

# ROZ HLEDY

**MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ**

ČASOPIS PRO ZÁJEMCE O MATEMATIKU, FYZIKU A INFORMATIKU

ROČNÍK 94 (2019) • ČÍSLO 4

Vydává Jednota českých matematiků a fyziků  
tel.: 222 090 708-9, e-mail: [jcmf@math.cas.cz](mailto:jcmf@math.cas.cz)  
za podpory MFF UK Praha a FJFI ČVUT Praha



Vycházejí 4 čísla v kalendářním roce

Obálku navrhl Bohuslav Šír

Sazbu programem  $\text{\TeX}$  připravil RNDr. Miloslav Závodný

Adresa redakce: MFF UK, V Holešovičkách 2, 182 00 Praha 8–Troja  
e-mail: [rozhledy@jcmf.cz](mailto:rozhledy@jcmf.cz)

Internetové stránky časopisu: <https://rozhledy.jcmf.cz/>

Vytiskla Tiskárna Pohlline, Zálesí 1126/88, 142 00 Praha 4

Distribuci pro předplatitele provádí v zastoupení vydavatele  
MYRIS TRADE, s. r. o.

Budova A, 3. patro, Tůrkova 828/20, 149 00 Praha 4  
tel.: 296 371 202, fax: 296 371 201, e-mail: [myris@myris.cz](mailto:myris@myris.cz)

ISSN 0035-9343

MK ČR E4691

© Jednota českých matematiků a fyziků, Praha 2019

---

## Redakční rada

Vedoucí redaktorka:

RNDr. Marie Snětinová, Ph.D., MFF UK Praha

Redaktorka pro matematiku:

doc. Ing. Lubomíra Dvořáková, Ph.D., FJFI ČVUT Praha

Redaktor pro fyziku:

doc. RNDr. Mgr. Vojtěch Žák, Ph.D., MFF UK Praha

Členové redakční rady:

doc. RNDr. Zdeněk Drozd, Ph.D., MFF UK Praha

RNDr. Petr Hanuš, FSv ČVUT Praha

doc. RNDr. Jaroslav Hora, CSc., FPE ZČU Plzeň

PhDr. Miroslava Jarešová, Ph.D., SPŠST a VOŠ Chrudim

prof. RNDr. Ivo Kraus, DrSc., FJFI ČVUT Praha

doc. RNDr. Jan Kříž, Ph.D., PřF UHK Hradec Králové

doc. RNDr. Miroslav Lávička, Ph.D., FAV ZČU Plzeň

RNDr. Miroslav Randa, Ph.D., PdF ZČU Plzeň

doc. RNDr. Jan Šlégr, Ph.D., PřF UHK Hradec Králové

prof. RNDr. Pavel Tlustý, CSc., PedF JU České Budějovice

doc. RNDr. Pavel Töpfer, CSc., MFF UK Praha

prof. Ing. Bohumil Vybíral, CSc., PřF UHK Hradec Králové

RNDr. Vladimír Wagner, CSc., ÚJF AV ČR Řež

## Lineární optimalizace

*Petr Zahradník*

**Abstrakt.** Lineární optimalizace hraje v oboru matematické informatiky velmi významnou roli. Její jednoduchá formulace, deterministická řešitelnost a prokazatelná optimalita ji předurčují k široké aplikaci napříč všemi obory našeho každodenního života. Přestože se může tato disciplína zdát komplikovanou, pro její pochopení stačí středoškolská matematika a trochu prostorové představivosti. Aniž bychom se pouštěli do složitých vět a důkazů, získáme náhled do teorie i praktického využití.

### 1. Všude samé problémy

Žádná oblast matematiky se neobejde bez motivace k jejímu vzniku. Ani lineární optimalizace není výjimkou, praktické využití celou disciplínu hnalo kupředu. Z mnoha příkladů můžeme vybrat například řízení výroby v továrně, přidělování zakázek řidičům taxi, stavbu ropovodů, svoz odpadu na skládku, tvorbu rozvrhu, zefektivňování integrovaného záchranného systému, skládání jídelníčku. . . Zkrátka příkladů je nepřeberně a během čtení tohoto článku vás jistě napadnou mnohé další. My však začneme poněkud jednodušeji:

**Příklad.** Zahradník Petr by rád vysadil ovocné stromy: jabloně a hrušně. Jabloň stojí 100 peněz, hrušeň 300 peněz, nicméně z hrušně dostane zahradník dvakrát větší úrodu. Kolik kterých stromů má Petr vysadit, pokud má na zahrádce místo pro 7 stromů, jeho rozpočet je 1 300 peněz a rád by získal co možná největší úrodu?

Řešení není těžké uhodnout, zkusme se ale zamyslet nad obecnými postupy řešení. Oba stromy zabírají jedno místo na zahrádce, hrušeň je však dvakrát výnosnější, je však také třikrát dražší. Když nakoupíme co nejvíce stromů jednoho druhu, brzy narazíme na jedno z těchto omezení a přitom zůstane rezerva v druhém omezení. Zdá se tedy, že je nutné najít nějakou střední cestu, která vyváží obě kritéria a maximalizuje výnos.

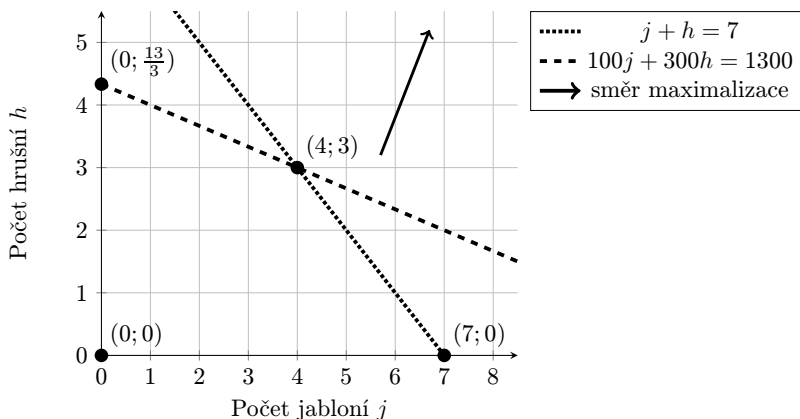
Zkusme tedy nejprve nakoupit 7 jabloní. Tím jsme zcela zaplnili zahrádku, zbyly nám ale nějaké peníze. Můžeme tedy vyměnit 3 jabloně za 3 hrušně. Tím vyčerpáme místo i peníze a máme vyhráno. Pokud zkusíme opačný postup, nakoupíme nejprve 4 hrušně. Za zbylou sto-bankovku dokoupíme jednu jabloň. Nyní můžeme opět vyměňovat pouze jedním

směrem – místo hrušně zasadíme jabloň a tím ušetříme dvě stě peněz. To je ale přesně tolik, kolik potřebujeme na doplnění zahrady jabloněmi.

V obou případech jsme došli ke stejnému řešení – 4 jabloně a 3 hrušně. Ekvivalent výnosu je 10 a je maximální možný. Pro důkaz, že je řešení správné, použijeme jednoduchý geometrický náhled. Nejprve ale trochu značení. Počet jabloní označíme  $j$ , počet hrušní  $h$ . Podmínku pro místo na zahrádce zapíšeme jako  $j + h \leq 7$ , podmínku pro peníze potom jako  $100j + 300h \leq 1300$ . Maximalizovat se snažíme funkci ve tvaru  $Z = j + 2h$ . To nám dohromady dává obvyklou formulaci problému z lineární optimalizace, tzv. *kanonický tvar*:

maximalizovat  $Z = j + 2h$ ,  
pokud platí  $j + h \leq 7$   
a zároveň  $100j + 300h \leq 1300$ ,  
 $j, h$  jsou nezáporné.

Všechny podmínky a vlastně i cílová funkce jsou lineární ve dvou proměnných, můžeme si je proto zobrazit jako přímky a poloroviny v kartézské soustavě souřadnic. Maximalizovaná funkce potom určuje směr, ve kterém hodnota řešení roste:



Obr. 1: Grafické znázornění rovnic podmínek a jejich průsečíků

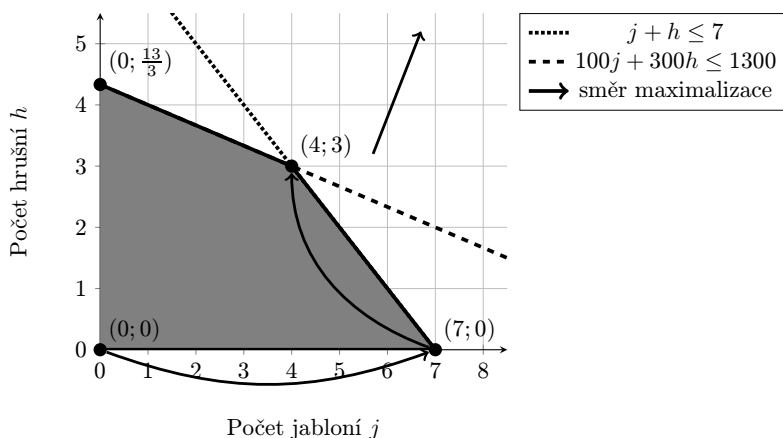
## 2. Konvexní skákání

Vidíme, že nám vznikly čtyři průsečíky, a souřadnice každého průsečíku vlastně označují kombinaci počtu nakoupených jabloní a hrušní.

Pokud dokážeme po průsečících *skákat*, dojdeme k nejlepšímu řešení. Označme oblast vymezenou podmínkami a souřadnicovými osami jako oblast řešení. Každý bod z oblasti řešení je tedy platným řešením, k hledání optimálního řešení se nám budou hodit tři pozorování:

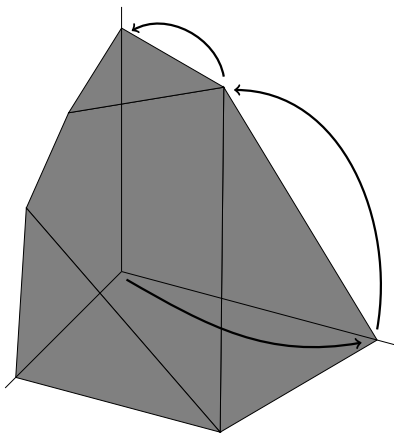
1. Oblast řešení je konvexní mnohoúhelník. To vyplývá z toho, že se vlastně jedná o průnik polorovin.
2. Nejvzdálenějším bodem oblasti řešení v každém směru je vrchol. Pro důkaz vezmeme libovolnou stranu mnohoúhelníka. Pokud je kolmá na hledaný směr, pak jsou všechny její body (a tedy i oba vrcholy) stejně vzdálené. Pokud kolmá není, potom je jeden z vrcholů vzdálenější než všechny její ostatní body, neboť vzdálenost bodů je lineární, a tedy monotónní. Jelikož je mnohoúhelník konvexní, je extrémní bod právě jeden nebo právě jedna celá strana.
3. Do nejvzdálenějšího vrcholu se umíme dostat pomocí skoků po sousedních vrcholech. Skokem rozumíme přesun z nějakého vrcholu do sousedního vzdálenějšího vrcholu. Ať už začneme kdekoli, můžeme skákat po obvodu mnohoúhelníka a stále se v daném směru *vzdalovat* právě do chvíle, než skončíme v optimálním vrcholu (takové vrcholy mohou být nejvýše dva). Kdybychom po cestě k tomuto vrcholu museli skočit *dozadu* v daném směru, nebyl by mnohoúhelník konvexní.

Pokud tedy známe oblast řešení a průsečíky na jejím obvodu, můžeme je proskákat až k optimálnímu vrcholu. A to je přesně to, co jsme udělali v ukázkovém příkladě!



Obr. 2: Grafické znázornění úlohy s vyznačenými skoky po průsečících

Můžeme si jednoduše rozmyslet, že tento postup funguje i pro problémy s více proměnnými a více podmínkami. Jenom se nám pak z 2D oblasti řešení stane konvexní mnohodomenný mnohostěn. V angličtině se používá výraz *simplex*, proto byl algoritmus pojmenován *Simplex algorithm*. Jeho tvůrcem je americký matematik minulého století George Bernard Dantzig [2]. Stejně tak můžeme místo maximalizace minimalizovat, pokud řešení posuzujeme například podle trestných bodů či ztrát zisku.



Obr. 3: Grafické znázornění simplexového algoritmu ve 3D

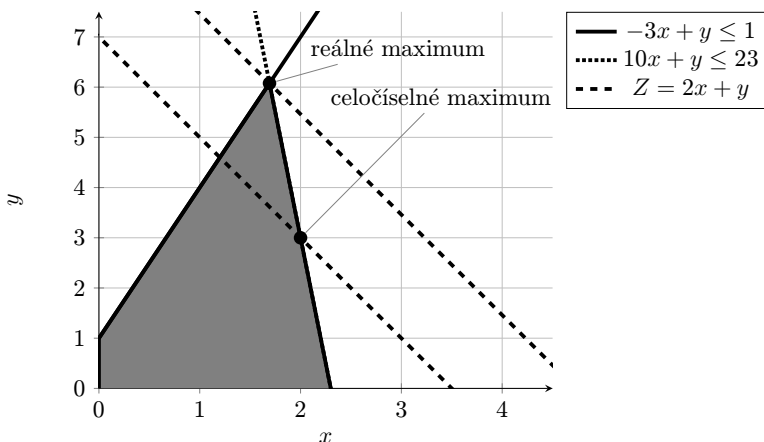
Představa skákání po vrcholech je výborná pro nahlédnutí, nicméně ne zrovna matematicky korektní. Jak se hledají průsečíky? Které průsečíky leží na obvodu oblasti řešení? Pokud máme více možností, kterým směrem skočit? Co když úloha nemá řešení? Co když má úloha řešení v nekonečnu? Pro odpověď na tyto otázky je nutné zavést formálně správný algoritmus tak, jak to kdysi udělal Dantzig [1].

On si totiž všiml, že pokud budeme uvažovat o seznamu podmínek jako o soustavě lineárních rovnic, skok do vrcholu odpovídá Gaussově eliminaci jedné proměnné. Pokud postupně vyeliminujeme všechny proměnné, skončíme v optimálním vrcholu. Podrobnější popis přesahuje rozsah tohoto článku, v literatuře i na internetu je však mnohokrát popsán. Jelikož se až na drobné úpravy jedná o klasické středoškolské řešení soustavy, je algoritmus hledání řešení velmi rychlý a jednoduchý, v průměrném případě běží kvadraticky dlouho vzhledem k počtu proměnných a podmínek [7].

### 3. Polynomiálně či nepolynomiálně?

Máme tedy k dispozici velmi mocný nástroj pro řešení lineární optimalizace a zdaleka ne jediný, podobných algoritmů je hned několik. *Metoda vnitřních bodů* (angl. *Interior-point method*) [4] nebo *Metoda elipsoidů* (angl. *Ellipsoid method*) [5] jsou jen některé z nich. V čem je tedy háček? Ti bystřejší z vás si jistě všimli bodu o souřadnicích 0 a  $\frac{13}{3}$  na předchozích obrázcích. Přestože je matematicky zcela v pořádku nakupovat stromy po třetinách, zahradník by nás za takové řešení nepochválil. Pokud například zvýšíme rozpočet na 1 400 peněz, je optimální nakoupit od každého druhu tři a půl stromu. Zkuste si promyslet, jak naše řešení opravit.

Možná vás napadly různé způsoby řešení zaokrouhlit nebo prohledat nejbližší celočíselné body. Musím vás však zklamat. Neexistuje žádný jednoznačný postup, jak obecně *opravit* reálné řešení na celočíselné. Jednoduchým příkladem budiž obr. 4:



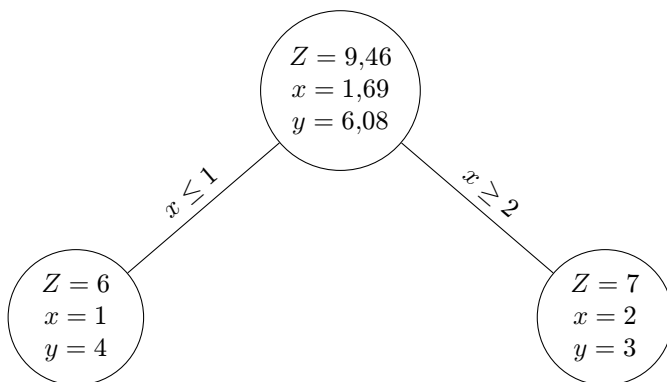
Obr. 4: Grafické znázornění možné vzdálenosti celočíselného a reálného maxima. Zatímco reálné maximum v bodě  $(1,69; 6,08)$  je  $Z = 9,46$ , hledané celočíselné maximum  $Z = 7$  je až v bodě  $(2; 3)$ .

Problém *hledání celočíselného řešení* (angl. *Integer linear programming*, ILP) je tak složitý, že jej neumíme řešit efektivně. Formálně řečeno asymptotický odhad doby strávené deterministickým řešením roste exponenciálně vzhledem k počtu proměnných. Pro takovéto problémy se

ujalo označení třída složitosti NP, aby se odlišily od problémů, jejichž složitost umíme odhadnout polynomem (mnohočlenem) závislým na počtu proměnných. Pokud tedy máme problém velkého rozsahu (mnoho proměnných a podmínek), algoritmy z třídy NP budou zpravidla mnohem pomalejší a odhad výpočetní doby přesahuje stáří vesmíru. Není však třeba házet flintu do žita, i nepolynomiální algoritmus může s velkou pravděpodobností nalézt řešení během několika sekund. Pojďme si jeden takový ukázat.

#### 4. Řezba

S jednou z prvních metod řešení ILP přišli pánové A. H. Land a A. Doig už v roce 1960 [6]. Její název *Metoda větvi a mezí* (angl. *Branch and bound method*) je naprosto vypovídající. Pro tuto metodu je důležité, abychom uměli hledat reálná řešení, třeba právě simplexovou metodou. Po vyřešení vybereme libovolnou neceločíselnou proměnnou a rozvětvíme problém na dva případy zaokrouhlením proměnné nahoru a dolů, jak ilustruje obr. 5.



Obr. 5: Prohledávací strom vytvořený metodou větvi a mezí. Celočíselné řešení je zde nalezeno již po větvení na první proměnné a není třeba dále větvit

Větvení na proměnné  $x_i = k$  je formálně vlastně přidání podmínky  $x_i \leq \lfloor k \rfloor$  resp.  $x_i \geq \lceil k \rceil$ . Taková podmínka *vyřízne* z oblasti řešení pás neceločíselných bodů. Je jasné, že takto můžeme postupně větvit na všech  $n$  proměnných a získat řešení v čase  $2^n$ . Řešení ale můžeme zrychlit pomocí tzv. mezí. Víme, že celá čísla jsou podmnožinou reálných čísel. Pokud



tedy úloha nemá reálné řešení, pak nemá ani celočíselné řešení. Nebo pokud je reálné řešení horší než nejlepší doposud nalezené, celočíselné nemůže být lepší. Tímto způsobem můžeme prohledávání většiny větví zastavit už velmi brzy a ušetřit si spoustu práce. Jedná se sice o heuristický postup (tedy ne obecně platný), pro většinu problémů však velmi rychlý.

Tento poměrně jednoduchý nápad stojí společně s *Chvátalovými–Gomoryovými řezy* a heuristikou *Branch and price* v základu téměř všech ILP algoritmů.

## 5. Binární nespłnitelnost

Existuje jedna skupina problémů, které mají osud ještě krutější. Jedná se o binární lineární optimalizaci (angl. *Binary linear programming* – BIP), problémy, jejichž proměnné mohou nabývat pouze hodnot 0 a 1. Tato úloha je zapsána na slavném Karpově seznamu 21 NP-úplných problémů [3]. To je seznam problémů z třídy složitosti NP, které umíme mezi sebou převádět, žádný však neumíme řešit v polynomiálním čase. Kdo vyřeší jeden problém, vyřeší všechny. Není však jasné, zda efektivní algoritmus existuje, nebo existovat nemůže. Za vyřešení této otázky (známé jako *P vs NP*) je slíbeno mnoho finančních ocenění a věčná sláva.

Nezbývá nám tedy nic jiného než spokojit se s řešením v nejhůře exponenciálním čase a hledat heuristiky (postupy rychle hledající nekompletní nebo nepřesná řešení) a metaheuristiky (postupy hledající pouze dostatečně dobrá řešení). Často nám například stačí pouze lokální maximum (či minimum), například pokud je naším cílem pouze překonat nějakou mez nebo splnit alespoň polovinu podmínek. Výzkum na poli lineární optimalizace stále pokračuje kupředu a možnost řešit i rozsáhlé problémy (řádově tisíce proměnných a miliony podmínek) se stává dostupnou.

## Literatura

- [1] Dantzig, G. B.: *Linear Programming and Extensions*. United States Air Force Project RAND, R-366-PR, Princeton University Press, Princeton, 1963.
- [2] Dantzig, G. B.: *A History of Scientific Computing*. Origins of the Simplex Method, Nash, S. G. (ed.), ACM, New York, NY, 1990, s. 141–151.
- [3] Karp, R. M.: Complexity of Computer Computations, *Reducibility among Combinatorial Problems*. Miller, R. E., Thatcher, J. W., Bohlinger, J. D. (eds.), Springer, Boston, MA, 1972, s. 85–103.

- [4] Karmarkar, N.: A new polynomial-time algorithm for linear programming. *Combinatorica*, roč. 4 (1984), č. 4, s. 373–395.
- [5] Khachiyan, L. G.: Polynomial algorithms in linear programming. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, roč. 20 (1980), č. 1, s. 53–72.
- [6] Land, A. H., Doig, A. G.: An automatic method of solving discrete programming problems. *Econometrica*, roč. 28 (1960), č. 3, s. 497–520.
- [7] Spielman, D. A., Teng, S.-H.: Smoothed analysis of algorithms: Why the simplex algorithm usually takes polynomial time. *J. ACM*, roč. 51 (2004), č. 3, s. 385–463.

## Krátký příběh o obecném tvaru Pythagorovy věty

*Vlastimil Dlab, Bzí u Železného Brodu*

**Abstrakt.** This article presents the following simple property of a general triangle  $ABC$ : Let  $D$  be an arbitrary point and  $A_0, B_0, C_0$  the feet of the perpendiculars from  $D$  on the (possibly extended) sides  $BC, CA, AB$ , respectively. Then

$$|AC_0|^2 + |BA_0|^2 + |CB_0|^2 = |C_0B|^2 + |A_0C|^2 + |B_0A|^2.$$

This statement is a proper generalization of the Pythagorean theorem. Surprisingly, it does not appear in textbooks or other publications.

Dobří učitelé vědí, že každá hodina matematiky by měla být zajímavým a přitažlivým příběhem. To platí pro výuku všeobecně, ale pro výuku na školách především. Pro matematiku je to o to důležitější, že takový přístup pomyslné matematické záhady polidšťuje a tím jakékoliv obavy, či dokonce strach z tohoto předmětu zmírňuje. Ano, každá zajímavá matematická historka sdělená s pohlazením, úsměvem a nadšením zahání strašáka symbolů a zbytečného biflování.

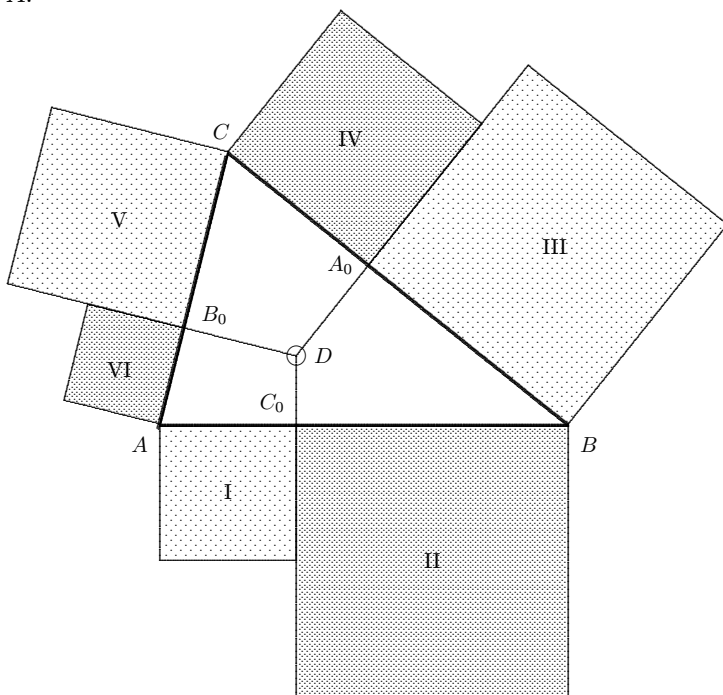
Dnešním úkolem je odhalit tajemství tohoto tvrzení:

*V rovině uvažujeme trojúhelník  $ABC$  a libovolný bod  $D$ . Nechť  $A_0$  je pata kolmice z bodu  $D$  na přímkou určenou vrcholy  $B$  a  $C$ ,  $B_0$  pata kolmice z bodu  $D$  na přímkou určenou vrcholy  $C$  a  $A$  a  $C_0$  pata kolmice z bodu  $D$  na přímkou určenou vrcholy  $A$  a  $B$ . Potom*

$$|AC_0|^2 + |BA_0|^2 + |CB_0|^2 = |C_0B|^2 + |A_0C|^2 + |B_0A|^2. \quad (*)$$

Případ, kdy bod  $D$  leží uvnitř ostroúhlého trojúhelníku  $ABC$ , je znázorněn na obr. 1. Takový obrázek si snadno zapamatujeme, čtverce nad příslušnými úsečkami jsou jednoduše označeny římskými číslicemi I, II, III, IV, V a VI.

Obecnější volbu trojúhelníku  $ABC$  a bodu  $D$  vidíme na obr. 2. Výsledné čtverce se zde mohou celkem libovolně překrývat. Důležitou je zcela speciální volba bodu  $D$ , kdy tento bod splývá s jedním z vrcholů trojúhelníku. Tu uvidíme níže na obr. 3, který zobrazuje situaci, kdy  $D = A$ .

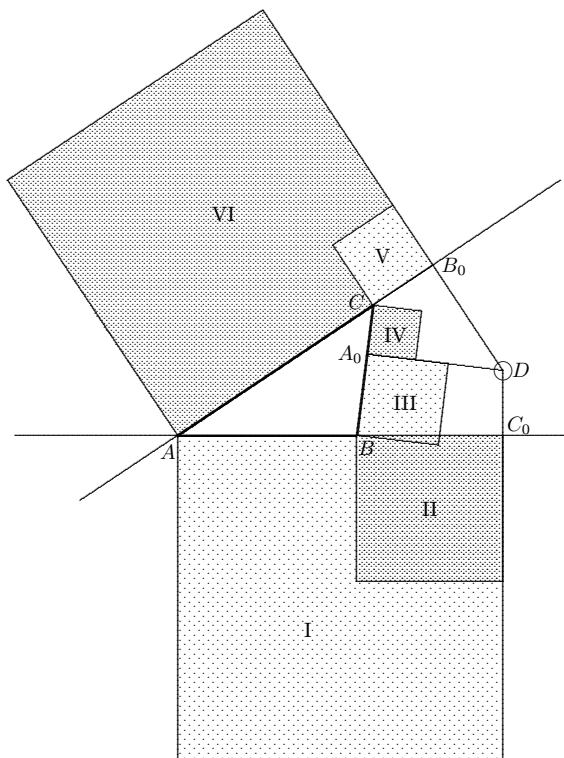


$$\text{Obsah (I + III + V)} = \text{Obsah (II + IV + VI)}$$

Obr. 1

Pythagoras ze Samu žil kolem roku 500 př. n. l. Keramické tabulky YBC 7289 v babylonské sbírce university Yale a Plimpton 322 ve sbírce university Columbia ukazují, že tvrzení Pythagorovy věty byla známa

v Babylonii už v letech 1800–1600 př. n. l. Někteří historikové se domnívají, že Pythagoras mohl znát důkaz tohoto tvrzení alespoň pro rovno-ramenný pravoúhlý trojúhelník (takový důkaz byl znám Baudhayanovi v Indii kolem roku 600 př. n. l.).



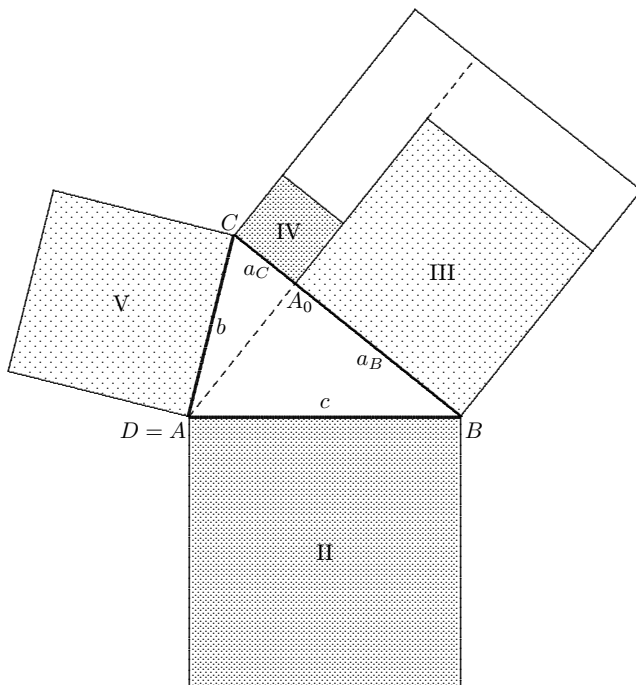
$$\text{Obsah (I + III + V)} = \text{Obsah (II + IV + VI)}$$

Obr. 2

Důkaz Pythagorovy věty je obsažen v Základech Euklida z Alexandrie (žil kolem roku 300 př. n. l.). Základy obsahují dva důkazy tohoto tvrzení, ale ani jednou není v Základech žádné jméno osobnosti s tímto tvrzením spojeno, tj. ani jméno Pythagorovo. Bartel van der Waerden (1903–1996) cituje ve své knize *Science Awakening* [5] historika Ottu Neugebauera (1899–1990) takto: *Měli bychom korektně nazývat „babylonskými“ řadu věcí, které nám řecká tradice předložila jako „pythagorské“.*

Poznamenejme, že Johannes Kepler (1571–1630) považoval Pythagorovu větu za jeden z dvou skvostů geometrie; druhým skvostem byl pro něj zlatý řez.

Jak jsme už poznamenali dříve, důležitou je zcela speciální volba bodu  $D$ , kdy tento bod splývá s jedním z vrcholů trojúhelníku. Obr. 3 zobrazuje situaci, kdy  $D = A$ . To je případ, který se v učebnicích všeobecně popisuje užitím goniometrické funkce kosinus ve tvaru tzv. *věty kosinové*.<sup>1)</sup>



$$\text{Obsah (II + IV)} = \text{Obsah (III + V)}$$

Obr. 3

Přepis obr. 3 je snadný, stačí užít definice kosinu:  $a_C = b \cos |\sphericalangle ACB|$ :

<sup>1)</sup>Poznamenejme, že ve francouzských učebnicích je tato věta nazývána větou Al-Kashiho (1380–1429).

Rovnost  $c^2 + a_C^2 = a_B^2 + b^2$  přepíšeme do tvaru

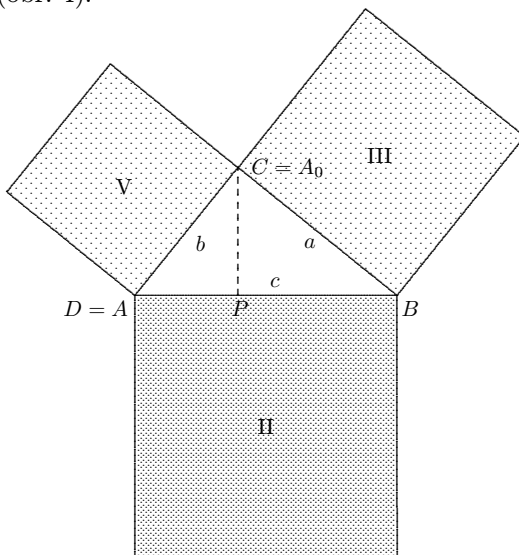
$$\begin{aligned} c^2 &= a_B^2 + a_C^2 + b^2 - 2a_C^2 = \\ &= (a_B + a_C)^2 + b^2 - 2a_C(a_B + a_C) = a^2 + b^2 - 2aa_C = \\ &= a^2 + b^2 - 2ab \cos |\sphericalangle ACB|. \end{aligned}$$

Poznamenejme, že je velmi užitečné (a důležité) si uvědomit, že kosinovou větu lze též jednoduše vyjádřit jako vlastnost rovnoběžníků: *Strany  $a$ ,  $b$  a úhlopříčky  $u$ ,  $v$  každého rovnoběžníku splňují*

$$u^2 + v^2 = 2(a^2 + b^2). \quad (**)$$

Důkaz je snadný. Označíme-li úhly rovnoběžníku řeckými písmeny  $\alpha$  a  $\beta = \pi - \alpha$ , užitím kosinové věty máme  $u^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha$  a  $v^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \beta = a^2 + b^2 + 2ab \cos \alpha$ . Sečtením těchto rovností dostáváme ihned (\*\*).

V případě, že trojúhelník je pravoúhlý (s pravým úhlem při vrcholu  $C$ ), dostáváme jednoduché tvrzení  $c^2 = a^2 + b^2$ , všeobecně nazývané *Pythagorovou větou* (obr. 4).



$$c^2 = \text{Obsah (II)} = \text{Obsah (III + V)} = a^2 + b^2$$

Obr. 4

Velmi těžce bychom hledali někoho, kdo se ve škole nesetkal a nepamatuje se na Pythagorovu větu. Vyjádřeme ji nyní v přesnější formulaci:

*Trojúhelník  $ABC$  o stranách  $a = |BC|$ ,  $b = |CA|$ ,  $c = |AB|$  má při vrcholu  $C$  pravý úhel právě tehdy, když  $a^2 + b^2 = c^2$ .*

Tato formulace tedy obsahuje dvě tvrzení. Jedno matematicky zcela zřejmé, ale pro aplikace důležité: Jestliže délky stran trojúhelníka splňují rovnost  $a^2 + b^2 = c^2$ , je trojúhelník pravoúhlý. Matematicky je to pouhé vyjádření faktu, že délky stran určují jednoznačně trojúhelník.

Podstatné je druhé tvrzení: V pravoúhlém trojúhelníku platí mezi stranami vztah  $a^2 + b^2 = c^2$ . Dnes existuje několik set důkazů tohoto tvrzení, některé naprosto jednoduché, jiné náročnější. Náš důkaz je pouhým vyjádřením zřejmého faktu, že trojúhelníky  $ABC$ ,  $CBP$  a  $ACP$  na obr. 4 (kde  $P$  je patou výšky z vrcholu  $C$ ) jsou podobné (mají stejné úhly). Tedy

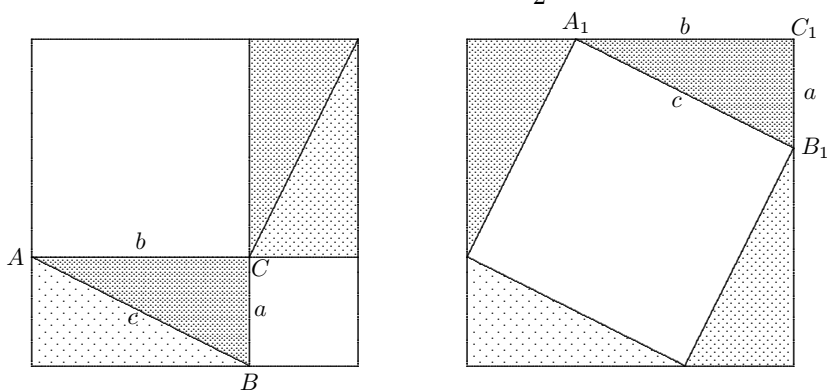
$$\frac{a}{c} = \frac{|PB|}{a}, \quad \frac{b}{c} = \frac{|AP|}{b},$$

odkud

$$a^2 + b^2 = c(|AP| + |PB|) = c^2.$$

Velmi známý je též čínský důkaz, který je někdy přisuzován Pythagorovi. Důkaz je očividný z obr. 5. Vhodně využívá rovnosti

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 4 \frac{ab}{2}.$$



$$c^2 = a^2 + b^2$$

Obr. 5

Nyní už pouze zbývá dokázat naše výchozí tvrzení. S poukazem na obr. 1 využijme Pythagorovu větu, kterou jsme právě dokázali, k vyjádření čtverců  $|AD|^2$ ,  $|BD|^2$  a  $|CD|^2$ :

$$\begin{aligned} |AC_0|^2 + |C_0D|^2 &= |AB_0|^2 + |B_0D|^2, \\ |BA_0|^2 + |A_0D|^2 &= |BC_0|^2 + |C_0D|^2, \\ |CB_0|^2 + |B_0D|^2 &= |CA_0|^2 + |A_0D|^2. \end{aligned}$$

Sečtením a porovnáním těchto rovností dostáváme požadovanou rovnost (\*).

Příběh Pythagorovy věty zakončíme obecnou poznámkou. Naše úvahy a výpočty nevyžadovaly, aby body  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  ležely v rovině. Úvodní tvrzení se týká prostorového čtyřštěnu  $ABCD$ :

*V prostoru jsou dány čtyři zcela libovolné (ne nutně různé) body  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ . Nechť  $A_0$  je pata kolmice z bodu  $D$  na přímkou určenou body  $B$  a  $C$  ( $A_0 = B$  když  $B = C$ ) a podobně  $B_0$  a  $C_0$  jsou paty kolmic z bodu  $D$  na přímky určené body  $C$ ,  $A$  a  $A$ ,  $B$ . Potom*

$$|AC_0|^2 + |BA_0|^2 + |CB_0|^2 = |C_0B|^2 + |A_0C|^2 + |B_0A|^2.$$

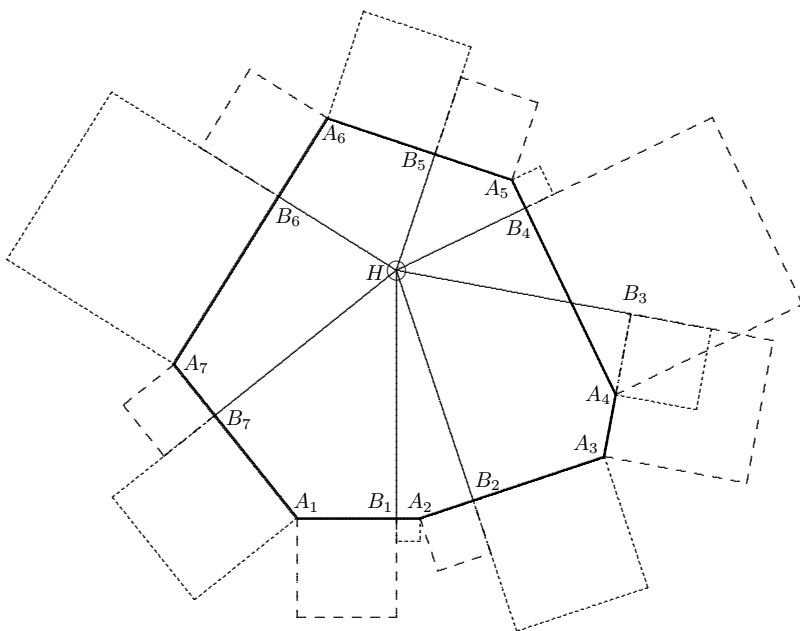
**Dodatek.** Pythagorově větě je věnováno velké množství publikací všeho druhu, od statí a knih tento předmět popularizujících po práce ryze vědecké. Mnohé nalezneme na internetu. Většina z nich jsou pouhé přepisy a úpravy předchozích prezentací [3]. Z nedávných seriálních publikací připomeňme zevrubnou studii E. Maora [4]. Je pozoruhodné, že v žádné z těchto publikací nenalezneme jednoduché kořeny Pythagorovy věty vysvětlené v této krátké statí. Právě naopak, tyto přirozené formulace pro obecný trojúhelník jsou často zakryty formulacemi používajícími goniometrické funkce. Výjimkou je nedávný článek [1] v časopise Pokroky matematiky, fyziky a astronomie a článek [2] v časopise The College Mathematics Journal.

A nakonec se přesvědčte, že jste tvrzení (\*) znázorněnému na obr. 1 porozuměli. Dokažte zobecnění tohoto tvrzení pro libovolný  $n$ -úhelník: *V prostoru uvažujeme libovolný  $n$ -úhelník  $A_1A_2 \cdots A_n$  a libovolný bod  $H$ . Nechť  $B_t$  je pata kolmice z bodu  $H$  na přímkou určenou vrcholy  $A_t$  a  $A_{t+1}$  pro  $1 \leq t \leq n-1$  a  $B_n$  pata kolmice z bodu  $H$  na přímkou určenou vrcholy  $A_n$  a  $A_1$ . Potom*

$$\sum_{t=1}^n |A_tB_t|^2 = \sum_{t=1}^n |B_tA_{t+1}|^2, \quad \text{kde } A_{n+1} = A_1.$$



Pomůžte vám ilustrace tohoto 7-úhelníku?



## Literatura

- [1] Bečvář, J., Dlab, V.: Bohatství pýthagorejských tvrzení včetně Pythagorovy věty pro čtyři i více bodů v prostoru. *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*, roč. 62 (2017), č. 4, s. 283–294.
- [2] Dlab, V., Williams, K. S.: The many sides of the Pythagorean theorem. *The College Mathematics Journal*, roč. 50 (2019), č. 3, s. 162–172.
- [3] Kuřina, F.: *10 pohledů na geometrii*. ALBRA, Praha, 1996.
- [4] Maor, E.: *The Pythagorean Theorem*. Princeton University Press, Princeton, 2007.
- [5] van der Waerden, B.: *Science awakening*. Oxford University Press, New York, 1961.

## O tradicích rakouské fyziky – 2. část

*Ivo Kraus, Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská, ČVUT, Praha*

Druhým z trojice slavných Stefanových žáků byl *Ludwig Boltzmann* (1844–1906). Narodil se 20. února, uprostřed noci, kdy v roce 1844 končil masopust a začínal čas předvelikonočního odříkání. Snad proto, jak sám říkal, mu bylo předurčeno mít stejně blízko k radosti, smíchu a optimismu jako ke smutku, pláči a beznaději.



Obr. 8: Ludwig Boltzmann

Byl nejstarším ze tří dětí daňového úředníka Ludwiga Georga Boltzmann. Oba sourozenci zemřeli předčasně; bratr Albert na tuberkulózu, stejnou nemoc jako otec, sestra Hedwiga podlehla těžké duševní chorobě.

Do řádné školy chodil Ludwig teprve v Linci. Předtím až do jedenácti let o jeho vzdělání pečovala matka, před vstupem na gymnázium ho jeden rok připravoval soukromý učitel. I když matka v roce 1859 ovdověla, postarala se, aby syn nemusel studium přerušit.

Už jako středoškolák vynikal v exaktních vědách i všech dalších předmětech. Když se na podzim 1863 rozhodl jít studovat do Vídně matema-

tiku a fyziku, odešla s ním do metropole i matka. Ve dvaadvaceti letech (1866) studium na vídeňské univerzitě ukončil a obhájil doktorát, v roce 1867 se habilitoval pro matematickou fyziku a složil zkoušky opravňující vyučovat matematiku i fyziku na středních školách. Další dva roky byl asistentem na univerzitě ve Vídni, potom odešel do Štýrského Hradce, za čtyři roky (1873) se vrátil do Vídně a v roce 1876 odešel znovu do Hradce. Roku 1890 přešel do Mnichova, zanedlouho pak do Vídně, pak do Lipska a v roce 1902 zase do Vídně.

Mezi fyziky devatenáctého století byl výjimečný nejen tím, jak často měnil svého zaměstnavatele, ale i množstvím osobních kontaktů se zahraničními kolegy, a to nejen v sousedním Německu na univerzitách v Heidelbergu a v Berlíně, ale také v Dublinu, Oxfordu i za oceánem. Koncem století (1899) navštívil New York, Montreal a Buffalo, ve Worcesteru převzal čestný doktorát Clarkovy univerzity, v roce 1904 zajel na světovou výstavu v St. Louis a za rok nato do Berkeley v Kalifornii; o zážitcích z třetí cesty napsal poutavé vyprávění *Cesta německého profesora do Eldoráda*.

Svým vědeckým dílem Boltzmann završil klasickou statistickou fyziku a termodynamiku: Matematicky odvodil vyzařovací zákon, k němuž v roce 1879 empiricky dospěl jeho učitel a přítel Jožef Stefan. Podle tohoto tzv. Stefanova–Boltzmannova zákona intenzita elektromagnetického záření emitovaného tělesem roste se čtvrtou mocninou termodynamické (absolutní) teploty tělesa.

Největší Boltzmannův objev se týkal souvislosti mezi entropií a pravděpodobností. Entropii – termodynamickou stavovou veličinu zavedenou Rudolfem Clausiem – Boltzmann ztotožnil s mírou neuspořádanosti mikroskopických stavů při daném makroskopickém stavu. Ukázal, že entropie je úměrná logaritmu pravděpodobnosti stavu soustavy. Příslušnou rovnici  $S = k \cdot \ln P$  má vytesanou na svém náhrobku. Veličina  $k$  byla později určena Maxem Planckem a nazvána Boltzmannova konstanta.

Boltzmann trpěl druhou polovinu života úpornými bolestmi hlavy a pocity úzkosti. V letech 1905–1906 intenzita a frekvence těchto obtíží vzrostly natolik, že zjara 1906 musel ukončit přednášky. Pátý zářijový den téhož roku, kdy byl společně s manželkou a dcerou v italském letovisku Duino na pobřeží Jaderského moře, si ve stavu těžké deprese vzal život.

Alespoň krátké připomenutí si zaslouží třetí slavný Stefanův žák *Marian Smoluchowski* (1872–1917). Byl synem Wilhelma Smoluchowského,

právníka ve službách císaře Františka Josefa I. Středoškolské vzdělání získal na vídeňské Tereziánské akademii (1890), vysokoškolské v oboru matematiky a fyziky na vídeňské univerzitě (1890–1894).

Už během studia (1893) uveřejnil vědecké pojednání o vnitřním tření v kapalinách, v roce 1895 obhájil doktorskou disertaci. Další tři roky absolvoval studijní pobyty v zahraničních univerzitních laboratořích (Paříž, Glasgow, Berlín), po návratu do Vídně (1898) se habilitoval a jako soukromý docent přešel do Lvova. Na tamní univerzitě působil do roku 1912, poté přijal řádnou profesuru experimentální fyziky na Jagellonské univerzitě v Krakově. Uprostřed července 1917 byl zvolen rektorem. Školu však řídil jen několik týdnů; v srpnu onemocněl dysentérií a počátkem září na její následky v pětáctýřiceti letech zemřel.

Je považován za klasika statistické fyziky. Odvodil zákony fluktuací rovnovážných stavů v molekulárních systémech, nezávisle na Albertu Einsteinovi vypracoval teorii Brownova pohybu, napsal také řadu prací o zemské atmosféře, o vzniku zvrásněných hor aj.

#### IV

*V širokém povědomí je rakouská fyzika 1. poloviny 20. století spojena především se dvěma laureáty Nobelovy ceny – Erwinem Schrödingerem a Victorem Franzem Hessem. První ji převzal v roce 1933 za objev nových produktivních forem atomové teorie, druhý roku 1936 za objev kosmického záření.*

Cesta *Erwina Schrödingera* (1887–1961) k nejvyššímu vědeckému ocenění začala v Curychu, kde se během šesti let svého působení na tamní univerzitě seznámil s hypotézou Louise de Broglieho, že s pohybem částice, např. elektronu, je spojena jakási hmotová vlna.<sup>1)</sup> Schrödinger této myšlenky o částicích–vlnách začal dávat matematickou podobu. Jeho snahou bylo zobecnit de Broglieho hypotézu, odvozenou pro případ volného hmotného bodu s určitou hybností, také na objekty vystavené silovému působení. Základní veličinou, kterou Schrödinger každému mikroobjektu přiřadil, je tzv. *vlnová funkce*  $\Psi$ . Její hodnota  $\Psi(x, y, z, t)$  v bodě o souřadnicích  $x, y, z$  a čase  $t$  souvisí s pravděpodobností, že se daný objekt v tomto bodě a čase bude nacházet. Vlnové funkce jsou řešením rovnice, kterou Schrödinger formuloval za svého curyšského pobytu. Její význam

---

<sup>1)</sup> Francouzský fyzik Louis de Broglie (1892–1987) vyslovil ve své disertační práci (1924) hypotézu, podle níž částicím o hmotnosti  $m$  a hybnosti  $p$  přísluší tzv. hmotové vlny o vlnové délce  $\lambda$  ( $p = mv = h/\lambda$ , kde  $h$  je Planckova konstanta).

pro atomovou fyziku je srovnáván s úlohou Newtonových pohybových rovnic v klasické mechanice nebo Maxwellových rovnic v klasické elektrodynamice. Schrödinger pak vytvořil novou matematickou teorii mechaniky atomu, která dostala název vlnová mechanika. Je také autorem proslulého myšlenkového experimentu „Schrödingerova kočka“, který asi nejlépe vystihuje jeho skeptický postoj k obecně přijímané pravděpodobnostní interpretaci kvantové mechaniky.



Obr. 9: Busta Erwina Schrödingera na univerzitě ve Vídni

Rok 1933 se zapsal do Schrödingerova života dvěma významnými událostmi: V jarních měsících Německo navštívil představitel fyziky na univerzitě v Oxfordu profesor Lindemann s nabídkou několika míst asistentů pro německé židovské vědecké pracovníky ohrožené nacistickými antisemitskými zákony. Když svůj návrh předložil Schrödingerovi, dozvěděl se, že opustit Německo má v úmyslu i on.

Ve výroční den Nobelovy smrti, 10. prosince, převzal společně s Paulem Diracem za *objev nových produktivních forem atomové teorie* Nobelovou cenu za fyziku.

Po skončení pobytu v Oxfordu v roce 1936 sice Schrödinger dostal nabídku vést katedru v Edinburghu, vyřizování pracovního povolení však bylo tak zdlouhavé, že žadateli došla trpělivost, a když se dozvěděl o možnosti přednášet od 1. října 1936 na univerzitě ve Štýrském Hradci (Grazu), rád jí využil.

Po připojení Rakouska k Německé říši v březnu 1938 se Karl-Franzens-Universität Graz změnila na Univerzitu Adolfa Hitlera (Adolf Hitler Universität). Schrödinger si byl vědom, že mu nacisté jeho odchod z Německa v roce 1933 nezapomenou. Doufal ale, že postačí, když se za své tehdejší jednání omluví. Když potom na radu nového rektora napsal senátu univerzity dopis, ve kterém vyjádřil změněným poměrům svou loajalitu, dostal se kající text do rukou novinářů a ti ho uveřejnili s názvem *Závazek vůdci – Vynikající vědec se hlásí do služby lidu a vlasti* (*Bekanntnis zum Führer – Ein hervorragender Wissenschaftler meldet sich zum Dienst für Volk und Heimat*). Ani toto veřejné pokání však nepomohlo; 26. srpna 1938 musel z univerzity odejít. Naštěstí měl kam. Díky svým zahraničním kontaktům nastoupil 6. října 1939 ve funkci ředitele Školy teoretické fyziky do nového Ústavu pro pokročilá studia v Dublinu.

Kromě několika desítek vědeckých prací z teorie elektromagnetického pole, teorie relativity a jednotné teorie pole napsal Schrödinger během dublinského období také řadu odborných knih, mezi nimi i pozoruhodné dílo *What is Life?*<sup>2)</sup>, které vzniklo z jeho přednášek pro širší veřejnost.

Myšlenky z této knihy měly významný podíl na vzniku moderní teoretické biologie. Schrödinger vytušil podobnost genetického kódu s běžnými způsoby zápisu informace a na základě úvahy, kolik různých kombinací lze v morseovce získat s pouhými dvěma znaky, tečkou a čárkou, došel k závěru, že zápis informace nemusí být ani pro složité organismy příliš komplikovaný a mohl by se provést lineárním řazením jednotlivých, třeba i nepočetných znaků.

V roce 1946 Schrödinger dostal z Vídně nabídku, aby na své alma mater převzal výuku teoretické fyziky. Irští kolegové mu to však rozmluvili. Na jejich doporučení do Vídně napsal, že nechce přerušit rozdělanou práci a že pozvání na univerzitu rád přijme, jakmile nastanou normálnější poměry. Definitivně se do Rakouska vrátil až zjara 1956. Dlouho však nepřednášel. Ve dvaasedmdesáti letech odešel z Vídně do svého domu v tyrolském Alpbachu. Na vyléčení tuberkulózy už ale bylo pozdě.

Druhý rakouský laureát Nobelovy ceny za fyziku, *Victor Franz Hess* (1883–1964), pocházel ze zámožné a společensky vysoce postavené rodiny. Po maturitě (1901) na gymnáziu ve Štýrském Hradci studoval na

---

<sup>2)</sup>Od roku 2004 je k dispozici český překlad Martina Černohorského a Marie Fojtíkové. Brněnské nakladatelství VUTIUM vydalo v jednom svazku Schrödingerova díla *Co je život?* (*What is Life?*), *Duch a hmota* (*With Mind and Matter*) a *K mému životu* (*Autobiographical Sketches*) z let 1944, 1958 a 1960.

tamní Karl-Franzens-Universität (1902–1906) matematiku a fyziku. Další čtrnáct let (1906–1920) působil ve Vídni. Na univerzitě u *Franze Serafina Exnera* (1849–1926) získal docenturu, u *Stefana Meyera* (1872–1949) v nově založeném Ústavu pro výzkum radia se věnoval výzkumu radioaktivity. Během první světové války řídil rentgenologické oddělení vojenské polní nemocnice, roku 1919 ho univerzita ve Štýrském Hradci jmenovala profesorem. V letech 1921 až 1923 působil v USA jako konzultant ministerstva vnitra a vedoucí radiologické laboratoře washingtonské univerzity.

Když se vrátil do Rakouska, přednášel experimentální fyziku znovu ve Štýrském Hradci, později (1931) řídil v Innsbrucku univerzitní Radiologický ústav. Po připojení Rakouska k Německé říši v březnu 1938 byl pro své protinacistické postoje zatčen, vězněn a v květnu 1938 předčasně (v 55 letech) penzionován. Ještě téhož roku emigroval i s manželkou (židovského původu) do USA a tam na newyorské Fordhamské univerzitě přednášel a vědecky pracoval až do roku 1958.

*Objev kosmického záření*, za nějž byl v roce 1936 vyznamenán Nobelovou cenou za fyziku, byl vlastně odpovědí na otázku, co je příčinou ionizace vzduchu, která způsobuje vybíjení elektroskopu i tehdy, je-li ze všech stran kryt olovem. Protože možný vliv radioaktivního záření vycházejícího z povrchových vrstev půdy nebo radioaktivních plynů byl v roce 1911 už vyloučen, rozhodl se Hess prostudovat ionizaci atmosféry v různých výškách nad zemí. Během devíti letů balónem (dva v roce 1911, sedm v roce následujícím) zjistil, že ionizace (rychlost vybíjení elektroskopu) s výškou roste, není závislá na tlaku vzduchu (některé elektroskopy byly vzduchotěsné) a není způsobena slunečním světlem (výstupy balónem podnikl nejen ve dne, ale také v noci, a 17. dubna 1912 dopoledne při částečném zatmění Slunce).



Obr. 10: Příležitostní známka ke 100. výročí objevu kosmického záření

Sedmý výstup uskutečnil Hess s dalšími dvěma členy posádky 7. srpna 1912 v balónu Bohemia, který startoval v 6:12 v Ústí nad Labem, v 10:45

dosáhl maximální výšky 5 300 m a ve 12:15 přistál asi 70 km jihovýchodně od Berlína.<sup>3)</sup>

Nebylo pochyb, že ionizace vzrůstá s výškou a že záření, které ji způsobuje, musí mít mimozemský (kosmický) původ. Hess je zpočátku nazýval výškové (Höhenstrahlung), později kosmické (kosmische Strahlung).

## V

*Kromě Schrödingera a Hesse proslavila rakouskou fyziku 20. století také řada dalších osobností. Zapomenout by se určitě nemělo na přednosty univerzitního Ústavu teoretické fyziky Friedricha Hasenöhrla a Hanse Thirringa a na fyziky a fyzičky z vídeňského Radiologického ústavu založeného v roce 1910.*

Běh života *Friedricha Hasenöhrla* (1874–1915) byl osudově ovlivněn jeho vlastenectvím a občanskou poslušností. Měl všechny odborné předpoklady, aby dosáhl stejných úspěchů jako jeho současníci Hess a Schrödinger. Po smrti Ludwiga Boltzmannova v roce 1906 se na vídeňské univerzitě stal řádným profesorem a přednostou Ústavu teoretické fyziky, v roce 1910 ho Vídeňská akademie věd zvolila členem korespondentem a byl účastníkem obou prvních Solvayských kongresů (1911, 1913).



Obr. 11: Friedrich Hasenöhr

Když 28. července 1914 Rakousko-Uhersko vyhlásilo Srbsku válku, přihlásil se i přes relativně vysoký věk (čtyřicet let) na frontu. Zpočátku sloužil na velitelství pevnosti (Festungskommando) Krakov, poz-

---

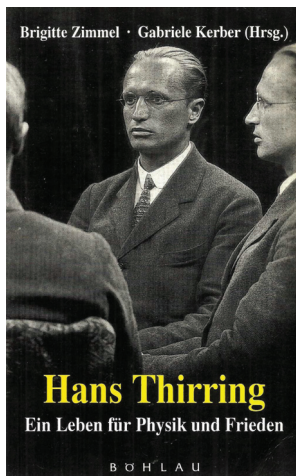
<sup>3)</sup> Balón Hessovi zapůjčil německý vzduchoplavecký spolek z Teplic, vodík poskytl ústecký Spolek pro chemickou a hutní výrobu.



ději v Jižním Tyrolsku. V červenci 1915 byl raněn, po vyléčení a vyznamenání Vojenským záslužným křížem III. třídy však nastoupil znovu k bojovému útvaru. Zanedlouho potom, začátkem října, ho při útoku jednotky, které v Jižním Tyrolsku velel, zasáhla do hlavy střepina granátu. Na předčasnou smrt velké naděje rakouské teoretické fyziky reagoval i rakouský císař František Josef I. kondolenčním telegramem Hasenöhrlově vdově.

Během své patnáctileté vědecké kariéry ovlivnil řadu oblastí teoretické fyziky. Už v roce 1904 odvodil vztah  $E = 4/3(mc^2)$  mezi hmotností  $m$ , energií  $E$  a rychlostí světla  $c$ , který se od rovnice  $E = mc^2$ , kterou Einstein uveřejnil v roce 1905, liší jen součinitelem  $4/3$ .

Ještě za Hasenöhrlova života nastoupil do Ústavu teoretické fyziky vídeňské univerzity jako asistent *Hans Thirring* (1888–1976). Jeho hvězdná hodina přišla už v roce 1918, kdy spolu s kolegou fyzikem *Josefem Lensem* (1890–1985) odvodil z Einsteinových rovnic obecné teorie relativity poznatek, že Země svou rotací strhává časoprostor okolo sebe.<sup>4)</sup> Předpověď tohoto tzv. Lenseova–Thirringova jevu byla koncem 20. století potvrzena laserovým měřením poloh umělých družic v blízkosti Země.



Obr. 12: Titulní list biografie Hanse Thirringa od rakouské autorky Gabriely Kerberové a kol.

<sup>4)</sup>K podobnému efektu dochází, vhodíme-li do husté kapaliny rotující míč. Ten bude strhávat okolní kapalinu a cokoli je v ní ponořené.

Kromě řady fyzikálních prací je Thirring autorem i několika protiválečných spisů. Za svou angažovanost v mírovém hnutí byl dvakrát navržen na Nobelovu cenu za mír.

Od roku 1910 vstupuje do dějin rakouské fyziky *vídeňský Radiologický ústav* (*Institut für Radiumforschung*), první instituce tohoto druhu nejen v Evropě, ale na celém světě. O jeho vznik se zasloužili dva profesori vídeňské univerzity – fyzikální chemik *Franz Serafin Exner* (1849–1926) a jeho bývalý asistent, fyzik *Stefan Meyer* (1872–1949). Nejprve Radiologický ústav řídil Exner, od roku 1920 převzal vedení Meyer.

Je jistě zajímavé uvést, že Exner během svých studií v Curychu byl spolužákem *Wilhelma Conrada Röntgena* a právě z jeho iniciativy se zpráva o *objevu záření X* dostala do novin už 5. ledna 1896.



Obr. 13: Pamětní deska Franze (Serafina) Exnera na univerzitě ve Vídni

Meyer byl v roce 1938 kvůli svému židovskému původu předčasně penzionován. Období nacismu však prožil v podstatě bez problémů v Bad Ischlu, kam se z Vídně odstěhoval. Po válce ještě dva roky (1946–1947) přednášel na univerzitě a řídil Radiologický ústav. Teprve potom odešel do důchodu.

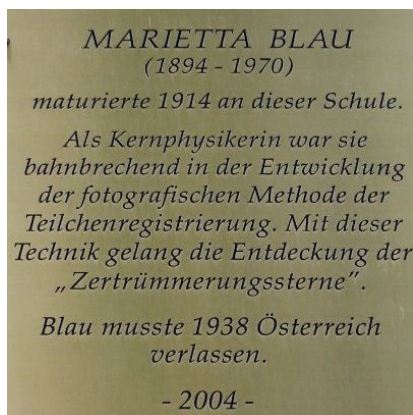
Mezi stovkami fyziků a chemiků, kteří si svou kariéru vybudovali ve vídeňském Radiologickém ústavu, bylo také několik žen. Ve vědecké práci přálo štěstí nejvíce *Bertě Karlikové* (1904–1990), když v přirozených

radioaktivních řadách prokázala (1943) existenci izotopů prvku astatu ( $Z = 85$ ). Astat existuje pouze ve formě nestabilních radioaktivních izotopů; nejdelší poločas rozpadu, 8,3 hodiny, má izotop  $^{210}\text{At}$ .

Roku 1945 byla Karliková jmenována dočasnou ředitelkou Radiologického ústavu, v letech 1947 až 1974 ředitelkou definitivní. Těžiště její aktivity se poté přesunulo od vlastního výzkumu k organizaci vědecké práce početného kolektivu. Spektrum řešených problémů rozšířila o přípravu radioaktivních látek pro využití v medicíně a technice, o aplikaci neutronové aktivační analýzy nebo radiouhlíkovou metodu datování.

Její zásluhy o experimentální jadernou fyziku (uveřejnila přes 70 původních vědeckých prací) ocenila vysokými poctami řada prestižních zahraničních vědeckých institucí. A ve své vlasti byla jako první žena v dějinách vídeňské univerzity jmenována v roce 1956 řádnou profesorkou. Prvenství (1973) má rovněž mezi ženami – řádnými členkami Rakouské akademie věd.

Do první generace rakouských fyziček, jejichž osudem se stalo ionizující záření, patřila také *Marietta Blauová* (1894–1970). Vyrůstala v zámožné vídeňské židovské rodině, její otec Markus Blau byl právník a spolumajitel nakladatelství hudebnin. Po maturitě studovala (1914–1919) na vídeňské univerzitě matematiku a fyziku. Disertační práci o absorpci divergentního záření alfa jí vedli rakouský fyzik Franz Serafin Exner (1849–1926) a německý matematik *Philipp Furtwängler* (1869–1940).



Obr. 14: Pamětní deska Marietty Blauové na vídeňském dívčím gymnáziu, kde maturovala

Jako doktorka filozofie v oboru fyziky pracovala (1923–1938) ve vídeňském Radiologickém ústavu, v továrně na rentgenky (Röntgenröhrenfabrik Fürstenau, Berlín), v Ústavu fyzikálních základů medicíny (Institut für physikalische Grundlagen der Medizin, Frankfurt nad Mohanem) a ve Fyzikálním ústavu univerzity ve Vídni (Physikalisches Institut Universität Wien). Během této doby absolvovala stipendijní pobyt v Göttingenu (1932) a jeden semestr (1933) v Paříži u Marie Curie.

V roce 1938, kdy bylo Rakousko připojeno k Říši, musela kvůli židovskému původu emigrovat. Zpočátku našla uplatnění v Oslu, potom jí Albert Einstein zajistil místo na Technické univerzitě v Mexico City. K experimentálnímu výzkumu tam však nebyly potřebné podmínky, takže roku 1944 odešla do newyorské firmy Rare Metals Refinery zpracovávající vzácné kovy. Po válce se věnovala vývoji fotonásobičů pro detektory částicové fyziky; byla vědeckou pracovnící v Národní laboratoři v Brookhavenu, na Columbijské univerzitě a na univerzitě v Miami. Posledních deset let žila ve Vídni, vedla vědecký kolektiv, který spolupracoval s CERN na analýze stop částic detekovaných fotografickou emulzí.

Příčinou její smrti v roce 1970 byl zhoubný nádor, pravděpodobně důsledek mnohaleté a mnohdy neopatrné manipulace s radioaktivními látkami.

## VI

*Stejně jako jiné země má i Rakousko fyziky, kteří své schopnosti lépe než v rodné zemi uplatnili za jejími hranicemi. K těm nejvýznamnějším bezpochyby patří Lise Meitnerová a Wolfgang Pauli.*

*Lise Meitnerová* (1878–1968) žila od svého narození až do devětatřiceti let ve Vídni. Jako třetí z osmi dětí zámožného židovského právníka Philippa Meitnera vychodila v hlavním městě rakousko-uherské monarchie obecnou školu a měšťanku. V dalších letech získala kvalifikaci k výuce francouzštiny a samostatně, později i v soukromých kurzech, se připravovala k maturitě na chlapeckém akademickém gymnáziu. Po jejím složení začala od října 1901 studovat na vídeňské univerzitě matematiku, fyziku a filozofii, v únoru 1906 obhájila doktorskou disertaci. Že by neměla fyziku jen vyučovat, ale také odhalovat její tajemství, ji přesvědčil profesor Ludwig Boltzmann a jeho asistent Stefan Meyer. Boltzmann v ní vzbudil lásku k teorii, pod Meyerovým vedením se zabývala vlastnostmi paprsků alfa a beta. V Ústavu teoretické fyziky vídeňské univerzity (Institut für theoretische Physik – Universität Wien) ale zůstala jen do

roku 1907, pak se rozhodla jít na zkušenou k *Marxu Planckovi* (1858–1947).



Obr. 15: Lise Meitnerová na německé známce z roku 1988

Rakousko opouštěla s představou, že do roka bude zase zpátky. Berlín jí však vyhovoval víc než Vídeň, nakonec v něm zůstala jednatřicet let, celou druhou třetinu svého života. U Plancka se zdokonalovala v teoretické fyzice, s *Ottem Hahnem* (1879–1968), který se právě vrátil ze studijního pobytu v Kanadě od *Ernesta Rutherforda* (1871–1937), spolupracovala v Chemickém ústavu berlínské univerzity při výzkumu radioaktivních materiálů.

Zatímco Hahn sloužil za 1. světové války na západní frontě, Meitnerová od července 1915 ošetřovala v rakouských polních nemocnicích raněné. Když válka skončila, pracovali sice i nadále ve stejném ústavu, každý ale v jiné laboratoři. Hahn se zabýval chemií, Meitnerová vedla samostatné radiofyzikální oddělení a přednášela na univerzitě.

V dubnu 1933 začal platit tzv. zákon o obnově stavu úředníků z povolání, podle něhož směli na vysokých školách působit jen učitelé čistě árijského původu. Ani Meitnerová nezískala výjimku. V ústavu ale ještě mohla zůstat, rasová očista se zpočátku týkala jen výchovných institucí a zaměstnanců s německou státní příslušností.

Na konci dalších čtyř let, během nichž znovu spolupracovala s Hahnem, byl objev, který dal 20. století jadernou energii. Očitým svědkem historického experimentu Meitnerová však už být nemohla. Po připojení Rakouska k Německé říši v březnu 1938 neměla jinou volbu než emigrovat.

Několik dnů před Vánoci 1938 došli Otto Hahn se spolupracovníkem *Fritzem Strassmannem* (1902–1980) v Berlíně k závěru, že ostřelováním

uranu neutrony vzniká baryum, které má ve srovnání s uranem hmotnost přibližně poloviční. Hahn si byl svými experimenty naprosto jistý, nedovedl je však interpretovat. Požádal proto o radu Meitnerovou, která tehdy ve Švédsku nedaleko Göteborgu se svým synovcem, fyzikem *Ottou Robertem Frischem* (1904–1979) trávil Vánoce.

Teoretické vysvětlení, na něž přišli společně při procházce zasněženým lesem, bylo přesvědčivé a prosté: Uranové jádro je podobné nestabilní kapce, která se může absorpcí neutronu rozdělit na dvě lehčí jádra. Protože jejich celková hmotnost je ale o 20 % nižší než hmotnost původního jádra uranu, musela se „ztracená hmota“ přeměnit podle Einsteinovy rovnice  $E = mc^2$  na energii. Hahn se Strassmannem uveřejnili své výsledky 6. ledna 1939 v německém časopise *Naturwissenschaften*, jejich teoretické zdůvodnění od Lise Meitnerové a Otty Frische vyšlo 11. února 1939 v britském časopise *Nature*. Za objevy v jaderném štěpení těžkých prvků převzal však Nobelovu cenu za chemii jen Otto Hahn.



Obr. 16: Wolfgang Pauli

Také *Wolfgang Pauli* (1900–1958), o generaci mladší vídeňský rodák než Lise Meitnerová, prožil většinu života v cizině. V osmnácti letech odešel do Německa a tam na mnichovské univerzitě vystudoval matematiku a fyziku a obhájil doktorskou disertaci. Potom dvanáct let přednášel v Curychu na polytechnice, za 2. světové války působil ve Spojených státech amerických; mimochodem byl jediným z tamních významných

fyziků, který odmítl spolupracovat na vývoji atomové bomby. Od roku 1946 až do konce života znovu přednášel v Curychu. Jeho příspěvek k vývoji fyziky měl hodnotu Nobelovy ceny za rok 1945.

Objevil *vylučovací princip*, podle něhož žádné dva elektrony nemohou být ve stejném kvantovém stavu. Vysvětlil podstatu paramagnetismu elektronového plynu v kovech. Předpověděl existenci částice, kterou italský fyzik *Enrico Fermi* nazval *neutrino*.

Kromě 93 časopiseckých článků a 11 knih napsal přes dva tisíce dopisů. Pravděpodobně nejslavnější byl dopis adresovaný 4. prosince 1930 účastníkům kongresu o radioaktivitě v Tübingenu. Po oslovení „milé radioaktivní dámy a pánové“ je informoval o své představě, že při beta rozpadu musí být emitována ještě další, elektricky neutrální částice; neví však, jak ji experimentálně dokázat. Na závěr dopisu uvedl: „Dnes jsem učinil cosi, co by teoretik neměl ve svém životě nikdy udělat. Pokusil jsem se nevysvětlitelné objasnit nepozorovatelným.“

Za svého mládí žil jako bohém. Dlouho do noci vysedával v hospodách, na ranní přednášky nechodil, ukládat mu povinnosti před polednem bylo nanejvýš neprozíravé.

Jako vědec byl výjimečný a svým kritickým postojem k vlastním i cizím vědeckým výsledkům tvrdý a nekompromisní. Jako člověk byl však citlivý a zranitelný. Současníci ho nazývali svědomím fyziky, nejvyšším soudcem při sporech teoretiků. Práce, k nimž měl výhrady, odmítl často zcela otevřeně konstatováním „ganz falsch“ (zcela špatně).

Na druhé straně se traduje, že i jen pouhá Pauliho přítomnost v laboratořích byla pro experimentátory doslova pohromou. Něco pravdy na tom asi bude. Jinak by nevznikl tzv. druhý Pauliho vylučovací zákon: v jednom prostoru nemůže být zároveň s profesorem Paulim žádný fungující přístroj. Pochybnosti, že jde o pomluvu, vyvracejí záznamy z autoškoly, podle nichž Pauli na složení zkoušky z řízení automobilu potřeboval celkem 100 hodin.

## Literatura

- [1] Štoll, I.: *Dějiny fyziky*. Prometheus, Praha, 2009.
- [2] Kraus, I.: *Století fyzikálních objevů*. Academia, Praha, 2014.
- [3] Kraus, I.: *Ženy v dějinách matematiky, fyziky a astronomie*. Nakl. ČVUT, Praha, 2015.

## Neuronové sítě a automatický překlad

*Jindřich Libovický,*

*Ludwig-Maximilians-Universität München & MFF UK, Praha*

### Co je to strojový překlad

Pod strojovým překladem si většina lidí představí nejspíš Google Translate a většina lidí si také nejspíš na vlastní oči vyzkoušela, jak funguje. Ten, kdo překladač používá častěji, si mohl všimnout, že zhruba před třemi lety se kvalita překladu, kterou služba poskytuje, dramaticky zlepšila. Důvodem bylo, že se změnila technologie, na které překlad stojí: překlad založený na statistických metodách nahradily neuronové sítě. Hodně lidí také asi překvapí, že překladač od Googlu není jediný a už vůbec ne nejlepší na světě a že se v kvalitě strojového překladu pořádají každoroční soutěže.

Automatický překlad se v mnohém liší od jiných problémů, které informatika řeší. Pokud například chceme najít na mapě nejkratší cestu z bodu A do bodu B, existuje algoritmus, který spolehlivě tuto cestu najde. Může se stát, že mapa, na které hledáme, je příliš velká, nebo prostě jen chceme ušetřit výpočetní čas (a elektrický proud). V takové situaci můžeme použít nějaký jiný algoritmus, který ušetří výpočetní čas a neudělá chybu větší než třeba 10%. V případě strojového překladu, kde místo matematických struktur pracujeme s lidským jazykem, se něco takového dělá celkem těžko. Není tak úplně jasné ani to, co to překlad je, jak pořádně jeho kvalitu nějak exaktně měřit a co by třeba znamenalo, že nějaký překlad je o 10 % horší než jiný.

Nejspíš bychom se shodli na tom, že jedna věta je překladem do jiného jazyka, pokud tyto věty mají v těchto jazycích stejný význam. To ale vyvolává hned další otázku: co to ten význam, o kterém zde mluvíme, vlastně je. Jak se můžeme přesvědčit v lingvistice nebo filozofii jazyka, není to vůbec jednoduchá otázka. Odkazuje slovo „stůl“ k množině všech stolů světa v současnosti i v minulosti? Ke všem stolům, které by potenciálně mohly být vyrobeny? Nebo snad odkazuje k myšlence stolu? A je ta myšlenka u všech lidí stejná? Jaký význam má třeba slovo „vodník“ v jazyce Hindí, když v Indii o středoevropském vodníkovi jaktěživ neslyšeli? A mají vůbec slova sama nějaký význam nebo význam vzniká až v nějakém kontextu?

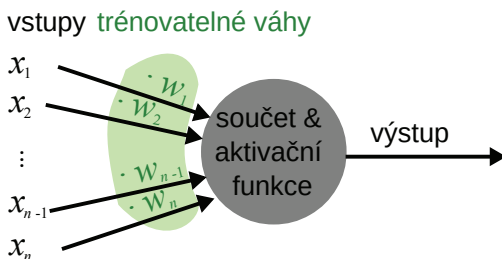


Ve strojovém překladu se naštěstí této složité filozofické otázky dokážeme docela dobře vyhnout. Lidé také zvládají překládat, aniž by měli dobře rozmyšleno, co je to význam. Když zvládneme dobře simulovat, *jak* překlad dělají lidé, nemusíme se věnovat otázce, *co* vlastně dělají. Tato myšlenka přímo navádí k tomu řešit strojový překlad pomocí metod strojového učení z vícejazyčných dat. Na Internetu je možné najít mnoho textů, které jsou ve více jazycích. Například oficiální dokumenty Evropské unie jsou výborným zdrojem takových dat. Pokud chceme dělat strojový překlad, stačí nám tato data posbírat (ne že by to byl sám o sobě jednoduchý úkol) a s jejich pomocí začít trénovat modely.

### Neuronové sítě pro strojový překlad

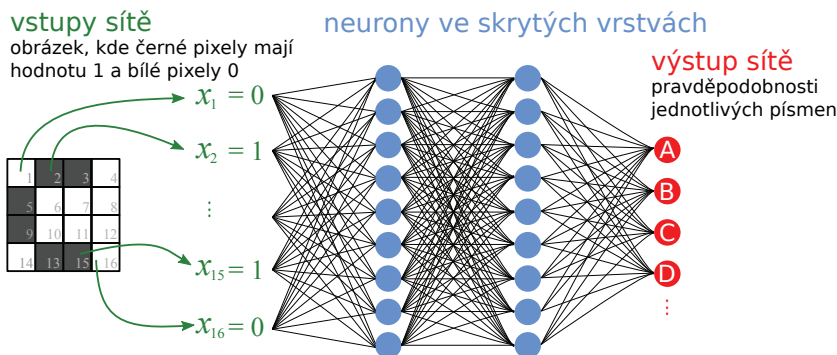
Začneme tím, jak vypadá to, čemu se v informatice říká neuronová síť. Umělé neurony, ze kterých se neuronová síť skládá, jakkoli by to jejich název mohl naznačovat, nemají dnes prakticky nic společného s nervovými buňkami živočichů. Neuronové sítě vznikly v padesátých letech 20. století skutečně jako jednoduchý výpočetní model biologického neuronu. Od té doby se ale výrazně změnila naše představa, jak biologické neurony fungují. Vývoj umělých neuronových sítí ale nešel cestou napodobování toho, co se děje v tělech živočichů, ale soustředil se na zlepšení úspěšnosti neuronových sítí ve strojovém učení. Mediálně vděčná srovnání počtu neuronů v mozku různých savců a umělých neuronových sítí používaných ve strojovém učení je potřeba brát s velkou rezervou.

Umělý neuron má mnoho vstupů, kde přijímá reálná čísla. Pro každý vstup má jednu trénovatelnou váhu, reálné číslo, kterým vstup vynásobí a všechny vstupy sečte. Když tento součet přesáhne určitou hodnotu, vydá na svůj výstup nějakou hodnotu. Právě váhy se v průběhu učení mění tak, aby neuron dával požadovaný výstup.



Obr. 1: Perceptron

Abychom vytvořili modely, které se mohou naučit složitější vztahy mezi vstupy a výstupy, spojujeme neurony do vrstev. Vrstvy je možné skládat dále za sebe. Takto nějak například může vypadat neuronová síť pro klasifikaci znaků při rozpoznávání textu.



Obr. 2: Vícevrstvá neuronová síť pro rozpoznávání znaků

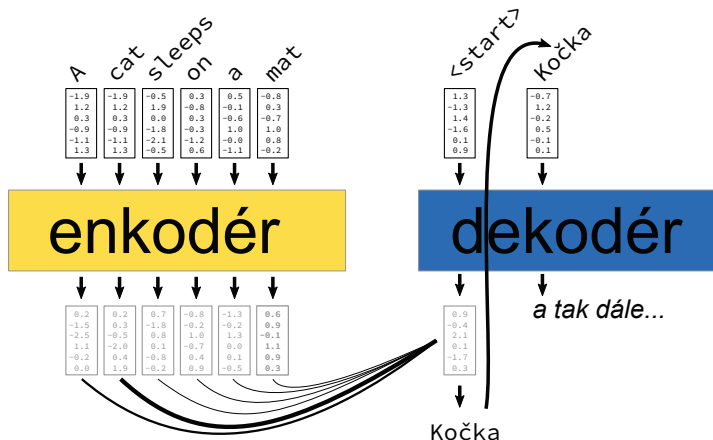
Na vstupu jsou hodnoty jednotlivých pixelů obrázku (u černobílého obrázku 0 a 1). Pro každý možný znak je na konci sítě neuron, jehož výstupem je pravděpodobnost, že na vstupu sítě byl ten který znak.

V tomto jednoduchém případě byl na vstupu obrázek, který měl vždy stejnou velikost (nebo je možné ho příslušně zvětšit nebo zmenšit). V případě strojového překladu je situace složitější, protože po neuronové síti chceme, aby byla schopná zpracovat vstupy různé délky a produkovat výstupy různé délky. Navíc délka vstupu a výstupu spolu sice souvisí, ale ne tak, že by bylo možné pro ně napsat nějaký jednoduchý vzoreček.

To se řeší tak, že model rozdělíme na dvě části: enkodér a dekodér. Enkodér zpracuje vstupní větu do číselné reprezentace. Dekodér potom na základě této reprezentace generuje jedno slovo za druhým, dokud nevygeneruje speciální symbol pro konce věty (viz obr. 3).

Model pracuje s omezeným slovníkem. Pro každé slovo, se kterým model dovede pracovat, má vstupní vektor. Už jsme zmínili, že tím, že použijeme neuronovou síť, se tak trochu vzdáváme možnosti vědět přesně, co model dělá. Jednou z mála věcí, kterou můžeme s jistotou tvrdit, je, že do těchto vektorů si ukládá informaci o významu slova, přesněji o tom, jak se může používat ve vztahu k jiným slovům. Slova s podobným významem se podobně používají a tak většinou mají podobné vektory. Podobné reprezentace mají také slova, která patří do stejných mluvnic-

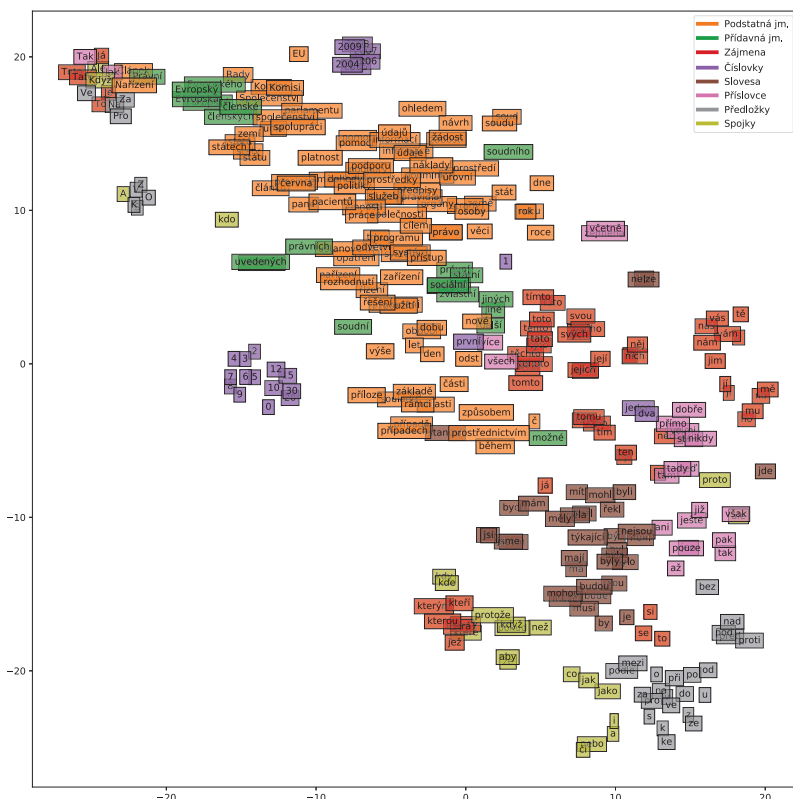
kých kategorií jako třeba pád nebo číslo. Pozoruhodnou vlastností je především to, že model nikdo neučí tyto kategorie rozlišovat. Neuronová síť se je naučí jaksí mimochodem, jako prostředek k tomu dělat dobrý překlad.



Obr. 3: Architektura enkodér–dekodér

Na obr. 4 vidíme dvourozměrnou projekci reprezentací 300 běžných českých slov, která jsou obarvená podle slovních druhů. Vidíme, že ne vždy model kategorizuje slova přesně tak, jak jsme se učili na základní škole. Například v levém horním rohu vidíme slova, která bývají často na začátku vět a mají tak pro překladač speciální význam. Hned vedle nich jsou podstatná a přídavná jména, která nějak souvisí s Evropskou unií. Tato zvláštnost je dána tím, že úřední dokumenty Evropské unie jsou důležitým zdrojem trénovacích dat pro strojový překlad. Jednou barvou vidíme odlišené číslovky, které se přirozeně rozdělily do dvou skupin: obecné číslovky (v dolní části obr. 4) a číslovky, které označují roky (v horní části obr. 4). Za povšimnutí stojí také to, že tvary vztažných zájmen „který“ a „jenž“ model přiřadil k neohebným spojkám, protože ve větě plní podobnou funkci.

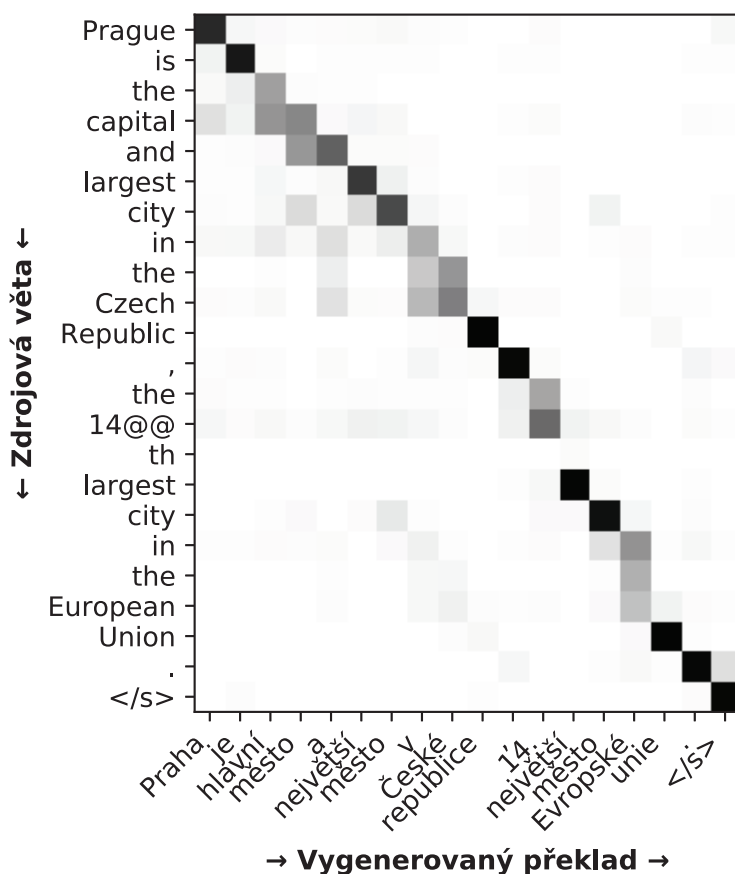
Tyto slovní reprezentace jsou vstupem do enkodéru. Pro ten se používají různé architektury. V současnosti nejlepších výsledků dosahuje architektura, kterou Google pojmenoval atraktivním jménem Transformer, která v každé vrstvě zohledňuje všechny možné vztahy mezi slovy vstupní věty.



Obr. 4: Dvourozměrná projekce reprezentací 300 českých slov z enkodéru natrénovaného překladače

Nejsložitější částí modelu je dekodér, který generuje větu v cílovém jazyce. Dekodér v každém kroku posbírání informaci ze vstupní věty a z textu, který už vygeneroval. Podle toho, co už je na výstupu, přiřadí dekodér váhu stavům enkodéru, tedy vlastně vybere nějaká vstupní slova a podle toho vygeneruje slovo na výstup.

Obr. 5 ukazuje, na jaká vstupní slova se dekodér zaměřoval při generování jednotlivých výstupních slov. Ukazuje se, že dekodér se učí přibližně párovat slova, která jsou navzájem svými překlady. V průběhu trénování nemá neuronová síť žádnou informaci o tom, jaká slova by si mohla ve vstupní a výstupní větě odpovídat, toto slovní párování je jenom jakýsi vedlejší produkt učení sítě.



Obr. 5: Párování slov z překladu a zdrojové věty, které dělá dekodér v neuronové síti

Celá tato celkem složitá neuronová síť, kterou jsme právě popsali, se musí naučit, co má dělat pouze pomocí trénovacích dat, která tvoří páry vět, které jsou navzájem svými překlady. Síť se skládá z desetitisíců neuronů, které mají stovky milionů vah – slovní vektory a váhy, kterými jednotlivé neurony váží svoje vstupy.

Na začátku učení jsou váhy náhodné. V průběhu učení se síti postupně předkládají trénovací věty po malých skupinách a váhy sítě vždy upraví tak, aby se trochu zvýšila pravděpodobnost, kterou síť přiřadí překladům v trénovacích datech. Tímto pozvolným učením se docílí toho, že síť

funguje v průměru dobře na všech datech a ne jen že si pouze zapamatuje svoje trénovací data. Pravděpodobnost trénovacích vět je jediný signál, který síť v průběhu trénování dostává. To jí stačí k tomu, aby se naučila ukládat do slovních reprezentací gramatické vlastnosti slov a navíc se naučila párovat slova mezi jazyky.

### **Jak vyhrát soutěž v překladu**

Od roku 2006 se ve strojovém překladu pořádá každoroční soutěž, které se účastní univerzitní týmy z celého světa a v posledních letech také týmy velkých firem. Soutěží se v poměrně velkém počtu disciplín. Kromě překladu mezi různými jazykovými páry se soutěží také v překladu jazyků, ke kterým je k dispozici pouze omezené množství dat, nebo v překladu vět, které obsahují gramatické chyby a překlepy. Potom, co soutěžní týmy odešlou překlady vět, které dostaly od organizátorů, probíhá lidské hodnocení.

Hodnocení od lidí se pak také používá v další zajímavé soutěžní disciplíně, a tou je automatický odhad, jak lidé budou kvalitu překladu hodnotit. Jak už jsme se zmínili v úvodu, poznat, že dvě věty mají stejný význam, není vůbec jednoduché. I přesto, že současné metriky dosahují poměrně vysoké shody s lidským hodnocením, otázka, jak měřit kvalitu překladu tak, jak o ní přemýšlí lidé, zůstává stále otevřená. Částečně také proto, že nejen při překladu jako takovém, ale v případě automatického hodnocení jeho kvality, se snažíme vyhnout otázce, co je to kvalita překladu, a snažíme se pouze o dobrou simulaci toho, jak to dělají lidé.

Za hlavní soutěžní disciplínu se většinou považuje překlad mezi angličtinou a němčinou. Věnuje se mu nejvíce týmů a tento jazykový pár je navíc zajímavý i pro soukromé firmy. V roce 2019 vyvinula nejlepší systém společnost Amazon a umístila se těsně před Microsoftem, který zvítězil rok předtím. V několika předchozích letech pak soutěží dominovala univerzita ze skotského Edinburghu, která vítězila téměř ve všech disciplínách.

Především díky aktivitě Matematicko-fyzikální fakulty v oblasti strojového překladu od začátku nechyběl v soutěži překlad mezi češtinou a angličtinou. Čeština je pro výzkum strojového překladu zajímavá především svým poměrně složitým tvaroslovím. Systém, který překládá do češtiny, nemusí jenom správně vybrat slova ve správném pořadí, ale také musí zařídit, aby slova byla ve správném tvaru. Právě v překladu z angličtiny do češtiny se daří dlouhodobě vítězit týmu Matematicko-fyzikální fakulty.

Klíčovou metodou, která pomáhá vylepšovat kvalitu automatického překladu, je generování umělých trénovacích dat takzvaným zpětným překladem. Pokud například chceme natrénovat překladač z jazyka A do jazyka B, můžeme si pomoci už hotovým automatickým překladačem z jazyka B do jazyka A. K autentickým větám z jazyka B si totiž můžeme vygenerovat automatické překlady do jazyka A a rozšířit si tak trénovací data. Tyto překlady samozřejmě nejsou tak kvalitní, jako by byl lidský překlad, důležité ale je, že na výstupu jsou autentické věty z jazyka B, takže se překladač učí generovat vždy pouze plynulé autentické věty. Překladač z A do B, který jsme vylepšili pomocí syntetických dat, můžeme dále použít k vygenerování umělých dat pro trénování překladu na druhou stranu z B do A. Takhle je možné jazyky střídat a překlad postupně zlepšovat.

V umělé inteligenci se jedná o poměrně častý princip. V principu podobně se učil systém AlphaGo, který v roce 2016 porazil jednoho z nejlepších světových hráčů v deskové hře Go. AlphaGo je založeno na neuronové síti, která se učí na základě zpětné vazby z opakovaného hraní sama se sebou. V případě zpětného překladu se jedná o podobnou situaci, kde se dvě neuronové sítě navzájem vylepšují tím, že jedna druhé připravuje stále kvalitnější trénovací data.

Soutěžní systémy se ale liší od toho, co vidíme, když si pustíme Google Translate nebo Bing Translator od Microsoftu, kde výsledky překladu vidíme okamžitě. Soutěžní systémy jsou většinou kombinací více systémů, místo jedné věty generují více kandidátů, které se následně hodnotí pomocí jiných modelů. Překlad tak rozhodně nemůžeme vidět plynule vznikat v reálném čase, jak to vidíme v překladači od Googlu. Od pomyslného stisknutí enteru do okamžiku, než se vypíše překlad, tak mohou uplynout i více než dvě sekundy.

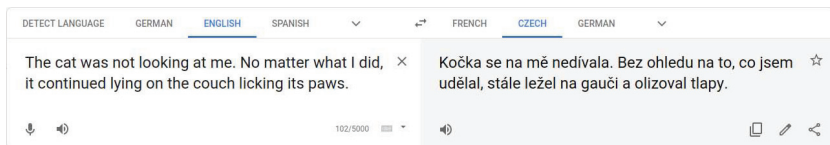
### **Kdy překlad nefunguje dobře**

Strojový překlad samozřejmě není dokonalý a pravděpodobně také nikdy dokonalý nebude. Cílem strojového překladu je především ušetřit práci překladatelům s běžnými texty a pomoci lidem orientovat se v textech v cizím jazyce.

V současnosti největším problémem strojového překladu je, že se provádí na úrovni jednotlivých vět. Věty se ale vždy vyskytují v nějakém kontextu, který však překladač nemá k dispozici.

Jak vidíme na příkladu z Google Translate (obr. 6), systém nemá jak zjistit, že podmět „it“ ve druhé větě je ve skutečnosti kočka, která

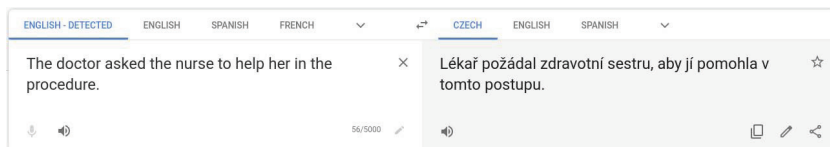
je v češtině ženského rodu. Jednoduché řešení, jakým by se mohlo zdát trénovat síť, která překládá celé dokumenty a ne jednotlivé věty, selhává, protože slova, která závisí na relativně vzdálených slovech v minulosti, se v textu vyskytují poměrně řídce a síť je při učení ignoruje. Jak řešit zapojení kontextu tak zůstává otevřenou otázkou.



Obr. 6: Překlad přes hranice vět (screenshot z Google Translate)

Jak už jsme několikrát zmínili, strojový překlad se řeší strojovým učením. Z toho plynou jeho silné i slabé stránky. V průběhu učení se překladač snaží najít statisticky nejjednodušší vysvětlení dat, na kterých se učí. Kromě toho, že to vede k tomu, že se síť omylem naučí rozlišovat slovní druhy, vede to také k tomu, že z dat vyvodí stereotypy, které mohou vést k chybným překladům. Příkladem může být přílišná asociace pojmů s genderem.

Když dáme do Google překladače větu: „The doctor asked the nurse to help her in the procedure,“ správný překlad by měl být něco jako: „Doktorka požádala sestru, aby jí pomohla se zákrokem.“ Že se jedná o lékařku a ne lékaře, je možné poznat podle zájmena „her“ ve vedlejší větě. To je zjevně pro překladač příliš daleko a „doctor“, který o něco svého asistenta či asistentku žádá, je v trénovacích datech výrazně častěji muž než žena. Výstup vidíme na obr. 7.



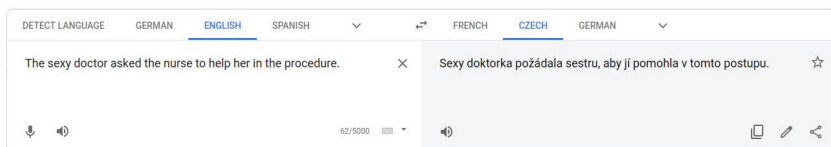
Obr. 7: Genderové stereotypy v překladu (screenshot z Google Translate)

Teď se podívejme, jak se změní výstup, když řekneme, že je lékařka „sexy“ (obr. 8). Tento dodatečný přívlastek (a stereotyp, který se k němu váže) modelu pomůže pochopit, že se jedná o lékařku a ne lékaře.

Tento možná úsměvný příklad ukazuje velké nebezpečí, které s sebou nese používání neuronových sítí, které se učí z velkých dat, obzvláště



za situace, kdy přesně nevíme, jakým způsobem se model dopracuje ke svému výstupu. Neuronová síť se snaží jenom napodobovat trénovací data. Přestože se často mluví o takzvaném hlubokém učení, často to dělá poměrně povrchním způsobem. Nemá a ani nemůže mít pochopení společenských okolností, za kterých data vznikají. Může se tak snadno stát, že z dat odvodí vzorce, které považujeme za stereotypní nebo urážlivé.



Obr. 8: Genderové stereotypy v překladu (screenshot z Google Translate)

U strojového překladu to nemusí tolik vadit. Ale pokud bychom neuronovou síť chtěli použít například k odhadování toho, jestli někdo bude schopen platit bankovní půjčku, je dost pravděpodobné, že se budeme na základě těchto stereotypů skrytých v neuronové síti dopouštět vážné diskriminace.

## Vyzkoušejte si sami

Jak neuronový strojový překlad funguje nebo nefunguje si ostatně můžete vyzkoušet sami na webu. Kromě všeobecně známého překladače od Googlu se dá na webu najít i několik dalších, které překládají kvalitněji než Google. Důvodem není to, že by Google lépe překládat nedovedl, ale protože svůj překladač nabízí zdarma – výrazně větší modely by potřebovaly výrazně víc výpočetní síly, což by znamenalo výrazně větší náklady za něco, za co se neplatí. Jak už jsme zmínili výše, všechny online ukázky jsou také méně kvalitní než překlady, se kterými se soutěží.

## ÚFAL MFF UK

(<https://lindat.mff.cuni.cz/services/translation>)

Demonstraci toho, jak funguje strojový překlad s využitím modelu Transformer, můžete najít na webu Ústavu formální a aplikované lingvistiky MFF UK. Model, který si můžete vyzkoušet, je v současnosti nejkvalitnějším strojovým překladem mezi češtinou a angličtinou.

## University of Edinburgh

(<http://demo.statmt.org>)

Na univerzitě ve skotském Edinburghu působí skupina, která se strojovému překladu věnuje dlouhodobě, a často jsou to edinburghské systémy, které vítězí v pravidelných soutěžích. Jejich soutěžní systémy si také můžete vyzkoušet na webu.

## Systran

(<https://translate.systran.net/translationTools/text>)

Systran je společnost, která se komerčně věnuje strojovému překladu už od konce šedesátých let dvacátého století. Kromě obecných modelů připravuje modely, které se specializují na překlady finančních, právních nebo technických textů. Za kvalitní překlad si ale uživatelé musí připlatit a zdarma je možné vyzkoušet si pouze desítky vět.

## Bing Translator

(<https://www.bing.com/translator>)

Velmi kvalitní automatický překlad nabízí poslední dobou také Bing Translator od společnosti Microsoft. Důvodem je, že se Microsoft nedávno ujal vývoje open-sourcového nástroje Marian, který se do té doby vyvíjel především na univerzitě v Edinburghu.

Posuďte sami:

The screenshot shows a web-based translation interface. At the top, there are two dropdown menus: 'Source' set to 'Czech' and 'Target' set to 'English'. Below these is a checkbox labeled 'advanced' which is checked. The main area is divided into two columns. The left column, titled 'Input sentences', contains the Czech text of Máchův Máj. The right column, titled 'Translation', shows the corresponding English translation. At the bottom, there are two buttons: 'Translate' and 'Choose file'.

| Source | Target  |
|--------|---------|
| Czech  | English |

☒ advanced

**Input sentences**

Byl pozdní večer – první máj –  
 večerní máj – byl lásky čas.  
 Hrdliččin zval ku lásce hlas,  
 kde borový zaváněl háj;  
 O lásce šeptal tichý mech;  
 květoucí strom lhal lásky žel,  
 svou lásku slavík růží pěl,  
 růžinu jevil vonný vzdech.

**Translation**

It was late evening -- the first of May --  
 May Evening -- it was love time.  
 A lover's voice called to love  
 where pine smelled like a grove.  
 A soft moss whispered of love;  
 the flowering tree lied to love alas,  
 The nightingale sang his love  
 the rosette showed a fragrant sigh.

Translate Choose file

Obr. 9: Máchův Máj v překladači z MFF UK (screenshot z LINDAT Translation)

Není to úplně špatné, jen se to moc nerýmuje.

## Matematická soutěž Pangea

*Marek Kovář, Praha<sup>\*)</sup>*



Matematická soutěž Pangea, kterou pořádá matematický spolek Meridian, je určena pro žáky základních škol a studenty nižších stupňů víceletých gymnázií. Soutěž Pangea vznikla v roce 2007 v Německu, kde sídlí i její vedení. Odtud je dále rozšiřována, resp. nabízena různým zemím; aktuálně je pořádána v 21 zemích Evropy. V České republice proběhla soutěž poprvé v roce 2013. Krátce na to byla také zařazena do Věstníku soutěží nabízených školám Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy<sup>1)</sup>, kde se od té doby objevuje každý rok.

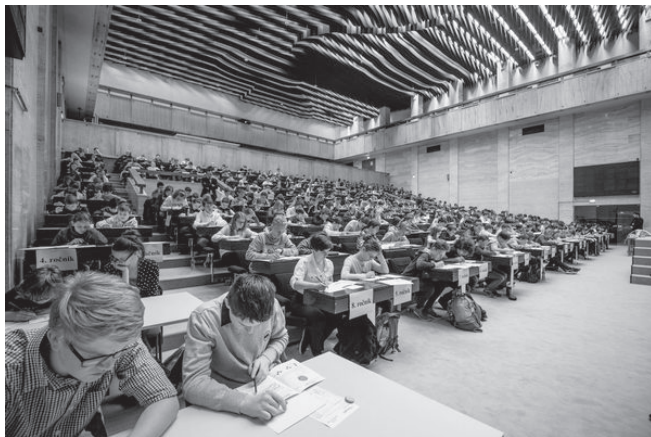
Podle celoevropského vzoru je soutěž organizována dvoukolově – školní a finálové kolo. Počet soutěžních kategorií se mění společně se zvyšujícím se zájmem škol. Pro školní rok 2019/2020 je nabízeno 6 kategorií, které odpovídají ročníkům základní školy (4.–9. ročník ZŠ a jim odpovídající stupně nižších ročníků víceletých gymnázií). Pangea se od ostatních matematických soutěží pořádaných v České republice liší především zaměřením na provázanost matematiky s běžným životem a v důrazu na lepší pochopení matematických problémů žáky. Nejedná se tak pouze o přístup k matematice jako vědě zcela teoretické.

Celoevropská filozofie matematické soutěže Pangea spočívá v motivaci žáků a v podpoře jejich vztahu k matematice. Její snahou je poukázat na důležitost matematiky jak v běžném, tak v profesním životě napříč všemi lidskými obory. Soutěž cílí na obě poloviny (občas proti sobě stojících táborů) žáků; těch, kteří matematikou žijí, i těch, u kterých matematika nepatří mezi nejoblíbenější školní předměty. Zejména školní kolo se autoři snaží připravit tak, aby zadání úloh zaujala většinu žáků a aby alespoň polovinu úloh mohla většina žáků vyřešit. Matematicky nadaní žáci tak „posílí“ své schopnosti, zatímco ostatní žáci jsou motivováni zajímavými tématy úloh a tím jsou podporováni k výkonu i k zvýšení svého

<sup>\*)</sup>Kontakt na autora článku: Ing. Marek Kovář, MBE, ředitel soutěže (pangea.cz@gmail.com, [www.pangeasoutez.cz](http://www.pangeasoutez.cz))

<sup>1)</sup><http://www.msmt.cz/mladez/podpora-soutezi-a-prehlidek-v-zajmovem-vzdelavani>

sebevědomí. Finálové kolo naopak staví na matematické vyzrálosti. Řešení úloh vyžaduje hlubší znalosti a řešitelé tedy musí vyvinout mnohem větší úsilí. Nic nemotivuje více než úspěch, a proto se ve finálovém kole uděluje při shodném bodovém zisku více prvních, druhých či třetích míst a nedochází k přeskokování medailových pozic.



Obr. 1: Pangea 2019

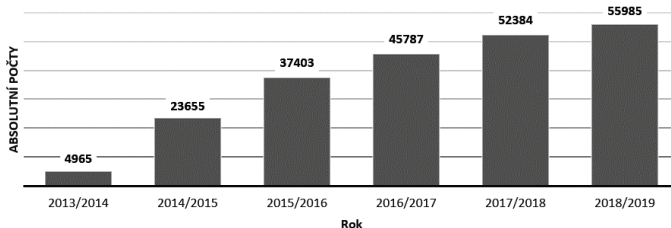
K naplnění cílů, které si Pangea vytyčila, přispívá mimo jiné i způsob organizace školního kola, odměňování vítězů, či finálové kolo s předáváním cen. To probíhá dnes již tradičně v Nové budově Národního muzea v Praze. Pangea se zároveň snaží o co nejnižší zatížení pedagogů. Veškeré vyhodnocování školního kola je organizováno centrálně, nikoliv na jednotlivých školách. Tím se zároveň snižuje míra eventuálního ovlivňování výsledků. Pro Pangeu je současně důležitá i kvalita materiálů poskytovaných pro jednotlivá soutěžní kola. Soubor soutěžních otázek je žákům dodáván ve formě brožur, které jim po skončení soutěže zůstávají. Učitelé matematiky je tak zároveň mohou dále využívat ve své výuce.

Soubory úloh sestavuje tým odborníků ze školské praxe a z univerzit ve spolupráci s Poradním výborem Pangea. Jak již bylo zmíněno, soutěž se snaží žákům matematiku přiblížit i skrze obory, které s ní zdánlivě nesouvisí. Každý školní rok jsou proto volena dvě témata, kterými se úlohy zabývají. Nejedná se tedy o smyšlené úlohy, ale naopak o data a příklady z praxe, které žákům přibližují zvolené obory. Dokonce se v poslední době snažíme, aby jedno z témat bylo plně humanitního rázu, a poukazujeme v něm na někdy i nevědomé využívání matematických prin-

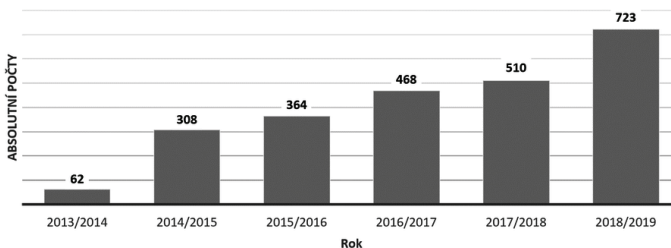
cipů a zákonů. V minulých ročnících se v soutěži objevovaly např. úlohy z hudby, přírody, sportu, architektury, medicíny, či dopravy. Matematika je zkrátka po zásluze nazývána královnou věd.

Matematická soutěž Pangea získala oblibu v České republice poměrně záhy po svém uvedení a její popularita stále roste. V roce 2019 se soutěže zúčastnilo již více než 55 000 žáků ze 723 škol. V posledních třech letech soutěž expanduje také na české školy v zahraničí (např. Brusel). Česká verze soutěže Pangea je též organizována na vybraných odděleních v českých nemocnicích se snahou rozptýlit malé pacienty a podpořit je v chuti se učit navzdory zdravotním problémům. Od roku 2019 nabízí Pangea také možnost účastnit se soutěže online!

### Vývoj celkového počtu žáků



### Vývoj celkového počtu škol



Matematická soutěž Pangea v akademickém roce 2019/2020 vstupuje již do 7. celonárodního ročníku pod záštitou Českého svazu vědeckotechnických společností a Jednoty českých matematiků a fyziků. Aktuálně zvolenými tématy, která se prolínají napříč všemi úlohami a soutěžními kategoriemi, jsou média a záchranné sbory. Přihlašování soutěžících probíhá do pátku 10. ledna 2020 na webu [www.pangeasoutez.cz](http://www.pangeasoutez.cz). Pro ty školy, které by měly zájem se účastnit online, je registrace prodloužena až do konce ledna. Samotné školní kolo proběhne v průběhu tří týdnů 10.–28. 2. 2020, kdy si škola sama stanoví, který den je pro ni na sou-

těžení nejvhodnější. Finálové kolo je plánováno na květnový pátek. Jak již bylo zmíněno, uskuteční se v Nové budově Národního muzea v Praze, kde v dopoledních hodinách proběhne soutěžní část a v odpoledních hodinách bude jako každý rok připraven inspirativní program pro žáky a pedagogy. Na závěr dne budou předány ceny nejlepší řešitelům nejen ve finálovém kole, ale také absolutním vítězům. Tedy těm, kteří získali v konečném součtu nejvíce bodů ze školního i finálového kola. Ceny jsou předávány patrony daného ročníku a dalšími významnými osobnostmi. V posledních letech jimi byli například přední český neurochirurg prof. MUDr. Vladimír Beneš, DrSc., člen akademické rady Akademie věd ČR RNDr. Pavel Krejčí, CSc., předsedkyně Jednoty českých matematiků a fyziků doc. RNDr. Alena Šolcová, Ph.D., předseda Českého svazu vědeckotechnických společností doc. Ing. Daniel Hanus, CSc., člen Rady hlavního města Prahy s gescí školství, sportu a podpory podnikání Mgr. Vít Šimral, Ph.D. et Ph.D., dále dobrodruh a rybář Jakub Vágner, horolezec Radek Jaroš, režisér a dokumentarista Steve Lichtag, herečka Dana Morávková či moderátor Vladimír Kořen.

Na závěr uvádíme ukázkové úlohy z finálového kola:

### Úloha 5. ročníku

#### KOLIBŘÍCI

(6 bodů)

**Máme 4 kolibříky:** *šedobříchého, mečozobého, Kometu, Helenina.*

**Mají různé délky:** *8,5 palce, 7 palců, 6 palců a 2,5 palce.*

**Různé zajímavosti:** *červený větvený ocásek, nejrychlejší mávání křídly, nejdelší zobáček ze všech, zahnutý zobáček.*

**Urči jméno, délku ptáčka od zobáčku po ocásek a to, čím je zajímavý.**

- Kolibřík Helenin (včelí) mává nejrychleji křídly ze všech kolibříků (200× za minutu).
- Kolibřík, který měří 8,5 palce, má nejdelší zobáček.
- Kolibřík šedobříchý má zahnutý zobáček.
- Kolibřík Kometa měří 7 palců.
- Kolibřík s rozvětveným červeným ocáskem se nejmenuje mečozobý, ani neměří 6 palců.
- Kolibřík Helenin také neměří 6 palců.



a) K. Helenin mává nejrychleji křídly a měří 8,5 palce.; K. mečozobý má nejdelsí zobáček a měří 2,5 p.; K. šedobřichý má zahnutý zobáček a měří 6 p.; K. Kometa má červený větvený ocásek a měří 7 p.

b) K. Helenin mává nejrychleji křídly a měří 2,5 palce.; K. mečozobý má nejdelsí zobáček a měří 2,5 p.; K. šedobřichý má nejdelsí zobáček a měří 8,5 p.; K. Kometa má červený rozvětvený ocásek a měří 7 p.

c) K. Helenin mává nejrychleji křídly a měří 6 palců.; K. mečozobý má zahnutý zobáček a měří 6 p.; K. šedobřichý má červený rozvětvený ocásek a měří 6 p.; K. Kometa má zahnutý zobáček a měří 7 p.

d) K. Helenin mává nejrychleji křídly a měří 2,5 palce.; K. mečozobý má nejdelsí zobáček a měří 8,5 p.; K. šedobřichý má zahnutý zobáček a měří 6 p.; K. Kometa má červený rozvětvený ocásek a měří 7 p.

e) K. Helenin mává nejrychleji křídly a měří 7 palců.; K. mečozobý má nejdelsí zobáček a měří 8,5 p.; K. šedobřichý má červený rozvětvený ocásek a měří 6 p.; K. Kometa má zahnutý zobáček a měří 2,5 p.

## Úloha 7. ročníku

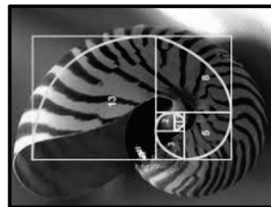
### FIBONACCIOVA POSLOUPNOST

(4 bodů)

Následující posloupnost čísel se jmenuje Fibonacciova.

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \_\_, \_\_, \_\_, ...

Určete součet prvních deseti čísel ve Fibonacciově posloupnosti. Čísla jsou přiřazovaná neustále podle stejného vzorce.



*Čísla z uvedené nekonečné posloupnosti úzce souvisí s přírodou. Uvádají např. počty okvětních lístků, počet spirál na šiškách či ananasu. Tato čísla navíc souvisí s tzv. zlatým řezem, který spatřujeme např. ve stavbě schránek měkkýšů.*

a) 55      b) 138      c) 140      d) 143      e) jiná odpověď

## Středoevropská matematická olympiáda

### MEMO 2019

*Zbyněk Šír, MFF UK, Praha*

Česká republika byla pověřena uspořádáním již třináctého ročníku Středoevropské matematické olympiády (MEMO 2019). Tato prestižní mezinárodní soutěž se konala v Pardubicích ve dnech 26. srpna až 1. září. Soutěžilo v ní celkem šedesát středoškolských studentů z deseti zemí, kteří byli doprovázeni dvaceti vedoucími. Hladký průběh celé soutěže zajišťovalo na dvacet českých organizátorů a koordinátorů, přičemž zodpovědnost za celou akci nesla v roli hlavního organizátora Jednota českých matematiků a fyziků.

V tomto příspěvku chceme čtenáře krátce seznámit s historií a tradicí Středoevropských matematických olympiád, s organizací a průběhem letošního ročníku a v neposlední řadě s výsledky soutěže. Pro dokreslení rovněž uvedeme jednu ze soutěžních úloh a její řešení. Další informace lze nalézt na oficiálních stránkách soutěže `memo2019.karlin.mff.cuni.cz`.

### Historie MEMO

Středoevropská matematická olympiáda je mezinárodní soutěž každoročně pořádaná od roku 2007. Do určité míry navazuje na předchozí rakousko-polskou matematickou soutěž, která se konala pravidelně v letech 1978–2006. Jedná se ovšem o akci mnohem rozsáhlejší a ambicióznější. Právo účasti mají soutěžící z deseti řádných členských zemí, totiž z České republiky, Chorvatska, Litvy, Maďarska, Německa, Polska, Rakouska, Slovenska, Slovinska a Švýcarska.

Delegace každé země je tvořena šesti soutěžícími studenty a dvoučlenným doprovodem zkušených matematiků. Průběh soutěže řídí mezinárodní jury, kterou tvoří uvedený doprovod soutěžících a předseda z pořadatelské země. Celá akce trvá 7 dnů (6 nocí), vlastní soutěž dva půldny. První půlden je soutěží jednotlivců v řešení 4 úloh a trvá 5 hodin. Druhý půlden je soutěží družstev jednotlivých zemí v kolektivním řešení 8 úloh a trvá rovněž 5 hodin. Podaná písemná řešení hodnotí mezinárodní jury a na základě výsledků jsou nejlepším jednotlivcům (přibližně polovině celkového počtu) uděleny zlaté, stříbrné a bronzové medaile v poměru 1 : 2 : 3. Jednotlivcům bez medailí jsou udělována čestná uznání, pokud



podají úplné řešení aspoň jedné ze čtyř zadaných úloh. V soutěži družstev jsou uděleny medaile třem zemím s nejvyšším sumárním počtem bodů za podaná řešení osmi zadaných úloh.

Do určité míry se MEMO podobá Mezinárodní matematické olympiádě (IMO). Úlohy jsou srovnatelné obtížnosti a jsou vybírány tak, aby tematicky pokryly čtyři hlavní disciplíny, kterými jsou algebra, kombinatorika, geometrie a teorie čísel. Je však třeba zdůraznit dvě specifika. Prvním je zařazení již zmíněné týmové soutěže, která není na podobných akcích obvyklá a z hlediska národní soudržnosti i práce s matematickými problémy je velmi přínosná. Druhým aspektem je explicitní cíl MEMO umožnit účast poněkud mladším soutěžícím, kteří ještě nemají takové zkušenosti. Soutěže by se neměli účastnit studenti, kteří v daném roce již reprezentují svoji zemi na IMO. Navíc by neměli být v nejvyšším ročníku, aby se v roce následujícím mohli na IMO kvalifikovat a vytěžit tak zkušenosti získané na MEMO.

## Organizace MEMO 2019

Účast České republiky je v současnosti zakotvena v Organizačním řádu Matematické olympiády ČR, neboť její pojetí je v souladu s touto předmětovou soutěží a reprezentanti ČR pro MEMO se vybírají z úspěšných řešitelů ústředního kola MO kategorie A. V České republice byl uspořádán 2. ročník MEMO v roce 2008, podle principu periodického střídání hostitelství připadla na Českou republiku organizace 13. ročníku v roce 2019.

Organizační příprava soutěže započala asi s ročním předstihem. Jistě není třeba zdůrazňovat, že týdenní akce, která má celkem na sto účastníků, vyžaduje nemalé finanční prostředky. Chceme zde poděkovat všem národním týmům za to, že včas zaslaly svůj účastnický příspěvek. Takto vybraná částka by však pokryla asi jen třetinu reálných nákladů. Velkorysým finančním příspěvkem MEMO 2019 podpořilo MŠMT ČR, Nadace RSJ, Unicorn College, město Pardubice a Pardubický kraj. Všem těmto subjektům patří náš velký dík. Rád bych rovněž vyjádřil poděkování pracovníkům JČMF, kteří úspěšně komunikovali se všemi sponzory a rovněž sledovali finanční aspekt celé soutěže. Jsou to předsedkyně JČMF doc. Alena Šolcová, hospodář dr. Jaroslav Dittrich a předseda Ústřední komise MO doc. Jaromír Šimša.

Důležitým rozhodnutím bylo umístění akce do Pardubic, které mají výbornou dopravní polohu, bohatou infrastrukturu a ideální velikost. Uspořádat zde mezinárodní akci bylo možno zejména díky velmi aktivní

a vřelé podpoře dvou místních spoluorganizátorů. Gymnázium Dašická 1083 poskytlo své prostory a pedagogický dozor pro oba dny vlastní studentské soutěže. Za tuto zásadní podporu patří dík současnému řediteli gymnázia Mgr. Ludkovi Burianovi, paní profesorce Mgr. Soně Křišťanové, která je předsedkyní krajské komise MO pro Pardubický kraj, a mnoha současným i emeritním profesorům, kteří se podíleli na pedagogickém dozoru. Především však musíme poděkovat emeritnímu předsedovi JČMF a dlouholetému řediteli pardubického gymnázia dr. Josefu Kubátovi. Právě jeho nadšení, velké organizační úsilí a četné osobní kontakty velmi usnadnily organizaci celé soutěže.

Druhým pardubickým spoluorganizátorem se stala Fakulta elektrotechniky a informatiky Univerzity Pardubice zastoupená jejím děkanem dr. Zdeňkem Němcem a jejím proděkanem dr. Lukášem Čeganem. Tato fakulta poskytla velkorysé zázemí pro čtyřdenní zasedání jury, velkou aulu pro slavnostní zahájení a zakončení a rovněž velmi pružně reagovala na měnící se potřeby kancelářského a administrativního zajištění akce.

## Průběh letošního ročníku

V pondělí 26. srpna všechny týmy úspěšně dorazily do pardubického hotelu Labe, kde je očekávali nejen organizátoři, ale i bohaté občerstvení. Jako drobné rozptýlení měli všichni za úkol pořídit fotografii se sochou inženýra Jana Pernera, která je umístěna před budovou pardubického nádraží. Tento úkol pobavil zejména tým Německa, jehož jeden člen se rovněž jmenoval Perner. V hotelu Labe byli po celý týden ubytováni nejen členové týmů, ale i všichni organizátoři a koordinátoři.

V úterý 27. srpna v 9.00 se v aule Fakulty elektrotechniky a informatiky konalo slavnostní zahájení, po kterém se soutěžící a jejich vedoucí rozdělili. Zatímco se vedoucí, kteří jsou podle regulí členy jury, věnovali výběru a přípravě soutěžních úloh, pro studenty byl připraven výlet lodí a autobusem na Kunětickou horu a do blízkého Hradce Králové. Zajištění kvalitního programu a pedagogického dozoru pro dny, kdy soutěžící nejsou pod dohledem svých národních vedoucích, se ukázal jedním z organizačně nejobtížnějších prvků celé soutěže. S úterním výletem nám velmi pomohli členové Katedry cizích jazyků Filozofické fakulty Univerzity Pardubice pod vedením dr. Heleny Jaklové.

Bez osobní zkušenosti není snadné pochopit, jak náročná a pracná je příprava soutěžních úloh. Již několik měsíců před začátkem celé akce byly účastnické země vyzvány, aby zasílaly v anglickém jazyce své ná-

vrhy. Celkem jich bylo podáno 72, ze kterých český koordinační tým vybral shortlist 33 nejlepších problémů. Je třeba vysoce ocenit práci kolegů zodpovědných za jednotlivé tematické okruhy: doc. Tomáš Bárta (kombinatorika), dr. Pavel Calábek (algebra), doc. Jaromír Šimša (teorie čísel) a dr. Jaroslav Švrček (geometrie).

Při úvodním úterním zasedání jury z nich bylo po diskuzi vybráno celkem 12 úloh (4 úlohy pro individuální soutěž a 8 úloh pro soutěž týmovou). V debatě, kterou řídil předseda jury prof. Jan Kratochvíl, jeden z bývalých nejlepších českých olympioniků a současný děkan MFF UK, bylo třeba úlohy posoudit z hlediska jejich obtížnosti, matematické krásy, tematické vyváženosti a rovněž bylo třeba se ujistit o jejich originalitě. Někdy se totiž u některé z navrhovaných úloh stane, že jí podobná byla zadána v národní soutěži či přípravném soustředění jiné země a podobně.

Kromě výběru úloh bylo úkolem jury zpřesnit a zdokonalit jejich anglická znění, připravit jejich překlad do devíti národních jazyků a odsouhlasit schéma pro bodové hodnocení různých alternativních řešení. Během první hodiny každého soutěžního dne odpovídají členové jury na dotazy, které mohou soutěžící podat výhradně písemně. Později se pak členové jury podílejí na opravě úloh (každý ve svém jazyce) a na závěr hlasují o bodových hranicích pro zlatou, stříbrnou a bronzovou medaili.

Významnou úlohu během celé soutěže plní tým koordinátorů. Jejich úkolem je připravit schémata pro bodová hodnocení jednotlivých úloh a nezávisle opravit všechna řešení ve všech národních jazycích. Rovněž se v individuálních koordinačních setkáních s vedoucími národních týmů musí ujednotit na konečném bodovém hodnocení. V letošním ročníku MEMO pracoval koordinační tým v tomto složení: *algebra*: Pavel Calábek, Mirek Olšák, Pavel Šalom, *kombinatorika*: Tomáš Bárta, David Hruška, Jakub Löwit, *teorie čísel*: Jaromír Šimša, Pavel Hudec, Pavel Turek a *geometrie*: Jaroslav Švrček, Martin Raška, Radovan Švarc.

Vlastní soutěž probíhala ve středu 28. srpna a ve čtvrtek 29. srpna vždy v čase 9.00–14.00. Po obědě a krátkém odpočinku byla pro soutěžící připravena prohlídka města Pardubic a jejich okolí za dozoru pedagogů pardubického gymnázia. V pátek 30. srpna, kdy jury a koordinátoři ještě celý den pilně pracovali, byl pro studenty připraven celodenní zážitkový program pod vedením instruktorů Prázdninové školy Lipnice. V sobotu byl uspořádán celodenní výlet do historické Kutné Hory a slavného hřebčince Kladruby, kterého se zúčastnili všichni soutěžící, vedoucí i koordinátoři. S výletem i celou řadou dalších organizačních úkolů před soutěží i při ní vynikajícím způsobem pomáhali Jakub Löwit a Zdeňka Crkalová.

Jako hlavní organizátor bych rád vyjádřil svůj velký dík předsedovi jury, koordinátorům i všem organizátorům a pomocníkům za vynikající zajištění svěřeného aspektu celé akce. Měl jsem ze spolupráce upřímnou radost. Rovněž jsem osobně velice rád, že na akci s velkým množstvím nezletilých účastníků nedošlo kromě několika nevolností a jednoho zánětu očních spojivek k žádným nepředvídaným událostem.

### Úlohy a výsledky

V individuální soutěži se absolutním vítězem stal se ziskem 21 bodů Krešimir Nežmah (Chorvatsko). Na druhém místě se umístil Kosma Kasprzak (Polsko) se ziskem 20 bodů a třetí místo si se ziskem 19 rozdělili Viktor Csaplár (Slovensko), Lucia Krajčoviechová (Slovensko) a Máté Weisz (Maďarsko). Všichni zmínění soutěžící se rozhodnutím jury stali jedinými zlatými medailisty.

V týmové soutěži zvítězil a zlaté medaile získal tým Polska se ziskem 63 bodů (z celkové 64 možných). Stříbrnými medailisty se stalo Maďarsko se ziskem 58 bodů a bronz získal tým Německa s 53 body.

Děkan MFF UK prof. Jan Kratochvíl udělil zvláštní cenu Jozefu Fülöpovi za originální řešení úlohy I-1.

Český tým ve složení Vojtěch David, Jana Bušová, Adéla Heroudková, Jan Vavřín, Magdaléna Mišinová, Viktor Fukala pod vedením Filipa Bialase a Danila Koževnikova vybojoval 3 bronzové medaile v soutěži jednotlivců a 5. místo v soutěži týmů.

V přátelské atmosféře soutěžící svedli náročný a intenzivní boj. Soutěžící středoškoláci se zdokonalili v matematické teorii i řešení náročných úloh „olympijského kalibru“. U mnohých z nich to nepochybně přispěje k jejich úspěšným výkonům příští rok na celosvětové Mezinárodní matematické olympiádě v Rusku. Pro všechny zúčastněné měl pobyt na soutěži i značný význam z hlediska sociálních kontaktů ve vytvořené mezinárodní komunitě. Pro vedoucí delegaci, kteří jsou ve svých zemích učitelé pečující o matematicky nadané žáky, přineslo setkání možnost výměny osobních zkušeností z forem zmíněné přípravy talentů.

Na závěr pro ilustraci uvádíme čtvrtou soutěžní úlohu z individuální soutěže spolu s jejím řešením.

### Příklad I–4

Najděte nejmenší přirozené  $n$  takové, že z libovolných  $n$  po sobě jdoucích celých čísel lze vybrat neprázdnou množinu po sobě jdoucích čísel se součtem prvků dělitelným číslem 2019.

**Vzorové řešení**

Prvočíselný rozklad čísla 2019 je  $3 \cdot 673$ , označme  $p = 673$ .

Pro libovolné celé číslo  $k$  obarvíme tři čísla  $kp - 1$ ,  $kp$ ,  $kp + 1$  červenou barvou a 6 čísel  $kp + \frac{p-5}{2}$ ,  $kp + \frac{p-3}{2}$ ,  $kp + \frac{p-1}{2}$ ,  $kp + \frac{p+1}{2}$ ,  $kp + \frac{p+3}{2}$ ,  $kp + \frac{p+5}{2}$  modrou barvou. Získáme tím periodické obarvení. V posloupnosti čísel dlouhé  $p = 673$  jsou vždy 3 červená čísla, pak 332 neobarvených čísel, dále 6 modrých čísel a konečně dalších 332 neobarvených čísel. Součet tří po sobě následujících červených čísel je  $3kp = 2019 \cdot k$  a součet šesti po sobě následujících modrých čísel je

$$6 \left( kp + \frac{p}{2} \right) = 2019 \cdot (2k + 1).$$

Obě tyto množiny jsou tedy vhodnými volbami splňujícími znění úlohy.

Snadno nahlédneme, že libovolných  $340 = 332 + (6 - 1) + (3 - 1) + 1$  po sobě jdoucích celých čísel musí obsahovat červený nebo modrý interval. Hledané nejmenší  $n$  tedy bude splňovat  $n \leq 340$ . Nyní ukážeme, že z množiny  $A = \{335, 336, \dots, 673\}$  nelze vybrat po sobě jdoucí čísla, jejichž součet je dělitelný 2019. Protože  $|A| = 339$ , bude platit  $n \geq 340$ , a tedy  $n = 340$  bude řešením úlohy.

Předpokládejme tedy, že existují čísla  $\{a, a + 1, \dots, b\} \subseteq A$  taková, že

$$2019 \mid a + (a + 1) + \dots + b = \frac{(b - a + 1)(a + b)}{2}.$$

To znamená, že  $673 \mid b - a + 1$ , nebo  $673 \mid a + b$ . Protože ale

$$0 < 1 \leq b - a + 1 \leq 339 < 673,$$

673 musí dělit  $a + b$ . Protože však navíc platí

$$671 = 335 + 336 \leq a + b \leq 673 + 673 = 2 \cdot 673,$$

je jasné, že  $a + b$  musí být rovno 673 nebo  $2 \cdot 673$ . Tedy buď  $a = 335$  a  $b = 338$ , nebo  $a = 336$  a  $b = 337$  nebo  $a = b = 673$ . Ale

$$\begin{aligned} 2019 \nmid 335 + 336 + 337 + 338 = 1346, \quad 2019 \nmid 336 + 337 = 673 \\ \text{a} \quad 2019 \nmid 673, \end{aligned}$$

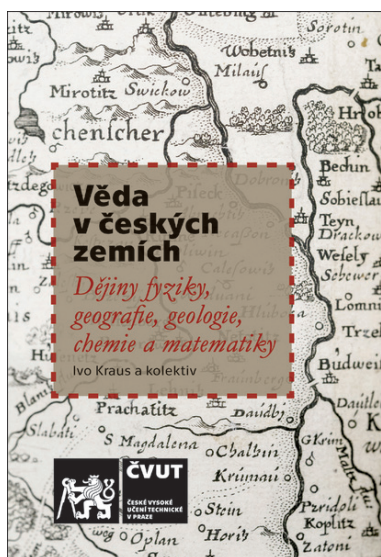
což je spor.

Na závěr poznamenejme, že podobný důkaz bude platit pro každé liché číslo tvaru  $m = p \cdot q$ , kde  $p$  je dostatečně velký prvočíselný dělitel  $m$ . Přesněji je třeba, aby  $p > \sqrt{3m}$ . Pak hledané číslo bude  $n = \frac{p+3q}{2} - 1$ .

## I. Kraus a kol.: Věda v českých zemích: Dějiny fyziky, geografie, geologie, chemie a matematiky

Zdeněk Janout, ÚTEF ČVUT, Praha

V pátek 10. května 2019 proběhl na veletrhu Svět knihy na pražském Výstavišti křest monografie *Věda v českých zemích: Dějiny fyziky, geografie, geologie, chemie a matematiky*. Publikaci slavnostně uvedli rektor ČVUT doc. RNDr. Vojtěch Petráček, CSc. s astrofyzikem RNDr. Jiřím Grygarem, CSc. a Pavlínou Filipovskou.



Monografie souběžně popisuje historii pěti přírodovědných oborů od 14. do 20. století, které se v minulosti více či méně ovlivňovaly a pracovaly obdobnými metodami. V každém z oborů se vyskytly osobnosti, jejichž dílo svým významem přesáhlo hranice českých zemí. Kolektiv autorů, který vedl prof. RNDr. Ivo Kraus, DrSc. (fyzika), tvoří vysokoškolská pedagogové, historici přírodních věd, jmenovitě prof. PhDr. Eva Semotanová, DrSc. (geografie), doc. RNDr. Zdeněk Kukal, DrSc. (geologie), doc. RNDr. Soňa Štrbáňová, CSc. (chemie), prof. RNDr. Martina Bečvářová, Ph.D. (matematika) a doc. RNDr. Jindřich Bečvář, CSc. (matematika). Monografie má 556 stran, ob-

sahuje 250 obrázků, každý obor má svůj seznam literatury a jmenný rejstřík s daty narození a úmrtí dotčených osob. Knihu vydala Česká technika – nakladatelství ČVUT v Praze v roce 2019.

Vzhledem k matematicko-fyzikálnímu zaměření časopisu *Rozhledy* věnujme pozornost pouze dvěma oborům – matematice a fyzice. Představu o tom, co je konkrétním obsahem fyzikální a matematické části monografie si učiníme z názvů jednotlivých kapitol a odpovídajících odstavců. Historie obou oborů začíná založením Univerzity Karlovy (1348) a je rozdělena do šesti časových období – kapitol.

**Fyzikální část (93 stran)**

První kapitola, *Fyzika v českých zemích v letech 1348–1618*, je věnována prvním fyzikům na vysokém učení pražském a slavnému německému učenici *Johannu Keplerovi*, který během pražského pobytu (1600–1612) napsal třicet prací; vedle astronomických spisů také dva o optice a jeden věnovaný krystalografii.

Druhá kapitola, *Fyzika v českých zemích v letech 1618–1750*, je věnována jezuitskému školství, exaktním vědám v Klementinu, životu a dílu lékaře *Jana Marka Marci z Lanškrouna* (1595–1667), který je považován za prvního českého fyzika; dále fyzikálním přednáškám lékaře *Jana Antonína Scrinciho*, *Prokopu Divišovi* a experimentům Divišových současníků, *Benjamina Franklina* a *Georga Richmana*.

Ve třetí kapitole, nazvané *Fyzika v českých zemích v letech 1750–1848*, se čtenář seznámí s vědeckým odkazem klementinských přírodovědců *Josefa Steplinga*, *Jana Tesánka* a *Antonína Strnada*, dále se vznikem Společnosti učenců (1769), která byla základnou Královské české společnosti nauk (1784 až 1952), dozví se o počátcích našeho inženýrského vzdělávání, o fyzice na pražské univerzitě v tomto období a o nejslavnějším profesorovi pražské polytechniky *Christianu Andreasu Dopplerovi*.

Ve čtvrté kapitole, *Fyzika v českých zemích v letech 1848–1918*, je popsána výuka fyziky na české a německé Karlo-Ferdinandově univerzitě, výuka fyziky na české a německé technice v Praze, zakládání vědeckých a odborných společností – Lotos a Jednota, výuka fyziky na brněnských technikách.

Pátá kapitola, *Fyzika v Československu v první polovině 20. století*, pojednává o vysokých školách mezi dvěma světovými válkami, o českých fyzicích za 2. světové války, o vlivu objevu rentgenového záření na vývoj české fyziky, o Československu – zemi radia, o trojhvězdí československé meziválečné fyziky, *Václavu Dolejškoví*, *Georgu Placzkoví* a *Augustu Žáčkovi*.

Poslední, šestá kapitola je nazvána *Fyzika a jaderné vědy v českých zemích po roce 1952* a pojednává o Fyzikálním ústavu Akademie věd, o výuce fyziky a výzkumu na vysokých školách, o fyzice v ústavech mimo vysoké školy a Akademii věd, o jaderných oborech, o technických zařízeních československé konstrukce a výroby a končí odstavcem o českých fyzicích v zahraničí.

**Matematická část (velice podrobná, 153 stran)**

První kapitola, *Matematika v období 1348–1620*, pojednává o mate-

matice a o nejvýznamnějších matematicích na pražské univerzitě v tomto období, o elementární matematice mimo pražskou univerzitu, o vyšší matematice mimo pražskou univerzitu a matematicích vzešlých z našich zemí působících v zahraničí. Například je popsána životní cesta olomouckého rodáka *Valentina Stansela* (1621–1705), který dosáhl světové proslulosti; Stansel přednášel matematiku a astronomii nejen na univerzitě v Olomouci a v Praze, ale i v Portugalsku (Lisabonu) a následně v Brazílii (Bahia), kde byl profesorem matematiky, ředitelem hvězdárny a rektorem jezuitské koleje. Dozvíme se zde i jméno matematika, který zavedl znaménka plus a minus.

Druhá až čtvrtá kapitola je věnována matematice v období od 1620 až do 1918. Čtenář se podrobně seznámí s matematikou a jejími osobnostmi působícími v tomto období na pražské univerzitě, na pražské inženýrské škole, na české i německé technice v Praze a v Brně, na univerzitě v Olomouci a na báňské akademii v Příbrami. Je popsána i výuka praktické matematiky a matematiky mimo vzdělávací instituce, dále školské reformy, Královská česká společnost nauk, odborné spolky a společnosti, české učebnice matematiky a překlady zahraničních monografií. Jsou uvedeny životopisy významných matematiků, například matematika světové úrovně *Bernarda Bolzana* (1781–1848).

Pátá kapitola, *Matematika v období 1918–1950*, popisuje matematiku a její osobnosti na českých vysokých školách po vzniku Československa, jmenovitě na Univerzitě Karlově, na Německé univerzitě v Praze, na ČVUT v Praze, na Německé technice v Praze, na Masarykově univerzitě v Brně, na Vysoké škole technické v Brně a na Německé technice v Brně. Popsána je i činnost Jednoty československých matematiků a fyziků.

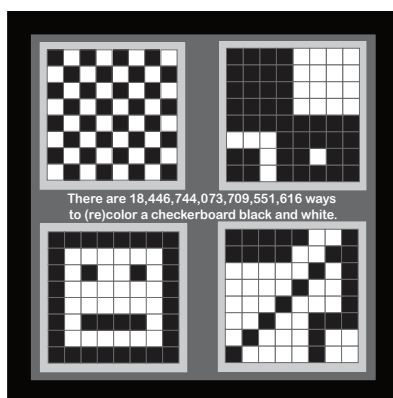
Poslední, šestá kapitola, *Matematika od roku 1950*, popisuje poválečné změny, matematické ústavy a Akademii věd, matematiku na Matematicko-fyzikální fakultě Univerzity Karlovy, na ČVUT, na Přírodovědecké fakultě Masarykovy univerzity v Brně, na Vysokém učení technickém v Brně a na univerzitě v Olomouci.

Monografie *Věda v českých zemích* je napsána čtivě, zajímavě, vhodně doplňuje a rozšiřuje informace běžně uváděné v učebnicích matematiky a fyziky jak základních, tak středních, ale i vysokých škol. Monografii lze doporučit studentům i pedagogům středních i vysokých škol a všem zájemcům o historii přírodních a společenských věd. Vzhledem k tomu, že takovýto souhrnný přehled uvedených oborů nebyl v posledních desetiletích zpracován, dá se očekávat, že tato monografie se bude těšit zájmu široké odborné i laické veřejnosti.



## Malá kniha o velkých číslech (The little book of REALLY BIG numbers)

V Rozhledech matematicko-fyzikálních bychom chtěli dávat prostor i anglicky psaným článkům doprovázeným slovníčkem. Zahájíme recenzi knihy Really Big Numbers od Richarda Evana Schwartze, která je převzatá z časopisu London Mathematical Society Newsletter se svolením autorů i editora [1]. Rovněž k publikaci obrázků máme svolení společnosti American Mathematical Society.



If you believe the maxim “Readers should have at least as much fun reading the book as the writer had writing it”, the readers of this book are up for a treat. It is more than clear that Richard Evan Schwartz had tremendous fun putting the book together. It is a work of love; in fact, of multiple loves.

First, there is the obvious love for numbers and shapes. Then there is the love for his young daughters who inspired the book, and who are our companions along the ride through the vast universe of numbers. The author also loves making complex topics clearer and more accessible to everyone, even small children, in a very nice, playful, visually engaging and colorful way.

Filled with engaging illustrations made by the author with the help of a computer drawing program, and printed in brilliant colors, the book gradually guides us through the counting numbers, starting from single

digits and moving up fast. The first half of the book relies on beautiful examples of really big numbers from the world around us. We are invited to visualize them using intuition building facts like: “About 7 billion people live on Earth. If everyone joined together in a giant chain and lifted off the earth, on the right day they would reach about a quarter of the way to Mars”. An occasional ‘dry’ example from combinatorial counting gives the book a somewhat more serious footing, and something for mathematically more mature readers to think about.

The first number that goes beyond counting anything meaningful—being bigger than the number of all atoms in the observable universe—appears roughly halfway through the book, and right after that things really take off. When dealing with numbers too big to visualize, we enlist the help of the language. This part of the book is mostly devoted to the use of notation and recursion for creating ever larger numbers. There are so many BIG numbers in the book that they barely fit in its small format. Some too big to even name.

The book gets better with every reading. It has a wonderful design, it is well produced and nice to look at and hold. Even though it is intended for the young readers, first-ever AMS book for children, we believe that it is best enjoyed if read together: a child and a patient and mathematically inclined adult. It is great for sharing, and for explaining why we like mathematics so much. Get it with someone small you love, and start a journey. Have fun along the way and do not be afraid of taking those big leaps, because as you will learn in this book “Infinity is farther away than you thought”.



*Robert Jajcay and Tatiana Jajcayová*, both mathematicians at Comenius University, in Bratislava, Slovakia, had fun reading and re-reading this book with their daughter Greta, and are looking forward to yet more re-readings and more curious questions about really big numbers from her.

Images from Richard Evan Schwartz, *Really Big Numbers* (Providence: American Mathematical Society) ©2014. Used with permission.

## Literatura

- [1] Jajcay, R., Jajcayová, T.: Richard Evan Schwartz: Really big numbers (American Mathematical Society, Providence, 2014). *London Mathematical Society Newsletter*, a review, roč. 442 (2014), December, s. 30–31.

## Slovníček:

maxim = pravidlo

to be up for a treat = mít se na co těšit

tremendous = obrovský

shape = tvar

companion = společník

vast = rozsáhlý

universe = vesmír, svět

accessible = přístupný

engaging = podmanivý, poutavý

billion = miliarda

footing = základ, podklad

mature = zralý/vyspělý

take off = odstartovat

barely = sotva

mathematically inclined = matematicky zaměřený

take a leap = udělat skok, ale také přijmout výzvu

# ROZHLEDY matematicko-fyzikální

## obsah 94. ročníku

### MATEMATIKA

strana/číslo

|                                                                                       |      |
|---------------------------------------------------------------------------------------|------|
| V. Dlab: Krátký příběh o obecném tvaru Pythagorovy věty . . . .                       | 8/4  |
| J. Dvořák, M. Snětinová: Bertrandův paradox aneb není náhoda<br>jako náhoda . . . . . | 12/1 |
| Ľ. Dvořáková, D. Ryzák: Antipalindromická čísla . . . . .                             | 2/1  |
| Ľ. Dvořáková: Vyzkoušejte metodu Monte Carlo . . . . .                                | 1/2  |
| Ľ. Dvořáková: Řešení úlohy MO krajského kola kategorie C . . . .                      | 21/2 |
| D. Jedinák: 19 úloh pre rok 2019 . . . . .                                            | 17/1 |
| V. Kloud: Geometrické důkazy úloh variačního počtu . . . . .                          | 9/3  |
| E. Šubert: Proč jsou kanály kulaté . . . . .                                          | 22/1 |
| E. Šubert: Jak zatáčí vlak . . . . .                                                  | 19/1 |
| E. Šubert: Jak zatočit s vikláním stolu . . . . .                                     | 15/3 |
| O. Vencálek: Příklad do hodiny věnované statistice . . . . .                          | 1/3  |
| J. Vybíral: Lékařské testy individuální a skupinové . . . . .                         | 10/1 |
| P. Zahradník: Lineární optimalizace . . . . .                                         | 1/4  |

### FYZIKA

|                                                                  |      |
|------------------------------------------------------------------|------|
| Z. Drozd, M. Snětinová, K. Žilavá: Vážení zeměkoule . . . . .    | 25/1 |
| Z. Drozd, M. Snětinová, K. Žilavá: Vážení zeměkoule II . . . . . | 24/2 |
| J. Reichl: Síla a Newtonovy zákony . . . . .                     | 32/2 |
| V. Wagner: Hranice Mendělejevovy tabulky prvků . . . . .         | 32/1 |
| K. Kolář: Co je to FYKOS? Proč ho řešit? . . . . .               | 46/2 |
| M. Kořistková: Z tajností žižkovského bunkru . . . . .           | 18/3 |
| I. Kraus: O tradicích rakouské fyziky – 1. část . . . . .        | 27/3 |
| I. Kraus: O tradicích rakouské fyziky – 2. část . . . . .        | 16/4 |

|                                                              |      |
|--------------------------------------------------------------|------|
| J. Libovický: Neuronové sítě a automatický překlad . . . . . | 30/4 |
|--------------------------------------------------------------|------|

## ZPRÁVY

|                                                                                     |      |
|-------------------------------------------------------------------------------------|------|
| A. Foglarová, K. Kamenářová: Korespondenční seminář M&M . .                         | 54/3 |
| D. Grund: TCN: Léto přeje aktivním . . . . .                                        | 48/1 |
| K. Henclová: Matematické problémy nematematiků . . . . .                            | 59/3 |
| M. Kovář: Matematická soutěž Pangea . . . . .                                       | 41/4 |
| J. Kříž, J. Šlégr: Celostátní kolo 60. ročníku fyzikální olympiády                  | 59/2 |
| J. Machalická: Soustředění mladých fyziků a matematiků . . . . .                    | 47/1 |
| L. Pick: Soutěž ČMS pro mladé . . . . .                                             | 46/1 |
| M. Rolínek: 60. mezinárodní matematická olympiáda . . . . .                         | 42/3 |
| M. Snětinová: Slovo úvodem . . . . .                                                | 1/1  |
| Z. Šír: Středoevropská matematická olympiáda MEMO 2019 . . .                        | 46/4 |
| J. Švrček: Ústřední kolo 68. ročníku Matematické olympiády<br>kategorie A . . . . . | 54/2 |
| P. Töpfer: Ústřední kolo 68. ročníku Matematické olympiády<br>kategorie P . . . . . | 56/2 |
| P. Töpfer: Mezinárodní olympiády v informatice v roce 2019 . . .                    | 47/3 |
| P. Töpfer: Matematický korespondenční seminář – PraSe . . . . .                     | 52/3 |
| J. Vybíral: Matematika pro život . . . . .                                          | 45/1 |
| Naše soutěž . . . . .                                                               | 52/1 |

## RECENZE

|                                                                                                                                                              |      |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| Z. Janout: Recenze knihy <i>Věda v českých zemích: Dějiny<br/>fyziky, geografie, geologie, chemie a matematiky</i><br>autora I. Krause a kolektivu . . . . . | 52/4 |
| R. Jajcay, T. Jajcayová: Recenze knihy <i>Really Big Numbers</i><br>autora Richarda Evana Schwartze . . . . .                                                | 55/4 |

## 👉 **Objednávky časopisu** 👈

Od roku 2020 vyřizuje objednávky časopisu

Rozhledy matematicko-fyzikální  
společnost

**MediaCall, s. r. o.**

**Vídeňská 546/55**

**639 63 Brno**

**tel: +420 532 165 165**

**e-mail: [export@mediacall.cz](mailto:export@mediacall.cz)**

Objednávky lze realizovat i přes web:

**[www.zahranicnitisk.com](http://www.zahranicnitisk.com)**

Tato informace se netýká členů JČMF. Pro ně vyřizuje objednávky předplatného sekretariát JČMF a předplatné je hrazeno spolu s členskými příspěvky.

## Výzva k zasílání článků

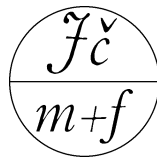
Vážené studentky, vážení studenti!

- Řešíte zajímavou fyzikální, matematickou či informatickou práci?
- Týká se vaše seminární práce některého z výše uvedených oborů?
- Podílíte se na zajímavém F, M, I projektu?
- Chcete představit výsledky své práce také ostatním?
- Organizujete seminář, tábor, soutěž nebo nějakou jinou akci týkající se F, M, I pro středoškoláky?
- Máte nějaký jiný námět, který by se měl objevit v tomto časopise?

**Napište článek a zašlete nám jej do *Rozhledů*!**

Přijímáme články shrnující původní práce, přehledové články či krátká sdělení. Váš příspěvek bude po recenzi uveřejněn v jednom z následujících čísel našeho časopisu.

Články zasílejte na adresu: **rozhledy@jcmf.cz**



---

## OBSAH

|                                                                                                                                                   |    |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| P. Zahradník: Lineární optimalizace .....                                                                                                         | 1  |
| V. Dlab: Krátký příběh o obecném tvaru Pythagorovy věty .....                                                                                     | 8  |
| I. Kraus: O tradicích rakouské fyziky – 2. část .....                                                                                             | 16 |
| J. Libovický: Neuronové sítě a automatický překlad .....                                                                                          | 30 |
| M. Kovář: Matematická soutěž Pangea .....                                                                                                         | 41 |
| Z. Šír: Středoevropská matematická olympiáda MEMO 2019 .....                                                                                      | 46 |
| Z. Janout: Recenze knihy <i>Věda v českých zemích: Dějiny fyziky, geografie, geologie, chemie a matematiky</i> autora I. Krause a kolektivu ..... | 52 |
| R. Jajcay, T. Jajcayová: Recenze knihy <i>Really Big Numbers</i> autora Richarda Evana Schwartze .....                                            | 55 |

---

## Pokyny pro autory

Příspěvky dodávejte na adresu redakce v elektronické podobě. Nejlépe napsané ve formátu  $\text{\LaTeX}$ , přijatelný je i formát  $\text{\PlainTeX}$ , je akceptovatelný i text připravený editorem Word či podobným.

Pokud jde o obrázky, je žádoucí, aby byly připraveny v reprodukovatelné podobě. Každý obrázek nechť je v samostatném souboru, nejlépe ve formátu eps nebo pdf. Přípustná je též bitmapa v dostatečném rozlišení.

Ke každému zasílanému příspěvku (ne u soutěží, zpráv a recenzí) přiložte krátkou anotaci v českém jazyce. Dále je žádoucí, aby u každého příspěvku byla uvedena literatura, na kterou je v textu odkazováno.