak rovna $3/6$, protože celkem tři elementární jevy jsou příznivé jevu A . Podobným způsobem můžeme popisovat situace jako házení mincí, hod třemi kostkami, tahání míčků z urny a podobně.

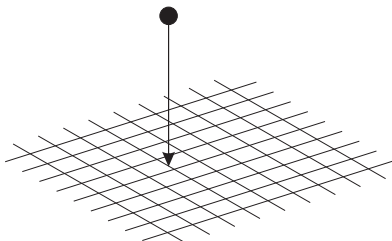
Geometrická pravděpodobnost

S uvedeným postupem už si nevystačíme, pokud je celkový počet možných výsledků nekonečný. Postup ovšem můžeme jednoduše upravit pro situace, kdy se dají možné výsledky experimentu popsat body v nějaké souvislé podmnožině přímky, roviny či trojrozměrného prostoru atd., přičemž opět žádné výsledky nejsou zvýhodněny ani znevýhodněny. Označme tuto množinu opět Ω . Pravděpodobnost nějakého jevu $A \subset \Omega$ je potom rovna podílu velikosti A ku velikosti Ω , kde velikostí množiny myslíme například její délku, plochu či objem, podle dimenze množiny Ω .

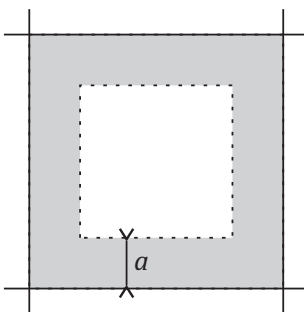
Uvažme příklad ze života: jdete po ulici, v ruce máte klíče od domu a zrovna když překračujete víko kanálu, klíče vám vypadnou z ruky (zákon schválnosti). Jaká je pravděpodobnost, že klíče cinknou o kanál? Pro účely našeho příkladu budiž kanál tvořen nekonečnou periodickou mříží se čtvercovými otvory o délce strany 1 jednotka a nulovou tloušťkou tyčí. Klíče jsou, matematicky vzato, kulička o poloměru a jednotek, kde a je kladné číslo menší než $1/2$, a padají z výšky kolmo na mříž v náhodném místě. Obr. 1 ilustruje tuto (idealizovanou) situaci.

Protože je mříž periodická, omezíme se v následující úvaze jen na jeden čtverec, tedy $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$. Skutečnost, že klíče upustíme v náhodném místě, pro nás znamená, že střed kuličky (klíčů) se nachází na náhodném místě v uvažovaném čtverci, přičemž žádná pozice není pravděpodobnější než jiné. Elementární jev $\omega_i \in \Omega$ tedy určuje pozici středu kuličky a tím celý výsledek experimentu. Zřejmě klíče o kanál cinknou, pokud se střed kuličky nachází blíže k hraně čtverce než je

jeho poloměr a , viz obr. 2. Na něm šedá plocha vyznačuje pozice středu, které jsou příznivé cinknutí. Spočítat je ale nemůžeme, je jich nekonečně mnoho. Protože však žádná pozice není preferovaná, využijeme místo toho plochu množiny příznivých výsledků. Plocha celého čtverce (všech možných výsledků) je 1 čtvereční jednotka, plocha množiny příznivých výsledků je $1 - (1 - 2a)^2 = 4a(1 - a)$, viz obr. 2. Pravděpodobnost, že klíče cinknou, je tedy $4a(1 - a)$.



Obr. 1: Klíče padající do kanálu



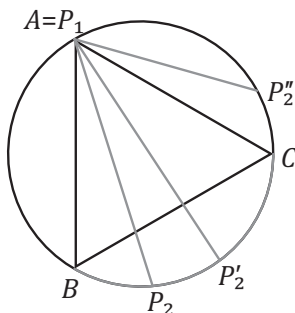
Obr. 2: Zakreslení případů, kdy klíče cinknou o kanál

Náhodná tětiva

Pomocí geometrické pravděpodobnosti je možné řešit celou řadu zajímavých otázek. Nás teď bude zajímat následující situace. Vezmeme kružnici o jednotkovém poloměru, v níž je vepsaný rovnostranný trojúhelník ΔABC . Náhodně zvolíme tětivu, která tuto kružnici protíná. Jaká je pravděpodobnost, že délka tětivy uvnitř kružnice je větší než délka strany vepsaného rovnostranného trojúhelníku? Tuto otázku poprvé položil Joseph Bertrand v roce 1889 ve své knize [1]. Mezi českými zdroji můžeme doporučit například [2, s. 20]. Ukážeme si tři způsoby řešení naší otázky.

První způsob

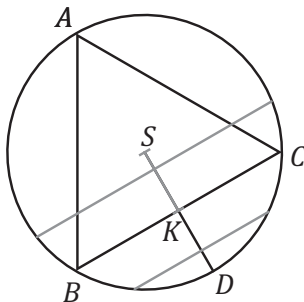
Tětiva protínající naši kružnici je určena dvěma průsečíky P_1, P_2 s kružnicí. Protože ve skutečnosti záleží jen na vzájemné poloze obou průsečíků, první z nich umístíme pevně do bodu $A = P_1$ a druhý průsečík P_2 umístíme náhodně na kružnici. Situaci znázorňuje obr. 3. Tětiva je delší než strana trojúhelníku ABC právě tehdy, když průsečík P_2 leží na oblouku kružnice mezi body B, C . Tento oblouk zabírá přesně třetinu obvodu kružnice, proto hledaná pravděpodobnost je $1/3$.



Obr. 3: Tětiva určená dvěma průsečíky s kružnicí

Druhý způsob

Tětiva protínající naši kružnici je určena svou orientací a vzdáleností od středu S naší kružnice. Protože celá situace nezávisí na otočení kolem středu kružnice, budeme vybírat takovou tětivu, která je rovnoběžná se stranou BC vepsaného trojúhelníku, tedy kolmá na úsečku SD , viz obr. 4. Tím je určena orientace tětivy. Nyní stačí vybrat náhodně polohu středu tětivy na úsečce SD .

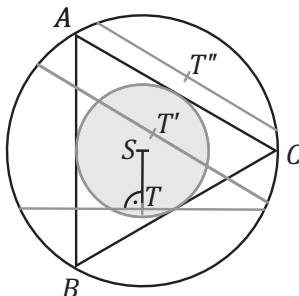


Obr. 4: Tětiva určená vzdáleností od středu kružnice

Označme K průsečík úseček BC a SD . Vybraná tětiva bude delší než strana trojúhelníku ABC právě tehdy, když náhodně vybraný střed tětivy bude ležet blíže středu kružnice S než bod K , viz opět obr. 4. Protože bod K leží přesně v polovině úsečky SD , je hledaná pravděpodobnost $1/2$.

Třetí způsob

Délka tětivy protínající naši kružnici je určena polohou svého středu T . Zřejmě taková tětiva je kolmá na úsečku TS , viz obr. 5. Vyberme tedy náhodně bod T uvnitř kruhu, jehož hranici tvoří naše kružnice. Obr. 5 ukazuje, že vybraná tětiva bude delší než strana trojúhelníku ABC právě tehdy, když její střed T leží uvnitř kružnice vepsané trojúhelníku ABC . Protože její poloměr je roven polovině poloměru naší původní kružnice, je plocha kruhu určeného kružnicí vepsanou trojúhelníku ABC čtvrtinou plochy kruhu určeného kružnicí opsanou trojúhelníku ABC . Hledaná pravděpodobnost je tedy $1/4$.



Obr. 5: Tětiva určená polohou svého středu

Bertrandův paradox

Uvedenými postupy jsme dostali celkem tři rozdílné odpovědi. Na první pohled není jasné, která odpověď je správná, proto se tato úloha tradičně označuje slovem „paradox“. Znamená to, že jsme udělali nějakou chybu? Neudělali, všechny tři odpovědi jsou správné.

Jak je to možné? Jádrem pudla je v tom, že v zadání úlohy jsme neurčili, jaký způsob vybírání „náhodné tětivy“ máme na mysli. Proto jsme mohli uvažovat tři různé způsoby, jak tětivu náhodně vybírat. Tyto způsoby ale nejsou rovnocenné – některé tětivy mají větší šanci být vybrány jedním způsobem než jiným. Jinými slovy, ze zadání úlohy není jasné, jaký pravděpodobnostní model (způsob výběru náhodné tětivy) máme

zvolit. Abychom byli schopni na zadanou otázku odpovědět, musíme si nějaký model vybrat. Naše odpověď pak bude správná v rámci tohoto modelu. Je ovšem možné zvolit i jiné modely a v jejich rámci mohou být správné jiné odpovědi. V předchozích odstavcích jsme popsali tři různé modely (způsoby výběru náhodné tětiny), ale je určitě možné vymyslet i jiné modely, které povedou k jiným výsledkům.

Tuto nejednoznačnost může být těžké si představit v případě, kdy máme nekonečně mnoho možných výsledků. Můžeme si ale představit jednodušší situaci s konečným počtem možných výsledků: náhodně vybereme číslo mezi 1 a 12, jaká je pravděpodobnost, že to bude číslo 12? Pokud například házíme dvanáctistěnnou kostkou (ano, i takové se vyrábějí), jsou všechna čísla stejně pravděpodobná a odpověď je, že pravděpodobnost vybraní čísla 12 je $1/12$.

Co když ale místo toho vybíráme z klobouku, který obsahuje pohmatem nerozlišitelné kuličky označené čísly 1 až 12, přičemž ale každé sudé číslo je na dvou kuličkách? V takovém případě je v klobouku celkem 18 kuliček a pravděpodobnost vytažení čísla 12 je $2/18 = 1/9$.

Nakonec můžeme číslo vybírat tak, že hodíme dvěma šestistěnnými kostkami a hodnoty sečteme. Potom číslo 12 dostaneme pouze tak, že na obou kostkách padne číslo 6, což má pravděpodobnost $1/6 \cdot 1/6 = 1/36$.

Opět jsme viděli tři různé způsoby vybírání čísla, tři různé modely pro „náhodný výběr čísla“. Tyto modely nebyly rovnocenné a vedly k rozdílným odpovědím. Pokud tedy není už při zadání otázky určeno, jak výběr probíhá, není možné jednoznačně říci, co je správná odpověď.

Literatura

- [1] Bertrand, J.: *Calcul des probabilités*. Gauthier-Villars, Paříž, 1889.
 [2] Anděl, J.: *Matematika náhody*. Matfyzpress, Praha, 2007.

19 úloh pre rok 2019

Dušan Jedinák, Trnava

1. Stanovte, koľkými nulami končí číslo, ktoré je súčinom prvých 2019 prvočísel.

2. Stanovte počet prirodzených čísel od 1 do 10^6 , ktoré končia štvorčíslím 2019.

3. Stanovte číselnú hodnotu zlomku

$$\frac{2018^2}{(2019^2 - 2017^2)}.$$

4. Na očíslovanie všetkých stránok encyklopédie (prirodzené čísla od 1) sme použili spolu 2019 číslic. Stanovte, koľko strán má táto encyklopédia.

5. Stanovte poslednú cifru čísla $2019^{2019} + 19$ vyjadreného v desiatkovej číselnej sústave.

6. Stanovte prvú číslicu najmenšieho prirodzeného čísla, ktorého súčet číslic je 2019.

7. Stanovte číslicu, ktorá bude na 2019. mieste od začiatku, ak postupne zapisujeme za sebou prirodzené čísla: 123456789101112131415...

8. Stanovte ciferný súčet čísla 201920192019..., ktoré má 2019 cifier.

9. Stanovte hodnotu výrazu

$$\left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{4}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 + \frac{1}{2017}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{2018}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{2019}\right).$$

10. Stanovte zvyšok po delení čísla 10^{2019} číslom 15.

11. Stanovte poslednú cifru desatinného rozvoja čísla 5^{-2019} .

12. Stanovte číselnú hodnotu výrazu

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{2016 \cdot 2017} + \frac{1}{2017 \cdot 2018} + \frac{1}{2018 \cdot 2019}.$$

13. Stanovte číselnú hodnotu výrazu $1 + 2 - 3 - 4 + 5 + 6 - 7 - 8 + 9 + 10 - 11 - 12 + \dots + 2017 + 2018 - 2019$.

14. Stanovte posledné dve cifry čísla 3^{2019} zapísaného v desiatkovej sústave.

15. V učebnici je očíslovaných 2019 strán (prirodzené čísla do 2019, vrátane). Stanovte, koľkokrát sa na týchto očíslovaných stránkach vyskytuje číslica 9.

16. Stanovte, koľko prirodzených čísel menších než 102019 má ciferný súčet 3.

17. Nájdite všetky rôzne trojice prirodzených čísel $x < y < z$, ktoré sú riešením rovnice $x \cdot y \cdot z + 6 = 2019$.

18. Stanovte zvyšok po vydelení čísla $2019^3 + 3^{2019} + 2019$ číslom 9.

19. Stanovte poslednú číslicu čísla $2^{2017} \cdot 3^{2018} \cdot 7^{2019}$.

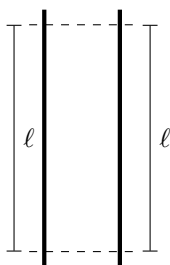
Výsledky úloh naleznete na str. 60.

Jak zatáčí vlak

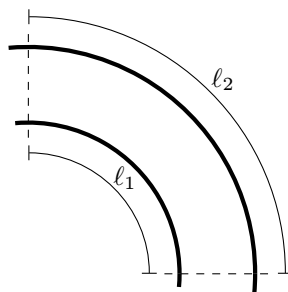
Eduard Šubert, Praha

Určitě jste už někdy jeli vlakem. Takový vlak, ten nejedí jen přímo rovně, jezdí i do zatáčky. Ale jak to vlastně je možné, že vlak v každé zatáčce nevykolejí?

Problém se zatáčením je ten, že vnitřní kolo soukolí musí vždy v zatáčce urazit kratší vzdálenost než to vnější (obr.1b), jinak zatočit nelze. To je jiné než při jízdě po rovině, kdy obě kola ujedou vždy přesně stejnou vzdálenost (obr. 1a).



(a) Přímá dráha. Obě kola urazí stejnou vzdálenost ℓ



(b) Zatáčka. Vnitřní kolo urazí kratší vzdálenost než vnější, $\ell_1 < \ell_2$

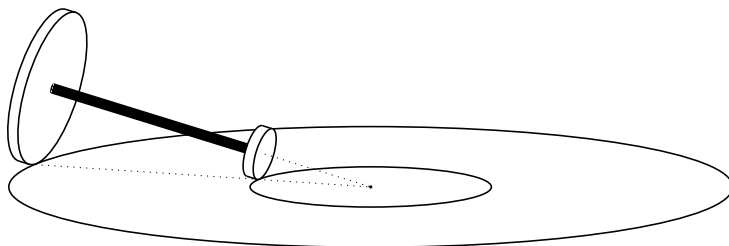
Obr. 1: Rozdíl mezi jízdou po rovině a jízdou do zatáčky

Dokážeme vyrobit soukolí, jehož kola urazí každé jinou vzdálenost? Například by se vnitřní kolo mohlo otáčet pomaleji než to vnější. Takhle třeba díky diferenciálu zatáčí automobil. Ale u vlaku to nejde, obě kola jsou totiž pevně spojená nápravou. Když se točí jedno kolo soukolí, tak se přesně stejně točí i to druhé.

Další možností je udělat jedno kolo menší než to druhé, pak za jednu otočku soukolí urazí menší kolo kratší vzdálenost (obr. 2). To je výborné na zatáčení, ale zase takové soukolí doslova nemůže jet rovně.

Možná vás napadlo, že by bylo dobré mít po rovině obě kola stejně velká, a pak do zatáčky to vnitřní o něco zmenšit. Možná vás také napadlo, že to je hloupost, že kola takhle měnit velikost nemůžou. Ale to byste se mýlili! Tedy alespoň v tom, že je to hloupost.

Kola vlaku totiž nejsou válcová, nýbrž kuželovitá. To nic nezmění, dokud vlak jede po rovině (obr. 3a), ale jakmile vjede do zatáčky, tak



Obr. 2: Zatačející soukolí s jedním větším kolem než druhým

setrvačnost vytlačí nápravu směrem ven ze zatáčky, a to způsobí, že průřez nad kolejnicí má u vnějšího kola větší průměr než u vnitřního kola (obr. 3b). To funguje v podstatě stejně, jako kdyby bylo vnější kolo větší než to vnitřní, a tak vlak zatočí. Po průjezdu zatáčkou se náprava vrátí do původní pozice, oba průřezy mají zase stejný průměr a vlak pokračuje rovně.



(a) Přímá dráha. U obou kol jsou stejné velké průřezy l

(b) Zatáčka. Průřez u levého kola je menší než u pravého kola, $l_1 < l_2$

Obr. 3: Soukolí vlaku při jízdě po rovince a do zatáčky

Tento princip drží vlak na kolejích za všech okolností, ať už jede nepřilíš prudkou zatáčkou, nebo po rovince. Pokaždé, když se vlak vychýlí z kolejí, tak se průřez u správného kola zvětší a vlak se vrátí zpět do rovnováhy. Proto je z pohledu vlaku vlastně jedno, jestli koleje vedou do zatáčky nebo rovně, vždycky se drží na kolejích, a proto se prý odborně nazývají zatáčky na kolejích „oblouky“.

Za domácí úkol si můžete rozmyslet, co by se stalo, kdyby byla kola vlaku na nápravě opačně, tedy menší konce komolých kuželů dovnitř a větší ven. Správnou odpověď najdete ve videu „Jak zatáčí vlak“ na YouTube kanálu „Na ubrousek“ [1].

Literatura

[1] Šubert, E.: *Jak zatáčí vlak?* Na ubrousek, 2016
<https://eduardsubert.com/jak-zataci-vlak>.

Řešení úlohy MO krajského kola kategorie C

Ľubomíra Dvořáková, FJFI ČVUT, Praha

Abstrakt. Nejen pro řešitele 68. ročníku matematické olympiády je určen tento příspěvek, v němž představíme řešení 2. úlohy krajského kola kategorie C, které se konalo 2. 4. 2019. Kromě autorského řešení zveřejníme i dvě velmi pěkná studentská řešení. Našli se i další řešitelé, kteří za úlohu získali plný počet bodů. Opravující úlohy, autorka tohoto příspěvku, subjektivně vyhodnotila zde prezentovaná řešení jako nejelegantnější.

Úloha 2: Jaký je nejmenší možný součet čtyř přirozených čísel takových, že dvojice vytvořené z těchto čísel mají největší společné dělitele 2, 3, 4, 5, 6 a 9? Uveďte příklad vyhovující čtveřice s takovým součtem a zdůvodněte, proč neexistuje vyhovující čtveřice s menším součtem.

(Tomáš Jurík)

Autorské řešení

Dejme tomu, že máme čtyři čísla s požadovanými vlastnostmi. Protože právě tři dvojice mají sudého největšího společného dělitele, jsou právě tři z nich sudá a jedno liché (nemohou být všechna sudá a dvě sudá jsou na tři sudé společné dělitele málo). Označme tři sudá čísla a , b a c tak, že pro jejich největší společné dělitele s lichým číslem d platí $(d, a) = 3$, $(d, b) = 5$, $(d, c) = 9$. Odtud pak vychází, že sudá čísla a , b , c jsou postupně násobky čísel 6, 10, 18 a číslo d je nutně násobek 45. Čísla a , c mají společného dělitele 6, takže nutně platí $(a, c) = 6$. Hodnoty (a, b) a (b, c) jsou proto v nějakém pořadí čísla 2 a 4. Máme tak dvě možnosti: Čísla a , b jsou násobky 4. Potom čísla a , b , c , d jsou postupně násobky čísel 12, 20, 18, 45. Takováto vyhovující čtveřice má nejmenší součet $12 + 20 + 18 + 45 = 95$. Čísla b , c jsou násobky 4. Potom čísla a , b , c , d jsou postupně násobky čísel 6, 20, 36, 45. Takováto vyhovující čtveřice má nejmenší součet $6 + 20 + 36 + 45 = 107$. Nejmenší možný součet je tudíž 95, čemuž odpovídá čtveřice 12, 20, 18, 45.

Řešení Filipa Olivera Klimoszka z Gymnázia Jana Keplera

- Jestliže mají mít dané dvojice největší společné dělitele 2, 3, 4, 5, 6, 9, musí mít vždy dané dvojice společné části prvočíselného rozkladu 2, 3, $2 \cdot 2$, 5, $2 \cdot 3$, $3 \cdot 3$ a nic jiného.

2. Označme si hledaná čtyři přirozená čísla a, b, c, d .
3. Při bližším zkoumání požadovaných prvočíselných rozkladů zjistíme, že budeme „rozdělovat“ prvočísla 2, 3 a 5. Utvoříme si proto tabulku:

	2	3	5
a	//	0	/
b	//		0
c	/		0
d	0	//	

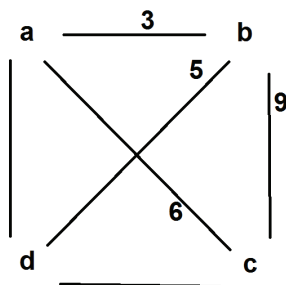
Obr. 1: Tabulka, kam doplňujeme počet výskytů prvočísel 2, 3, 5 v prvočíselných rozkladech čísel a, b, c, d

- Víme, že dvě čísla musí mít společnou část $2 \cdot 2$. Nechť jsou to bez újmy na obecnosti čísla a a b .
 - Musíme vytvořit společnou část prvočíselného rozkladu nějakých dvou čísel rovnou dvěma. Nemůžeme dát 2 do každého čísla, pak by nešlo vytvořit největší společný dělitel 9. Zároveň nelze použít znova dvojici a, b , proto do jednoho z čísel c, d dáme jednu dvojku. Do druhého nedáme žádnou.
 - Obdobně budeme rozdělovat číslo 3. Zde víme, že jedno z čísel, které bude obsahovat $3 \cdot 3$ je d , protože jinak by nebylo možné vytvořit dělitele 9. (V číslech a, b i c je vždy alespoň jedna dvojka.) Zároveň víme, že čísla a a b nemohou obsahovat obě zároveň trojku. (Jinak by neměla největší společný dělitel 4). Nechť bez újmy na obecnosti a neobsahuje 3.
 - Číslo a je zatím schopno mít největšího společného dělitele rovného čtyřem s b a rovného dvěma s c . Ale potřebuje ještě jiného největšího společného dělitele s dalším číslem. Jediná možnost je dělitel 5 s číslem d . Žádné další pětky už není zapotřebí.
 - Již známe číslo $a = 20$ a $d = 45$. Nyní máme dvě možnosti:
 - (a) Číslo b bude obsahovat $3 \cdot 3$ a číslo c bude obsahovat 3, pak $b = 36$ a $c = 6$.
 - (b) Číslo b bude obsahovat 3 a číslo c bude obsahovat $3 \cdot 3$, pak $b = 12$ a $c = 18$.
 - Jelikož $36 + 6 > 12 + 18$, použijeme pro výpočet nejmenšího součtu $b = 12$ a $c = 18$.
4. Vyhovující čtveřice je 12, 18, 20, 45 a její součet je 95.

Řešení Martina Dedka z Mensa gymnázia

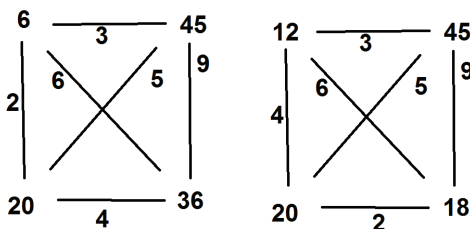
Řešení Martina Dedka je velmi podobné autorskému řešení. Navíc ale vhodně využívá zakreslení situace do grafu.

Jelikož někteří NSD (největší společní dělitelé) jsou lichá čísla, nemohou být všechna hledaná čísla sudá. Tudíž jedno číslo je určitě liché, označme ho b . A zbylá tři čísla? Máme 3 sudé NSD a s lichým číslem nelze mít NSD sudého. Tudíž zbylá tři čísla jsou sudá. Mezi dvěma sudými čísly je NSD také sudý, takže b má NSD s ostatními čísly liché (doplníme 3, 5, 9 do obrázku).



Obr. 2: Graf, kde vrcholy jsou hledaná čísla a hrany jsou označeny NSD příslušných dvojic vrcholů

Jelikož hledáme čísla s minimálním součtem, je b rovno nejmenšímu společnému násobku svých dělitelů 3, 5, 9, tj. $b = 45$. Číslo a je dělitelné 3 a je sudé a číslo c je dělitelné 9 a je sudé. Nutně tedy $\text{NSD}(a, c) = 6$. Nyní už jen zjistíme, zda $a + c$ je větší pro možnost, kdy $\text{NSD}(a, d) = 2$ a $\text{NSD}(d, c) = 4$, nebo $\text{NSD}(a, d) = 4$ a $\text{NSD}(d, c) = 2$.



Obr. 3: Dvě možné čtveřice zakreslené do grafu spolu s odpovídajícími NSD

Nejmenší možný součet je 95, a to pro čísla 12, 18, 20, 45.

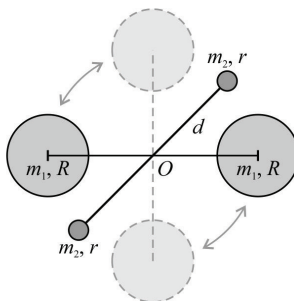
Vážení zeměkoule II

Zdeněk Drozd, Marie Snětinová, Kateřina Žilavá, MFF UK, Praha

V první části tohoto článku (v minulém čísle) jsme vás seznámili s gravitačními vahami, které jsou umístěny v posluchárně T2 na Matematicko-fyzikální fakultě UK v Praze-Troji. Věnovali jsme se také historii Cavendishových torzních vah, které byly pro tuto aparaturu předlohou. Nyní ukážeme, co a jak lze těmito vahami změřit.

Parametry Cavendishových vah

Vraťme se k obrázkům z předchozího dílu článku (obr. 1) a popíšeme si naše váhy podrobněji.



Obr. 1: Cavendishovy váhy

Jejich parametry jsou následující:

závěs: molybdenové vlákno o délce $l = 0,4$ m a průměru $\phi = 30 \mu\text{m}$;

velké koule (olověné): hmotnost každé koule $m_1 = 18,80$ kg, poloměr $R = 0,0750$ m;

torzní kyvadlo: kuličky o hmotnostech $m_2 = 0,0065$ kg a poloměru $r = 0,009$ m spojovací tyčka o hmotnosti $m_t = 0,0065$ kg, přičemž vzdálenost středů kuliček od sebe je $a = 0,276$ m;

vzdálenost středů koulí (velká–malá): $b = 0,0965$ m;

vzdálenost středu zrcátka umístěného na závěsu torzního kyvadélka od značky „0“ na protější stěně posluchárny: $L = 9,12$ m;

odchylka laserového paprsku odraženého od zrcátka na závěsu kyvadélka měřená od kolmice ke stupnici v bodě „0“: $\alpha = 36^\circ$.

Většina hodnot je převzata z [1], kde jsou uvedeny i chyby měření. Vzhledem k tomu, že posluchárna T2 prošla v minulých letech rekonstrukcí, bylo nutné váhy demontovat a opětovně do posluchárny instalovat. Přitom se samozřejmě změnilы některé parametry vůči těm, které jsou uvedeny v [1]. Nové parametry vah, které již nebylo možné z práce [1] převzít, změřila Kateřina Žilavá.

Určení direkčního momentu vlákna

V první části článku jsme si představili důležitou veličinu – direkční moment vlákna D . Známe-li direkční moment, víme, k jak velkému stočení vlákna dojde vlivem působení vnějšího momentu sil M . (V následujícím textu budeme uvažovat pouze velikosti daných fyzikálních veličin a nebudeme to nadále zdůrazňovat.)

Mezi výsledným vnějším momentem sil M a stočením (zkroucením) vlákna φ platí vztah

$$M = -D\varphi. \quad (1)$$

Tento vztah říká, že vlákno se brání zkroucení a má snahu vrátit se zpět do původního stavu. Vztah (1) platí pouze v případě elastické deformace vlákna. Při nepatrných stočeních, která přicházejí v úvahu u Cavendishových vah, bude deformace vlákna vždy elastická.

Nyní napíšeme rovnici, která popisuje pohyb torzního kyvadla, tedy naší „činky“ na vlákně. Vyjdeme přitom z toho, co bezpochyby zná každý student, který na střední škole absolvoval výuku mechaniky – z druhého Newtonova zákona neboli zákona síly. Ten můžeme napsat ve tvaru

$$F = ma. \quad (2)$$

Teď jste možná zpozorněli a říkáte si, jestli se náhodou neodchylujeme od tématu. Druhý Newtonův zákon přece nepopisuje pohyb, který vykonává torzní kyvadlo. Kdyby šlo např. o vozík, bylo by to něco jiného, ale tyčka s kuličkami na drátku. . . ? Hloubka Newtonových pohybových zákonů je ale veliká. Druhý Newtonův zákon nás přece jenom k torznímu kyvadlu dovede. Použijeme analogii mezi posuvným a rotačním pohybem, kterou určitě znáte (i když si ji třeba právě teď nevybavujete). Začneme tím, že si připomeneme fyzikální význam veličin vystupujících v zákonu síly. F představuje výslednici sil, které zvenčí působí na nějaké těleso (třeba na vozík). Písmenem a jsme označili zrychlení, které vozík díky působící síle má. Dostali jsme se k „okřídlené“ formulaci: „Když síla, tak zrychlení.“ V rovnici (2) vystupuje ještě jedna veličina, a to m .

Je to hmotnost urychlovaného tělesa. Hmotnost v našem kontextu vyjadřuje nechuť tělesa měnit rychlost.

Pokud se těleso nemůže pohybovat translačním (posuvným) pohybem, ale je schopno otáčet se okolo nějaké osy, což je zrovna případ našeho torzního kyvadla, bude situace následující: Působí-li na něj (výsledný) moment síly M , začne se roztáčet. Moment síly má, jak víte, otáčivý účinek. Je to analogie výslednice sil, která rozjíždí vozík. Díky momentu síly M získává torzní kyvadélko *úhlové zrychlení* ε . Torzní kyvadlo má také nechuť roztáčet se. Tuto nechuť popisuje moment setrvačnosti J . Zapamatujte si tuto názornou „definici“ momentu setrvačnosti. Pomůžte vám lépe pochopit některé fyzikální děje. Takže ještě jednou: „Moment setrvačnosti vyjadřuje nechuť tělesa roztáčet se“ (nebo přesněji: měnit úhlovou rychlost). Nyní tedy můžeme napsat novou rovnici pro torzní kyvadélko, kterou jsme právě vyvodili pomocí analogií mezi posuvným a rotačním pohybem:

$$M = J\varepsilon. \quad (3)$$

Za moment síly dosadíme z rovnice (1). Získáme vztah:

$$-D\varphi = J\varepsilon. \quad (4)$$

Nyní si dovolíme použít „trošku“ diferenciálního počtu. Pokud si s ním příliš (nebo vůbec) nerozumíte, přeskočte v četbě k rovnici (10).

Úhlové zrychlení můžeme zapsat jako druhou derivaci úhlu φ podle času (úhel φ je, jak jistě tušíte, funkcí času). Rovnici (4) tedy můžeme napsat také takto:

$$-D\varphi = J\ddot{\varphi}. \quad (5)$$

Pro zápis derivace podle času jsme použili tečku nad znakem φ . Dvě tečky tedy znamenají druhou derivaci podle času (takový zápis časové derivace je ve fyzice poměrně běžný). Rovnici ještě malinko upravíme:

$$\ddot{\varphi} = -\frac{D}{J}\varphi. \quad (6)$$

Této rovnici budeme říkat *pohybová rovnice torzního kyvadla*. Co je jejím řešením? Je to nějaká funkce času, označená φ , kterou když dvakrát zderivujeme podle času, získáme tutéž funkci, ale násobenou nějakou konstantou se znaménkem mínus. Vymyslíte nějakou takovou funkci? Napadne vás jich možná hned několik. Zkusme třeba:

$$\varphi = \cos \omega t. \quad (7)$$

Po dvojnásobným derivováním podle času dostaneme

$$\ddot{\varphi} = -\omega^2 \cos \omega t, \quad (8)$$

neboli

$$\ddot{\varphi} = -\omega^2 \varphi. \quad (9)$$

Porovnáním rovnic (6) a (9) zjistíme, že

$$\omega^2 = \frac{D}{J}. \quad (10)$$

Postup, který jsme právě provedli, byl vlastně řešením diferenciální rovnice. Byl to trochu zvláštní způsob řešení – uhádli jsme ho.

Ve veličině ω jste asi poznali tzv. *úhlovou frekvenci*, pro kterou platí $\omega = 2\pi f$, neboli

$$\omega = \frac{2\pi}{T}, \quad (11)$$

kde T je perioda, se kterou kmitá naše torzní kyvadélko. Pokud tuto periodu změříme, získáme vztah pro direkční moment vlákna D :

$$D = \frac{4\pi^2}{T^2} J. \quad (12)$$

K určení direkčního momentu tedy potřebujeme znát periodu kmitů torzního kyvadélka a jeho moment setrvačnosti J .

Právě jsme se dostali na první rozcestí na cestě k cíli – ke změření gravitační konstanty G , a tedy také ke zvážení zeměkoule. Na tomto rozcestí se musíme rozhodnout, chceme-li počítat co nejpřesněji, nebo si dovolíme nějaká malá zanedbání, což bude znamenat zjednodušení výpočtu. Zvolíme cestu zjednodušení. Chcete-li počítat přesněji a text je vám srozumitelný, jistě to zvládnete sami.

První přiblížení zde bude znamenat to, že poněkud zjednodušíme výpočet momentu setrvačnosti kyvadélka. Nebudeme uvažovat hmotnost spojovací tyčky. Započítáme tedy jenom moment setrvačnosti kuliček o hmotnosti m_2 . Výsledkem bude:

$$J = 2m_2 \left(\frac{a}{2}\right)^2, \quad (13)$$

kde $a/2$ je vzdálenost středu kuličky od osy otáčení kyvadélka.

Výsledný vztah pro směrný moment tedy je:

$$D = \frac{4\pi^2}{T^2} 2m_2 \left(\frac{a}{2}\right)^2 = 2 \left(\frac{\pi}{T}\right)^2 m_2 a^2. \quad (14)$$

Změřit periodu T lze poměrně snadno. Perioda je totiž dosti dlouhá (okolo 230 s). Neměříme ji ale tak, že bychom sledovali přímo torzní kyvadélko. Jeho pohyb si prohlížíme na opačné straně posluchárny, kde se pohybuje stopa laserového paprsku odraženého od zrcátka na závěsu kyvadélka. Tento pohyb je, na rozdíl od přímého pozorování kyvadélka, dobře viditelný a změření periody je docela snadné. Výpočet směrného momentu je potom již také snadný.

Měření gravitační síly

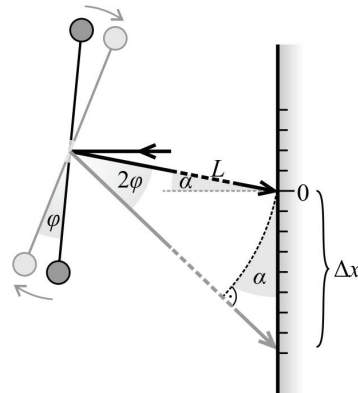
Nyní přejdeme k samotnému měření síly, kterou na sebe působí velká koule a kulička vahadélka. To spočívá ve dvou krocích.

Nejprve opatrně přetočíme držák s velkými koulemi tak, aby se dotkl zarážky, která vymezuje jeho krajní polohu. Na každou z kuliček působí gravitační síla (ve výsledku jde o dvojici sil), která nepatrně stočí torzní kyvadélko. Na protější zdi pozorujeme pohyb stopy laserového paprsku. Ta pomalu kmitá a naším úkolem je nalézt bod (rovnovážnou polohu), okolo kterého toto kmitání probíhá. Pečlivě sledujeme krajní body výchylky stopy paprsku a určujeme střed jejich spojnice. Když jsme hotovi, tento bod označíme a přesuneme držák s koulemi do druhé krajní polohy. Nyní na vahadélko působí dvojice gravitačních sil, které se jej snaží stočit na druhou stranu. Projeví se to tím, že stopa paprsku na zdi se kmitavým pohybem pomalu přesouvá a kmitá okolo nové rovnovážné polohy. Tu opět pečlivě určíme. Nakonec zjistíme, o jakou vzdálenost Δx se rovnovážná poloha posunula. V tomto údaji je skrytá informace o tom, jak se díky působícím momentům gravitačních sil zkroutilo molybdenové vlákno, na kterém je vahadélko zavěšeno a jehož směrný moment jsme předtím určili. Je to klíč k nalezení velikosti gravitačních sil mezi velkými koulemi a malými kuličkami.

Situace je schematicky, ve značném nepoměru ke skutečným velikostem, znázorněna na obr. 2. Uvědomte si, že vzdálenost L je přibližně 9 m, zatímco posunutí Δx je asi jenom 4 cm. Tmavěji je v obrázku znázorněno vahadélko v situaci, kdy jsou velké koule v jedné krajní poloze, světleji v poloze druhé. Skutečné stočení vlákna je znázorněno úhlem φ . Odražený paprsek se přitom stočil o úhel 2φ (o φ se zvětšil úhel dopadu paprsku na zrcátko, o stejný úhel se musel zvětšit i úhel odrazu). Oblouk,

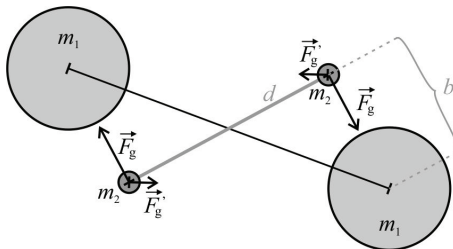
který opsal konec paprsku o délce L , můžeme v daném případě považovat za úsečku s délkou $L \cdot 2\varphi$. Tato „úsečka“ (ve skutečnosti část kružnice) svírá se stěnou úhel α . Pro vzdálenost Δx tedy platí následující vztah:

$$\Delta x = \frac{2L\varphi}{\cos \alpha}. \quad (15)$$



Obr. 2: Náčrt situace popisované v textu – stáčení vahadélka vlivem gravitačních sil

Podívejme se nyní na obr. 3, který znázorňuje gravitační síly působící na vahadélko (resp. na jeho kuličky) v jedné z krajních poloh. V tomto okamžiku stojíme na druhém rozcestí, na kterém si budeme muset vybrat, jestli chceme počítat s větší přesností, ale složitěji, nebo jestli provedeme opět nějaké zanedbání. Zvolíme druhou z naznačených možností. Budeme uvažovat pouze působení bližší velké koule na každou z kuliček. Pokud byste chtěli započítat i působení koulí vzdálenějších, můžete se o to pokusit samostatně. (Zpřesnění výsledku ale nebude příliš výrazné.)



Obr. 3: Síly působící na vahadélko v jedné z krajních poloh

Každá z velkých koulí působí na vahadélko momentem síly o velikosti $F_g \cdot d$. Písmenem d jsme označili polovinu vzdálenosti a , tedy vzdálenost středu malé kuličky od osy otáčení. Po přesunutí velkých koulí do druhé krajní polohy budou působit stejně velké momenty gravitačních sil, jejich otáčivý účinek bude ale opačný. Ve výsledku tedy stočení vlákna o úhel φ způsobil celkový moment (vnějších) sil

$$M = 4F_g d.$$

Vzhledem k tomu, že vzdálenost středu velké a malé koule v krajní poloze je b , platí pro každou z gravitačních sil F_g :

$$F_g = G \frac{m_1 m_2}{b^2}. \quad (16)$$

Mezi velikostí momentu vnějších sil a stočením vlákna platí vztah $M = D\varphi$, což lze s využitím předchozího zapsat jako

$$4F_g d = D\varphi \Rightarrow \varphi = \frac{4F_g d}{D}. \quad (17)$$

Po dosazení do rovnice (15) získáme pro Δx vztah:

$$\Delta x = \frac{2L}{\cos \alpha} \frac{4F_g d}{D}. \quad (18)$$

Nyní už jenom stačí dosadit za direkční moment ze vztahu (14), za gravitační sílu F_g ze vztahu (16) a po malé úpravě získáme výraz pro výpočet gravitační konstanty G (nezapomeňme, že jsme si dočasně označili $a/2$ jako d):

$$G = \frac{\pi^2 a b^2 \Delta x \cos \alpha}{2l m_1 T^2}. \quad (19)$$

Měřením provedeným pro účely tohoto článku jsme zjistili, že:

$$T = 230,2 \text{ s},$$

$$\Delta x = 5,4 \text{ cm}.$$

Po dosazení do vztahu (16) získáváme $G \doteq 6,09 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$. Tabulková hodnota je přitom $G \doteq 6,6 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$. Když uvážíte zjednodušení, která jsme vědomě při odvození vztahu (16) udělali, a vezmete v úvahu, do jak delikátního měření jsme se pustili, můžeme být s výsledkem spokojeni. Při měření s gravitačními vahami se většinou, je-li měření provedeno pečlivě a s dostatečnou dávkou trpělivosti, neodchýlíme od tabulkové hodnoty o více než 10 %. Při měření se musíme

vypořádat s různými rušivými vlivy. Patří mezi ně např. chvění budovy, proto je lepší měřit večer, nebo v noci. Velmi nepříjemným rušivým faktorem je případný elektrický náboj na součástech měřicích zařízení. Tento vliv eliminujeme tím, že jsou všechny kovové součásti vah uzemněny a před měřením celé zařízení „postříkáme“ antistatickým sprejem. Je také zapotřebí dostatečně dlouho čekat, než se vahadélko přesune z jedné polohy do druhé po přetočení držáku s velkými koulemi. Momenty sil jsou totiž velice malé a vahadélko se přesouvá tomuto faktu přiměřenou dobu. Chcete-li tedy získat dobrý výsledek, bude měření trvat třeba i více než dvě hodiny. Inu. . . experimentální fyzika je zajímavá tím, že na vás nastraží nejednu překážku, s níž se musíte vypořádat a mnohdy si na výsledek musíte dostatečně dlouho počkat.

Závěr

Na závěr bychom měli doplnit to, co jsme slíbili v názvu článku, tedy vysvětlit, jak lze Cavendishovými vahami zvážit zeměkouli. Vypadá to totiž, že jsme popsali něco jiného – měření gravitační konstanty G . Krok od gravitační konstanty ke hmotnosti Země ale jistě snadno dokážete udělat sami. Jak na to? Newtonův gravitační zákon můžeme napsat např. takto:

$$F_g = G \frac{mM_Z}{R_Z^2}. \quad (20)$$

M_Z zde představuje hledanou hmotnost Země, R_Z její poloměr, m je hmotnost nějakého předmětu a F_g je gravitační síla, kterou je tento předmět přitahován Zemí, je-li umístěn na jejím povrchu (zcela zbytečně určitě připomínáme, že tuto sílu určíte jako mg). G jsme změřili, takže stačí z rovnice (20) vyjádřit M_Z , dosadit správné hodnoty a zeměkouli máte zváženou.

Chcete si měření gravitační konstanty, a tedy i vážení zeměkoule vyzkoušet sami? Ozvěte se autorům článku, např. na adresu redakce časopisu *Rozhledy matematicko-fyzikální*, a domluvte se, kdy přijdete. Rádi Vám s měřením pomůžeme.

Literatura

- [1] Žilavá, M.: Vážení Země. Diplomová práce. MFF UK, Praha, 1995.

Síla a Newtonovy zákony

Jaroslav Reichl, Praha

Abstrakt. Článek popisuje možný způsob zavedení fyzikální veličiny síla a následné vyslovení Newtonových pohybových zákonů v rámci středoškolské fyziky. Metodika popsaná v článku vychází z bohatých zkušeností autora se středoškolskými žáky i učiteli. Následně jsou v článku prezentovány kvalitativní úlohy, které (opět na základě zkušeností autora článku) dělávají problémy jak žákům, tak učitelům. Obě tyto skupiny čtenářů v článku tedy mohou najít inspiraci.

Motivace

Chceme-li zvednout ze stolu mobilní telefon, musíme na telefon působit určitou silou. Jestliže chceme stisknout klávesu na klávesnici počítače (nebo určité místo na displeji mobilního telefonu), musíme na příslušnou klávesu (resp. místo na displeji) působit určitou silou. Jestliže nám spadne mobilní telefon na podlahu, působí na něj podlaha při dopadu určitou silou, což může vést k poškození displeje (poškrábání, prasknutí).

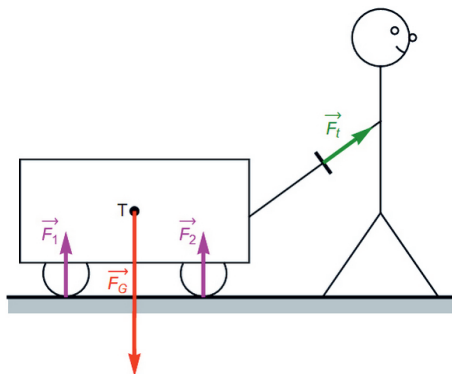
Z těchto konkrétních případů, které známe všichni, kdo používáme v 21. století moderní zařízení, je zřejmé, že pojem síla je skutečně důležitý. Také je zřejmé, že se nejedná jen o nezázvisnou školní látku, ale o praktickou veličinu, které je vhodné rozumět. Bez ohledu na platné školní dokumenty, které učitelům radí a nařizují, co a jak mají učit, by pojmu síla měl rozumět na solidní úrovni každý středoškolák.

Síla

Studiem silových účinků na různá tělesa se zabýval anglický fyzik, matematik, astronom a alchymista Isaac Newton (1643–1727). V roce 1687 vydal své stěžejní dílo *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*, ve kterém shrnul své poznatky z dynamiky (část mechaniky zkoumající příčiny pohybu, kterými je právě působící síla) a infinitezimálního počtu (základy diferenciálního a integrálního počtu) nutného pro přesnější popis studovaných fyzikálních jevů.

Dříve než budou uvedeny Newtonovy zákony, je nutné pochopit pojem síla. Jedná se o vektorovou fyzikální veličinu, k jejímuž plnému popisu je nutné znát její působišť, směr a velikost. Tak např. na vozík zobrazený

na obr. 1 působí tíhová síla F_G svisle dolů v těžišti vozíku, tahová síla F_t , kterou je vozík tažen, svírá s vodorovnou podložkou jistý nenulový úhel a působí na konci oje vozíku a také síly F_1 a F_2 , kterými na vozík působí silnice a které působí v místě dotyku kol vozíku a silnice.



Obr. 1

Právě uvedený detailní rozpis je uveden proto, aby bylo zřejmé, že *síla je projevem vzájemného působení dvou těles* (vozík a Země, vozík a ruka, vozík a silnice). To znamená, že kdykoliv chceme mluvit o síle nebo sílu zakreslovat do obrázku, je nutné znát dvě tělesa („dva parťáky“), mezi kterými daná síla působí. Pokud si tuto skutečnost uvědomíme, stane se vyšetřování silového působení těles snadnější úlohou.

Newtonovy zákony

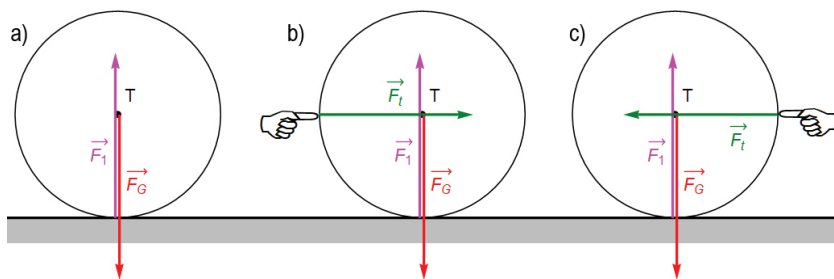
Souvislost síly s pohybem tělesa lze odvodit na příkladu míčku, který je položen na hladkém vodorovném stole. Tuto situaci lze sledovat v tomto textu teoreticky, ale popisované situace lze též snadno realizovat experimentálně.

Na míček působí Země tíhovou silou F_G , která ovšem míček na vodorovném stole do pohybu neuvede. Stejně tak jej do pohybu neuvede síla F_1 , kterou na míček působí stůl (viz obr. 2a)). (Uvažované dvě síly leží na téže přímce – na obrázku jsou od sebe mírně posunuty, aby byly obě dobře patrné.) Výsledná síla působící na míček je tedy v tomto případě nulová a míček je v klidu.

Abyste se míček začal po stole pohybovat, musí na něj zapůsobit (v nejjednodušším případě vodorovná) síla – např. tlaková síla ruky F_t (viz obr. 2b)). Pokud chceme míček pohybující se po stole zastavit, musíme

na něj působit opět určitou silou. Tato síla musí mířit proti směru pohybu míčku (viz obr. 2c)). Pokud bychom míček nezastavili, tak by se pohyboval po stole poměrně dlouho. V případě, že by na míček nepůsobily žádné odporové a třecí síly (což se v běžných podmínkách realizuje velmi špatně), pohyboval by se stále stejnou rychlostí (míček by tedy nezrychloval, ani nezpomaloval a pohyboval by se stále stejným směrem).

Stejně tak na míček musí působit síla, pokud má míček změnit směr pohybu – např. hodíme-li míček proti zdi. Při dopadu míčku na zeď působí zeď na míček určitou silou a míček změní směr svého pohybu (bez ohledu na to, pod jakým úhlem na zeď dopadl).



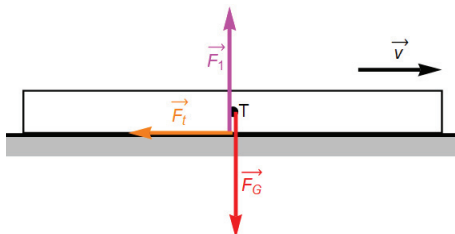
Obr. 2

Na základě této situace můžeme vyslovit znění *prvního Newtonova zákona – zákona setrvačnosti*: Nepůsobí-li na těleso žádná síla nebo jsou-li síly působící na těleso vzájemně vykompenzovány, pohybuje se těleso rovnoměrně přímočaře, nebo je v klidu.

Je důležité si uvědomit, že obě charakteristiky pohybu – rovnoměrný a přímočarý – jsou důležité; těleso prostě nesmí zrychlovat, ani zpomalovat. V předchozím příkladu se míček pohyboval rovnoměrně (při zanedbání odporových a třecích sil) mezi uvedením do pohybu a jeho zastavením. Častou námitkou žáků je, že v praxi 1. Newtonův zákon neplatí: pokud uvedeme do pohybu např. mobilní telefon ležící na stole s ubrusem, velmi rychle se zastaví. Ano, to je pravda. Ale telefon se zastaví proto, že na něj na ubrusu působila proti směru jeho pohybu poměrně velká třecí síla F_t (viz obr. 3). Nebyl tak splněn předpoklad uvedený ve znění 1. Newtonova zákona. Proto telefon zpomaluje, až se nakonec zastaví. (Zobrazené síly F_G a F_1 leží na stejné přímce; pro lepší přehlednost obrázku byly záměrně navzájem mírně posunuty.)

Pokud si nyní představíme, že budeme chtít uvést do pohybu nejdříve prázdný vozík (zobrazený na obr. 1) a poté za jinak stejných podmí-

nek (dosažení stejné velikosti rychlosti za stejný čas jako u prázdného vozíku) tentýž vozík naložený těžkým nákladem, bude se při působení stejně velké tahové síly vozík pohybovat v uvedených situacích různě. Je zřejmé, že těžší vozík se bude uvádět do pohybu hůře – bude se rozjíždět pomaleji. To znamená, že se bude rozjíždět s menším zrychlením.



Obr. 3

Pokud by na vozík zobrazený na obr. 1 působili po řadě dva různě silní chlapci, uvedl by vozík snáze do pohybu ten chlapec, který dokáže vyvinout větší sílu. Tento chlapec by tedy udělil vozíku působením větší síly větší zrychlení.

Tyto poznatky lze shrnout ve formulaci *druhého Newtonova zákona – zákona síly*: Stálá síla F působící na těleso o hmotnosti m uvádí toto těleso do rovnoměrně zrychleného pohybu se zrychlením a ; přitom platí

$$F = ma.$$

Z uvedené formulace je zřejmé, že se jedná o jedinou sílu, v případě více sil působících na totéž těleso výslednici těchto sil.

Různé situace dokumentující platnost zejména druhého Newtonova zákona budou uvedeny v následující kapitole. Předtím je ovšem důležité si uvědomit několik důležitých faktů.

Prvním z nich je skutečnost, že směr síly a směr zrychlení, které tato síla uděluje tělesu, jsou stejné. Bylo by velmi absurdní tlačit vozík směrem dopředu a ten by se začal rozjíždět směrem vzad. Ač to zní jako zřejmá věc, při zakreslování sil působících na různá tělesa tento poznatek občas zůstává pozapomenut.

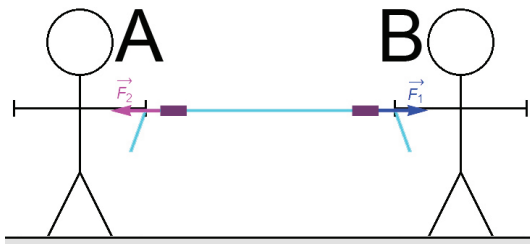
Druhým faktem, který je uveden přímo ve znění 2. Newtonova zákona, je souvislost síly a zrychlení. Familiárně lze 2. Newtonův zákon vyjádřit ve znění „Když síla, tak zrychlení!“ O rychlosti není ve znění zákona síly ani slovo! Souvislost síly a rychlosti se velmi často mylně vyskytuje v řadě nejen žákovských úvah při řešení úloh z dynamiky. Příčinou je

patrně skutečnost, že zapomínáme při rozkreslování sil na 1. Newtonův zákon, který vlastně říká, že klidový stav tělesa a rovnoměrný přímočarý pohyb (tj. pohyb s nulovým zrychlením) je z hlediska dynamiky stejný. V obou případech na těleso působí nulová síla (případně výslednice sil na těleso působících je nulová).

Před vyslovením třetího Newtonova zákona uvažujme (nebo zkuste sami provést) experiment, který je zobrazen na obr. 4. Dva kluci stojí na podlaze a v ruce mají provázek, ke kterému jsou přivázané dva siloměry (reprezentované na obr. 4 tmavými obdélníky). Nyní kluci provázek napnou postupně třemi způsoby:

- táhne kluk A;
- táhne kluk B;
- táhnou oba kluci.

Není podstatné, zda budou velikosti sil ve všech třech případech stejné. Podstatné je, že při každém způsobu napínání provázku ukážou oba siloměry stejné velikosti sil. Další síly, které nemají v tomto případě zásadní vliv na výklad, nejsou v obrázku pro přehlednost zakresleny.



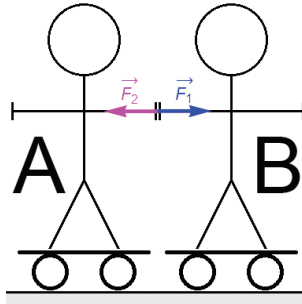
Obr. 4

Další situace, kterou budeme studovat (ideálně i experimentálně zkoušet), je situace zobrazená na obr. 5. Dva kluci stojící těsně u sebe každý na svém skateboardu na vodorovné podlaze mají stejnou hmotnost. Kluci se od sebe nyní odstrčí, což lze provést třemi způsoby:

- kluk A se odstrčí od kluka B;
- kluk B se odstrčí od kluka A;
- kluci se od sebe odstrčí navzájem.

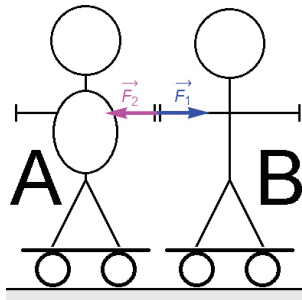
Bez ohledu na to, jak se kluci uvedou do pohybu, budeme pozorovat, že oba urazí do zastavení stejnou dráhu za tutéž dobu. To znamená, že po uvedení do pohybu vyjeli stejně velkou počáteční rychlostí, což při daných parametrech experimentu znamená, že se pohybovali oba se stejně velkým zrychlením. Z druhého Newtonova zákona tedy plyne, že oba

kluci na sebe navzájem působili stejně velkými silami opačného směru. Tyto síly jsou zobrazeny na obr. 5 (na kterém nejsou kvůli přehlednosti zakresleny síly tíhové a síly podlahy působící na oba kluky): silou F_1 působí kluk A na kluka B a silou F_2 působí kluk B na kluka A. Fakt, že obě síly mají stejnou velikost, lze vysvětlit i situací zobrazenou na obr. 4. Ačkoliv kluci jednou působí tahem (situace zobrazená na obr. 4) a podruhé tlakem (situace zobrazená na obr. 5), jsou situace analogické.



Obr. 5

Pro úplnost můžeme ještě provést (nebo alespoň teoreticky rozebrat) situaci zobrazenou schematicky na obr. 6. V tomto případě má kluk A větší hmotnost než kluk B. Po uvedení do pohybu jedním z výše uvedených způsobů budeme pozorovat, že kluk A urazí za stejný čas kratší vzdálenost, než urazí kluk B. To vyplývá z toho, že se po uvedení do pohybu pohyboval s menším zrychlením. Síly F_1 a F_2 , kterými na sebe kluci působí, přitom mají stejné velikosti; to vyplývá z experimentu schematicky zobrazeného na obr. 4.



Obr. 6

Na základě uvedených situací lze vyslovit znění *třetího Newtonova zákona – zákona akce a reakce*:

Každá dvě tělesa na sebe vzájemně působí stejně velkými silami opačného směru. Jedné ze sil se říká akce, druhé reakce. Síly akce a reakce současně vznikají a současně zanikají.

V uvedeném znění je podstatné, že „dvě tělesa vzájemně na sebe“ působí silami. Tento fakt byl zdůrazněn i u situací zobrazených na obr. 4 až obr. 6: síly akce a reakce totiž působí KAŽDÁ NA JINÉ TĚLESO (silou F_1 kluk A na kluka B a silou F_2 kluk B na kluka A), A PROTO TYTO SÍLY NELZE SKLÁDAT (sčítat ani odčítat). To je velmi častá chyba, která pak vede k mylným závěrům ohledně pohybového stavu těles.

Která ze sil se bude nazývat akce a která reakce, není důležité. Na situaci VZÁJEMNÉHO působení těles lze nahlížet z pohledu obou vzájemně působících těles.

Ačkoliv se znění právě třetího Newtonova zákona velmi silně v řadě učebnic a učebních textů zdůrazňuje, z Newtonových zákonů je tento zákon patrně nejméně podstatný. V řadě situací a úloh (řešených kvalitativně i kvantitativně) je podstatné zakreslit síly PŮSOBÍCÍ NA VYŠETŘOVANÉ TĚLESO, protože právě tyto síly ovlivňují pohybový stav daného tělesa. Skutečnost, že např. i mobil vyšetřovaný v situaci zobrazené na obr. 3 působí na stůl nebo dokonce na planetu Zemi, je pro určení pohybového stavu mobilu nepodstatná.

Silová bilance různých situací

Dále popsané situace mají za cíl popsat a vysvětlit, jaké síly působí na dané těleso a jak tyto síly souvisí s pohybovým stavem uvažovaného tělesa (klid, rovnoměrný pohyb, zrychlený pohyb). Některé ze zobrazených situací lze jednoduchými prostředky realizovat experimentálně, jiné je třeba si představit, protože jejich realizace by byla poněkud nákladná (např. pohyb parašutisty).

Pochopení silové bilance je nezbytné pro další úvahy související s hledáním těžiště těles, chováním těles ponořených do různých tekutin, vyšetřováním deformačních účinků síly působící na těleso, popisem nabitě částice v elektrickém, magnetickém i elektromagnetickém poli, ... Výhodou zde uvedených úloh je, že pohyb míčku či parašutisty si představíme snadněji než např. pohyb nabitě částice.

Ve všech dále uvedených situacích bude cílem nakreslit na základě konkrétního zadání síly působící na dané těleso nacházející se v určitém

pohybovém stavu. Má-li tento článek přinést nové poznatky a dovednosti, bylo by dobré zkusit si síly zakreslit dříve, než si čtenář přečte řešení.

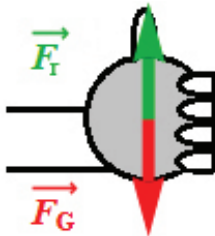
Zakreslete síly působící na míček, který drží sportovec v ruce a který je vůči zvolené vztažné soustavě v klidu.

Situace je zakreslena na obr. 7. Na míček působí dvě síly – síla ruky F_r , kterou na míček působí ruka sportovce, a síla tíhová F_G , kterou na míček působí Země. Míček je v klidu, proto na něj podle prvního (resp. druhého) Newtonova zákona nepůsobí žádná výsledná síla. To znamená, že velikosti popsanych sil jsou stejné. To můžeme matematicky formulovat vztahem $F_r = F_G$, který popisuje pouze VELIKOSTI obou sil; jejich směry jsou zřejmé z obr. 7.

Pokud bychom chtěli do matematického vztahu promítnout i směry sil, mohli bychom napsat vztah mezi vektory obou sil:

$$F_r = -F_G;$$

znaménko mínus značí, že vektor síly F_r má opačný směr než vektor síly F_G .



Obr. 7

Zakreslete síly působící na míček puštěný z ruky sportovce. Přítomnost odporových sil vzduchu a) zanedbejte, b) uvažujte.

a) Pokud nebudeme uvažovat odporové síly, bude na míček po jeho vypuštění z ruky sportovce působit pouze tíhová síla F_G (viz obr. 8a)). Míček se bude tedy pohybovat pouze pod vlivem této síly; bude se tedy pohybovat volným pádem (rovnoměrně zrychlený pohyb s nulovou počáteční rychlostí a se zrychlením rovným tíhovému zrychlení).

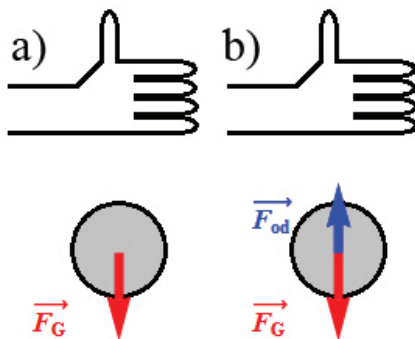
b) Budeme-li uvažovat přítomnost odporových sil, bude na míček kromě svisle dolů mířící tíhové síly F_G působit i svisle vzhůru odporová síla vzduchu F_{od} . V případě míčku je velmi pravděpodobné, že velikost

síly odporové bude menší než velikost síly tíhové (viz obr. 8b)), a proto se míček bude pohybovat zrychleným pohybem, ale už ne volným pádem. Na míček kromě tíhové síly působí další síla opačným směrem, a proto výsledná síla má menší velikost než síla tíhová. Zrychlení, které tato výsledná síla uděluje míčku, má tedy menší velikost, než je velikost tíhového zrychlení. Navíc se velikost zrychlení míčku bude mírně zmenšovat vlivem nárůstu velikosti odporové síly; zkoumání této závislosti ale není předmětem tohoto článku.

V této souvislosti upozorníme na správný zápis faktu, že velikost odporové síly vzduchu je menší než velikost tíhové síly. Správný zápis má tvar: $F_{od} < F_G$, tedy je nutné použít zápis pro velikosti sil, ne pro vektory. Nerovnost, ve které by vystupovaly vektory, nedává smysl.

Při detailním rozboru bychom mohli ještě navíc uvažovat vztakovou sílu vzduchu, která působí na míček. Její velikost je ale v tomto případě zanedbatelná ve srovnání s velikostí tíhové síly, a proto není zásadní chybou vztakovou sílu v tomto případě neuvažovat.

Další možnosti vztahu velikosti tíhové síly a odporové síly vzduchu budou probrány v situacích popisujících pohyb parašutisty.



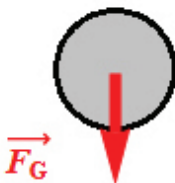
Obr. 8

Zakreslete síly působící na míček, který sportovec vrhl směrem dolů. Míček byl vyfotografován v určité vzdálenosti pod rukou sportovce. Odporové síly vzduchu zanedbejte.

Tato situace je pro řadu žáků (ale i učitelů fyziky) poměrně matoucí. I když z hlediska působících sil je naprosto jasná. Stačí si uvědomit to, co bylo řečeno v rámci definování síly a jejího působení. Jakmile chceme hovořit o nějaké síle (resp. zakreslovat sílu do obrázku), je nutné si uvědomit, že síla je projevem VZÁJEMNÉHO PŮSOBENÍ TĚLES (musíme

tedy znát „dva parťáky“, mezi kterými síla působí). Vzhledem k tomu, že míček není v kontaktu s rukou, působí na něj pouze tíhová síla F_G (viz obr. 9) prostřednictvím tíhového pole Země. Odporové síly vzduchu působící na míček máme dle zadání zanedbat, přítomnost (resp. důvod pro nepřítomnost) vztlakové síly jsme diskutovali při řešení předcházející situace.

Míček se v tomto případě bude pohybovat rovnoměrně zrychleným pohybem s nenulovou počáteční rychlostí (míček byl vržen) se zrychlením rovným tíhovému zrychlení (na míček působí pouze tíhová síla). Pro upřesnění dodejme, že se v tomto případně míček nepohybuje volným pádem. (Volný pád je sice definován jako pohyb s tíhovým zrychlením, ale zároveň také s nulovou počáteční rychlostí.)

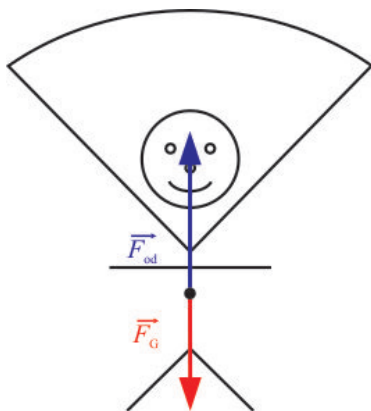


Obr. 9

Zakreslete síly působící na parašutistu, který s otevřeným padákem při pohybu dolů zpomaluje.

Vzhledem k tomu, že předpokládáme, že se parašutista nachází v blízkosti povrchu Země, působí na něj tíhová síla F_G svisle dolů. Vlivem otevřeného padáku na něj působí i odporová síla vzduchu F_{od} mířící svisle vzhůru (viz obr. 10). Jestliže se má parašutista pohybovat zpomaleným pohybem směrem dolů, míří vektor jeho zrychlení směrem vzhůru (tj. proti pohybu parašutisty). V tomto směru působí také (podle druhého Newtonova zákona) výsledná síla. A vzhledem k tomu, že na parašutistu působí pouze dvě síly ležící na téže přímkě, je zřejmé, že velikost odporové síly musí být větší než velikost tíhové síly. Jedině tak bude výsledná

síla směřovat vzhůru a bude pohyb parašutisty brzdit. Matematicky můžeme psát: $F_{od} > F_G$.



Obr. 10

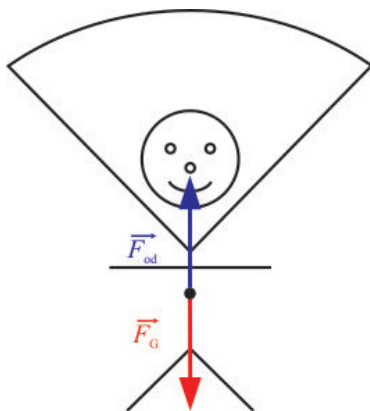
Zakreslete síly působící na parašutistu, který se s otevřeným padákem pohybuje k povrchu Země stálou rychlostí.

V blízkosti povrchu Země na parašutistu bude působit tíhová síla F_G . Vlivem otevřeného padáku na něj bude působit odporová síla vzduchu F_{od} . Parašutista se pohybuje stálou rychlostí, což podle prvního Newtonova zákona znamená, že na něj nepůsobí žádná síla, případně (což je případ „našeho“ parašutisty) se síly na něj působící musejí vzájemně kompenzovat (viz obr. 11). Proto je jasné, že velikosti obou působících sil musejí být stejné. To můžeme zapsat (v případě rovnosti velikostí dvou sil) dvojím způsobem: buď skalárně ve tvaru $F_{od} = F_G$ nebo vektorově ve tvaru, do kterého je nutné ovšem promítnout i vzájemně opačné směry obou sil:

$$\vec{F}_{od} = -\vec{F}_G.$$

Popsaná situace nastává v poslední části parašutistovy trajektorie nad povrchem Země. U vojáků, soutěžících a dalších profesionálních parašutistů tato část pohybu netrvá příliš dlouhou dobu. V případě tandemových seskoků, které nabízejí různé agentury prodávající „adrenalinové zážitky“, je tato část profesionálním parašutistou zákazníkovi prodloužována, aby se zákazník mohl kochat pohledem z výšky na krajinu pod sebou.

Tato fáze pohybu parašutisty současně zaručuje dopad na povrch Země rychlostí s relativně malou velikostí; tak lze předejít úrazu parašutisty (a v případě tandemového seskoku i zákazníka). Velikost této rychlosti je možné spočítat na základě vztahu pro velikost odporové síly, který popisuje závislost na hustotě tekutiny, příčném průřezu tělesa, koeficientu odporu a právě velikosti rychlosti (viz např. [1]).



Obr. 11

Zakreslete síly působící na parašutistu, který s otevřeným padákem při pohybu vzhůru zrychluje.

Než začneme uvažovat nad silovou bilancí, je dobré si uvědomit, že tato situace není pouze školní úlohou zaměřenou na trénink Newtonových zákonů. Při jedné příležitosti autor článku měl možnost diskutovat s profesionálním pilotem vojenských bojových letadel, který při zmínce této situace potvrdil její realitu. Sám pilot se v rámci tréninku nouzového výsadku z letadla do podobné situace dostal – silný vzestupný proud vzduchu ho táhl směrem vzhůru. Padák v tomto případě byl naopak přítěží. Odporová síla vzduchu, která v tuto chvíli byla silou urychlující pilota směrem vzhůru, měla vlivem velkého příčného průřezu padáku (který je ve standardních situacích vyžadován) značnou velikost. Pilot přežil, ale tento typ pohybu je velmi nebezpečný, pilot se tímto způsobem mohl dostat do oblasti atmosféry, kde bylo málo kyslíku pro pohodlné dýchání a (nebo) kde poklesla teplota pod hodnotu příjemného teplotního komfortu nutného pro přežití.

Pokud budeme nyní rozebírat situaci z hlediska dynamiky, zjistíme, že na parašutistu působí opět dvě síly. Tíhová síla F_G svisle dolů a odporová síla vzduchu F_{od} svisle vzhůru. Parašutista se podle zadání pohybuje vzhůru zrychleným pohybem. Zrychlení parašutisty tedy míří směrem nahoru a v tomto směru musí mířit (ve shodě s Newtonovým zákonem síly) i výsledná síla. To tedy znamená, že odporová síla musí mít větší velikost než síla tíhová. (To je v souladu i s uvedeným zážitkem pilota.)

Tato situace je ale zobrazena na obr. 10, ačkoliv zadání k danému obrázku bylo jiné. Nedošli jsme k žádnému rozporu, jen je nutné si uvědomit, že obě situace se liší směrem pohybu parašutisty. To je dobré si uvědomit i pro další podobné situace: různé typy pohybů mohou být (resp. musejí být) popsány stejnými silami (typ síly, směr i velikost). A opět se potvrzuje to, co je uvedeno jako komentář u formulace druhého Newtonova zákona: síla úzce souvisí se zrychlením, nikoliv s rychlostí.

Zakreslete síly působící na automobil nacházející se v klidu na vrcholu nakloněné roviny.

Jako motivace pro vyšetřování této situace může posloužit ukázka z filmu [2]. Hlavní hrdinka přijíždí do domku svého tchána a nechá auto na vrcholu kopce (aniž si to uvědomí špatně zabrzděné). Zatímco ona jde do domku, auto se samovolně rozjede. O jeho zastavení se pak pokouší místní traktorista.

Z hlediska silové bilance na automobil bude určitě působit tíhová síla F_G svisle dolů a síla F_k , kterou na automobil působí kopec; tato síla působí kolmo ke svahu (viz obr. 12). Zanedbáme-li odporové a třecí síly, jsou tyto síly jedinými skutečnými (tj. „své parťáky majícími“) silami, které na automobil působí. Působí-li na jedno těleso více sil, můžeme najít jejich výslednici, pro kterou v tomto případě platí:

$$F_p = F_G + F_k;$$

síla F_p je rovnoběžná se směrem svahu a běžně se nazývá pohybová síla. Tato síla totiž uvádí těleso na nakloněné rovině do pohybu. Pokud na automobil nepůsobí jiné síly proti této síle (síla brzd, síla špaluku pod koly, ...), uvede tato síla automobil do rovnoměrně zrychleného pohybu. Směr síly F_p (tj. její rovnoběžnost se směrem svahu) je dán tím, že tato síla uvádí (jak bylo uvedeno) těleso do pohybu po nakloněné rovině; směr zrychlení i směr rychlosti automobilu jsou se svahem rovnoběžné. Stejný směr působící síly a zrychlení, které síla tělesu uděluje, vyplývá i ze druhého Newtonova zákona.

Ve filmu [2] tento automobil sjede ze svahu a vyjede do protisvahu, kde se zastaví a následně se začne vracet zpět. Pokud bychom během jízdy do protisvahu zakreslovali síly na automobil působící, byla by situace velmi podobná. Na automobil bude působit výsledná síla F_p ve směru rovnoběžném se svahem, ale tentokrát proti směru pohybu automobilu. To je ale ve shodě s druhým Newtonovým zákonem: při jízdě do protisvahu automobil brzdí – vektor zrychlení tedy míří proti směru jeho pohybu.

Pokud bychom uvažovali existenci odporových a třecích sil, zmenšila by se velikost zrychlení automobilu při jízdě ze svahu dolů. Při jízdě do protisvahu by se velikost zrychlení naopak zvětšila. Odporové a třecí síly totiž v obou případech působí proti směru pohybu.



Obr. 12

Závěr

Podobných situací, které byly popsány v tomto článku, lze vymyslet celou řadu. Při zakreslování sil působících na vybrané těleso a při psaní podmínek, které musí mezi působícími silami platit, je nutné se držet základních pravidel vyplývajících ze zavedení fyzikální veličiny síla: uvažovat (resp. zakreslovat) jen ty síly, které vznikají vzájemným působením těles (tj. síly, které „mají dva parťáky“), a mít na paměti, že druhý Newtonův zákon dává do souvislosti sílu a zrychlení, nikoliv sílu a rychlost, jak se někteří žáci i učitelé domnívají.

Literatura

- [1] <http://fyzika.jreichl.com/main.article/view/127>, [cit. 4. 2. 2019].
 [2] Jak se krotí krokodýli. Film, režie Marie Poledňáková, 2006.

Co je to FYKOS? Proč ho řešit?

Karel Kolář, MFF UK, Praha

Abstrakt. Seznámíte se s FYKOsem, který je nejen Fyzikálním korespondenčním seminářem pro středoškoláky, ale i souborem dalších atraktivních aktivit pro zájemce o fyziku. V druhé části článku si můžete přečíst ukázky pár zajímavých úloh z nedávných ročníků FYKOSu se stručnými řešeními.

Co je FYKOS a co všechno pořádá?

FYKOS

FYKOS je název pocházející ze zkratky názvu Fyzikální KOrespondenční Seminář¹⁾. To je také ústřední aktivitou FYKOSu – soutěž jednotlivců, která probíhá dálkovou formou v průběhu celého školního roku. Organizátoři FYKOSu, vysokoškoláci, zveřejní na webu zadání série úloh²⁾. Účastníci, středoškoláci se zájmem o fyziku, mají zhruba pět týdnů na to, aby zpracovali svá řešení. Ta pak pošlou elektronicky či poštou organizátorům. Organizátoři řešení opraví, obodují a pošlou poštou zpět účastníkům s komentáři, co bylo správně a co by případně mohli do příště zlepšit. Na základě získaných bodů v průběhu celého ročníku se vytvoří pořadí úspěšnosti řešitelů, které slouží i pro jejich odměnění. Úspěšní řešitelé ročníků získávají osvědčení, které jim může posloužit například k prominutí přijímacího řízení na Matematicko-fyzikální fakultu Univerzity Karlovy.

Do soutěže je možné se připojit kdykoliv v průběhu školního roku. Řešitel nemusí zasílat řešení všech úloh – může si vybrat jenom ty, které se mu líbí nebo o kterých si myslí, že je zpracuje správně. Vítána jsou i částečná řešení problémů, i za ně je možné získat body, byť ne plný počet.

Soustředění

Řešitelé, kteří přijmou pozvání na soustředění³⁾, považují soustředění za největší odměnu za řešení FYKOSu v průběhu roku. Jde o akci, které

¹⁾ Webové stránky Fyzikálního korespondenčního semináře: <https://fykos.cz>

²⁾ Aktuální zadání úloh FYKOSu: <http://fykos.cz/zadani>

³⁾ Soustředění FYKOSu: <https://soustredeni.fykos.cz>

se dvakrát ročně zúčastní zhruba 28 středoškoláků, kteří mají podobné zájmy. Soustředění obvykle trvá od soboty do další neděle. Za tu dobu se účastníci mnohé naučí – jak v rámci přednášek, tak i různých her. Hry jsou zaměřené jak na rozvoj analytického myšlení, tak i na soft-skills a v neposlední řadě jsou zpestřením programu.

Fyziklání, Náboj

Organizátoři FYKOSu chystají pro středoškoláky také další tři mezinárodní soutěže, které jsou až pro pětičlenné týmy. Ty se od FYKOSu dále liší tím, že na řešení úloh mají týmy jenom pár hodin času. FYKOSí Fyziklání⁴⁾ probíhá v Praze, Fyziklání online⁵⁾ na internetu a Fyzikální Náboj⁶⁾ v Praze, Ostravě a na dalších místech v zahraničí. Podrobnosti o akcích naleznete na jejich webových stránkách.

Exkurze

FYKOS pořádá jednou ročně Den s experimentální fyzikou (DSEF)⁷⁾. V průběhu jednoho dne zájemci dopoledne navštíví různá experimentální pracoviště na Matfyzu (MFF UK) a odpoledne pokračují na dalších pracovištích, např. FzÚ AV ČR či ÚJV Řež. Setkají se s fyziky, od nichž se dozví aktuální stav poznání vědy a jaké otázky se dnes zkoumají.

Nepravidelnou akcí je Týden s aplikovanou fyzikou (TSAF)⁸⁾. Jedná se obvykle zhruba o týden plný exkurzí. Účastníci navštíví jak vědecká pracoviště zabývající se základním výzkumem, továrny na výrobu aut či letadel, tak například i science centrum. Již několikrát byla akce uspořádána formou poznávacího zájezdu s hlavním cílem CERN ve Švýcarsku. Některé roky se akce zaměřuje na zajímavosti ČR a vyjíždí se na jednotlivé exkurze z Prahy, kde jsou účastníci ubytováni.

Další aktivity

Do minulého ročníku probíhaly pravidelně FYKOSí přednášky⁹⁾ na Matfyzu v Troji. Zatím nejsou pro 2019/20 žádné v plánu, ale pokud by skupina zájemců kontaktovala organizátory, pak je možné nějakou vyhlásit v průběhu roku.

⁴⁾FYKOSí Fyziklání: <https://fyziklani.cz/>

⁵⁾Online Fyziklání: <https://online.fyziklani.cz/>

⁶⁾Fyzikální Náboj: <https://physics.naboj.org/>

⁷⁾Den s experimentální fyzikou: <https://dsef.fykos.cz>

⁸⁾Týden s aplikovanou fyzikou: <https://tsaf.fykos.cz>

⁹⁾Přednášky FYKOSu: <https://prednasky.fykos.cz>

Příležitostně FYKOS pořádá další jednorázové akce či se zapojuje do aktivit pořádaných MFF UK. Organizátory můžete také potkat na dalších fyzikálních akcích.

Ukázky úloh FYKOSu

FYKOS má několik druhů úloh. Již téměř 10 let má každá série následující složení úloh

- Jednoduché (1., 2.) – nejjednodušší úlohy, byť nemusí být vždy přímočaré. Účastníci 2. ročníku SŠ a mladší mají body z těchto úloh násobené dvěma.
- Normální (3.–5.) – již složitější úlohy.
- Problémové (P) – často otevřený problém, bývá více možností přístupu k jejich řešení.
- Experimentální (E) – úloha, pro jejíž zpracování je potřeba něco změřit a měření zpracovat.
- Seriálová (S) – úloha, která se týká textu, který je zveřejňován společně se zadáním série. V průběhu ročníku bývá věnován jednomu tématu – buď fyzikálnímu či nějakému aparátu, který fyzikové využívají ve své práci.

Kromě aktuálních zadání je možné nalézt na webových stránkách i vzorová řešení úloh, které byly zadány v minulosti, a také celé ročenky¹⁰⁾, ve kterých naleznete jak vzorová řešení úloh ročníku, tak souborné texty seriálů a zprávy o průběhu aktivit. Za historii FYKOSu je možné nalézt na webu více než tisícovku řešených úloh.

Další částí článku jsou ukázky jednotlivých typů úloh – jak z nedávné doby, tak i archivní. Řešení jsou pouze stručně načtrnuta, podrobnější verze můžete nalézt na webu¹¹⁾.

Jednoduchá – 32-3-1 – Zlevněné banány

Zadání Mikuláš v obchodě vložil několik banánů do igelitového sáčku. Před jejich zvážením ho napadlo, že kdyby pytlík naplnil místo vzduchu heliem, budou banány stát o něco méně. Helium Mikuláš koupil ve slevě za jednu korunu na litr při standardním tlaku. Jaká musí být cena banánů, aby se mu tento „podvod“ vyplatil?

¹⁰⁾ Ročenky FYKOSu: <https://fykos.cz/ulohy/rocenky>

¹¹⁾ Zadání úloh FYKOSu: <http://fykos.cz/zadani>

Bonus: Naleznete plyn, u kterého se vyplatí plnit jím sáček při ceně banánů 30 Kč na kilogram. Nezapomeňte citovat zdroje ceny daného plynu.

K řešení Občas jsou úlohy FYKOSu přímo ze života. Například tato byla inspirovaná myšlenkami na to, jak co nejvíc ušetřit po vzoru Járy Cimrmana, který prý plnil vodíkem dopisy, které zasílal své matce. Tedy do té doby než zjistil, že jeho matka dopisy nedostává, protože se na poště kvůli prudkému razítkování vzňaly (dle úvodního semináře ke hře Hospoda na mýtince).

Věnujme se však samotnému řešení úlohy. Jde o ne příliš složitou aplikaci vztahové síly. Stačí si uvědomit, že celková efektivní síla, kterou bude plyn nadlehčovat pytlík, bude úměrná rozdílu hustot plynu uvnitř pytlíku ρ_{He} a okolního vzduchu ρ_{vzd} . Z té pak určíme hmotnost banánů Δm_{B} , kterou ušetříme, z následujícího:

$$F = (\rho_{\text{vzd}} - \rho_{\text{He}}) V g = \Delta m_{\text{B}} g,$$

kde g je tíhové zrychlení a V objem plynu v pytlíku. Pokud kilogram helia stojí $C_{\text{He}} = 5\,100$ CZK.kg⁻¹, pak nám vychází cena banánů, pro kterou by se nám akce vyplatila, jako

$$C_{\text{B}} \geq \frac{C_{\text{He}}}{\frac{\rho_{\text{vzd}}}{\rho_{\text{He}}} - 1} \doteq 900 \text{ CZK.}$$

Pokud se podíváme na další dostupné plyny, tak zjistíme, že jako výhodný vychází asi pouze zemní plyn. Zejména kvůli tomu, že je levný a současně má nižší hustotu než vzduch.

Normální – 22-6-1 – Odpor je marný

Zadání Vypočítejte odpor n -rozměrné krychle mezi dvěma nejvzdálenějšími vrcholy (ty o souřadnicích $(0, 0, \dots, 0)$ a $(1, 1, \dots, 1)$). Zkuste začít od trojrozměrné a použijte stejný postup.

K řešení Úloha je vybrána ze staršího ročníku, kdy ještě nebyly systematicky zadávány jednoduché úlohy v sérii a celkový počet úloh v sérii byl o jednu menší. Podle dnešního třídění by šlo jistě o „normální“ úlohu.

Aby si řešitel udělal představu o tom, jak to funguje pro obecné n v nějaké n -rozměrné krychli, je dobré začít od těch n , která si lze jednoduše představit. Dokonce je dobré začít v úvahách i v 1D, pokračovat ve 2D a 3D a pak usoudit, jakým způsobem řešení zobecnit.

Prvním krokem nechť je tedy jednorozměrná krychle. Jde pouze o jednu hranu, která má odpor R . Celkový odpor je tedy $R_1 = R$.

Ve dvou dimenzích máme čtverec. Jde o dvojici paralelně zapojených větví, kde v každé jedné jsou dva odpory sériově. Celkový odpor dostáváme jako

$$R_2 = \left(\frac{1}{R+R} + \frac{1}{R+R} \right)^{-1} = R.$$

Nesmíme se však nechat zmást těmito prvními dvěma případy, které shodou náhod vyšly stejně, a pokračujeme ve 3D. To je trochu složitější situace. Zkusme se zamyslet nad pravidly, která platí pro každý vrchol a hrany n -rozměrné krychle a která by se dala použít. První důležitou vlastností je, že v n rozměrech bude z každého vrcholu n -rozměrné krychle vystupovat právě n hran. Druhou důležitou vlastností je, že cesta, kterou bude krychlí procházet elektrický proud, bude mít vždy cestu dlouhou právě n hran. Poslední důležitou vlastností je symetrie krychle (předpokládáme, že všechny hrany jsou rovnocenné). Pokud ji otočíme, nesmíme poznat rozdíl. Což ovšem znamená, že můžeme vodivě spojit vždy všechny vrcholy, které mají stejnou vzdálenost od vrcholů, na které připojujeme napětí. Zapojení je ekvivalentní, protože by i při tomto zapojení netekl skrze nově vytvořené vodivé spojení žádný elektrický proud, ale pro výpočet je situace jednodušší.

Na základě předchozích pravidel si pak můžeme upravit vztah pro 2D tak, že z nultého vrcholu jdou dva rezistory zapojené paralelně a dále jsou dva rezistory opět zapojené paralelně. Dostaneme stejný výsledek, ale trochu jiným způsobem.

Pro 3D krychli uvážíme, že u vstupního a výstupního bodu máme tři rezistory paralelně. Tím jsme určili 2/3 cesty – ale ještě musíme uvážit, kolik rezistorů bude ve střední části. Protože z každého vrcholu musí jít tři rezistory – z nultého bodu jdou tři do tří různých vrcholů, pak z každého musí jít další dva dále. Prostřední blok má tedy paralelně 6 rezistorů a dostáváme

$$R_3 = \frac{R}{3} + \frac{R}{6} + \frac{R}{3} = \frac{5}{6}R.$$

Dále si uvědomíme, že výše uvedená pravidla nás navádějí k tomu, že sčítáme vždy převrácené hodnoty n -tého řádku Pascalova trojúhelníku

násobeného n . Po troše rozmýšlení dojdeme k obecnému vztahu

$$R_n = R \sum_{k=0}^n \frac{1}{k \cdot \binom{n}{k}}.$$

Normální – 32-3-3 – Teplíčko v Dysonově sféře

Zadání Jaký poloměr by musela mít Dysonova sféra, aby obklopila hvězdu se zářivým výkonem Slunce tak, že na vnějším povrchu této sféry by byla teplota $t = 25^\circ\text{C}$? Neuvažujte přítomnost atmosféry v Dysonově sféře. Dysonova sféra by měla být relativně tenká dutá struktura kulového tvaru obklopující danou hvězdu.

K řešení Dysonova sféra je vděčným tématem pro úlohy. Již několik úloh s tímto tématem bylo zadáno v rámci FYKOSího Fyziklání či Fyziklání online. Tentokrát je úkolem odhadnout poloměr sféry, aby měla žádanou teplotu.

Dysonova sféra o poloměru r bude mít vnější povrch $S = 4\pi r^2$, ze kterého bude ztrácet energii zářením dle Stefanova-Boltzmannova zákona. Intenzita záření tělesa o termodynamické teplotě T je $M = \sigma T^4$. Pokud si vyhledáme celkový zářivý tok Slunce L , pak platí

$$L = \sigma T^4 S = 4\pi \sigma T^4 r^2 \Rightarrow r = \frac{1}{2T^2} \sqrt{\frac{L}{\pi\omega}} \doteq 1,74 \text{ AU}$$

Pokud bychom si našli údaj o solární konstantě (průměrný tepelný tok, který prochází jednotkovou plochou ve vzdálenosti 1 AU od Slunce), pak můžeme využít tu a dostaneme obdobný výsledek. Výsledek je samozřejmě závislý na aktuálním tepelném toku přicházejícím od Slunce a v případě, že nám stavba bude trvat miliony let, tak se bude teplota při konstantním poloměru Dysonovy sféry měnit. Také jsme uvažovali, že se tepelný tok vyzářuje pouze ven. To je dobře opodstatněné tím, že při stacionárním stavu se všechny tepelný tok, který se vyzáří dovnitř Dysonovy sféry, opět absorbuje na Dysonově sféře. Dokud nebude sféra uzavřená, tak teplota bude významně nižší.

Problémová – 31-5-P – Plovoucí rtuť

Zadání Vymyslete co nejvíce fyzikálních „figlů“, díky kterým by rtuť, alespoň po omezenou dobu, plavala na kapalné vodě. Čím trvalejší řešení naleznete, tím lépe.

K řešení Problémové úlohy jsou různých druhů – tato spadá do kategorie, ve které je důležité kreativní myšlení. Takové úlohy jsou hodnoceny spíše co do počtu nápadů. Obecný postup u této úlohy je nalézt nějakou sílu, která bude působit na rtuť proti síle tíhové. Příklady řešení mohou být:

- Jednou možností je snažit se využít nějakou sílu do vody. To by ovšem nejspíše vedlo ke klesání většiny objemu rtuti ke dnu.
- Rtuť zmrazíme v kapalném dusíku do tvaru lodičky, která bude nějakou dobu plavat, než roztaje.
- Rtuť rozdělíme na malé kuličky, které se díky povrchovému napětí na povrchu vody na ní udrží. To funguje pro velmi malé kuličky, ale pokud jich umístíme na povrch vody v menší oblasti větší množství, pak se k sobě přiblíží a spojí do větších, které již povrchové napětí vody neudrží.
- Rtuť má od vody odlišnou permeabilitu. Hypoteticky by tedy bylo možné vytvářet tak silné magnetické pole, ve kterém by držela rtuť nad vodou. Prakticky to ale není realizovatelné, protože rozdíl permeabilit je nízký a magnet by musel být monstrózní.

Experimentální – 22-6-E – Vratné lahve

Zadání Kupte si standardní skleněnou lahev od piva nebo minerálky a změřte, jak závisí výška tónu vydaného po fouknutí na hrdlo na výšce vodní hladiny v lahvi.

K řešení Měření je zajímavé tím, že jednak lze obvykle snadno naměřit jak frekvence, které by odpovídaly jednoduché polouzavřené trubce s délkou odpovídající přibližně výšce láhve, a tak i další frekvenci, která odpovídá dutinovému Helmholtzově rezonátoru. Samotné měření je relativně jednoduché. Stačí si připojit k počítači mikrofón a využít nějaký volně šiřitelný program pro měření zvuku se spektrální analýzou.

Základní frekvence trubky je

$$f_0 = \frac{c}{4l},$$

kde c je rychlost zvuku v daném prostředí a l je délka trubky. Další harmonické frekvence, které je možné slyšet a naměřit, jsou pak lichými násobky této základní frekvence, tedy $3f_0, 5f_0$ atd.

Základní frekvence Helmholtzova rezonátoru je

$$f_H = \frac{c}{2\pi} \sqrt{\frac{S}{VL}},$$

kde S je průřez hrdla rezonátoru, V jeho objem a L délka.

Seriálová – 29-1-S – Zahřívací

Zadání (1. podúloha ze 4) Na rozezhřátí a seznámení se s čísly zjistěte, do jaké výšky byste mohli zdvihnout průměrného člověka (70 kg), využijete-li celou energii běžné tyčinky Mars (okolo 250 Cal pro 50 g tyčinku). Také vypočtete, jaká energie je $k_B T$ při pokojové teplotě a vyjádřete ji také v elektronvoltech (pokud neznáte takovou jednotku energie, vězte, že je to energie, kterou získá elektron při urychlení na rozdílú potenciálů 1 V, a číselně $1 \text{ eV} = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J}$).

K řešení Jde o první a nejjednodušší úlohu seriálu 29. ročníku FYKOSu o termodynamice. Ten se snažil přiblížit celou širokou oblast termodynamiky co nejpřístupnějším způsobem a dostal se i k složitějším konceptům jako je entropie či Gibbsova energie.

Úloha je prakticky o převodech jednotek energie. Je potřeba si uvědomit, že $1 \text{ Cal} \doteq 4\,200 \text{ J}$ a potenciální energii člověka určíme ze vztahu

$$E_{\text{Mars}} = m_p g \Delta h,$$

kde $E_{\text{Mars}} \doteq 1,05 \text{ MJ}$ je energie jak tyčinky, tak využitá pro horolezecký výstup. Výška, o kterou bychom člověka, za zcela ideálních podmínek, zvedli, je

$$\Delta h = \frac{E_{\text{Mars}}}{m_p g} \doteq 1,5 \text{ km}.$$

Energie uložená v tepelném pohybu části při pokojové teplotě, tedy zhruba 293 K, je $E_{\text{term}} \doteq 25 \text{ meV}$. Energie jedné částice je v řádu desítek milielektronvoltů.

Poděkování

Fyzikální korespondenční seminář pořádá a financuje Matematicko-fyzikální fakulta Univerzity Karlovy. Na organizaci FYKOSu se podílí studenti vysokých škol. FYKOSí Fyziklání a Fyziklání online spoluplyhlaňuje Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy.

Ústřední kolo 68. ročníku Matematické olympiády kategorie A

Jaroslav Švrček, PřF UP, Olomouc

Ústřední kolo 68. ročníku Matematické olympiády v kategorii A uspořádala v letošním roce krajská komise MO Středočeského kraje v Benešově. Celou soutěž přitom zajišťovali organizátoři především ve spolupráci s Gymnáziem Benešov. Všichni soutěžící a členové Ústřední komise MO byli ubytováni v hotelu BENICA, v jehož dvou větších konferenčních sálech se také uskutečnila soutěž v kategorii A. Slavnostní zahájení soutěže však proběhlo večer v neděli 24. března ve starobylé aule benešovského gymnázia za přítomnosti zástupců vedení Středočeského kraje a starosty města Benešov. Matematický ústav AV ČR (a JČMF) na této akci zastupoval jeho ředitel *RNDr. Jiří Rákosník, CSc.*

Na základě jednotné koordinace úloh krajského (II.) kola v kategorii A a regulí soutěže pozvala Ústřední komise MO k účasti ve III. kole 41 nejlepších řešitelů II. kola z celé České republiky, mezi nimi bylo 10 dívek. Na řešení obou trojic soutěžních úloh měli žáci již tradičně vyhrazeny po oba soutěžní dny, jimiž byly 25. a 26. březen, vždy 4,5 hodiny čistého času. Za každou úlohu měli soutěžící možnost získat nejvýše 7 bodů (s celočíselnými bodovými zisky).

Organizátoři závěrečné části MO připravili pro soutěžící a pro členy Ústřední komise MO pestrý doprovodný program. Odpoledne po prvním soutěžním dnu absolvovali soutěžící i členové ústřední komise MO společnou procházku k zámku *Konopiště*, jehož interiér si následně všichni prohlédli. Večer též den pak účastníci III. kola kategorie A navštívili koncert pražské skupiny *Spirituál kvintent*, který se uskutečnil v příjemném prostředí auly benešovského gymnázia. Druhý soutěžní den odpoledne absolvovali všichni účastníci soutěže společný výlet spojený s krátkou procházkou na bájnou horu *Blaník* nedaleko Benešova.

Vyhlášení výsledků soutěže a předání cen nejlepším řešitelům III. kola v kategorii A se uskutečnilo ve středu 27. března dopoledne opět v aule benešovského gymnázia. Slavnostního aktu se zúčastnili také zástupci skupiny ČEZ, kteří speciálně ocenili tři nejlepší řešitele ústředního kola soutěže. Předseda ÚK MO *doc. Jaromír Šimša* v závěrečném projevu

poděkoval celému týmu organizátorů III. kola 68. ročníku MO v kategorii A, především pak řediteli Gymnázia Benešov *Mgr. Romanu Hronkovi* a předsedkyni krajské komise MO ve Středočeském kraji *RNDr. Šárce Gergelitsové, Ph.D.*, za kvalitní přípravu a mimořádně zdařilý průběh celého ústředního kola v kategorii A.

Závěrem uvádíme přehled vítězů a dalších úspěšných řešitelů 68. ročníku MO v kategorii A.

Vítězové:

1. *Josef Minařík* (8/8, G, tř. Kpt. Jaroše, Brno) 42 b., 2. *Karel Chwisitek* (2/4, Mendelovo G, Opava) 38 b., 3. *Matěj Doležálek* (8/8, G Humpolec) 37 b., 4. *Radek Olšák* (8/8, Menza G, Praha 6) 36 b., 5. *Dominik Stejskal* (8/8, G Krnov) 35 b., 6. *Václav Janáček* (6/8, G, tř. Kpt. Jaroše, Brno) 34 b., 7. *Lenka Kopfová* (4/4, Mendelovo G, Opava) 34 b., 8. *Magdaléna Mišinová* (6/8, G J. Keplera, Praha 6) 30 b., 9. *Vojtěch David* (6/8, Wichterlovo G, Ostrava-Poruba) 29 b., 10. *Jan Vavřín* (6/8, PORG a GaZŠ o. p. s) 29 b.

Úspěšní řešitelé:

11. *Adéla Heroudková* (5/8, G, tř. Kpt. Jaroše, Brno) 28 b., 12. *Viktor Fukala* (6/8, G J. Keplera, Praha 6) 28 b., 13. *Jana Pallová* (8/8, G Jakuba Škody, Přerov) 26 b., 14. *Jindřich Jelínek* (4/4, G Olomouc-Hejčín) 26 b., 15. *Jana Bušová* (5/8, G Brno, tř. Kpt. Jaroše) 23 b., 16. *Richard V. Krejsa* (7/8, G, tř. Kpt. Jaroše, Brno) 22 b., 17. *Tomáš Křížák* (8/8, G M. Koperníka, Bílovec) 22 b., 16. *Michaela Svatošová* (7/8, G M. Koperníka, Bílovec) 22 b., 19. *Tomáš Sourada* (7/8, G, Žamberk) 21 b., 20. *Martin Zímen* (8/8, G, Jihlava, J. Masaryka) 21 b.

V případě rovnosti bodů rozhodla o pořadí vítězů a úspěšných řešitelů pravidla uvedená v soutěžním řádu MO. Kompletní výsledkovou listinu, zadání soutěžních úloh i jejich vzorová řešení můžete najít na oficiálních stránkách MO www.matematickaolympiada.cz.

Účast na výběrovém soustředění před 60. mezinárodní matematickou olympiádou (IMO), které se konalo v předvelikonočním týdnu v Kostelci nad Černými lesy, si vybojovalo všech deset vítězů ústředního kola v kategorii A. Z nich pak bylo vybráno šestičlenné české reprezentační družstvo pro aktuální IMO, která se uskuteční od 14. do 22. července 2019 ve Velké Británii (Bath). Na tomto soustředění bylo vybráno také šestičlenné družstvo (doplněné dalšími úspěšnými řešiteli z řad nematurantů) pro 13. ročník Středoevropské matematické olympiády (MEMO), která se bude konat v posledním srpnovém týdnu 2019 v Pardubicích.

Ústřední kolo 68. ročníku Matematické olympiády kategorie P

Pavel Töpfer, MFF UK Praha

Ústřední kolo 68. ročníku Matematické olympiády kategorie P (programování) se konalo v Benešově ve dnech 27–29. března 2019. V této nejmladší kategorii Matematické olympiády se soutěží od školního roku 1985/86, takže letos to byl její 34. ročník. Ústřední kolo kategorie P jako obvykle bezprostředně navázalo na soutěž v kategorii A, devět řešitelů postoupilo do ústředního kola Matematické olympiády v obou kategoriích. Akci výborně připravili a organizačně zajistili pracovníci Gymnázia Benešov. Přímo v budově gymnázia probíhala praktická část soutěže u počítačů a vyhlášení výsledků, zatímco prostory pro zahájení kategorie P a pro teoretickou část soutěže poskytl hotel Benica, ve kterém byli všichni účastníci ubytováni.

K účasti v ústředním kole MO-P bylo pozváno všech 26 úspěšných řešitelů krajských kol a všichni také na soutěž přijeli. Největší zastoupení měl Jihomoravský kraj s 10 řešiteli, ze škol mělo nejvíce soutěžících brněnské gymnázium na tř. Kpt. Jaroše, odkud bylo sedm studentů. Celkem 13 z 26 účastníků ústředního kola MO-P bylo z nematuritních ročníků.

Soutěž byla zahájena ve středu večer. Po krátkém přivítání se soutěžící seznámili s pravidly soutěže a dostali také nezbytné organizační pokyny. Ve čtvrtek dopoledne proběhla teoretická část soutěže, v níž studenti řešili tři úlohy zaměřené na návrh efektivního algoritmu. V této části se nepracuje na počítačích, soutěžící odevzdávají svoje řešení zpracovaná v písemné podobě. Jedna z teoretických úloh každoročně využívá nějaký netradiční výpočetní model, který připraví autoři úloh vždy pro všechna soutěžní kola příslušného ročníku Matematické olympiády. V 68. ročníku MO byl tento model zaměřen na analýzu složitosti on-line algoritmů. Jedná se o algoritmy, které průběžně zpracovávají postupně přicházející vstupní data, bez znalosti celých vstupních dat najednou.

Ve čtvrtek odpoledne měli soutěžící volno s možností navštívit rekonstruovanou sklářskou huť František v nedalekém městě Sázava. Huť nyní působí jako muzeum skla, seznamuje návštěvníky s historií výroby skla

a vystavuje sklářská umělecká díla. Ve sklářské dílně si pak mohl každý vypískovat na skleničku vlastní ozdobný vzor. Organizátoři se v té době věnovali přípravě počítačů na praktickou část soutěže a opravování odevzdaných řešení teoretických úloh. Po večeri ještě následovala návštěva počítačových učeben, kde si všichni mohli prakticky vyzkoušet práci na počítačích se soutěžním a vyhodnocovacím prostředím CMS. Soutěžící k němu přistupují pomocí webového rozhraní, jehož prostřednictvím mohou nejen odevzdávat k vyhodnocení svá vypracovaná řešení soutěžních úloh, ale mohou také klást dotazy k úlohám a dozvídají se, jak byla odevzdaná řešení ohodnocena. Jedná se o stejné prostředí, jaké se používá i na mezinárodních olympiádách v informatice.

Druhý soutěžní den v pátek probíhal u počítačů. Soutěžící řešili tři praktické úlohy, v nichž je třeba napsat a odladit kompletní funkční program. Odevzdaná řešení se v průběhu soutěže okamžitě automaticky vyhodnocují pomocí předem připravené sady testovacích dat. Při těchto testech se uplatňují časové limity na dobu výpočtu, což umožňuje rozlišit efektivitu zvoleného postupu a tím i kvalitu odevzdaného řešení. Každý soutěžící se ihned dozví výsledky testů a má možnost svůj program opravit a znovu odevzdat, pokud nedosáhl očekávaného bodového zisku.

Při přípravě soutěžních úloh MO kategorie P se pravidelně střídají česká a slovenská strana, v Čechách a na Slovensku probíhá soutěž ve stejném termínu a se stejnými úlohami. Úlohy celého letošního ročníku připravili pracovníci z Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v Praze. Na místě také připravili soutěžní prostředí na počítačích a zajistili opravování odevzdaných řešení a zpracování výsledků. Na opravách teoretických úloh se podíleli také spolupracovníci z dalších vysokých škol – z Fakulty informatiky Masarykovy univerzity v Brně a z Fakulty informačních technologií ČVUT v Praze.

Za každou soutěžní úlohu bylo možné získat nejvýše 10 bodů, v celé soutěži tedy až 60 bodů. Tohoto výsledku sice nikdo nedosáhl, ale ti nejlepší se mu velmi přiblížili, absolutní vítěz ústředního kola obdržel 58 bodů. Podle počtu získaných bodů se stanovuje výsledné pořadí, přičemž vzájemné umístění řešitelů se stejným bodovým součtem je odvozeno na základě dalších pomocných pravidel. Úspěšnými řešiteli letošního ústředního kola MO kategorie P se stali soutěžící na 1. až 13. místě v celkovém pořadí, tedy všichni, kteří získali alespoň 28 bodů. Nejlepších šest z nich bylo vyhlášeno vítězi ústředního kola. Diplomy vítězům a dalším úspěšným řešitelům předala předsedkyně Jednoty českých matematiků

a fyziků *doc. Alena Šolcová*, která se slavnostního zakončení MO osobně zúčastnila.

Výsledky ústředního kola 68. ročníku Matematické olympiády kategorie P:

Vítězové:

1. *Josef Minařík*, 8/8, G, tř. Kpt. Jaroše, Brno, 58 b. 2. *Michal Jireš*, 8/8, G F. M. Pelcla, Rychnov nad Kněžnou, 56 b. 3. *Jiří Kalvoda*, 6/8, G, tř. Kpt. Jaroše, Brno, 53 b. 4. *Jonáš Havelka*, 7/8, G, Jírovcova, České Budějovice, 52 b. 5. *Radek Olšák*, 8/8, Mensa gymnázium, Praha 6, 49 b. 6. *Jan Kaifer*, 3/4, G Jana Keplera, Praha 6, 48 b.

Úspěšní řešitelé:

7. *Viktor Fukala*, 6/8, G Jana Keplera, Praha 6, 43 b. 8. *Václav Janáček*, 6/8, G, tř. Kpt. Jaroše, Brno, 41 b. 9. *Lenka Kopfová*, 4/4, Mendelovo gymnázium, Opava, 41 b. 10. *Jakub Šťastný*, 8/8, G, Brno-Řečkovice, 40 b. 11. *Ondřej Sladký*, 6/8, G, Mikulášské nám., Plzeň, 31 b. 12. *Matěj Kripner*, 8/8, G, Kladno, 30 b. 13. *Michal Pácal*, 7/8, G Jiřího z Poděbrad, Poděbrady, 28 b.

Všichni úspěšní řešitelé ústředního kola MO-P obdrželi pozvání na krátké výběrové soustředění, které se uskutečnilo ve dnech 12.–13. 4. 2019 na Matematicko-fyzikální fakultě UK v Praze. Na výběrovém soustředění proběhla další tři praktická soutěžní kola, program soustředění byl navíc doplněn přednáškami s rozborem všech řešených úloh. Konečné pořadí pro výběr reprezentantů na mezinárodní olympiády v informatice bylo stanoveno součtem výsledků z ústředního kola a výsledků dosažených na výběrovém soustředění.

Na konci výběrového soustředění byla jmenována dvě čtyřčlenná reprezentační družstva pro obě mezinárodní olympiády v informatice. Na celosvětovou Mezinárodní olympiádu v informatice IOI vysíláme vždy naše nejlepší řešitele. Její 31. ročník se bude konat v srpnu 2019 v Ázerbájdžánu v hlavním městě Baku. Na středoevropské olympiádě v informatice CEOI nás pravidelně reprezentují mladší řešitelé, kteří v příslušném roce ještě nebudou maturovat. Letos proběhne 26. ročník CEOI v polovině července na Slovensku v Bratislavě.

Na webu <http://mo.mff.cuni.cz/> najdete podrobnější informace o průběhu celého 68. ročníku Matematické olympiády kategorie P, kompletní výsledkovou listinu, texty soutěžních úloh i jejich vzorová řešení. Na stejném místě se můžete seznámit i se staršími ročníky této soutěže a vždy také se všemi aktuálními informacemi o olympiádě.

Celostátní kolo 60. ročníku Fyzikální olympiády

Jan Kříž, Jan Šlégr, PŘF, Univerzita Hradec Králové

Padesát nejlepších řešitelů kategorie A fyzikální olympiády se sešlo poslední únorový týden na Přírodovědecké fakultě univerzity Hradec Králové, kde se konalo celostátní kolo jubilejního šedesátého ročníku.

Fyzikální olympiáda je po olympiádě matematické druhou nejstarší předmětovou olympiádou v České republice.

Konání 60. ročníku v Hradci Králové bylo symbolické – na Přírodovědecké fakultě UHK působí Ústřední komise fyzikální olympiády, včetně *prof. Bohumila Vybírala*, který je s fyzikální olympiádou od jejích počátků, kdy ji společně s prof. Rostislavem Košťálem v roce 1959 zakládal. Na tyto začátky prof. Vybíral vzpomínal na zahajovacím ceremoniálu. Předsedou Ústřední komise fyzikální olympiády je nově jmenovaný děkan Přírodovědecké fakulty UHK *doc. Jan Kříž*, který předsednictví převzal v roce 2015 po *prof. Ivo Volfovi*.

V dalších dnech řešili soutěžící náročné teoretické úlohy z mechaniky, termodynamiky, geometrické optiky, elektřiny i jaderné fyziky. Experimentální úloha celostátního kola, kterou připravili pracovníci katedry fyziky PŘF UHK byla inspirována diamagnetickou levitací a spočívala v měření relativní permeability vzorku bismutu a odvození podmínek levitace.

Všechny úlohy vyžadovaly nejen hluboký fyzikální vhled, ale i použití vyšší matematiky.

Vítězi fyzikální olympiády se stalo celkem jedenáct účastníků, mezi kterými se umístily i dvě dívky, *Kateřina Rosická* (Gymnázium Kutná Hora) a *Miroslava Novoveská* (Masarykovo gymnázium Plzeň). Absolutním vítězem jubilejního ročníku fyzikální olympiády se stal *Josef Minařík* (Gymnázium Brno, třída Kapitána Jaroše), o pouhý půl bod za ním se umístil *Michal Jireš* (Gymnázium F. M. Pelcla Rychnov nad Kněžnou) a na třetím místě skončil (taktéž se ztrátou půl bodu) *Jindřich Jelínek* z Gymnázia Olomouc-Hejčín.

Kompletní výsledkovou listinu, texty soutěžních úloh i jejich vzorová řešení naleznete na stránkách:

<http://fyzikalniolympiada.cz/celostatni-kolo>

ZPRÁVY

Ve dnech 31. 3. až 2. 4. proběhlo výběrové minisoustředění s teoretickými a experimentálními testy, ve kterém bylo z jedenácti vítězů celostátního kola vybráno pět účastníků rovněž jubilejního padesátého ročníku mezinárodní fyzikální olympiády, který se bude konat ve dnech 7. až 15. srpna v izraelském Tel Avivu.

Na začátku června na výběrové soustředění navázalo intenzivní čtrnáctidenní přípravné soustředění, na kterém účastníci jednak rozvíjeli své experimentální dovednosti (které na mezinárodní fyzikální olympiádě dalece překračují rozsah, který je obvyklý na středních školách), jednak vyslechli přednášky pracovníků katedry fyziky věnované pokročilým matematickým metodám, kvantové fyzice, teorii relativity a strategii řešení úloh.

* * * * *

Řešení úloh ze str. 17.

Správné odpovědi:

1) jednou; 2) 100; 3) 504,5; 4) 709; 5) 8; 6) 3;
7) 9; 8) 6051; 9) 1010; 10) 10; 11) 8; 12) 2018/2019;
13) 0; 14) 67; 15) 602; 16) 1 373 734 330;
17) (1, 3, 671) (1, 11, 183) (1, 33, 61) (3, 11, 61); 18) 3; 19) 4.

Úlohy boli vybrané a upravené zo zbierok:

- [1] Bálint, V. a kol.: PYTAGORIÁDA, zbierka úloh 25. ročníka. Bratislava: IUVENTA, 2004.
- [2] Mihalíková, B. a kol.: Úlohy MO ZŠ. Bratislava: IUVENTA 2003.
- [3] Molnár, J. a kol.: Sborníky soutěže MATEMATICKÝ KLOKAN. Olomouc: JČMF, 1995-1999.
- [4] Uhlířová, M.: Počítejte s Klokánem 2000-2004, kategorie Benjamín. Olomouc: Prodos 2007.
- [5] Valášková, Z. a kol.: Zbierka úloh z pytagoriády 30. ročník. Bratislava: IUVENTA, 2009.

Výzva k zasílání článků

Vážené studentky, vážení studenti!

- Řešíte zajímavou fyzikální, matematickou či infromatickou práci?
- Týká se vaše seminární práce některého z výše uvedených oborů?
- Podílíte se na zajímavém F, M, I projektu?
- Chcete představit výsledky své práce také ostatním?
- Organizujete seminář, tábor, soutěž nebo nějakou jinou akci týkající se F, M, I pro středoškoláky?
- Máte nějaký jiný námět, který by se měl objevit v tomto časopise?

Napište článek a zašlete nám jej do *Rozhledů*!

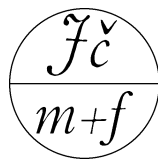
Přijímáme články shrnující původní práce, přehledové články či krátká sdělení. Váš příspěvek bude po recenzi uveřejněn v jednom z následujících čísel našeho časopisu.

Články zasílejte na adresu: **rozhledy@jcmf.cz**

ROZHLEDY

matematicko-fyzikální

Ročník 94 (2019), číslo 2



OBSAH

Ľ. Dvořáková: Vyzkoušejte metodu Monte Carlo	1
J. Dvořák, M. Snětinová: Bertrandův paradox aneb není náhoda jako náhoda	12
D. Jedinák: 19 úloh pre rok 2019	17
E. Šubert: Jak zatáčí vlak	19
Ľ. Dvořáková: Řešení úlohy MO krajského kola kategorie C	21
Z. Drozd, M. Snětinová, K. Žilavá: Vážení zeměkoule II	24
J. Reichl: Síla a Newtonovy zákony	32
K. Kolář: Co je to FYKOS? Proč ho řešit?	46
J. Švrček: Ústřední kolo 68. ročníku Matematické olympiády kategorie A	54
P. Töpfer: Ústřední kolo 68. ročníku Matematické olympiády kategorie P	56
J. Kříž, J. Šlégr: Celostátní kolo 60. ročníku fyzikální olympiády	59

Pokyny pro autory

Příspěvky dodávejte na adresu redakce v elektronické podobě. Nejlépe napsané ve formátu \LaTeX , přijatelný je i formát PlainTeX , je akceptovatelný i text připravený editorem Word či podobným.

Pokud jde o obrázky, je žádoucí, aby byly připraveny v reprodukovatelné podobě. Každý obrázek nechť je v samostatném souboru, nejlépe ve formátu eps nebo pdf. Přípustná je též bitmapa v dostatečném rozlišení.

Ke každému zasílanému příspěvku (ne u soutěží, zpráv a recenzí) přiložte krátkou anotaci v českém jazyce. Dále je žádoucí, aby u každého příspěvku byla uvedena literatura, na kterou je v textu odkazováno.