

ROZ HLEDY

MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ

ČASOPIS PRO ZÁJEMCE O MATEMATIKU, FYZIKU A INFORMATIKU

ROČNÍK 95 (2020) • ČÍSLO 2

Vydává Jednota českých matematiků a fyziků
tel.: 222 090 708-9, e-mail: jcmf@math.cas.cz
za podpory MFF UK Praha a FJFI ČVUT Praha



Vycházejí 4 čísla v kalendářním roce

Obálku navrhl Bohuslav Šír

Sazbu programem $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ připravil RNDr. Miloslav Závodný

Adresa redakce: MFF UK, V Holešovičkách 2, 182 00 Praha 8–Troja
e-mail: rozhledy@jcmf.cz

Internetové stránky časopisu: <https://rozhledy.jcmf.cz/>

Vytiskla Tiskárna Pohlline, Zálesí 1126/88, 142 00 Praha 4

Distribuci pro předplatitele provádí v zastoupení vydavatele
MediaCall, s. r. o.

Vídeňská 546/55, 639 63 Brno

tel.: +420 532 165 165, e-mail: export@mediacall.cz

web: www.zahranicnitisk.com

ISSN 0035-9343

MK ČR E4691

© Jednota českých matematiků a fyziků, Praha 2020

Redakční rada

Vedoucí redaktorka:

RNDr. Marie Snětinová, Ph.D., MFF UK Praha

Redaktorka pro matematiku:

doc. Ing. Ľubomíra Dvořáková, Ph.D., FJFI ČVUT Praha

Redaktor pro fyziku:

doc. RNDr. Mgr. Vojtěch Žák, Ph.D., MFF UK Praha

Členové redakční rady:

doc. RNDr. Zdeněk Drozd, Ph.D., MFF UK Praha

RNDr. Petr Hanuš, FSv ČVUT Praha

doc. RNDr. Jaroslav Hora, CSc., FPE ZČU Plzeň

prof. RNDr. Ivo Kraus, DrSc., FJFI ČVUT Praha

doc. RNDr. Jan Kříž, Ph.D., PřF UHK Hradec Králové

doc. RNDr. Miroslav Lávička, Ph.D., FAV ZČU Plzeň

RNDr. Miroslav Randa, Ph.D., PdF ZČU Plzeň

doc. RNDr. Jan Šlégr, Ph.D., PřF UHK Hradec Králové

prof. RNDr. Pavel Tlustý, CSc., PedF JU České Budějovice

doc. RNDr. Pavel Töpfer, CSc., MFF UK Praha

prof. Ing. Bohumil Vybíral, CSc., PřF UHK Hradec Králové

RNDr. Vladimír Wagner, CSc., ÚJF AV ČR Řež

Od řetězovky k číslu π

Luděk Spíchal, Ústav matematiky a statistiky, MU, Brno

Abstrakt. Článek se zabývá alternativním způsobem výpočtu přibližné hodnoty čísla π . Tuto hodnotu získáme aproximací z plochy obrazce omezeného grafem funkce, která počítá harmonický průměr hodnot exponenciálních funkcí e^x a e^{-x} , a osou x .

Číslo π , které je patrně nejnámější matematickou konstantou, poutá pozornost matematiků od starověku až po současnost. Konec konců, která další konstanta si vysloužila sice neoficiální, přesto řadou fanoušků čísla π oslavovaný den. Obdobně důležitou, i když patrně méně známou konstantou je Eulerovo číslo e .

Záměrem článku je poukázat na možnost výpočtu hodnoty čísla π postupem založeným na aproximaci plochy omezené grafem vhodné funkce. K výpočtu použijeme řetězovku, křivku známou zejména v oblasti stavitelství (např. samonosné klenby, lana visutých mostů), jejíž rovnice vychází z aritmetického průměru hodnot funkcí e^x a e^{-x} . Harmonický průměr hodnot uvedených funkcí nás dále přivede ke křivce, která omezuje plochu, kterou budeme aproximovat pomocí lichoběžníků. Postupnou změnou délky intervalu použitého pro aproximaci ukážeme, že velikost plochy se přibližuje číslu π . Na závěr jako doplněk uvedeme možnost provedení výpočtu pomocí softwaru SAS/STAT.

V článku nebudeme zmiňovat historii zkoumání čísla π a tradiční metody jeho výpočtu, neboť toto je podrobně popsáno v článku Terezy Bártlkové „Příběh jedné konstanty“ (publikován také v tomto čísle časopisu), naopak krátce zmíníme vlastnosti druhé zmíněné konstanty, tj. Eulerova čísla e .

Eulerovo číslo

S Eulerovým číslem se studenti středních škol setkají poprvé v souvislosti s logaritmy, kde číslo

$$e = 2,718\ 281\ 828\ 459\ 045\ 235\ 360\ 287\ 471\ 352\ \dots,$$

které je podobně jako číslo π číslem iracionálním, vystupuje v roli *základu přirozených logaritmů*.¹⁾ Ve středoškolské matematice ovšem mnoho pro-

¹⁾Konstanta byla pojmenována po švýcarském matematikovi Leonhardu Eulerovi (1707–1783), ačkoliv byla objevena již roku 1683 rovněž švýcarským matematikem

storu tato důležitá konstanta nenalézá. Uvedme proto alespoň některé další aspekty čísla e , které by měly být srozumitelné i v případě, že jsme neprošli kurzy vyšší matematiky.

1. Nejprve zmíníme důležitou souvislost čísla e a principu úročení vkladu označovaného jako *složené úročení*. Můžeme si, podobně jako to učinil ke konci 17. století Jacob Bernoulli, položit celkem jednoduchou otázku. Jak závisí výše úroku z vkladu na délce úrokovacího období? Jestliže bychom uvažovali, že vložená částka (např. 1 Kč) je úročena stoprocentním ročním úrokem, pak výše připsané částky závisí na frekvenci úročení. Je celkem snadné dovodit, že pro střadatele je výhodná co nejkratší délka úrokovacího období. Nekonečně krátkému úrokovacímu období (tzv. spojitě úročení) pak odpovídá maximální možná hodnota úroku, která je e násobkem ročního úroku. Na konci roku by střadatel za daných podmínek měl uspořeno $2,718\dots$, tedy e Kč [5].

Výše uvedené skutečnosti můžeme zapsat jazykem matematiky ve tvaru

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

2. Pokud položíme základ exponenciální funkce $y = a^x$ ($a > 0$) roven číslu e , pak získáme předpis funkce ve tvaru

$$y = e^x.$$

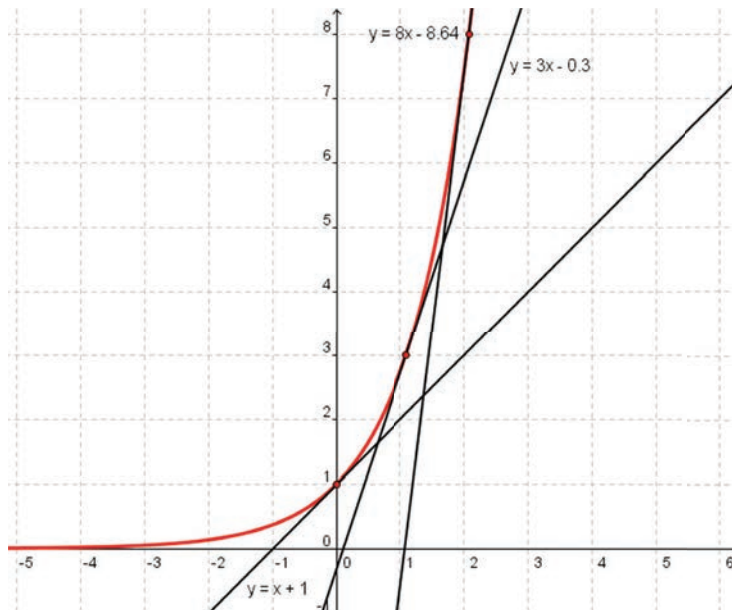
Graf funkce znázorněný na obr. 1 ukazuje, že v daném případě je hodnota směrnice tečny ke grafu funkce v libovolném bodě rovna hodnotě funkce v daném bodě. Jestliže bude např. $C[c, e^c]$ bod dotyku tečny ke grafu funkce $y = e^x$, pak pro rovnici tečny platí vztah

$$y = e^c x + e^c(1 - c).$$

3. Každou exponenciální funkci zapsanou ve tvaru $y = a^x$ ($a > 0$) můžeme vyjádřit pomocí čísla e

$$y = a^x \iff y = e^{kx},$$

kde $k = \ln a$. Předpisy exponenciálních funkcí zapsané pomocí čísla e jsou velmi běžné jak v matematice, tak mimo ní, neboť usnadňují další výpočty. Tak např. funkci zdvojování $y = 2^x$ zapíšeme ve tvaru $y = e^{0,693x}$, ztrojování $y = 3^x$ ve tvaru $y = e^{1,099x}$ apod.



Obr. 1: Graf funkce $y = e^x$ s vyznačenými tečnami; směrnice tečen se rovnají y -ové souřadnici bodu dotyku

V roce 1690 se objevitel čísla e Jacob Bernoulli v časopise *Acta editorum* zamýšlel nad otázkou, jak matematicky definovat tvar, který zaujímá volně visící řetězky. Jinak řečeno, jak matematicky popsat tzv. řetězovku [5].

Co je řetězovka

Řetězovka²⁾ je ve fyzice a geometrii křivkou, kterou vytvoří volně zavěšený řetěz či kabel (obecně pak dokonale pevné a ohebné vlákno) připevněný pouze na okrajích. Zakřivení je důsledkem výhradního působení gravitačního pole, kde každá část prověšeného vlákna minimalizuje svoji potenciální energii. Tvarem se řetězovka značně blíží tvaru parabolického oblouku, parabolou však není. Přesto jistý vztah k parabole lze zaznamenat v případě, že se parabola valí po přímce. Ohnisko takto se

Jacobem Bernoullim (1655–1705).

²⁾Název, pocházející z lat. *catenaria* což znamená řetěz, poprvé použil holandský astronom Christiaan Huygens (1629–1695), který současně ukázal, že křivku nelze popsat algebraickou rovnicí.

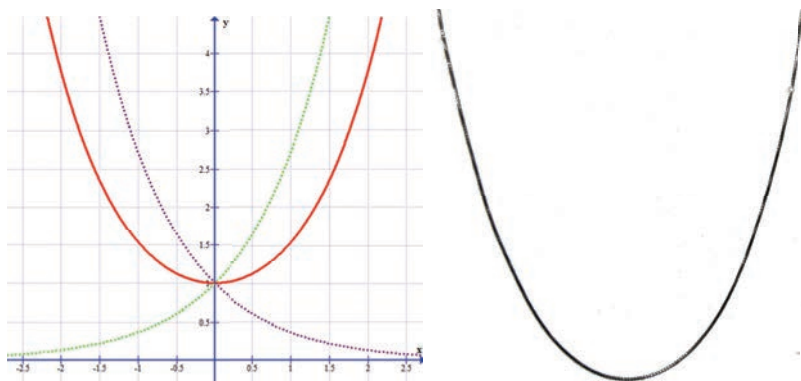
valící paraboly opisuje křivku, která má tvar řetězovky. Řetězovku označujeme rovněž v případě, kdy z mýdlového roztoku vytáhneme dva kruhy tak, aby byly spojeny vrstvou roztoku. Molekuly roztoku vytvoří plochu (tzv. katenoid), jejímž průřezem je rovněž řetězovka [2]. Ideálně samonosné klenby staveb mají tvar “obrácené” řetězovky, neboť oblouk minimalizuje síly, které na něj působí [3]. V kartézské soustavě souřadnic Oxy lze řetězovku vyjádřit ve tvaru [3]

$$y = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right), \quad (1)$$

kde a je kladný parametr určující míru rozevření řetězovky. Pokud dále položíme hodnotu parametru $a = 1$, pak má rovnice (1) tvar

$$y = \frac{1}{2} \left(e^x + e^{-x} \right), \quad (2)$$

a je tak aritmetickým průměrem hodnot funkcí e^x a e^{-x} (obr. 2).³⁾



Obr. 2: Řetězovka ($a = 1$, plná čára) jako aritmetický průměr hodnot funkcí e^x a e^{-x} (vlevo), řetězek prohnutý do tvaru řetězovky (vpravo)

³⁾V matematice řetězovka odpovídá grafu funkce hyperbolický kosinus

$$y = \cosh \frac{x}{a} = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right).$$

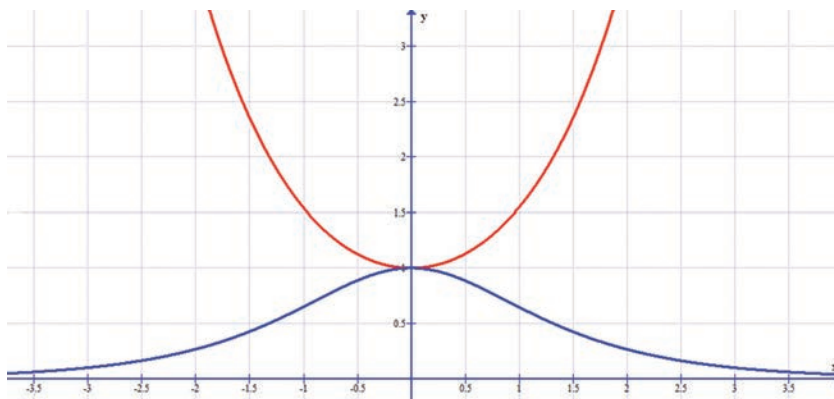
Rovnici nezávisle odvodili Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) a Johann Bernoulli (1667–1748). Johann, který byl mladším bratrem Jacoba, problém údajně vyřešil během jediné noci. Vzhledem k nepříliš dobrým vztahům mezi bratry tak vyvolal značnou nelibost u Jacoba, neboť ten se sám problémem bez výsledku zabýval celý rok [5].

Aproximace velikosti plochy omezené grafem funkce

V této části se zaměříme na funkci

$$y = \frac{2}{\frac{1}{e^x} + \frac{1}{e^{-x}}} = \frac{2}{e^{-x} + e^x}, \quad (3)$$

která je harmonickým průměrem funkcí e^x a e^{-x} , tedy funkcí převrácené hodnoty k aritmetickému průměru hodnot funkcí e^x a e^{-x} . Graf funkce harmonického průměru společně s grafem řetězovky je znázorněn na obr. 3. Křivka harmonického průměru má zvonovitý tvar s maximální hodnotou v bodě $x = 0$. Na obou okrajích číselné osy se hodnoty funkce blíží 0.



Obr. 3: Aritmetický (řetězovka) a harmonický průměr hodnot funkcí e^x a e^{-x}

Na obr. 4 je vyznačena oblast, jejíž plochu budeme aproximovat. Křivku při aproximaci nahradíme úsečkami, které se při postupném zmenšování přírůstků hodnot na ose x k tvaru křivky stále více přimykají (obr. 5). Plochy použité k výpočtu mají tvar lichoběžníku s konstantní výškou i závisující na zvoleném dělení intervalu. Vzhledem k tomu, že funkce popsaná rovnicí (3) je sudá (souměrná podle osy y), stačí výpočet provést pro kladné hodnoty.

Postup výpočtu můžeme demonstrovat na intervalu $\langle -1, 1 \rangle$. Při výpočtu obsahu plochy omezené funkcí (3) a osou x budeme postupně zkracovat dělení zvoleného intervalu (na polovinu).

$$S_1 = \left(\frac{2e^0}{e^0 + 1} + \frac{2e^1}{e^2 + 1} \right) \cdot 1 \doteq 1,64805$$

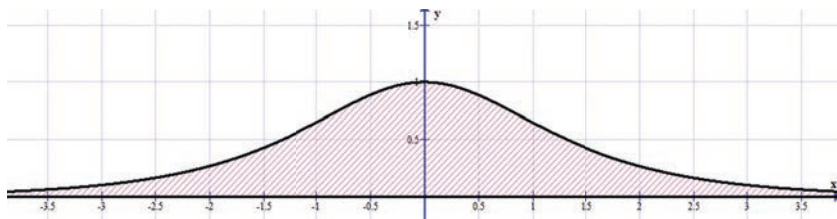
$$S_{0,5} = \left(\frac{2e^0}{e^0 + 1} + \frac{4e^{0,5}}{e^1 + 1} + \frac{2e^1}{e^2 + 1} \right) \cdot 0,5 \doteq 1,71085$$

$$S_{0,25} = \left(\frac{2e^0}{e^0 + 1} + \frac{4e^{0,25}}{e^{0,5} + 1} + \frac{4e^{0,5}}{e^1 + 1} + \frac{4e^{0,75}}{e^{1,5} + 1} + \frac{2e^1}{e^2 + 1} \right) \cdot 0,25 \doteq 1,72639$$

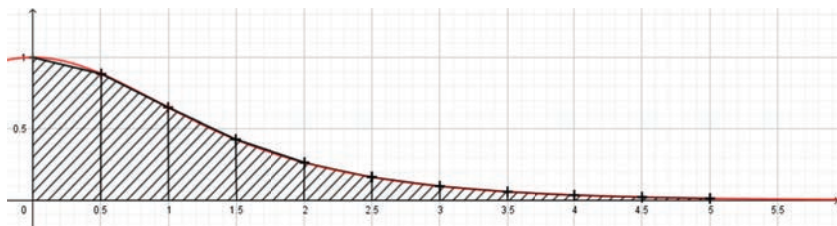
$$S_{0,125} = \left(\frac{2e^0}{e^0 + 1} + \frac{4e^{0,125}}{e^{0,25} + 1} + \frac{4e^{0,25}}{e^{0,5} + 1} + \frac{4e^{0,375}}{e^{0,75} + 1} + \frac{4e^{0,5}}{e^1 + 1} + \frac{4e^{0,625}}{e^{1,25} + 1} + \frac{4e^{0,75}}{e^{1,5} + 1} + \frac{4e^{0,875}}{e^{1,75} + 1} + \frac{2e^1}{e^2 + 1} \right) \cdot 0,125 \doteq 1,73025$$

$$\vdots$$

$$S_i = i \cdot \left(\sum_{n=ki}^1 \frac{4e^n}{e^{2n} + 1} - \frac{(e + 1)^2}{e^2 + 1} \right), \quad k \in \mathbb{Z}, \quad k \geq 0$$



Obr. 4: Plocha omezená grafem funkce určené rovnicí (3) a osou x



Obr. 5: Aproximace plochy omezené grafem funkce (3), znázorněno pro interval $\langle 0, 5 \rangle$

Výpočet velikosti plochy pro interval $\langle -1, 1 \rangle$ programem Graph dává hodnotu 1,731 54, tj. relativní chyba výpočtu pro $i = 0,125$ je menší než 0,1 %.⁴⁾

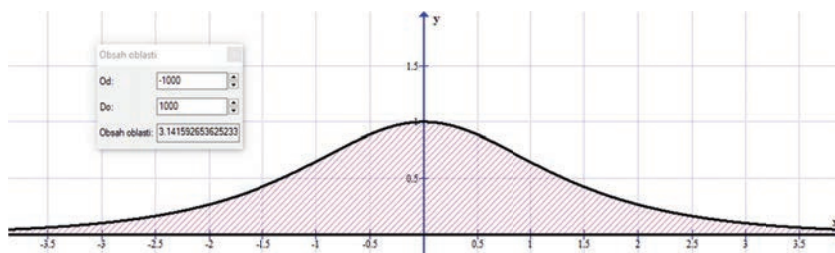
V další části rozšíříme výpočet na interval $\langle -10, 10 \rangle$, tj.

$$S_i = i \cdot \left(\sum_{n=ki}^{10} \frac{4e^n}{e^{2n} + 1} - \frac{(e^{10} + 1)^2}{e^{20} + 1} \right),$$

kde $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 0$. Odpovídající velikosti ploch pro vybraná dělení včetně absolutních a relativních chyb jsou uvedeny v tabulce 1. Výsledky výpočtu uvedené v tabulce 1 se zřetelně blíží hodnotě čísla π (obr. 6), kde pro $i = 0,5$ činí relativní odchylka méně než 0,01 % (tab. 1).

Dělení intervalu (i)	Plocha (π)	Absolutní odchylka	Relativní odchylka
2,5	3,38872	+0,24713	+7,866 %
2,0	3,23246	+0,09087	+2,892 %
1,0	3,14212	+0,00053	+0,017 %
0,5	3,14145	-0,00014	-0,004 %

Tabulka 1: Aproximace plochy omezené grafem funkce (3) a osou x na intervalu $\langle -10, 10 \rangle$, pro výpočet absolutní a relativní chyby použita hodnota $\pi \doteq 3,14159$



Obr. 6: Velikost plochy omezené grafem funkce určené rovnicí (3) a osou x

Jak dále? Další dělení (zjemňování) intervalu znamená na jedné straně postupné zpřesňování odhadu velikosti plochy a další přiblížení se hodnotě čísla π , na straně druhé opakované výpočty velikostí ploch se mohou

⁴⁾Program Graph je freeware, volně ke stažení např. www.padowan.dk/download/

stát časově značně náročnými. Zkusme ukázat možnost výpočtu hodnoty čísla π na intervalu $\langle -m, m \rangle$ pomocí programu SAS/STAT.⁵⁾ Pro sestavení programu použijeme rovnici

$$S_i = i \cdot \left(\sum_{n=ki}^m \frac{4e^n}{e^{2n} + 1} - \frac{(e^m + 1)^2}{e^{2m} + 1} \right), k \in \mathbb{Z}, k \geq 0. \quad (4)$$

Kód pro zápis výpočtu je poměrně jednoduchý, při výpočtu můžeme libovolně měnit parametry m, i (tab. 2).

```
data NumberPi;
e = constant("e");
i = 0.1;
m = 20;
r = m/i ;
sum = 0;
do k = 0 to r by 1;
    sum = sum + (4*e**(k*i))/(e**(2*k*i)+1);
    area = (sum - (e**(2*m)+2*e**m + 1)/(e**(2*m) + 1))*i;
output;
end;
run;
proc print data=NumberPi;
```

Pro uvedené hodnoty parametrů $i = 0,1$ a $m = 20$ nalezneme v záložce OUTPUT DATA hodnotu $\pi \doteq 3.1415926445$.

m	i	Odhad π	m	i	Odhad π	m	i	Odhad π
10	0,1	3,1414109026	20	0,1	3,1415926445	50	0,1	3,1415926536
	0,05	3,141411016		0,05	3,1415926449		0,05	3,1415926536
	0,01	3,1414110524		0,01	3,1415926453		0,01	3,1415926536

Tabulka 2: Odhad hodnoty čísla π pomocí SAS/STAT využitím rovnice (4)

⁵⁾Oficiální stránky společnosti SAS: www.sas.com/cs_cz/home.html. Software lze pro výzkumné a studijní účely používat bezplatně, ke stažení zde: www.sas.com/cs_cz/software/university-edition/download-software.html. Na stránkách společnosti je uveden podrobný postup instalace softwaru. Řešení řady problémů softwarem SAS lze nalézt např. zde: blogs.sas.com/content/iml/.

Z výše uvedeného lze soudit, že vypočtená hodnota se bude tím více blížit číslu π , čím více se bude $i \rightarrow 0$ a $m \rightarrow \infty$. Takový výpočet ovšem náleží do sféry vyšší matematiky a vyžaduje znalost integrálního počtu

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2e^x}{e^{2x} + 1} dx = \pi.$$

Pokud učiníme v tomto místě malou historickou odbočku, pak můžeme dodat, že tímto úhelným kamenem obohatili matematickou analýzu dva velikáni matematiky přelomu 17. a 18. století, sir Isaac Newton (1643–1727) a Gottfried Wilhelm Leibniz. Tím se však pomyslně vrátíme zpět, neboť oba se nikoli nepodstatným způsobem zapsali rovněž do historie zkoumání čísla π . Leibnizův vzorec zmiňuje v článku „Příběh jedné konstanty“ T. Bártlová, Newton v roce 1665 objevil nekonečnou řadu

$$\pi = \frac{3\sqrt{3}}{4} + 24 \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{5 \times 2^5} - \frac{1}{28 \times 2^7} - \frac{1}{72 \times 2^9} - \dots \right).$$

Závěr

V článku jsme uvedli možnost výpočtu přibližné hodnoty čísla π , vycházející z použití exponenciálních funkcí a harmonického průměru, tedy s využitím učiva střední školy. Zároveň byly v článku spojeny hned dvě nejdůležitější matematické konstanty – číslo π a Eulerovo číslo e .

Výpočet čísla π navržený Archimédem a rozvíjený dalšími generacemi matematiků vychází z použití opsaných a vepsaných mnohoúhelníků a využití exhaustivní (vyčerpávající) metody. Skutečností je, že takový postup je při grafickém provedení na jedné straně intuitivní (dává výpočet hodnoty čísla π do přímé souvislosti s délkou kružnice) a nabízí velmi dobrou představu podstaty a smyslu prováděných operací, na straně druhé však neposkytuje dostatečnou přesnost. Efektivnější je výpočet, nicméně i v tomto případě platí, že přibližování vypočtené hodnoty k hodnotě čísla π je relativně pomalé.

Aproximace hodnoty čísla π pomocí plochy způsobem uvedeným v článku nabízí postup, kde vypočtené hodnoty konvergují k hodnotě π rychleji a dále nás poměrně jednoduše přibližuje některým důležitým pojmům matematiky, jako je pojem limity funkce (zde reprezentován postupným rozšiřováním intervalu použitého k aproximaci) či přírůstkem funkce (zde reprezentován postupným zkracováním dělení intervalu), které matematická analýza využívá v takových oblastech jako je

diferenciální a zejména integrální počet. Problém popsany v článku lze rovněž využít pro počítačové řešení. V článku byl jako příklad použit software SAS/STAT, nicméně nabízí se řada alternativ, např. Matlab, Octave apod.

Nemusíme se záměrně či vědomě zabývat matematikou a přesto můžeme v krajině narazit na objekty, jejichž tvar nám připomene křivku, o kterou jsme opřeli výpočet hodnoty čísla π (obr. 7). Ponecháme na rozvážení čtenáři, zda se jedná o pouhou tvarovou podobnost související s estetickou stránkou objektu, či tvar nejlépe vyhovující charakteru obvyklého využití tedy k přepravě nákladu na hřbetech soumarů, nebo praxí středověkých stavitelů osvědčený tvar mající pozitivní vliv na statiku takových staveb.



Obr. 7: Soumarský most ve Skotsku (The Old Packhorse Bridge) s grafem funkce podle rovnice (3) (upraveno podle [4])

Číslo π jistě nepřestane fascinovat zájemce o matematiku či specialisty v oboru teorie čísel ani v budoucnosti a jak jsme zmínili již v úvodu, každý rok řada příznivců slaví 14. březen jako Den pí.

Literatura

- [1] Navarro, J.: *Tajemné π . Lze udělat kvadraturu kruhu?* Dokořán, Praha, 2018.
- [2] Gielis, J.: *The Geometrical Beauty of Plants*. Atlantis Press, Paris, 2017.
- [3] Wikipedie: Otevřená encyklopedie: Catenary. [online]. c2019 [cit. 9. 11. 2019]. Dostupné z: <https://en.wikipedia.org/wiki/Catenary>
- [4] Wikipedie: Otevřená encyklopedie: The Old Packhorse Bridge, Carrbridge by Aviemore. [online]. c2019 [citováno 9. 11. 2019]. Dostupné z: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:The_Old_Packhorse_Bridge,_Carrbridge_by_Aviemore._-_geograph.org.uk_-_58243.jpg
- [5] Bellos, A.: *Alex za zrcadlem. Jak se čísla odrážejí v životě a život v číslech*. Dokořán, Praha, 2016.

Příběh jedné konstanty

Tereza Bártlová, MFF UK Praha

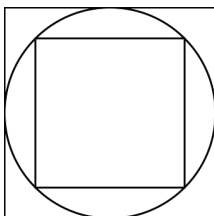
V matematice nepracujeme často s konstantami, rozhodně ne tolik jako ve fyzice, zato však matematické konstanty nezřídka tvoří pilíř nějaké ucelené teorie. Geometrii vévodí jedna ze základních a nejstarších v matematice – konstanta π , jejíž hodnota je přibližně 3,14.

Už dávní myslitelé věděli, že číslo π úzce souvisí s vlastnostmi kruhu. Jeho přesné vyčíslení je však zaměstnávalo po celá tisíciletí, patrně už od doby, kdy se člověk poprvé pokusil nakreslit dokonalý kruh.

První, kdo se skutečně systematicky touto konstantou zabýval, byl *Archimédés ze Syrakus*. Pochopil, že hledaná konstanta souvisí s obvodem kruhu. V dnešním matematickém jazyce bychom tuto vlastnost mohli vyjádřit vztahem

$$o = 2 \cdot \pi \cdot r,$$

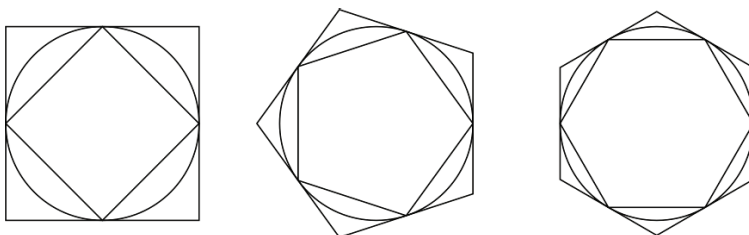
kde o vyjadřuje obvod kruhu a r značí jeho poloměr. Přesné vyčíslení obvodu kruhu však s sebou nese potíže, neboť je tvořen křivkou. Archimédés si uvědomoval, že je daleko jednodušší změřit délku úsečky než křivky, a tak problém zjednodušil. Místo toho, aby se pokoušel složitě měřit obvod kružnice, narýsoval dva mnohoúhelníky, mezi které kružnici „uvěznil“. Jeden mnohoúhelník byl do kružnice vepsaný a druhý kružnici obsahoval, neboli byl dané kružnici opsaný (obr. 1).



Obr. 1

Archimédovi bylo jasné, že obvod kružnice bude vždy menší než obvod opsaného mnohoúhelníku a současně větší než obvod mnohoúhelníku vepsaného. Když obvody obou mnohoúhelníků, jež kružnici z každé strany svíraly, změřil, dostal tím horní a dolní odhad pro obvod kružnice.

Možná, že vám to dnes nepřipadá jako převratná myšlenka, jenomže síla Archimédova objevu spočívá především v tom, že je možné oba odhady zjemnit tím, že budeme postupně zvětšovat počet stran obou mnohoúhelníků.



Obr. 2

Z obr. 2 je patrné, že čím větší počet stran bude mnohoúhelník mít, tím přesnější odhady pro hodnotu π dostaneme. Archimédés nakonec svou metodu vydržel opakovat tak dlouho, až se mu podařilo uvěznit kružnici mezi dva 96úhelníky, jejichž obvody spočítal. To byl vskutku heroický výkon, zejména vezmeme-li v úvahu, že neměl k dispozici soubudou algebraickou symboliku a veškeré výpočty prováděl ručně. Díky jeho pílí a vytrvalosti se mu podařilo zjistit, že hodnota π leží mezi hodnotami

$$\frac{223}{71} \doteq 3,141 \quad \text{a} \quad \frac{22}{7} \doteq 3,143.$$

Ač byla jeho metoda výpočtu numericky velmi náročná, po dlouhá staletí zůstal tento výpočet ideově nepřekonán. Zástupy matematiků pouze zpřesňovaly Archimédovy výpočty a pomalu přidávaly desetinná místa

postupně jedno po druhém. V 5. století našeho letopočtu čínský matematik *Cu Čchung-č'* posunul Archimédovu metodu o další krůček vpřed, když pomocí dvou 1228úhelníků dokázal určit, že se hodnota π nachází mezi čísly 3,141 592 6 a 3,141 592 7. Vzhledem k náročnosti výpočtu šlo však přidávání desetinných míst velmi pomalu, a tak se až do konce 1. tisíciletí nikomu nepodařilo číslo π určit na více než deset desetinných míst.

Poměr obvodu kružnice k jejímu průměru zkoumal v 16. století i holandský matematik *Adriaan Anthonisz*, který v roce 1585 objevil, že hodnota π leží někde mezi

$$\frac{377}{120} \text{ a } \frac{333}{106}.$$

Jeho syn, *Adriaan Metius*, pak tuto hodnotu ještě zpřesnil a aproximoval číslo π pomocí zlomku

$$\pi = \frac{355}{113} \doteq 3,141\,592\,9.$$

Na to, jak malý je jmenovatel zlomku, má velmi zajímavé vlastnosti, neboť dává šest platných cifer čísla π . Což je po Archimédově odhadu velmi dobrá aproximace. Na počest jeho objevitele nazýváme zlomek „Metiusovým číslem“.

Na přelomu 16. a 17. století udělal velký pokrok německý matematik *Ludolph van Ceulen*, kterému se podařilo určit číslo π na 35 desetinných míst. Na svoji práci byl tak hrdý, že si tuto hodnotu nechal vytesat na vlastní náhrobek. Z úcty k jeho početnímu výkonu se číslo π někdy nazývá také „Ludolfovým číslem“.

Ačkoliv z čistě praktického hlediska nemělo vůbec žádný smysl pít se po dalších číslicích desetinného rozvoje π , protože již tato přesnost naprosto postačovala k dovršení i těch nejkolosalnějších astronomických výpočtů, jaké si lze představit, úsilí o výpočet dalších a dalších desetinných míst pokračovalo a postupně se z něj stávala výzva. Matematici mezi sebou soutěžili, kdo přidá další číslici do desetinného rozvoje. Strategie výpočtu se však postupem času měnila.

Po objevení kalkulu v polovině 17. století se matematici začali na celou věc dívat ze zcela jiného úhlu pohledu. Náročná Archimédova metoda byla postupně nahrazena několika vzorci, které zjišťování hodnoty π urychlily.

Jeden z prvních vzorců pro π , který z těchto nových metod vzešel, byl součin

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots,$$

který odvodil *John Wallis*. Uvedené tři tečky ve vzorci naznačují, že se jedná o nekonečný součin, tedy součin, který obsahuje nekonečný počet členů. Čím více členů se do výpočtu zahrne, tím bude výsledek přesnější.

O něco později zveřejnil *Gottfried Leibniz* slavnou nekonečnou řadu

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots.$$

Zajímavost této řady tkví v tom, že poukazuje na souvislost π s lichými čísly. Její jednoduchost bere dech, ale k praktickému výpočtu hodnoty π se vůbec nehodí. Sečteme-li například první dvě stovky členů, stále ještě dostaneme o dost horší aproximaci π , než ke které dospěl před dvěma tisíci lety Archimédés.

Další zajímavou nekonečnou řadou, ve které se π objevuje, je

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots,$$

již odvodil matematik *Leonhard Euler*. Ač je tato řada efektivnější než předchozí, postupným přidáváním dalších a dalších členů se ke skutečné hodnotě π přibližujeme stále dost pomalu. Je tedy jasné, že ne všechna vyjádření π jsou vhodná pro jeho výpočet.

Teprve matematici následujících generací vymysleli řady, které tyto výpočty zvládají rychleji. Na začátku 18. století *John Machin* vyvinul jednu z nejrychlejších, byť ne tak elegantních řad, která využívá vztahu

$$\pi = 16 \operatorname{arctg} \frac{1}{5} - 4 \operatorname{arctg} \frac{1}{239}.$$

S její pomocí rozdrtil všechny dosavadní rekordy a vypočítal π na sto desetinných míst.

Machinův vzorec s ještě větším zápallem zužitkovali k výpočtu další badatelé. Mezi ně patřil například anglický amatérský matematik *William Shanks*, jenž hledání dalších desetinných míst π zasvětil většinu života. Jemu se podařilo vypočítat 707 číslic. Později se však zjistilo, že při výpočtu 527. desetinného místa udělal chybu, což ovlivnilo všechny následující číslice. Uvážíme-li ale, že Shanks všechny výpočty prováděl „ručně“, je i tak jeho výkon hodný obdivu.

V 60. letech 18. století dokázal *Johann Heinrich Lambert* to, co všichni už dlouho tušili: π je iracionální číslo, z čehož mimo jiné vyplývá, že jeho desetinný rozvoj nikdy neskončí, a tudíž bychom se jeho výpočtem mohli bavit navěky. Nicméně zájem o výpočet π na mnoho desetinných míst neuhasl.

Technický vývoj postupem času způsobil, že pero a papír nahradily elektronické kalkulační stroje. Výpočty, které trvaly několik let, byly najednou hotové za několik sekund. Na konci 20. století se konečně podařilo pokořit hranici jedné miliardy číslic. To ovšem vůbec není důvod k tomu, aby vědci usnuli na vavřínech a nehledali další a další cifry. V následujících letech byly zaznamenány další pokroky, a to nejen díky rychlejšímu hardwaru, ale také díky novým algoritmům. Bylo by mylné se domnívat, že se vývoj výpočtu π zastavil. Naopak, nejnovější algoritmy výpočtu využívají poznatků z matematické analýzy či teorie pravděpodobnosti. Autorkou zatím posledního výpočtu je *Emma Harukaová Iwaová*, které se na počátku roku 2019 podařilo určit π s přesností na 31,4 bilionu číslic. Na výpočtu pracovalo 121 dní celkem 25 virtuálních počítačů. Je vidět, že číslo π dokáže potrápit nejen matematiky, ale také počítače.

Ač jsme uvedli, že znalost π s přesností na 40 desetinných míst je naprosto dostačující i pro astronomické výpočty, je nutné poznamenat, že jeho neustálé zpřesňování není zcela samoúčelné. V dnešní době se algoritmů pro výpočet hodnoty π na mnoho desetinných míst využívá například k testování integrity softwaru či hardwaru. Chyba v desetinném rozvoji totiž pomáhá odhalit chybu počítače.

Fascinace tímto číslem se však promítá i mimo sféru matematiky. Možná pro jednoduchost své definice se číslo π stalo společným tématem mezi matematiky i nematematiky. Prodlužování nekonečné řady číslic není jediná zábava – mnozí se také učí číslice nazpaměť. Aktuální světový rekord v Guinnessově knize rekordů drží Ind *Suresh Kumar Sharma*, který v říjnu 2015 dokázal zpaměti odrecitovat 70 030 číslic.

Jako poctu tomuto číslu v roce 2009 americká Sněmovna reprezentantů podpořila myšlenku ustanovení 14. března jako Významného dne π . Američané totiž obvykle píší den a měsíc v opačném pořadí, tedy 3/14. Už to vidíte? Pozadu ovšem nezůstávají ani ostatní země světa. Dne 26. listopadu 2019 Generální konference UNESCO oficiálně prohlásila 14. březen za Mezinárodní den matematiky. Příznivci matematiky se tím mohou nechat inspirovat a tento den pořádně oslavit.

Hry Nim

Václav Vopravil, Praha

Abstrakt. Článek je věnován nestranným kombinatorickým hrám a matematickým technikám, které mohou být použity při jejich analýze. Naučíme se pracovat s \mathcal{P} a \mathcal{N} pozicemi, s nim součtem a Grundyovými čísly. Sprague–Grundyova věta říká, že každá pozice v konečné nestranné kombinatorické hře je ekvivalentní nějaké hře NIM na jedné hromádce.

Nestranné kombinatorické hry

Obecně *kombinatorické hry* splňují následující vlastnosti:

- (1) Hru hrají dva hráči.
- (2) Ve hře je konečný počet dosažitelných pozic (jen ve vzácných případech je vhodné uvažovat i hry s nekonečným počtem pozic).
- (3) Pravidla hry určují, na které pozice se mohou hráči přesunout. Pravidly je zaručeno, že ve hře není žádná náhoda a že hráči mají úplnou informaci (tj. nehraje se s kostkami ani s kartami).
- (4) Hráči se v tazích střídají.
- (5) Hra končí, když hráč nemůže táhnout. Koncová pozice určuje i vítěze hry. Hráč, který dosáhne koncovou pozici, vyhrál (normální varianta hry).
- (6) Hra končí po konečně mnoha tazích dosažením koncové pozice.

Budeme se zabývat tzv. nestrannými hrami. *Nestranná kombinatorická hra* je kombinatorická hra, ve které nezáleží na tom, který z hráčů je právě na tahu. Jinými slovy, není rozdíl mezi I. a II. hráčem, oba mají z každé pozice na výběr stejné možnosti tahů (první hráč ve hře začíná).

Příklady nestranných her jsou NIM, VÝHONKY (SPROUTS)⁶⁾ nebo ZELNÝ HACKENBUSH.⁷⁾ Jiné známé hry, např. křížky a kolečka, šachy

⁶⁾Na začátku je na papíře n puntíků. Jeden tah spočívá ve spojení dvou puntíků čarou a nakreslení puntíku někam na nakreslenou čáru. Přitom se žádné dvě čáry nesmějí křížit a z žádného puntíku nesmí vést více než tři čáry. Hráči se pravidelně střídají v tazích, kdo nemá tah, prohrál.

⁷⁾Nechť je dán neorientovaný kořenový graf G a v něm uzel P . Dva hráči se střídají v tazích. Hráč ve svém tahu vybere libovolnou hranu grafu a odebere ji. Pokud nějaká hrana přestane souviset s uzlem P , odstraní se také. Hráč, který nemůže táhnout (tj. graf se skládá pouze z uzlu P), prohrál. Často se při grafické reprezentaci uzlu P zobrazuje jako země, na které jsou navázány další prvky grafu.

apod., nejsou nestranné hry (hráči nemají stejné možnosti tahů). Takové hry se nazývají *partyzánské*.

Úvod do hry Nim

Nyní se zaměříme na jednoduchou hru NIM, jednu z nejznámějších nestranných kombinatorických her. Její studium se ukázalo v oblasti kombinatorických her jako klíčové. Protože existuje mnoho verzí této hry, podíváme se na jednu z nejběžnějších. Důvod pro studium hry NIM je ten, že všechny nestranné kombinatorické hry se mohou převést na studium hry NIM.

Hra NIM se hraje takto: máme tři hromádky kamenů, na kterých je m, n, k kamenů. Pozici označíme $\text{NIM}[m, n, k]$. Každý tah se skládá z výběru jedné hromádky a z ní odebrání několika kamenů. V jednom tahu není možné odebírat kameny z více hromádek. Z hromádky je možné sice odebrat libovolný počet, vždy ale alespoň jeden kámen. Hráč se svého tahu nemůže vzdát. Hráč, který odebere poslední kámen, vyhrál.

Základní analýza hry Nim

Ve hře NIM existuje jediná koncová pozice, totiž $\text{NIM}[0, 0, 0]$. Hráč, který ji dosáhne, vyhrál. Pozice, ve kterých existuje vyhrávající strategie pro II. hráče, budeme označovat \mathcal{P} . Tedy i koncové pozice budou \mathcal{P} .

Také řešení jednohromádkové varianty hry NIM je jednoduché. Hráč na tahu odebere celou hromádku. Každou pozici $\text{NIM}[m, 0, 0]$ pro $m > 0$ označíme \mathcal{N} (vyhraje hráč na tahu).

Uvažujme dvouhromádkovou variantu hry NIM. Je jednoduché si pomyslet, že pozice $\text{NIM}[1, 1, 0]$, $\text{NIM}[2, 2, 0]$, ... jsou \mathcal{P} pozice (vyhraje druhý). První hráč nemůže vyhrát, protože po jeho tahu druhý hráč zahraje přesně stejný tah ve zbývající hromádce. Zbylé pozice jsou \mathcal{N} , stačí prvním tahem dorovnat obě hromádky a použít předcházející strategii. Obecně hry $\text{NIM}[m, m, 0]$ jsou \mathcal{P} pozice a hry $\text{NIM}[m, n, 0]$ pro $m \neq n$ jsou \mathcal{N} pozice.

Pokud jsou všechny tři hromádky neprázdné, je situace složitější. Pozice $\text{NIM}[1, 1, 1]$, $\text{NIM}[1, 1, 2]$, $\text{NIM}[1, 1, 3]$ a pozice $\text{NIM}[1, 2, 2]$ jsou všechny \mathcal{N} pozice, protože prvním tahem se hráč může dostat do pozice $\text{NIM}[1, 1, 0]$ nebo $\text{NIM}[0, 2, 2]$. Hrubou silou můžeme analyzovat i další pozice. Zastavme se ještě u pozice $\text{NIM}[1, 2, 3]$. V této pozici má první hráč na výběr ze 6 tahů. Pokusí-li se odebrat první hromádku, nespěje, protože pozice $\text{NIM}[0, 2, 3]$ je výhodná pro soupeře. (Hráči nedělají chyby.) Odebere-li jeden kámen ze druhé nebo třetí hromádky, opět se

dostane do nevýhodné pozice, kterou jsme již analyzovali. Odebere-li hráč dva kameny ze druhé nebo třetí hromádky, opět soupeř nalezne vyhrávající odpověď podle předcházejících analýz. Zkusí-li hráč odebrat tři kameny z poslední hromádky, opět nevyhraje. Úplnou analýzou jsme ukázali, že neexistuje žádný dobrý první tah, a tedy hra NIM[1, 2, 3] je \mathcal{P} . Příklad NIM[1, 2, n] pro $n > 3$ se naopak převede na předcházející, a tedy se jedná o \mathcal{N} pozice. Takto bychom mohli pokračovat dále, např. pozice NIM[1, 4, 5] a NIM[2, 4, 6] jsou \mathcal{P} pozice atd. Zobecnění je ale obtížné. Pro analýzu těchto pozic využijeme tzv. nim součet.

Pro ilustraci \mathcal{P} a \mathcal{N} pozic uveďme příklad další nestranné hry.

Příklad 1 (Bachetova hra, 1612). HRA S ODEČÍTÁNÍM. Uvažujme následující nestrannou kombinatorickou hru. Nechť x_0 je nezáporné celé číslo. Hra začíná jednou hromádkou s x_0 kameny. Hráči se v tazích střídají. V každém tahu odebírají z hromádky 1 až 4 kameny. Hráč, který odebere poslední kámen, vyhrál. Podívejme se na vyhrávající strategii v této hře. Hru začínající s nulovým počtem kamenů prohraje první hráč. Pokud na počátku hry jsou na hromádce 1, 2, 3 nebo 4 kameny, hráč na tahu odebere všechny kameny a vyhraje. Hra s pěti kameny je vyhrávající pro druhého hráče. Hráč po svém tahu zanechá na hromádce 4, 3, 2 nebo jeden kámen. Hra, která se hraje se šesti kameny, je vyhrávající pro prvního hráče (stačí odebrat jeden kámen a použít předcházející rozbor). Podobně, je-li na hromádce 7, 8, 9 kamenů, vyhraje první hráč, který zanechá soupeři pět kamenů na hromádce. Budeme-li v naší analýze pokračovat tímto způsobem, dostaneme dvě množiny: jednak množinu \mathcal{N} kladných celých čísel x , ve kterých si první hráč (tj. následující) může vynutit výhru, kde x je počet kamenů na hromádce. Ve zbylých pozicích \mathcal{P} má vyhrávající strategii druhý (předcházející hráč). Např. v naší hře s odčítáním je $\{0, 5\} \subset \mathcal{P}$ a $\{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9\} \subset \mathcal{N}$. Budeme-li postupovat tímto způsobem dále, můžeme potom indukcí dokázat, že pozice nezáporných celých čísel násobků 5 je \mathcal{P} pozice a zbylé pozice jsou \mathcal{N} .

Úloha 1. Jak asi hra dopadne, pokud pravidla hry umožňují odebírat z hromádky (varianta hry s odebíráním kamenů):

- 2 nebo 3 kameny,
- 1, 3 nebo 4 kameny,
- 3, 5 nebo 8 kamenů,
- 2^n kamenů, kde $n = 0, 1, 2, \dots$,
- n^2 kamenů, kde $n = 1, 2, \dots$?

Prohrává hráč, který nemůže odebrat kámen.

Nápověda: Posloupnosti začínají

- (a) $\mathcal{P}\mathcal{P}\mathcal{N}\mathcal{N}\mathcal{N}\dots$,
- (b) $\mathcal{P}\mathcal{N}\mathcal{P}\mathcal{N}\mathcal{N}\mathcal{N}\mathcal{N}\dots$,
- (c) $\mathcal{P}\mathcal{P}\mathcal{P}\mathcal{N}\mathcal{N}\mathcal{N}\mathcal{N}\mathcal{N}\mathcal{N}\mathcal{N}\dots$,
- (d) $\mathcal{P}\mathcal{N}\mathcal{N}\dots$,
- (e) $\mathcal{P}\mathcal{N}\mathcal{P}\mathcal{N}\mathcal{N}\dots$

Modulární aritmetika

Pro studium her NIM zavedeme užitečný zápis.

Definice 1. Je dáno celé číslo $m > 1$ a dvě celá čísla a, b . Říkáme, že čísla a, b jsou ekvivalentní modulo m právě, když $a - b$ je násobkem m . Píšeme $a \equiv b \pmod{m}$.

Například $11 \equiv 2 \pmod{3}$. Setkáme se i se zápisem $a \pmod{m}$ pro zbytek, dělíme-li a číslem m . Tedy $11 \pmod{3} = 2$. V naší Bachetově hře pozice pro $n \equiv 1, 2, 3, 4 \pmod{5}$ jsou vyhrávající pro prvního hráče a prohrávající pro $n \equiv 0 \pmod{5}$. V úloze 1 (b) jsou pozice $0, 2 \pmod{7}$ \mathcal{P} pozice a zbylé \mathcal{N} pozicemi. Znamená to, že bude-li se hrát např. na hromádce se 79 kameny, je nevýhodné začínat, protože $79 \equiv 2 \pmod{7}$.

Nim součet

Pro další analýzu hry NIM je důležitý tzv. nim součet. *Nim součet* (který označujeme také \oplus) dvou nezáporných celých čísel je jejich součet v binárním zápisu „bez přenosu do vyšších řádů“. Víme, že pro každé nezáporné celé číslo x existuje jeho binární rozvoj tvaru

$$x = \sum_{i=0}^m x_i 2^i = x_m 2^m + x_{m-1} 2^{m-1} + \dots + x_1 2 + x_0$$

pro nějaké $m \in \mathbb{N}$. Každé x_i je buď 0, nebo 1. Pro čísla ve dvojkové soustavě používáme také zápis $(x_m x_{m-1} \dots x_1 x_0)_2$. Např. $(01101)_2 = 13$ nebo $(11101)_2 = 16 + 8 + 4 + 1 = 29$.

Připomeňme na konkrétním příkladu dva nejznámější algoritmy pro hledání binárního rozvoje. Pro číslo 14 platí $14 : 2 = 7(0)$, $7 : 2 = 3(1)$, $3 : 2 = 1(1)$, $1 : 2 = 0(1)$. Zbytky po celočíselném dělení určují binární reprezentaci: $(1110)_2$, tj. $8 + 4 + 2$. Rozvoj čísla 14 dostaneme také tak, že postupně odečítáme největší mocninu dvou nepřevyšující dané číslo.

Například $14 = 8 + 6 = 8 + 4 + 2$ nebo $30 = 16 + 14 = 16 + 8 + 6 = 16 + 8 + 4 + 2$.

Nim součet dvou nezáporných celých čísel nalezneme tak, že obě čísla vyjádříme ve dvojkové soustavě a sečteme samostatně koeficienty řádů v aritmetice modulo 2.

Definice 2. Nim součet $(x_m x_{m-1} \dots x_1 x_0)_2$ a $(y_m y_{m-1} \dots y_1 y_0)_2$ zapišeme

$$(x_m x_{m-1} \dots x_1 x_0)_2 \oplus (y_m y_{m-1} \dots y_1 y_0)_2 = (z_m z_{m-1} \dots z_1 z_0)_2,$$

kde pro každé $0 \leq k \leq m$ je $z_k \equiv x_k + y_k \pmod{2}$, tj. $z_k = 1$, je-li $x_k + y_k = 1$, a $x_k + y_k = 0$ a $z_k = 0$ v ostatních případech.

Uveďme příklad:

$$\begin{array}{r} 13 = 1101_2 \\ \oplus 5 = 101_2 \\ \hline \oplus 13 = 1101_2 \\ \hline 1000_2 = 8 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 13 = 1101_2 \\ \oplus 12 = 1100_2 \\ \oplus 8 = 1000_2 \\ \hline 1001_2 = 9 \end{array}$$

Nim součet je asociativní (tj. $x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$) a komutativní (tj. $x \oplus y = y \oplus x$), protože sčítáme modulo 2. Tedy výraz $x \oplus y \oplus z$ můžeme psát bez závorek. Dále 0 je nulový prvek (protože platí $0 \oplus x = x$) a každé číslo má i opačné ($x \oplus x = 0$). Pro nim součet platí i „krácení“ (je-li $x \oplus y = x \oplus z$, potom $x \oplus x \oplus y = x \oplus x \oplus z$, tedy $y = z$).

Nim součet je možné nalézt v matematice i v jiných podobách: jako logickou spojku „vylučovací nebo \vee “, bitový XOR nebo jako operaci definovanou pro jednotlivé bity tabulkou

\oplus	0	1
0	0	1
1	1	0

Je-li $n = \sum_{i \in A} 2^i$, $m = \sum_{i \in B} 2^i$, $C = A \div B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$, potom také $n \oplus m = \sum_{i \in C} 2^i$. Nim součet se objevuje jako operace sčítání ve vektorovém prostoru $GF[2]$. V počítačových jazycích se označuje také jako „stříška“ \wedge .

Věta 1 (Bouton, 1901). *Pozice NIM* $[x_1, x_2, \dots, x_n]$ *n hromádkové varianty hry NIM je \mathcal{P} pozice, právě když $\bigoplus_{i=1}^n x_i = x_1 \oplus x_2 \oplus \dots \oplus x_n = 0$.*

Důkaz věty vynecháme.

Vítězná strategie je založena na dvojkové soustavě, v každém tahu je třeba zahrát tak, aby se soupeř dostal do nulové pozice, ve které existuje vyhrávající strategie pro druhého hráče. Nulové pozice jsou pozicemi, ve kterých nim součet \oplus na hromádkách je nulový. Po rozkladu počtu kamenů na jednotlivých hromádkách použijeme dvě jednoduchá pravidla: $2^p \oplus 2^p = 0$ a pro $p \neq q$ je $2^p \oplus 2^q = 2^p + 2^q$. Například pro hru v postavení NIM [7, 5, 3] (tři hromádky se 7, 5 a 3 kameny) je rozklad $7 = 2^2 + 2^1 + 2^0$, $5 = 2^2 + 2^0$ a $3 = 2^1 + 2^0$. Nim součet $7 \oplus 5 \oplus 3 = (4+2+1) \oplus (4+1) \oplus (2+1) = (\cancel{4} + \cancel{2} + \cancel{1}) \oplus (\cancel{4} + \cancel{1}) \oplus (\cancel{2} + 1) = 1$ je nenulový, díky tomu existuje vyhrávající strategie pro prvního hráče. Do nulové pozice se dostaneme odebráním jednoho kamene dokonce z libovolné hromádky.

Sprague–Grundyova věta a její aplikace

V nestranné hře je možné definovat dva typy pozic. Pozice \mathcal{P} (předcházející hráč vyhrává) a \mathcal{N} (následující hráč vyhrává, tj. hráč na tahu). Na tomto principu můžeme definovat rekurentní tzv. značkovací algoritmus. Algoritmus vypadá takto:⁸⁾

- (1) Všechny koncové pozice označíme \mathcal{P} .
- (2) Všechny pozice, ze kterých se dostaneme jedním tahem do pozice \mathcal{P} , označíme \mathcal{N} .
- (3) Všechny pozice, ze kterých se dostaneme jedním tahem pouze do pozic \mathcal{N} , označíme \mathcal{P} .
- (4) Pokud nenajdeme novou \mathcal{P} pozici z bodu (3), s označováním skončíme. Jinak pokračujeme bodem (2).

Charakteristika \mathcal{P} a \mathcal{N} pozic ve hrách v normální variantě:

- (1) Všechny koncové pozice jsou \mathcal{P} pozice.
- (2) Z každé \mathcal{N} pozice vede alespoň jeden tah do \mathcal{P} pozice.
- (3) Z každé \mathcal{P} pozice vedou všechny tahy (jsou-li nějaké) do \mathcal{N} pozic.

Například pro hru z úlohy 1 (a) pro $n = 9$ jsou dvě koncové pozice $n_0 = 0$ a $n_1 = 1$,

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
\mathcal{P}/\mathcal{N}	\mathcal{P}	\mathcal{P}	\mathcal{N}	\mathcal{N}	\mathcal{N}	\mathcal{P}	\mathcal{P}	\mathcal{N}	\mathcal{N}	\mathcal{N}	...

⁸⁾ V nestranné kombinatorické hře v normální variantě můžeme vždy postupovat zpětnou indukcí.

Protože pozice 0, 1 jsou \mathcal{P} , pozice 0 + 2, 0 + 3 a 1 + 2, 1 + 3 budou \mathcal{N} . Následující neoznačená pozice je nutně \mathcal{P} , a tedy pozice 5 + 2, 5 + 3 jsou \mathcal{N} . Následující neoznačená pozice je 6, kterou označíme \mathcal{P} , a pozice 6 + 2 a 6 + 3 jsou opět \mathcal{N} , ... Tato metoda nápadně připomíná Eratosthenovo síto. Jak asi dopadne hra pro $n = 17$? Tímto způsobem může být analyzováno mnoho dalších her. Např. hra z úlohy 1 (b) má začátek tabulky:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...
\mathcal{P}/\mathcal{N}	\mathcal{P}	\mathcal{N}	\mathcal{P}	\mathcal{N}	\mathcal{N}	\mathcal{N}	\mathcal{N}	\mathcal{P}	\mathcal{N}	\mathcal{P}	\mathcal{N}	\mathcal{N}	\mathcal{N}	...

V betlových variantách (misère) jde o to donutit protihráče odebrat poslední kámen. Charakteristika \mathcal{P} a \mathcal{N} pozic ve hrách v betlové variantě je podobná, ale ne úplně opačná:

- (1) Všechny koncové pozice jsou \mathcal{N} pozice.
- (2) Z každé \mathcal{P} pozice vedou všechny tahy (jsou-li nějaké) do \mathcal{N} pozic.
- (3) Z každé \mathcal{N} pozice vede alespoň jeden tah do \mathcal{P} pozice.

Grundyovy hodnoty

Pro definování Grundyových hodnot \mathcal{G} musíme nejdříve definovat operátor mex, princip nejmenšího vyloučeného čísla. Označíme mex M nejmenší nezáporné celé číslo, které se v množině M nevyskytuje, tj. $\text{mex } M = \min(\mathbb{N} \setminus M)$. Vezměme třeba množinu $M = \{0, 1, 3, 5\}$, potom $\text{mex } \{0, 1, 3, 5\} = 2$. Jiným příkladem je $\text{mex } \emptyset = 0$, $\text{mex } \{0, 1, 2, 3\} = 4$ nebo $\text{mex } \{0, 1, 2, \dots, (n - 1)\} = n$.

Grundyova hodnota nestranné hry G se označuje $\mathcal{G}(G)$ a je rekurzivně definována takto:

$$\mathcal{G}(G) = \text{mex } \{\mathcal{G}(H); z G \text{ můžeme táhnout do } H\}.$$

V Bachetově hře (příklad 1) spočítáme $\mathcal{G}(0) = 0$, $\mathcal{G}(1) = 1$, $\mathcal{G}(2) = 2$, $\mathcal{G}(3) = 3$, a dále $\mathcal{G}(n) = \text{mex } \{\mathcal{G}(n - 1), \mathcal{G}(n - 2), \mathcal{G}(n - 3), \mathcal{G}(n - 4)\}$, protože můžeme odebírat pouze 1, 2, 3 nebo 4 kameny.

Ve hře NIM je na jedné hromádce Grundyova hodnota jedné hromádky s n kameny $\mathcal{G}(\text{NIM}[n]) = n$, protože můžeme odebrat 1, 2, ..., n , zbudě souvislá řada $n - 1, n - 2, \dots, 0$, která má mex rovný n .

V úloze 1 (b) je $\mathcal{G}(n) = \text{mex } \{\mathcal{G}(n - 1), \mathcal{G}(n - 3), \mathcal{G}(n - 4)\}$. Například $\mathcal{G}(13) = \text{mex } \{\mathcal{G}(12), \mathcal{G}(10), \mathcal{G}(9)\} = \text{mex } \{3, 1, 0\} = 2$ atd.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...
$\mathcal{G}(n)$	0	1	0	1	2	3	2	0	1	0	1	2	3	...

Není těžké si rozmyslet (indukcí), že platí

$$\mathcal{G}(n) = \begin{cases} 0, & \text{je-li } n \equiv 0, 2 \pmod{7} \\ 1, & \text{je-li } n \equiv 1, 3 \pmod{7} \\ 2, & \text{je-li } n \equiv 4, 6 \pmod{7} \\ 3, & \text{je-li } n \equiv 5 \pmod{7}. \end{cases}$$

Následující věta nám dává globální pohled na nestranné hry. Důležitým důsledkem je, že všechny konečné nestranné hry mají nějakou Grundyovu hodnotu.

Věta 2 (Sprague–Grundyova věta). *Každá konečná nestranná hra G je ekvivalentní hře NIM na jedné hromádce.*

Velikost této hromádky odpovídá Grundyově hodnotě pozice. Získáme tím i odpověď na otázku, jak hra dopadne, kdo vyhraje a o kolik.

Pozice P je \mathcal{N} , je-li $\mathcal{G}(P) \neq 0$. Pozice P je \mathcal{P} , je-li $\mathcal{G}(P) = 0$. U her nás bude zvláště zajímat hodnota rovna 0. Tato hodnota odpovídá pozici \mathcal{P} , která je vyhrávající pozicí (pro hráče, který nezačíná). V normální variantě všechny koncové pozice mají Grundyovu hodnotu 0. Je-li $\mathcal{G}(P) \neq 0$, potom existuje tah do pozice P' s Grundyovou hodnotou $\mathcal{G}(P') = 0$. Je-li $\mathcal{G}(P) = 0$, potom všechny tahy (jsou-li takové) z pozice P vedou do pozic P' takových, že jejich Grundyova hodnota je $\mathcal{G}(P') \neq 0$. Tvrzení okamžitě plyne z definice mex.

Disjunktní součet her H, K zapisujeme $H + K$. V této hře si musí hráč vybrat svůj pravidly povolený tah buďto ve hře H , nebo K , přičemž druhá hra zůstane nezměněna (hraje se simultánně). Jeden z důležitých výsledků teorie je, že pro $G = H + K$ platí $\mathcal{G}(G) = \mathcal{G}(H) \oplus \mathcal{G}(K)$. Například hra NIM na třech hromádkách je součtem tří jednohromádkových her NIM. Grundyova hodnota součtu dvou jednohromádkových variant je $\mathcal{G}(\text{NIM}[m, n]) = \mathcal{G}(m) \oplus \mathcal{G}(n)$.

Hledání vyhrávající strategie

Ve hře je důležité dostat se do pozic \mathcal{P} nebo na pozici 0, uvažujeme-li její Grundyovu hodnotu.

Příklad 2. Předpokládejme, že se hraje hra NIM na hromádkách se 6, 7 a 3 kameny. Nejdříve zapíšeme počty kamenů na jednotlivých hromádkách ve dvojkové soustavě. Dostaneme $6 = (110)_2$, $7 = (111)_2$ a $3 = (011)_2$. Potom výsledky zaznamenáme do tabulky:

$$\begin{array}{r|l} & 3 \\ \oplus & 7 \\ \oplus & 6 \\ \hline & 0 \end{array} \begin{array}{l} 0 \ 1 \ 1 \\ 1 \ 1 \ 1 \\ 1 \ 1 \ 0 \\ \hline 0 \ 1 \ 0 \end{array}$$

a po sloupcích sečteme modulo 2. Vyhrávající tah je vytvoření takové konfigurace, aby v každém sloupci byl sudý počet jedniček. Stačí odebrat dva kameny z libovolné hromádky (existují tři tahy).

Úloha 2. Zahrajeme si hru ODEBÍRÁNÍ ČTVERCŮ s nějakou velkou pozicí (např. $n = 100$ nebo 75) a lze odebrat pouze čtvercová čísla 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, ... (viz úloha 1 (e)). Získáme:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...
$\mathcal{N} \setminus \mathcal{P}$	\mathcal{P}	\mathcal{N}	\mathcal{P}	\mathcal{N}	\mathcal{N}	\mathcal{P}	\mathcal{N}	\mathcal{P}	\mathcal{N}	\mathcal{N}	\mathcal{P}	\mathcal{N}	\mathcal{P}	...
$\mathcal{G}(n)$	0	1	0	1	2	0	1	0	1	2	0	1	0	...

$\mathcal{G}(100) = 4$, $\mathcal{G}(75) = 6$. Spočítejte Grundyovu hodnotu pozice [18, 26, 28] a ukažte, že se jedná o \mathcal{N} pozici. Nalezněte první optimální tah.

Řešení: $\mathcal{G}([18, 26, 28]) = 7$, protože $\mathcal{G}([18, 26, 28]) = \mathcal{G}([18]) \oplus \mathcal{G}([26]) \oplus \mathcal{G}([28]) = 1 \oplus 2 \oplus 4 = 7$. Protože Grundyova hodnota je nenulová, jedná se o \mathcal{N} pozici. Stačí odebrat 1 z poslední hromádky, $\mathcal{G}([27]) = 3$ a $1 \oplus 2 = 3$.

Příklad 3. Hraje se podle těchto pravidel: hráč na tahu si vybere jednu hromádku a z ní odebere alespoň jeden kámen. Je však třeba ještě dodržovat tato dvě pravidla: pokud je na hromádce sudý počet kamenů, nelze odebrat celou hromádku. Pokud je na hromádce lichý počet kamenů, může hráč odebrat i celou hromádku.

Pro tuto hru jsou Grundyovy hodnoty definovány takto: v případě lichého počtu $\mathcal{G}(2k - 1) = k$, jinak $\mathcal{G}(2k) = k - 1$. Vyhrávající strategie je analogická jako ve hře NIM. Musíme se ujistit, že jsme v pozici rovné 0. Proto musíme změnit jednu z hromádek tak, aby byl nim součet roven 0. Existují dvě koncové pozice, kdy zůstávají 0 nebo 2 kameny.

Uvažujme např. pozici $H = [16, 18, 13]$. Pro každou hromádku spočítáme její Grundyovu hodnotu podle předcházejících dvou definic. Začíná-li první hráč: Grundyovy hodnoty jsou $\mathcal{G}(16) = \mathcal{G}(2 \cdot 8) = 8 - 1 = 7$, $\mathcal{G}(18) = \mathcal{G}(2 \cdot 9) = 9 - 1 = 8$ a $\mathcal{G}(13) = \mathcal{G}(2 \cdot 7 - 1) = 7$. Nim součet Grundyových hodnot je $7 \oplus 8 \oplus 7 = 8$. Vyhrávající strategie spočívá v odebrání tolika kamenů, aby nim součet byl nula. Chceme tedy, aby Grundyova hodnota byla nula. Když odebereme z prostřední hromádky 15 kamenů, zbudou tam 3, tj. $G(3) = G(2 \cdot 2 - 1) = 2$, což není 0.

Vyhrávající strategie hry Dr. Nim

Hra DR. NIM se hraje takto: Na stole leží několik zápalek (kladné celé číslo). Dva hráči se v tazích střídají, v každém tahu lze odebrat 1, 2 nebo 3 zápalky. Hráč, který odebere poslední zápalku, prohrál.⁹⁾

Tvrzení 2.1. *První hráč vyhraje (má vyhrávající strategii), když počet zápalek n není $4k + 1$ pro žádné celé nezáporné číslo k .*

Důkaz: Strategie je pravidlo, kolik lze odebrat, pokud na stole leží n zápalek. Ukážeme, že je-li $n = 4k + 1$, potom existuje vyhrávající strategie pro II. hráče, která hráči zaručí výhru. (Indukcí.) Indukční hypotéza je pro každé $k \in \mathbb{N}$, je-li $n = 4k + 1$, potom první hráč prohraje, a je-li $n = 4k, 4k + 2, 4k + 3$, vyhraje první hráč. Vyčerpáme všechny logické možnosti. Tvrzení dokážeme silnou indukcí a začneme případem $n = 1$.

První krok: Je-li na hromádce pouze jedna zápalka, začínající hráč prohraje, protože musí odebrat (poslední) zápalku.

Indukční krok silné indukce: Předpokládejme, že tvrzení platí pro 1 až n a ukážeme, že tvrzení platí i pro $n + 1$. Indukční krok se rozpadne na tyto 4 případy:

1. Pro $n + 1 = 4k + 1$ ukážeme, že první (začínající) hráč prohraje. První krok důkazu jsme již provedli. Nyní tedy předpokládejme, že $n + 1 \geq 5$. První hráč může odebrat 1, 2 nebo 3 zápalky. Pokud odebere jednu zápalku, zbývající počet zápalek je $n = 4k$. Díky indukčnímu předpokladu silné indukce hráč, který je na tahu, má z této pozice vyhrávající strategii. Tedy hráč, který zahrál do této pozice, prohraje. Podobně: pokud hráč odebere 2 zápalky, zůstane na stole $4(k - 1) + 3$ zápalek a opět prohraje ze stejného důvodu. Analogicky, pokud odebere 3 zápalky, dostane se hráč do nevýhodné pozice a nemůže vyhrát.

⁹⁾Hra s odečítáním v betlové variantě.

2. Pro $n + 1 = 4k$ ukážeme, že první hráč vyhraje. Pokud hráč na tahu odebere 3 zápalky, druhý hráč je v pozici $n = 4(k - 1) + 1$ a díky indukčnímu předpokladu silné indukce, prohraje.

3. Pro $n + 1 = 4k + 2$ ukážeme, že (opět) první hráč vyhraje. Zde stačí odebrat 1 zápalku. Druhý hráč je v pozici $4k + 1$ a prohraje, jako v předcházejícím případě.

4. Pro $n + 1 = 4k + 3$. Ukážeme, že první hráč vyhraje. Pokud I. hráč odebere 2 zápalky, druhý je v pozici $4k+1$ a prohraje.

n	1	2	3	4	...	$4k$	$4k + 1$	$4k + 2$	$4k + 3$	$4k + 4$	$4k + 5$
	\mathcal{P}	\mathcal{N}	\mathcal{N}	\mathcal{N}	...	\mathcal{N}	\mathcal{P}	\mathcal{N}	\mathcal{N}	\mathcal{N}	\mathcal{P}

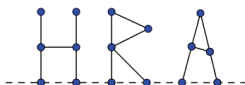
Úloha 3 (PRVOČÍSELNÝ NIM, PIM. Claude E. Shannon (1955)). Uvažujme hru PIM, která se hraje jako obvyklý NIM s tím omezením, že lze odebírat pouze prvočíselný počet kamenů nebo jeden kámen.

- (a) Nalezněte Grundyovy hodnoty $\mathcal{G}(n)$ pro hromádky s $0 < n \leq 11$ kameny.
- (b) Nalezené výsledky zobecněte pro libovolné n .
- (c) Nalezenou hypotézu dokažte!
- (d) Analyzujte postavení PIM[7, 19, 23, 56] a najděte optimální první tah.

Úloha 4 (Hra ODEBER A ROZDĚL). Na hromádce je 100 kamenů. Tah spočívá v odebrání 3 nebo 5 kamenů a následném rozdělení hromádky na dvě (v jiné variantě na dvě různé hromádky). Hráč, který nemůže táhnout, prohrál.

Zelený Hackenbush

Pravidla: ZELENÝ HACKENBUSH¹⁰⁾ se hraje na obrázku jako je HRA.



Dva hráči střídavě odebírají slámky (hrany) z obrázku (grafu). Stébla (neboli brčka) nebo smyčky¹¹⁾ jsou navzájem spojeny svými koncovými

¹⁰⁾ John H. Conway, 1937–2020.

¹¹⁾ Smyčka je hrana vedoucí z uzlu do něj samotného.

uzly (koleno) a se základnou. Hráč při svém tahu odebere jednu slámku a všechny ostatní, které přestanou souviset se základnou. Základna se označuje čárkovaně. Hráč, který odebere poslední slámku (nebo smyčku), vyhraje.

ZELENÝ HACKENBUSH je příkladem nestranné hry (oba hráči mají stejné možnosti tahů) a přirozeně hodnotu každého obrázku umíme rekurzivně spočítat pomocí Grundyovy posloupnosti. Podle Sprague–Grundyovy věty má ZELENÝ HACKENBUSH za své hodnoty Grundyovy hodnoty. Ukážeme techniky, jak zredukovat některé komplikované pozice na hru NIM, kterou již umíme řešit. Podrobnosti, včetně důkazů, čtenář najde v [3, 5, 6].

Některé pozice spočítáme pomocí následujících principů.

Princip bambusových stonků

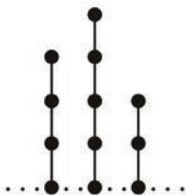
Obrázky nebudou obsahovat kružnice ani větvení, pouze stonky bambusu. Hraje se tak, že se odebere slámka a všechny nad ní. Hraje se v normální variantě.

Jednoduchý příklad pozice ZELENÉHO HACKENBUSHE je jeden bambusový stoněk délky n , ze kterého může být odebráno $1, 2, \dots, n$ slámek (od vrcholu) a na zemi zůstane bambusový stoněk délky $n - 1, n - 2, \dots, 0$. Jistě nejlepším tahem je odebrat nejspodnější stéblo související s kořenem (oba hráči chtějí odebrat poslední slámku).

Budeme-li hrát na více bambusových stéblech současně, tahem v jedné komponentě neovlivníme ostatní a dostaneme stéblo kratší délky. Dvě stébla stejné délky (počet slámek) mají nulový součet (pozice \mathcal{P}); hraje-li se na dvou různých, potom se jedná o pozici \mathcal{N} , stačí počet dorovnat a použít předcházející strategii. Situaci se třemi (a více) stonky spočítáme pomocí nim součtu.

Z toho ale plyne, že bambusový stoněk (jeho Grundyova hodnota) se hraje jako jednohromádková hra $\text{NIM}[n]$. Na několika bambusových stoncích se hraje stejně jako ve hře NIM na několika hromádkách. Takže okamžitě známe výsledek hry.

Příklad 4. Abychom našli vyhrávající strategii, vezmeme jednoduchou situaci ve tvaru bambusových stonků (jako na obr. 1). Tyto stonky mohou být porovnány s hromádkami kamenů. Jeden stoněk odpovídá hře $\text{NIM}[n]$, která má hodnotu n , kde n je počet slámek ve stonku (délka stonku). Od této chvíle můžeme také aplikovat vyhrávající strategii jako ve hře NIM.



Obr. 1

Chceme-li nalézt vyhrávající strategii ve hře se třemi stonky délky 3, 4 a 2, uvažujme konfiguraci NIM [3, 4, 2], tedy tři hromádky se 3, 4 a 2 kameny. Spočítáme jejich nim součet:

$$3 \oplus 4 \oplus 2 = (011)_2 \oplus (100)_2 \oplus (010)_2 = 5.$$

Pozice je nenulová, jedná se tedy o \mathcal{N} pozici (první hráč vyhrává). Chceme-li vyhrát, musíme zahrát do \mathcal{P} pozice (předcházející hráč vyhrává). Upravíme tedy nim součet tak, aby se rovnal nule. Stačí odebrat z druhé hromádky tři kameny. Stejný princip lze aplikovat na bambusové stonky. Stačí odebrat z prostředního stonku druhou slámku odspodu, tj. odebereme tím pádem tři vrchní slámky.

Bude-li se hrát na třech bambusových stoncích délek 3, 4, 5, hra bude ekvivalentní hře NIM [3, 4, 5] a její hodnota je

$$3 \oplus 4 \oplus 5 = (\mathcal{I} + 2) \oplus (\mathcal{A}) \oplus (\mathcal{A} + \mathcal{I}) = 2$$

(\mathcal{N} pozice). To znamená, že pozice $3 \oplus 4 \oplus 5 \oplus 2$ je \mathcal{P} pozice, a je tedy nevýhodné začínat.

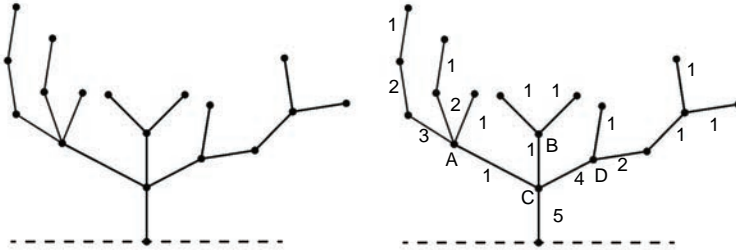
Princip stromů

Nim součet lze s výhodou použít pro řešení stromů.

Bambusový stoněk nahradíme stromem (později řadou stromů, čemuž bude odpovídat disjunktní součet her). Strom je souvislý kořenový graf bez kružnic spojen se zemí jedním uzlem. Začneme tím, že označíme větve jejich Grundyovou hodnotou (tj. délkou stonku), které jsou připojeny ke grafu, od vrcholu (listí). Pokud se v jednom uzlu setká několik stonků, spočítáme jejich nim součet a nahradíme je stonkem této délky, tj. délkou $\mathcal{G}(P + Q) = \mathcal{G}(P) \oplus \mathcal{G}(Q)$. Tento proces rekurzivně opakujeme, dokud nezměníme graf na jediný stoněk bambusu. Tento stoněk představuje Grundyovu hodnotu celého grafu.

Máme-li dva (a více) kořenové stromy (les), lze kořeny ztotožnit (vznikne keř), ale hodnota hry zůstane nezměněna.

Příklad 5.



Hra na obrázku má Grundyovu hodnotu rovnou 5. Například Grundyova hodnota $A = \mathcal{G}(3) \oplus \mathcal{G}(2) \oplus \mathcal{G}(1)$, $D = \mathcal{G}(1) \oplus \mathcal{G}(2)$ a hodnota stébla pod C a tím i celého obrázku je $1 + (\mathcal{G}(1) \oplus \mathcal{G}(1) \oplus \mathcal{G}(4))$. Máme-li totiž situaci, že na jednu slámku je „navěšena“ hra G , potom výsledný graf (strom) má Grundyovu hodnotu $1 + \mathcal{G}(G)$. Důkaz indukci by byl přes počet hran grafu G .

Princip fúze

K výpočtům hodnot některých složitějších konfigurací nám pomůže *princip fúze*. Nebudeme pracovat pouze se stromy, ale také s kružnicemi, které mohou být spojeny se základnou. Naším cílem bude zjednodušit tyto konfigurace, aby vytvořily stromy, které převedeme na bambusové stonky a dopočítáme podle strategie ve hře NIM.

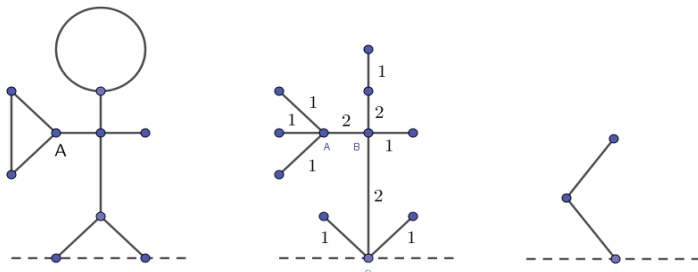


Tyto kružnice můžeme analyzovat takto:

1. Základna odpovídá jednomu uzlu (koleno). To znamená, že všechny uzly na základně se mohou ztotožnit.
2. Každá slámka obvodu se může převést na smyčku.
3. Každá smyčka může být nahrazena slámkou.
4. Součet slámek vedle sebe odpovídá nim součtu.

Tedy  má Grundyovu hodnotu 0 (ve hře je nevýhodné začínat).

Příklad 6.



Hodnota chlapce vlevo je nenulová, a tedy existuje vyhrávající strategie pro I. hráče. Stačí odebrat trup a všechny slámky nad. Hodnota trojúhelníku A je $1 \oplus 1 \oplus 1 = 1$ a může být zaměněna za jednu hranu. Grundyova hodnota chlapce je 2. První a třetí hra má součet 0, tj. jedná se o \mathcal{P} pozici. Naleznete optimální obranu druhého hráče?

Návod jak vyhrát HACKENBUSH (pokud můžeme): udělejte tah takový, aby výsledný obrázek byl ekvivalentní součtu stébel délek, který má nim součet roven 0. Pokud takový tah neexistuje, prohrajete, pokud váš soupeř použije tuto strategii.

Bonus: Varianty hry Zelený Hackenbush

Vyšetřovali jsme nestrannou hru ZELENÝ HACKENBUSH. Existuje několik dalších zajímavých partyzánských verzí této hry:

1. MODRO-ČERVENÝ HACKENBUSH, ve kterém jsou slámky modré nebo červené. Hráči je přiřazena barva a může odebírat pouze slámky své barvy.
2. MODRO-ČERVENÝ-ZELENÝ HACKENBUSH. V této variantě mohou být slámky tří barev. Každému hráči je přiřazena červená nebo modrá barva a zelená, která patří oběma hráčům. Hráči mohou odebírat slámky své barvy nebo zelené slámky.

Poděkování: Děkuji paní Mgr. Haně Rajdlové za obětavou pomoc při zpracování rukopisu.

Literatura

- [1] Apfelbeck, A.: *Kongruence*. Škola mladých matematiků, roč. 21, ÚV Matematické olympiády, Mladá fronta, Praha, 1968, dostupné z: <https://dml.cz/handle/10338.dmlcz/403650>.
- [2] Albert, M., Nowakowski, R., Wolfe, D.: *Lessons in play: An introduction to combinatorial game theory*. A. K. Peters, Ltd./CRC Press, Natick, MA, 2007.
- [3] Berlekamp, E. R., Conway, J. H., Guy, R. K.: *Winning Ways for your Mathematical Plays*. 2nd ed., vol. 1–4, A. K. Peters, Ltd./CRC Press, Natick, MA, 2001–2004.
- [4] Cihlář, J., Vopravil, V.: *Hry a čísla (On Games and Numbers)*. PF UJEP, Ústí nad Labem, 1983, 1995.
- [5] Conway, J. H.: *On Numbers and Games*. 2nd ed., A. K. Peters, Ltd./CRC Press, Natick, MA, 2000.
- [6] Ferguson, T. S.: *Game Theory, Impartial Combinatorial Games*. UCLA lecture, https://www.math.ucla.edu/~tom/Game_Theory/comb.pdf.
- [7] Vopravil, V., Porkert, J.: Hry a strategie. *Rozhledy matematicko-fyzikální*, roč. 70 (1992), s. 52–57.
- [8] Vopravil, V.: Nestranné hry. *Učitel matematiky*, roč. 26 (2018), č. 2.

Vědecké zásady krájení dortu

Eduard Šubert, Praha

Nemuselo by se zdát, že taková obyčejná věc jako krájení koláče může něco získat z matematické studie, ale je tomu tak. Již v roce 1906 byl v časopise *Nature* publikován dopis od jistého F. G., který popisuje metodu na krájení koláče, která je významně lepší než klasický výřez výseče, alespoň v jistých ohledech [2].

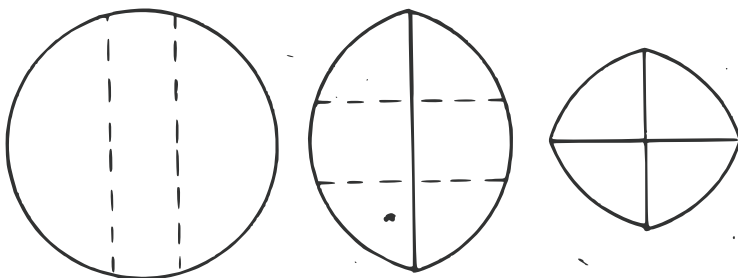
Autorem dopisu, F. G., je dokonce sám Sir Francis Galton, anglický statistik, matematik, psycholog, antropolog a mnoho dalšího. Údajně se bez úspěchu snažil nalézt metodu pro přípravu perfektního šálku čaje. Uspěl alespoň u krájení koláče, který se samozřejmě k čaji hodí. Abyste se mohli naučit lépe krájet koláč přímo od mistra, přikládám jeho dopis v originálním znění v angličtině a svůj vlastní český překlad.

LETTERS TO THE EDITOR.

[The Editor does not hold himself responsible for opinions expressed by his correspondents. Neither can he undertake to return, or to correspond with the writers of, rejected manuscripts intended for this or any other part of NATURE. No notice is taken of anonymous communications.]

Cutting a Round Cake on Scientific Principles.

CHRISTMAS suggests cakes, and these the wish on my part to describe a method of cutting them that I have recently devised to my own amusement and satisfaction. The problem to be solved was, "given a round tea-cake of some 5 inches across, and two persons of moderate appetite to eat it, in what way should it be cut so as to leave a minimum of exposed surface to become dry?" The ordinary method of cutting out a wedge is very faulty in this respect. The results to be aimed at are so to cut the cake that the remaining portions shall fit together. Consequently the chords (or the arcs) of the circumferences



Broken straight lines show intended cuts. Ordinary straight lines show the cuts that have been made. The segments are kept in apposition by a common elastic band that encloses the whole. In the above figures about one-third of the area of the original disc is removed by each of the two successive operations.

of these portions must be equal. The direction of the first two vertical planes of section is unimportant; they may be parallel, as in the first figure, or they may enclose a wedge. The cuts shown on the figures represent those made with the intention of letting the cake last for three days, each successive operation having removed about one-third of the area of the original disc. A common india-rubber band embraces the whole and keeps its segments together.

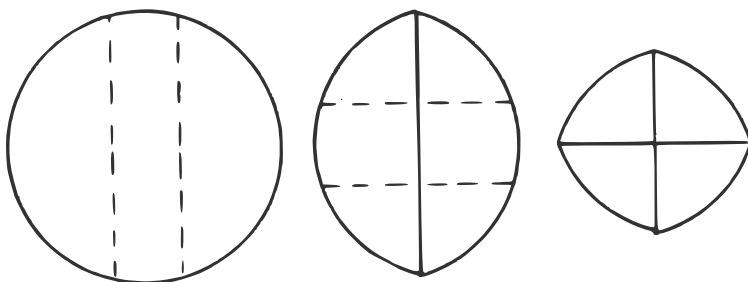
F. G.

Dopisy Editorovi

[Editor nemůže nést zodpovědnost za názory vyjádřené korespondenty. Rovněž nemůže vrátet zamítnuté rukopisy určené pro tuto nebo i jinou část časopisu Nature ani odpovídat jejich autorům. Na anonymní komunikaci není brán zřetel.]

Vědecké zásady krájení kulatých koláčů

Vánoce znamenají koláče, a proto Vám posílám popis metody na jejich krájení, kterou jsem nedávno sám vymyslel pro své potěšení a uspokojení. Problém, který jsem řešil, zní: „Nechť máme kulatý koláč, asi pět palců v průměru, a k jeho snědení dva středně hladové jedlíky. Jakým způsobem bychom měli koláč nakrájet, aby zůstalo co nejméně odhaleného povrchu, který oschne?“ Klasický způsob vykrojení výseče je v tomto ohledu velmi nedostatečný. Náš cíl je ukrojit porci koláče tak, aby na sebe zbylé části pasovaly. Z toho plyne, že tětivy (nebo oblouky) na obvodech těchto částí si musí být rovny.



Obr. 8: Čárkované přímé čáry ukazují chystané řezy. Plné přímé čáry ukazují již vykonané řezy. Zbylé části drží pohromadě obyčejná gumička natažená okolo celku. V obrázcích výše každá ze dvou operací odebere asi jednu třetinu obsahu původního kruhu.

Směr prvních dvou svislých řezných rovin není důležitý; mohou být rovnoběžné jako na obrázku nebo mohou vyříznout klín. Řezy ukázané na obrázcích jsou navrženy tak, aby koláč vydržel tři dny, každá operace postupně odebere z koláče přibližně jednu třetinu obsahu původního kruhu. Obyčejná gumička natažená okolo celku udrží části pohromadě.

Pokud byste si přáli na vlastní oči vidět krájení dortu v souladu s touto metodou, podívejte se na video na mém YouTube kanále „Vědecké zásady krájení dortu“ [1].

Literatura

- [1] Šubert, E.: *Vědecké zásady krájení dortu*. Na ubrousek, 2017. <https://eduardsubert.com/2017/01/01/vedecke-zasady-krajeni-dortu>
- [2] G., F.: Cutting a round cake on scientific principles. *Nature*, roč. 75 (1906), s. 173–173, <http://galton.org/essays/1900-1911/galton-1906-cake.pdf>.

Řešení kvadratické rovnice odstartovalo projekt CSE-Lab

Kamil Mudruňka

Pokračujeme v představování úspěšných studentů a studentek, kteří mohou být ostatním inspirací, co vše lze podnikat, když máte zájem o matematiku, fyziku či informatiku. Kamil Mudruňka se skromností sobě vlastní ve svém medailonku řadu z úspěchů nezmiňuje, proto bychom zde rádi zmínili, že se svým projektem CSE-Lab objel celý svět: Vernadského soutěž v Moskvě 2015, Beijing Youth Science Creation Competition v Číně 2017 (viz fotografie), I-SWEEEP v Houstonu 2017, Intel ISEF v Pittsburghu 2018. V České republice se dostal na stupně vítězů soutěže Expo Science Amavet 2017 a SOČ 2018 a také se stal vítězem kategorie Ingenium Českých hlaviček 2017.

Jmenuji se Kamil Mudruňka, je mi 21 let a velmi mě zajímají matematika, fyzika a počítače. Už od malička mě přitahovaly přírodní vědy a řešení logických hádanek a problémů, ale hlavní zájem o samotnou matematiku se ve mně probudil až ve čtvrtém ročníku osmiletého gymnázia. V té době jsme ve škole probírali kvadratickou rovnici a prakticky všechny úlohy spočívaly v mechanickém dosazování čísel do známého vzorce. A tak mě napadlo si s využitím tehdy ještě skutečně elementárních znalostí programování napsat na řešení jednoduchý program, který by dělal mechanickou práci za mě. Nicméně řešením kvadratické rovnice v oboru reálných čísel to neskončilo.

Při psaní programu a hledání informací na internetu jsem narazil na komplexní čísla a vzorce na řešení polynomiálních rovnic třetího a čtvrtého stupně. Právě toto byl ten moment, kdy mě matematika opravdu

fascinovala. Úkolem najednou bylo něco úplně abstraktního, vyřešit rovnici. Už nešlo o počítání pomerančů v obchodě, obsahů a obvodů rovinných obrazců či jiné vyložené praktické záležitosti. Navíc řešením mohlo být i imaginární číslo, které vůbec nemuselo popisovat žádný v přírodě smysluplný a představitelný výsledek. Možná právě proto mi to tenkrát přišlo tak zajímavé.

Hnán zvědavostí jsem začal sám prozkoumávat nejznámější oblasti matematiky, program jsem brzy rozšířil o jednoduché vykreslování grafů funkcí, počítání s maticemi, numerické a později dokonce analytické integrování a derivování, řešení různých typů rovnic a další užitečné funkce. Dalo by se říct, že jsem se díky matematice zároveň naučil i programovat. Právě implementace řešení jednotlivých úloh a následné hraní si se vstupními daty a pozorování změn řešení mě na všem bavily nejvíce.

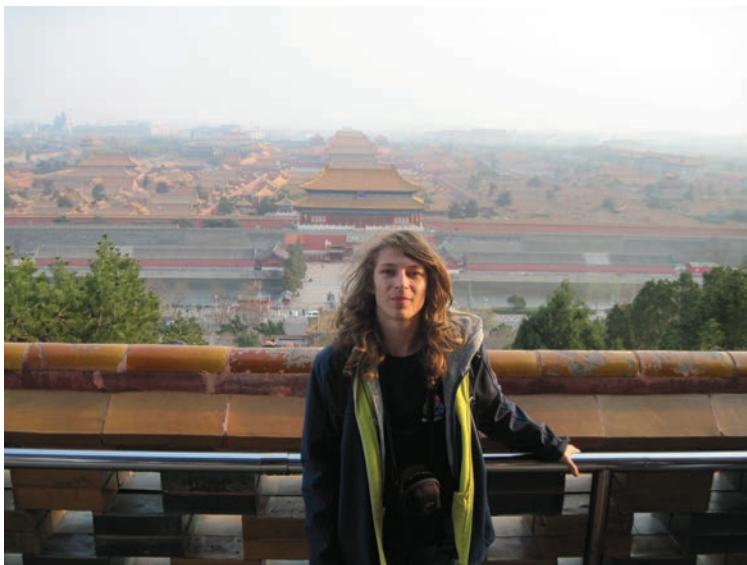
Zároveň jsem svůj program přihlásil do soutěže Festival vědy a techniky pro děti a mládež v Pardubickém kraji, která je předkolem Science Expo Amavet. Zde jsem soutěžil už o tři roky dříve s jednoduchým fyzikálním projektem a velmi mě tehdy zaujaly programátorské projekty ostatních účastníků. A právě takový vlastní program jsem teď sám měl, takže jsem to zkusil. A k mému překvapení projekt v tehdy ještě juniorské kategorii uspěl.

Motivován předchozími úspěchy jsem tak následující 4 roky strávil nepřetržitým vývojem a rozšiřováním celého projektu a objevováním nové matematiky a fyziky nad rámec středoškolského studia. Celkově jsem se díky své práci podíval na několik mezinárodních soutěží (Rusko, Čína, USA), ze kterých jsem si odnesl nezapomenutelné zážitky, nějaká ta ocenění, obrovské množství poznatků a spoustu nových přátel z celého světa. Když bych měl vybrat ze všech zážitků ten pro mě největší, pak by to byla rozhodně týdenní BYSCC v Pekingu. Díky výborné organizaci jsme kromě samotného soutěžení a prezentace našich prací veřejnosti zároveň mohli strávit několik dní poznáváním čínské kultury a památek společně s našimi novými kamarádkami, se kterými jsem stále v kontaktu, i když nás dělí skoro polovina planety. Samozřejmě i z ostatních soutěží si nesu bohaté vzpomínky, a to jak ze samotného soutěžení, tak i z cestování a opětovného setkávání se s přáteli z předchozích soutěží.

Matematika se pro mě stala prakticky každodenní zábavou, která ale zároveň představovala něco užitečného a smysluplného. Veškerá moje práce rozhodně stála zato. Naučil jsem se nepřeborné množství nových věcí, kromě čistě matematických a fyzikálních záležitostí bych určitě zmínil programování a angličtinu, která se stala při hledání a studiu z in-

MATEMATIKA

ternetu naprosto nezbytnou. Zároveň jsem získal množství kontaktů a jasný výhled do budoucnosti.



V současnosti studuji matematickou fyziku na FJFI ČVUT v Praze a můj zájem o matematiku se s příchodem exaktního a striktního vysokoškolského přístupu rozhodně ještě prohloubil. Další vylepšování a hraní si s mým softwarem pro mě nadále zůstává velkým koníčkem. Věřím, že mě matematika a fyzika budou provázet po celý život a zůstanou mým hlavním zaměřením.

* * * * *

Neil Alden Armstrong

Potlačíš v sobě doteky strachu
a nikdy neztratíš naději.
Jenom tak můžeš v měsíčním prachu
otisknout svoji šlápěji!

Emil Calda, Recese poeticko-(ne)vědecké. Praha: MatfyzPress, 2018.

Pod jakým úhlem a z jaké výšky lze dostříknout nejdále

Pavel Pokorný, VŠCHT Praha

Ukážeme, jak hledáním extrému funkce dvou reálných proměnných lze vyřešit praktickou fyzikální úlohu.

V předchozím článku [1] jsme se zabývali otázkou, v jaké výšce má být dírka ve svislé stěně nádrže, aby voda stříkající touto dírkou ve vodorovném směru dopadla co nejdále (při neměnné výšce hladiny). A dospěli jsme k závěru, že dírka má být v polovině výšky hladiny nad podlahou a voda potom dostříkne do vzdálenosti rovné výšce hladiny.

Uvažujme nyní obecnější úlohu, kdy máme možnost nastavit dvě nezávislé veličiny: výšku dírky nad podlahou a také směr, kterým voda stříká ven z nádrže.

Uvažujme tedy opět vodorovnou podlahu a na ní nádrž, která je do výšky H naplněna vodou, viz obr. 1. Nádrž má svislou stěnu, ve které vytvoříme malou díрку ve výšce h . Tuto díрку opatříme krátkou trubičkou, která zajistí, že voda stříká ve směru, který svírá s vodorovným směrem úhel α . Tento úhel α měříme tak, že záporné hodnoty odpovídají směru dolů, nulová hodnota vodorovnému směru a kladné hodnoty odpovídají směru nahoru. Krajní hodnoty jsou $\alpha = -\frac{\pi}{2}$ (směr svisle dolů) a $\alpha = \frac{\pi}{2}$ (směr svisle nahoru). Budeme uvažovat hodnoty $0 \leq h \leq H$ a $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Hodnota $h = 0$ by odpovídala dírce zcela dole, hodnota $h = H$ zcela nahoře u hladiny.

Položme si otázku: Jak vysoko má být tato dírka a jakým směrem má voda stříkat z trubičky, aby voda dostříkla na podlahu co nejdále, předpokládáme-li, že hladina je stále stejně vysoko?

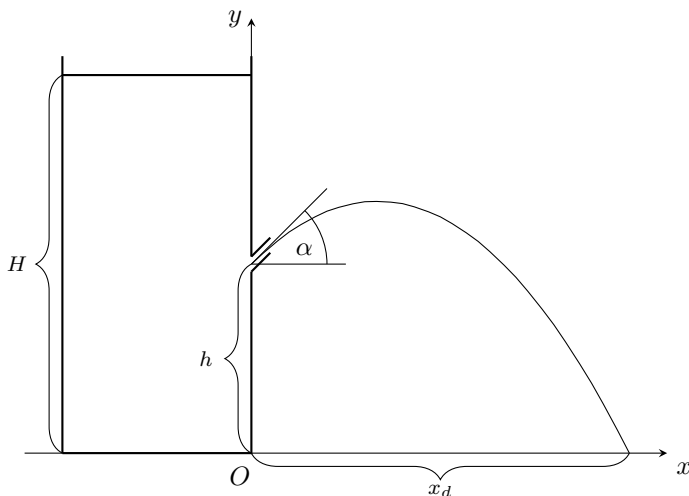
Na základě Bernoulliovy rovnice (a za předpokladu, že v nádrži se voda nepohybuje, což lze, pokud je dírka velmi malá), můžeme pro element vody o hmotnosti m psát

$$mg(H - h) = \frac{1}{2}mv^2,$$

tedy

$$v = \sqrt{2g(H - h)},$$

kde v je velikost rychlosti vody stříkající z trubičky a g je velikost tíhového zrychlení.



Obr. 1: Nádrž s vodou, s dírkou v pravé stěně, kde voda vytéká ven ve směru určeném malou trubičkou

Element vody koná pohyb, který si můžeme představit jako složený z rovnoměrného pohybu ve vodorovném směru s počáteční polohou $x = 0$ a rychlostí $v \cos \alpha$ a z rovnoměrně zrychleného pohybu ve svislém směru dolů se zrychlením o velikosti g , s počáteční polohou $y = h$ a počáteční rychlostí $v \sin \alpha$.

Element vody bude mít tedy v čase t souřadnice

$$x = tv \cos \alpha$$

a

$$y = h + tv \sin \alpha - \frac{1}{2}gt^2.$$

Element vody, který dopadne na podlahu, má $y = 0$. Z této podmínky,

$$h + tv \sin \alpha - \frac{1}{2}gt^2 = 0,$$

určíme čas dopadu (vyřešením této kvadratické rovnice, přičemž vez-

meme jen kladné řešení, které je jediné fyzikálně možné)

$$t_d = \left(v \sin \alpha + \sqrt{v^2 \sin^2 \alpha + 2gh} \right) / g.$$

Souřadnice (vzdálenost) místa dopadu pak je

$$x_d = v \cos \alpha t_d = v \cos \alpha \left(v \sin \alpha + \sqrt{v^2 \sin^2 \alpha + 2gh} \right) / g.$$

Použitím dříve odvozeného $v = \sqrt{2g(H-h)}$ a po úpravě dostaneme

$$\frac{x_d}{2H} = \sqrt{1 - \frac{h}{H}} \cos \alpha \left(\sqrt{1 - \frac{h}{H}} \sin \alpha + \sqrt{\left(1 - \frac{h}{H}\right) \sin^2 \alpha + \frac{h}{H}} \right).$$

Výrazem $2H$ dělíme, abychom na pravé straně dostali jednodušší výraz.

Nyní se nabízí zavést substituci (jednoduše označit opakující se výraz)

$$b = \sqrt{1 - \frac{h}{H}},$$

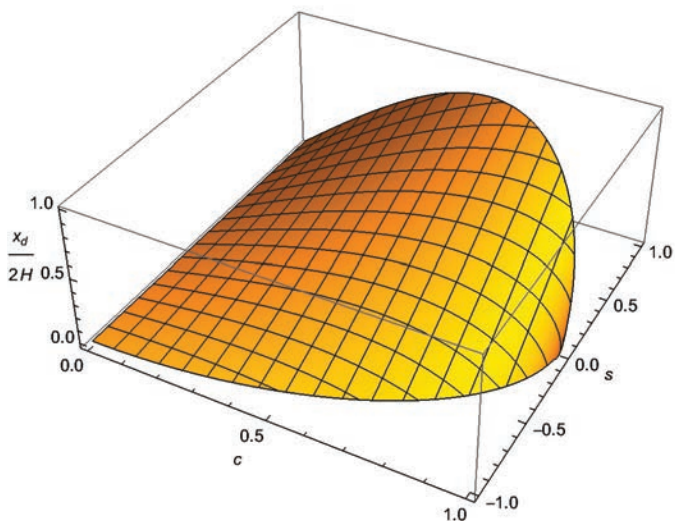
protože potom dostaneme (po použití vztahu $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$)

$$\frac{x_d}{2H} = b \cos \alpha \left(b \sin \alpha + \sqrt{1 - b^2 \cos^2 \alpha} \right).$$

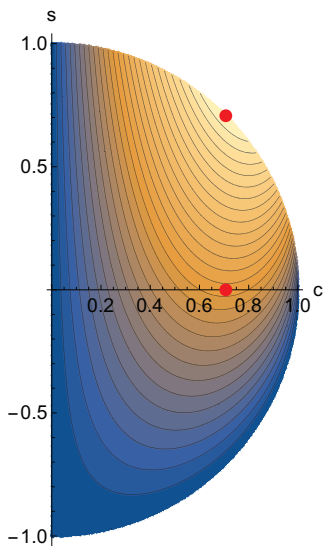
My hledáme maximum tohoto výrazu, který závisí na dvou proměnných: b a α . Z podmínky $0 \leq h \leq H$ plyne podmínka $0 \leq b \leq 1$.

Nyní se nabízí zavést další substitute: $c = b \cos \alpha$ a $s = b \sin \alpha$. Proměnné c a s můžeme chápat jako kartézské souřadnice, proměnné b a α jako polární souřadnice (nejsou to ale přímo souřadnice bodů, kam dopadá voda apod.). Protože $c^2 + s^2 = b^2 \leq 1$, hledáme maximum x_d za podmínek $c^2 + s^2 \leq 1$ a $c > 0$. Tedy hledáme maximum funkce dvou reálných proměnných na půlkruhu. Grafem této funkce je dvourozměrná plocha v trojrozměrném prostoru, viz obr. 2.

Hodnoty této funkce lze znázornit pomocí vrstevnic (podobně jako se znázorňuje nadmořská výška na mapě). Vrstevnice je zde křivka, která spojuje místa se stejnou funkční hodnotou. Pro naši funkci jsou vrstevnice zobrazeny na obr. 3.



Obr. 2: Graf funkce dvou proměnných, pro kterou hledáme maximum. Obrázek ukazuje, že maximum nastává na okraji



Obr. 3: Vrstevnice funkce, jejíž maximum hledáme, ukazují, že extrém nenastává uvnitř, ale na okraji dané oblasti

Vrstevnice ukazují, že maximum nenastává uvnitř uvažované oblasti, ale na kraji, kde $b = 1$ a $\alpha > 0$. Za těchto podmínek se nám uvažovaná funkce zjednoduší na tvar

$$\frac{x_d}{2H} = \sin 2\alpha.$$

Maximum x_d tedy nastává, když $b = 1$ a $\alpha = \frac{\pi}{4}$. Na obr. 3 je tento bod o souřadnicích $c = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $s = \frac{\sqrt{2}}{2}$ vyznačen horním červeným puntíkem na okraji studované oblasti. Z podmínky $b = 1$ plyne $h = 0$. Maximální hodnota je pak

$$x_d = 2H.$$

A co značí ten dolní červený puntík o souřadnicích $c = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $s = 0$? Tento bod odpovídá maximu dostřiku, pokud uvažujeme pouze vodorovnou polohu trubičky, když voda stříká z nádrže ve vodorovném směru, tedy $\alpha = 0$. Tuto úlohu jsme řešili v předchozím článku [1]. Tam jsme dospěli k závěru, že dostříkneme nejdále, pokud dírka bude v polovině výšky hladiny, tedy $h = \frac{H}{2}$. Pak bude $b = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $c = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $s = 0$.

Na tomto příkladu je vidět, jak užitečné vrstevnice jsou. Dnes si lze vrstevnice i pro složité funkce nakreslit rychle a snadno na počítači. Užitečným softwarovým nástrojem je např. počítačový algebraický systém *Mathematica* (en.wikipedia.org/wiki/Wolfram_Mathematica) – k přípravě obr. 3 jsme použili příkaz `ContourPlot` (<https://reference.wolfram.com/language/ref/ContourPlot.html>).

Závěr: Bude-li dírka ve stěně dole u podlahy (tj. $h = 0$) a bude-li voda stříkat šikmo vzhůru pod úhlem $\alpha = 45^\circ$, pak voda dostříkne nejdále, a to do vzdálenosti $x_d = 2H$.

Poděkování

Za inspiraci k této úvaze jsem vděčný svému příteli Tomáši Mouchovi.

Literatura

- [1] Pokorný, P.: Jak dostříknout co nejdále. *Rozhledy matematicko-fyzikální*, roč. 95 (2020), č. 1, s. 50–51.

Vznik a složení zemské atmosféry – fyzika v širších souvislostech

Jan Bednář, Jaroslav Kopáček, Michal Žák
Katedra fyziky atmosféry MFF UK

Na začátku letošního roku vyšlo v nakladatelství Karolinum aktualizované a podstatně rozšířené vydání knihy *Jak vzniká počasí* [1]. Čtenář se v knize může seznámit s ději v atmosféře, které nejvíce ovlivňují formování počasí. Dozví se mimo jiné o vzniku oblačné elektřiny, o elektrických výbojích v atmosféře, blescích, struktuře bouřkových oblaků, tornád a dalších souvisejících úkazech. Se svolením autorů a nakladatelství vám přinášíme ukázkou z této knihy. Text byl pro potřeby tohoto článku mírně upraven.

Vznik zemské atmosféry

Atmosféra Země, na jejímž spodním okraji žijeme, je v tomto článku hlavním předmětem našeho zájmu. Děje, které v ní probíhají, podmiňují i to, čemu říkáme počasí. Kdyby byl fyzikální stav atmosféry v každém místě a ve všech časech stejný, slovo „počasí“ by se v našem jazyce nevykytovalo. Počasím rozumíme stav atmosféry charakterizovaný souhrnem hodnot všech meteorologických prvků a atmosférickými jevy v určitém místě a čase. Počasí se charakterizuje souborem okamžitých nebo krátkodobě průměrovaných hodnot, především teploty vzduchu, tlaku vzduchu, atmosférických srážek, dále oblačností, směrem a rychlostí větru apod. Pro počasí je charakteristická velká časová a prostorová proměnlivost.

Naproti tomu jako klima (podnebí) označujeme dlouhodobý („zprůměrovaný“, charakteristický) režim počasí typický pro určitou oblast nebo místo.

Přes všechnu moderní techniku je lidská činnost na počasí silně závislá a počasím, případně jeho průběhem, může být např. ovlivněn i náš zdravotní stav. Živé organismy, lidé i zvířata, dnes potřebují ke svému životu atmosféru ve složení, jaké právě má, odhlédneme-li pochopitelně od antropogenního znečištění. Rostliny by však v řadě ohledů prospívaly lépe, kdyby obsah CO_2 byl vyšší. Musíme připustit, že kdyby zemská atmosféra prošla jiným vývojem, než tomu bylo ve skutečnosti, probíhal by pravděpodobně i vývoj života na Zemi jinak.

Dnes neznáme do všech podrobností dějiny naší zemské atmosféry od jejích nejranějších počátků. Geologie a paleobiologie však ukazují, že v poslední miliardě let došlo na Zemi k významným změnám klimatu, což zřejmě nezůstalo bez vlivu na vývoj života. Je stále předmětem zkoumání, zda a jak s těmito změnami klimatu souvisely i změny složení atmosféry. Stáří Země se odhaduje na zhruba 5 miliard let. Poněkud spolehlivější údaje o klimatu máme ale jen za poslední miliardu let. Můžeme se domnívat, že zemská atmosféra měla v době svého vzniku podstatně jiné složení než dnes. Rozhodující pochody, které podmínily dnešní složení zemské atmosféry, se pravděpodobně odehrály během prvních 4/5 doby vývoje Země, o kterých toho však prostřednictvím geologických a paleontologických nálezů víme relativně nejméně. Pro řešení naznačeného problému je nutné mít na zřeteli dvě důležité skutečnosti:

1. Výzkum stavby zemského tělesa ukázal, že jeho složky jsou usazeny podle své hustoty, tedy nejtěžší leží nejbliže zemskému středu. To je možné jen tehdy, když látky, které tvoří zemské těleso, byly kdysi tekuté nebo blízké stavu tekutosti, tzn. měly relativně vysokou teplotu.

2. Víme, že mnohé prvky schopné oxidace v průběhu vývoje Země neoxidovaly, i když teplota byla zřejmě vysoká, a jako neoxidované posléze zchladly. To bylo možné jen za předpokladu, že se v dané době nevyskytoval kyslík buď vůbec, nebo jen v nepatrné koncentraci. Odtud samozřejmě vzniká otázka, jak vznikl atmosférický kyslík, který je pro náš život tak důležitý a dnes tvoří přibližně jednu pětinu vzduchu v atmosféře. Ve srovnatelném množství nenalezneme kyslík u žádné další planety v naší sluneční soustavě.

Na problém vzniku Země se nabízí dva pohledy. Na základě prvního z nich měla naše Země s ostatními planetami vzniknout „horkou cestou“ z lůna praslunce, které existovalo již dříve. Praplanety potom kroužily kolem něj jako svítící nebeská tělesa. Během dlouhého období se ochlazovaly, na Zemi se vytvořila kůra a praoceány a nad nimi atmosféra. Dříve než teplota zemského povrchu dosáhla dostatečné nízkých hodnot, musela všechna voda na Zemi existovat ve formě vodní páry.

Ve 40. letech 20. století byla vypracována modernější teorie vzniku Země tzv. „studenou cestou“. Podle ní Země nevznikla z již existujícího Slunce, ale spolu s ním nahromaděním meteorických těles, prachových a plynných oblaků, tj. z původní studené hmoty. Gravitačním smršťováním se měnila potenciální energie na teplo, které spolu s teplem uvolňovaným při radioaktivních přeměnách ohřálo hmotu tvořící Zemi přinejmenším tak silně, že byla možná její sedimentace podle hustoty. Lehké plyny tvo-

řily praatmosféru. Na rychlosti smršťování závisela teplota Země. Kdyby smršťování trvalo příliš dlouho, zůstala by Země chladná, protože vyzařování tepla z jejího povrchu by kompenzovalo pomalou produkci tepla smršťováním.

V minulosti se vysvětloval vznik kyslíku v zemské atmosféře jen činností rostlin. Zelené rostliny odebírají totiž fotosyntézou z atmosféry oxid uhličitý a odevzdávají zpět kyslík. Pro nejstarší období existence zemské atmosféry je však toto vysvětlení vzniku kyslíku v zemské atmosféře zřejmě neuspokojivé.

Koncem 40. let bylo v USA prokázáno analýzou světla noční oblohy, že ve výškách nad 50 km, především v okolí 80 km, probíhá rozklad atmosférické vodní páry ultrafialovým zářením Slunce. Lehký vodík stoupá vzhůru a kyslík difunduje k zemi. Pod výškou 50 km tento proces nemůže probíhat, protože zde se dostáváme pod horní hranici ozonoféry a ozon plně absorbuje ultrafialové záření těch vlnových délek, které vodní páru rozkládá.

Představu o procesech tvoření kyslíku během vývoje zemské atmosféry je možné vyjádřit následovně: V době, kdy ještě žádný kyslík nebyl v atmosféře obsažen, mohlo ultrafialové záření Slunce vcelku nerušeně pronikat až na zemský povrch. V jeho blízkosti existovala vysoká koncentrace vodní páry, která pak byla snadno rozkládána. Rovněž kyslík vzniklý ve větších výškách klesal k zemskému povrchu. Část kyslíku O_2 tvoří pod vlivem ultrafialového záření ozon O_3 . Bezprostředně nad povrchem Země tedy vznikla vrstva ozonu. Proces rozkladu vodní páry ultrafialovým zářením však mohl pokračovat jen nad touto vrstvou. Popsaný děj potom probíhal v poněkud větší výšce. Horní hranice ozonu se tak v průběhu vývoje Země posunovala stále výše, a posunoval se tedy i sledovaný proces vzniku kyslíku. To, co bylo v současnosti zjištěno v oblasti výšek kolem 80 km, je pouze zbytek procesu, který kdysi probíhal u zemského povrchu a vedl ke vzniku prvotního atmosférického kyslíku.

Určité těžkosti této teorie vzniku kyslíku v zemské atmosféře nastanou při kvantitativních odhadech. Kdyby všechn kyslík obsažený v oxidech vznikl fotodisociací vodní páry (tedy rozkladem zmíněným ultrafialovým zářením), pak by muselo být rozloženo $3,8 \cdot 10^4 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-2}$ vody, tedy 38 kg vody nad každým čtverečním centimetrem zemského povrchu. Vzhledem k dnes zjištěné intenzitě rozkladu H_2O mohlo být disociováno (rozloženo) během 4,5 miliardy let jen asi $20 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-2}$ vody. Z těchto číselných hodnot je jasné, že právě zmíněný děj nemohl být jediným zdrojem kyslíku v zemské atmosféře. Asimilace zelených rostlin (jejich výživa včetně foto-

syntézy) a činnost chemicky redukujících bakterií, popř. další děje musely tedy hrát přinejmenším v určitém časovém období svou nezastupitelnou, i když ne dominující roli.

Kdyby ve formující se Zemi nevznikla tak vysoká teplota, aby připouštěla v zemském jádru proces jaderných přeměn, musel by pramateriál Země obsahovat všechny prvky, které dnes nalézáme v pevném zemském tělese, ve vodě oceánů a v atmosféře. Chemické sloučeniny se však měnily. Vodíku bylo v pramateriálu dostatek, a proto dnes připouštíme, že sloučeniny vodíku, nejčastěji s kyslíkem, uhlíkem a dusíkem (vodní pára H_2O , metan CH_4 , čpavek NH_3 atd.) dominovaly ve stavbě atmosféry. Tyto sloučeniny se fotochemickým působením ultrafialového slunečního záření během času přeměnily na CO_2 a na čistý N_2 . Oxid uhličitý je chemicky z největší části spojen s tvorbou hornin. Nelze zanedbat ani pozdější činnost rostlin, které ke své stavbě potřebují uhlík obsažený v CO_2 .

Velké planety, Jupiter, Saturn, Uran a Neptun, v jejichž atmosféře byl spektrální analýzou nalezen plynný čpavek a metan, jsou příliš vzdáleny od Slunce na to, aby zde nastala fotochemická přeměna těchto plynů. Atmosféry těchto planet zůstaly v raném stadiu vývoje. Na Venuši, která je Slunci blíže, mohla naproti tomu proběhnout přeměna čpavku a metanu rychleji než na Zemi.

Shora krátce naznačené pravděpodobné dějiny zemské atmosféry skrývají samozřejmě ještě mnoho otevřených otázek. Např. netečný plyn neon, který má dost velkou hustotu na to, aby neunikal od Země, existuje v atmosféře jen ve stopách, ačkoli jeho množství v kosmu je větší. To by mohlo svědčit o tom, že v nejranějším stadiu byla atmosféra Země tak horká, že se neon odpařil do kosmického prostoru. Pak by byl dnes existující neon zbytkem, který procesy odpařování přežival, přičemž po zchlazení Země se musela vytvořit nová atmosféra.

Nové znalosti o těchto dosud nedořešených otázkách by mohly přinést další poznatky získané kosmickými sondami při výzkumech chemického složení atmosfér planet naší sluneční soustavy a rovněž výzkum v oblasti problematiky tzv. exoplanet. Podrobnější poučení o vývoji atmosféry Země může čtenář nalézt např. v knize [2]. Novější poznatky mají stále daleko do definitivní podoby, berou např. v úvahu i procesy související s dopady meteoritů a dalších kosmických těles na Zemi, roli období silné vulkanické činnosti apod. Skutečnost, že v historii vývoje Země byl obsah oxidu uhličitého v její atmosféře většinou výrazně větší, než je tomu dnes, se považuje za významnou mj. z hlediska vývoje biosféry a klima-

tických změn. Jako souhrnnou literaturu lze čtenáři doporučit příslušnou kapitolu ve druhém díle knihy *Encyclopedia of Atmospheric Sciences* [3].

Dnešní složení atmosféry Země

Uvedli jsme již, že složení toho, čemu říkáme vzduch, nebylo v průběhu geologických dob stálé a že současné složení zemské atmosféry je výsledkem četných pochodů, které dnes do všech podrobností ani neznáme. Definujeme suchý a čistý vzduch jako směs plynů, jejichž zastoupení vyjádřené v objemových procentech uvádíme v tab. 1 [2, 4]

Tabulka 1: Složení vzdušné směsi (zastoupení jednotlivých složek v objemových procentech) odpovídající suché a čisté atmosféře

PLYN	CHEMICKÁ ZNAČKA	% OBJEMU	MOLÁRNÍ HMOTNOST $\text{g}\cdot\text{mol}^{-1}$
Dusík	N_2	78,084	28,0134
Kyslík	O_2	20,9476	31,9988
Argon	Ar	0,934	39,948
Oxid uhličitý	CO_2	0,0314	44,00995
Neon	Ne	0,001818	20,183
Helium	He	0,000524	4,0026
Metan	CH_4	0,0002	16,04303
Krypton	Kr	0,000114	83,80
Vodík	H_2	0,00005	2,01594
Oxid dusný	N_2O	0,00005	44,0128
Xenon	Xe	0,0000087	131,30
Oxid siřičitý	SO_2	0 až 0,0001	64,0628
Ozon	O_3	0 až 0,00007	47,9982
Oxid dusičitý	NO_2	stopy	46,0055
Čpavek	NH_3	stopy	17,03061

V minulosti budila intenzivní zájem otázka, jak se mění chemické složení vzduchu se vzrůstající výškou nad zemským povrchem. Kdyby totiž působily jen tíhová a vztlaková síla, musely by být plyny uspořádány podle molární hmotnosti, tzn. nejtěžší plyn (s největší hustotou) dole,

zatímco nejlhčí vodík v největších výškách atmosféry. Avšak turbulence spojená se všeobecným pohybem vzduchu, vertikální pohyby velkého i malého měřítka a další efekty způsobují vertikální promíchávání vzduchu. Máme-li na mysli suchou a čistou atmosféru, ukázala měření na nejvyšších horách, že neexistují žádné podstatnější změny v chemickém složení vzduchu ve srovnání se vzduchem v nížinných oblastech. Také vzorky vzduchu odebrané při balonových výstupech nevykázaly žádné změny s výškou. V pozdější době byly prováděny experimenty pomocí raket, které ukázaly, že ani ve stratosféře (výšky přibližně 11 až 50 km), ani ve větší části mezoféry (výšky přibližně 50 až 80 km) se nevyskytují žádné podstatné odlišnosti v chemickém složení atmosféry. Určitou výjimku z právě uvedeného však v reálné atmosféře představuje ozon, oxid uhličitý a vodní pára.

V horních partiích mezoféry, nalézající se ve výškách přibližně mezi 50 až 80 km, začíná působit proces, který má podstatný význam pro složení vyšších vrstev atmosféry. Působením krátkovlnného slunečního záření dochází k disociaci molekul i ionizaci molekul a atomů. Zmíněný proces způsobuje v horních vrstvách mezoféry rozklad molekul O_2 na atomární kyslík. V ionosféře, tj. ve výškách přibližně nad 60 km, je disociován také N_2 . S přibývajícím výškou jsou součásti vzduchu stále častěji ionizovány. V horních vrstvách ionosféry potom začínají převládat plyny s menší hustotou a jejich ionty. Belgický geofyzik Marcel Nicolet dospěl k závěru, že ve výškách nad 600 km musí nastoupit vrstva helia. Dospěl k tomu v 60. letech 20. století prostřednictvím pozorování zpomalování pohybu balonového satelitu ECHO. Existence těžších plynů, jako je dusík a kyslík, by dávaly větší pokles hustoty vzduchu s výškou, vodík pak menší. Nad vrstvou helia se potom zemská atmosféra skládá z ionizovaných atomů vodíku a plynule přechází v meziplanetární prostor.

Ozon a oxid uhličitý

Při sledování chemického složení atmosféry se setkáváme s plyny, které jsou v ní ve srovnání např. s dusíkem a kyslíkem obsaženy jen menšinově. Mohli bychom tedy předpokládat, že vzhledem ke své relativně malé koncentraci nemají na vlastnosti atmosférického vzduchu podstatný vliv. Takový předpoklad by však byl zcela chybný, neboť i tyto plyny dalekosáhle ovlivňují pochody v atmosféře a do značné míry určují její chování. Především je to proto, že některé z nich mají schopnost pohlcovat a emitovat (vysílat) záření. Pro děje v zemské atmosféře mají v tomto směru význam především ozon a oxid uhličitý. Neznamená to ovšem, že to jsou

jediné plyny, jejichž vlastnosti je nutné studovat. Existuje celá řada dalších, o nichž pojednává obor atmosférické chemie. Na tomto místě se však stručně zmíníme jen o právě uvedených nejvýznamnějších dvou plynech.



OZON

Ozon představuje formu molekuly kyslíku, která je složena ze tří kyslíkových atomů. Kondenzuje při teplotě $-111,9\text{ }^{\circ}\text{C}$ v tmavomodrou kapalinu a při $-192,7\text{ }^{\circ}\text{C}$ krystalizuje na tmavě fialové krystalky. Ozon je chemicky poměrně nestabilní. V čistém prostředí (vzduchu) a při malých koncentracích se rozkládá poměrně pomalu, ale při teplotách kolem $100\text{ }^{\circ}\text{C}$ nebo za přítomnosti oxidu dusičitého (NO_2), chloru nebo oxidů těžkých kovů se rychle rozkládá na molekulární (O_2) a excitovaný atomární (O) kyslík. Největší množství atmosférického ozonu se nachází ve stratosféře, ve výškách 20 až 50 km nad úrovní moře. Pro oblast těchto výšek se v odborné literatuře obvykle používá název ozonosféra. V na-

ších mírných zeměpisných šířkách se atmosférické hladiny nejbohatší na ozon nalézají ve výškách přibližně 22 až 25 km, nad rovníkem je to však až ve výškách přes 30 km.

Význam stratosférického ozonu spočívá především v jeho schopnosti pohlcovat ultrafialové sluneční záření, což je elektromagnetické vlnění o vlnových délkách do 400 nm a schematicky se rozděluje do tří pásů: UV-C (vlnové délky menší než 280 nm), UV-B (280 až 320 nm) a UV-A (320 až 400 nm). V pásu UV-C je ultrafialové záření prakticky úplně absorbováno již ve vyšších hladinách atmosféry před vstupem shora do ozonosféry, a to fotochemickými reakcemi a excitacemi atomů a molekul zde přítomných řídkých plynů. Pokud jde o absorpci ozonem ve vrstvách ozonosféry, je velmi významná v oblasti pásu UV-B, kde dosahuje v globálním pohledu účinnosti přibližně 77 %. V pásu UV-A je absorpční účinnost již slabší a orientačně dosahuje asi 28 %. Kromě toho ozon ještě slaběji pohlcuje elektromagnetické záření viditelné části spektra (tj. světlo) a několik významnějších absorpčních čar můžeme nalézt i v infračervené části spektra. Silná absorpční schopnost ozonu v pásu UV-B se zejména týká tzv. „biologicky aktivního“ záření, které narušuje některé biologicky zásadně důležité látky (bílkoviny, nukleové kyseliny apod.). Z tohoto hlediska plní tedy ozon funkci filtru, bez jehož existence by současné formy života byly bezpochyby narušeny nebo dokonce zničeny. Kromě toho absorpce záření vede k ohřívání těch vrstev atmosféry, které obsahují ozon, a v podstatě vytváří lokální maximum ve vertikálním průběhu teploty vzduchu v oblasti horní části stratosféry.

Ozon vzniká ve stratosféře pod vlivem ultrafialového záření Slunce z molekulárního kyslíku prostřednictvím následujících reakcí:

- a) $O_2 + h\nu \rightarrow O + O$,
- b) $O_2 + O + M \rightarrow O_3 + M$,

zatímco jeho rozklad probíhá podle schématu

- c) $O_3 + h\nu \rightarrow O_2 + O$,
- d) $O_3 + O \rightarrow 2O_2$,

V uvedených vztazích je $h\nu$ (čteme: „há ný“) symbol pro energetické kvantum pohlcovaného záření, M označuje katalyzátor představovaný molekulami nebo částicemi podílejícími se na výměně energie. Intenzita těchto reakcí je úměrná koncentraci výchozích molekul. K rekombinační reakci d) dochází významnou měrou ve výškách nad 60 km, kde se významná část kyslíku nalézá v disociovaném stavu. V menších výškách ozonosféry je více molekulárního kyslíku a převažuje reakce b), která je hlavním zdrojem ozonu ve stratosféře.

Položíme-li si otázku, proč se ozonoféra nalézá právě ve svém současném výškovém rozmezí, může být odpověď ve svém principu jednoduchá. K existenci ozonoféry jsou prakticky nutné dvě podmínky: musí do ní v dostatečné míře pronikat sluneční záření krátkých vlnových délek potřebné pro fotolýzu (rozklad slunečním zářením) molekul kyslíku O_2 a zároveň se zde tyto molekuly musí vyskytovat v dostatečné koncentraci. Poněkud zjednodušeně řečeno, první podmínka omezuje ozonoféru zdola, druhá shora. Kromě toho je třeba uvážit, že molekuly ozonu O_3 jsou málo stabilní, a mají tedy relativně krátkou střední dobu života. Ozon formující se v ozonoféře má z tohoto důvodu nedostatek času na to, aby se atmosférickou difuzí rozprostřel v podstatně širším vertikálním rozsahu a homogenněji se promísil s ostatními atmosférickými plyny.

Přibližně od 60. let 20. století se vyskytují závažné obavy z narušení ozonoféry v souvislosti s některými složkami antropogenního znečištění ovzduší. V 60. a 70. letech převažovaly obavy z emisí oxidů dusíku pocházejících z masové letecké dopravy, která by byla provozována ve spodní stratosféře. Tehdy předpokládaný brzký intenzivní rozvoj takto orientované mezikontinentální nadzvukové letecké dopravy se však z řady technických a ekonomických důvodů neuskutečnil. V následujícím období, což se týká i současnosti, se věnuje hlavní pozornost rozsáhlé skupině látek, kterou lze obecně charakterizovat jako halogenizované uhlovodíky (freony, halony apod.). Problematika ochrany ozonoféry je již po několik desítek let předmětem intenzivní mezinárodní spolupráce a je přímo kodifikována mezinárodními konvencemi sjednanými pod patronací OSN.

OXID UHLIČITÝ

Oxid uhličitý (CO_2) patří k „menšinovým“ atmosférickým plynům, které jsou významné v mnoha směrech. Především je nezbytné uvážit jeho úlohu v biologických procesech. Tento plyn je životně důležitý pro zelené rostliny. Vlivem slunečního světla se v chlorofylu listové zeleně uskutečňuje proces výjimečné důležitosti: CO_2 se rozkládá na uhlík, který je využit k výstavbě rostlinných tkání, a kyslík, jenž je odevzdáván do vzduchu. Pokusy ve sklenicích dokázaly, že rostliny lépe a rychleji rostou, obohatíme-li vzduch o CO_2 . Značně bujný růst můžeme dokumentovat v karbonu (mladší prvohory), kdy obsah CO_2 v atmosférickém vzduchu byl podstatně vyšší než dnes, a to pravděpodobně vlivem silné sopečné činnosti.

V hnědouhelných a kamenouhelných ložiscích, popř. v ložiscích fosilních paliv obecně, je jako konečný produkt dlouhodobých a složitých

pochodů uložen uhlík, který byl původně jako CO_2 obsažen v atmosféře. V dnešní době se při antropogenně podmíněném spalování uhelných zásob a ostatních fosilních paliv vrací CO_2 do atmosféry zvýšenou měrou ve srovnání s přírodními ději.

Vzhledem ke kolísání množství oxidu uhličitého však atmosféra hraje spíše jen pasivní úlohu jako jeho zásobník. Hlavním zásobníkem je oceán, ve kterém je CO_2 rozpuštěn jako kyselina uhličitá (H_2CO_3) v množství několikrát větším, než je obsah CO_2 v atmosféře. Mezi oxidem uhličitým vyskytujícím se ve vzduchu a v oceánu však probíhá intenzivní výměna. Rovnováha mezi oběma zásobníky pak závisí především na teplotě vody v oceánu, na biologických dějích v mořích i na povrchu pevniny.

Velký význam atmosférického CO_2 spočívá ve skutečnosti, že tento plyn je dobře propustný pro sluneční krátkovlnné záření, zatímco zadržuje část dlouhovlnného tepelného záření vyzařovaného Zemí. Atmosférický CO_2 tedy způsobuje úměrně své koncentraci spolu s vodní párou tzv. skleníkový efekt atmosféry. Existuje ale ještě celá řada dalších plynů s podobným efektem. Kdyby všechen CO_2 z atmosféry vymizel, klesla by poněkud průměrná teplota spodních vrstev atmosféry a zemského povrchu, v případě růstu jeho koncentrace je tomu naopak. V současné době se řeší mj. otázka možných změn klimatu Země v geologických dobách vlivem kolísání obsahu CO_2 . Největší pozornost však vzbuzují problémy spojené se současným antropogenním růstem množství CO_2 v atmosféře a s jeho dopady na budoucí možné změny klimatu Země. V současné době jsou průměrné koncentrace CO_2 v zemské atmosféře vyhodnocovány na úrovni přibližně 410 ppm (parts per million, tj. částic v milionu částic), což ve srovnání s tzv. předindustriálním obdobím lidské civilizace představuje takřka padesátiprocentní nárůst. Systematická sledování obsahu CO_2 pak potvrzují po celé industriální období (zhruba od r. 1750) kontinuální růst, který se v posledních desetiletích výrazně zrychluje.

Z hlediska vertikálního rozložení není oxid uhličitý rozprostřen rovnoměrně, ale jeho koncentrace s výškou klesá dosti výrazně, a to i ve spodních, jinak vcelku homogenně promíchávaných vrstvách atmosféry. Příčinou je zčásti to, že jde o relativně těžký plyn, ale zejména jde o důsledek skutečnosti, že je v atmosféře účinně vymýván z kondenzovanou vodou (oblaky, srážky), což omezuje možnosti jeho přirozené vertikální difuze. Jeho obsah ve srážkové vodě pak i ve zcela přirozených přírodních podmínkách působí určitou kyselost srážkové vody s pH blízkým 5,6. Lze tedy říci, že ve srážkách přší slabá kyselina uhličitá, což má v přírodě

řadu důsledků, např. v podobě vzniku krasových jevů ve vápencových oblastech.

Literatura

[1] Kopáček, J., Bednář, J., Žák, M.: *Jak vzniká počasí*. Karolinum, Praha, 2020.
 [2] Faust, H.: *Der Aufbau der Erdatmosphäre*. Friedrich Vieweg und Sohn, Braunschweig, 1968.
 [3] Holton, J. R., Curry, J. A., Pyle, J. A.: *Encyclopedia of Atmospheric Sciences*. Academic Press, Amsterdam, 2003.
 [4] Hartmann, D. L.: *Global Physical Climatology*. Academic Press, New York, 1994.

Elektronická Sbírka řešených úloh z fyziky

Zdeňka Koupilová, Dana Mandíková, Marie Snětinová

Plánujete se o prázdninách procvičit ve fyzice? Chcete si udělat náskok do školy? Doučujete? Řešíte rádi úlohy? Elektronická Sbírka řešených úloh z fyziky by pro vás mohla být to pravé!

Jak Sbírka vypadá

Sbírka vzniká na Katedře didaktiky fyziky MFF UK a obsahuje téměř tisíc detailně řešených úloh z fyziky. Tyto úlohy jsou členěny podle jednotlivých témat, kterými v tuto chvíli jsou: Mechanika, Teoretická mechanika, Termodynamika a molekulová fyzika, Elektřina a magnetismus, Optika, Fyzika mikrosvěta, Matematické metody a Úlohy PISA. Naleznete zde úlohy od těch nejjednodušších, vhodných pro žáky základních škol, až po obtížné vysokoškolské.

Sbírku najdete na adrese: <http://reseneulohy.cz/>

V čem se tato Sbírka řešených úloh liší od jiných?

Sbírka je speciálně navržena tak, aby při samostudiu „nahradila“ roli učitele. Z toho důvodu obsahuje podrobně komentovaná řešení úloh, komentáře, strukturované nápovědy a ilustrativní obrázky. U každé úlohy je také vyznačeno, zda je zařazena do některé ze speciálních kategorií (např. má nějaký speciální způsob řešení nebo kterou poznávací dovednost rozvíjí). Vybrané úlohy jsou navíc propojeny s Multimediální encyklopedií fyziky (<http://fyzika.jreichl.com/>).

He-Ne laser Úloha číslo: 612

He-Ne laser o výkonu 1 mW emituje záření o vlnové délce 633 nm.

a) Určete, do jaké části spektra toto záření patří.

b) Vypočítejte frekvenci emitovaného záření.

c) Kolik fotonů vyzáří tento laser během jedné sekundy?

Zápis

Nápověda

Barvu laseru zjistíte nejnázne tak, že se podíváte do tabulek nebo učebnice na [elektromagnetické spektrum](#) a vlnové délky jednotlivých oblastí.

Zamyslete se nad tím, jak souvisí vlnová délka záření s energií jednoho fotonu a jaký je vztah mezi výkonem laseru a energií, kterou vysílá ve formě záření každou sekundu.

Řešení nápovědy

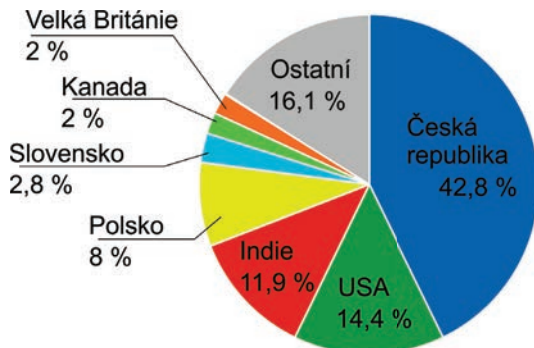
Rozbor

Ukázka struktury jedné úlohy

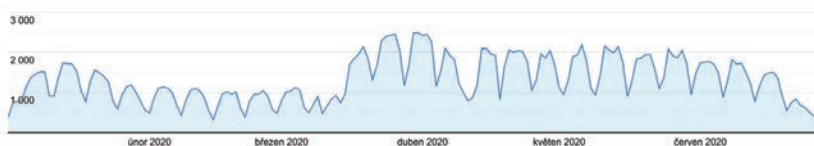
Kolik má sbírka uživatelů?

Sbírka existuje ve třech jazykových verzích (česká, anglická, polská). Nejrozsáhlejší je samozřejmě česká verze, další dvě cizojazyčné vznikají

jejím překladem. I přesto si troufáme říci, že se Sbírka rozšiřuje do celého světa. Česká verze Sbírky má nyní více než 1 000 unikátních přístupů za den (kromě víkendů a prázdnin), v době karantény a zavření škol na jaře roku 2020 se tento počet ještě zdvojnásobil. Počet unikátních přístupů do anglické verze je přibližně 1 500 denně.



Odkud jsou uživatelé Sbírky (všechny jazykové verze dohromady)



Unikátní denní přístupy do české verze Sbírky (období leden–červen 2020)

Sbírku řešených úloh i nadále rozšiřujeme a doplňujeme úlohy o interaktivní prvky. Budeme rádi, když nám napíšete své zkušenosti s používáním Sbírky i náměty na úlohy a na její vylepšení. Zaslát je můžete na adresu: sbirka@kdf.mff.cuni.cz.

Den lékařským fyzikem

Tereza Hanušová, FJFI ČVUT v Praze

Akce *Den lékařským fyzikem*, kterou pořádá Katedra dozimetrie a aplikace ionizujícího záření, FJFI ČVUT v Praze, vznikla za účelem uvést v povědomí studijní obor, který se nejen rychle rozvíjí, ale především zachraňuje lidské životy. Málokdo tuší, že v nemocnici musí být přítomen radiologický fyzik, který se stará o rentgeny, klinické urychlovače a mnoho dalšího vybavení, zajišťuje radiační ochranu, ale také plánuje léčbu pacientů. A protože to málokdo tuší, málokoho také napadne tento obor vystudovat. Odborníků je nedostatek nejen v České republice, ale po celém světě, neboť přibývá specializovaných léčebných center.

Termín Dne lékařským fyzikem je předběžně *plánován na 13. 1. 2021*, ale přihlásit se na něj můžete již teď!



Zajímá vás, čím se zabývá radiologický fyzik v praxi a jaké má uplatnění? Náplň práce radiologického fyzika se mírně liší podle toho, který ze tří z hlavních oborů si vybere:

- nukleární medicína
- radioterapie
- rentgenová diagnostika

Práce fyzika v nemocnici

Pokud se rozhodne pracovat v nemocnici, má na starosti radiační ochranu pacientů a personálu a správnou funkci všech přístrojů používaných ionizující záření. Například optimalizuje ozáření (dávky) potřebné pro vyšetření pacienta tak, aby lékař získal dostatečně kvalitní obraz při co nejnižší radiační zátěži. To provádí skrze měření charakteristik přístrojů a následně správné nastavení parametrů, nebo pomocí matematického zpracování obrazu. Má na starosti zavádění nových přístrojů a technik do provozu a výpočet stínění pro stavební úpravy budov. Dále provádí nebo kontroluje opravy přístrojů, které jsou poměrně složité, a tedy náchylné k drobným závadám. Proto je nutné sledovat správnou funkci přístrojů pravidelnými testy, které stojí na fyzikálních měřeních. Občas musí řešit radiační nehody. Například na odděleních nukleární medicíny může snadno dojít ke kontaminaci místnosti, personálu nebo pacienta látkou obsahující radionuklid. Fyzik následně řídí dekontaminaci, proměření zbytkové aktivity a další nápravné kroky.

Uplatnění mimo nemocnice

Ačkoli se zdá, že radiologický fyzik je svázaný s prostředím nemocnice, není to jeho jediné možné uplatnění. Radiologičtí fyzikové dnes chybí i v akademické sféře a ve vzdělávání. Stejně tak v soukromých firmách vyvíjejících zdravotnické přístroje, detektory nebo zabývajících se radiační ochranou. Dalšími místy, kde je fyzik vítaným odborníkem, jsou auditorské firmy a státní správa. Nachází uplatnění v radiobiologickém výzkumu, který se zabývá vlivem záření na organismus a buňky, a v mnoha dalších odvětvích.

Každý si může vybrat, co ho nejvíce láká. Bez ohledu na volbu je pro práci fyzika nutností umět logicky přemýšlet, vědecky pochybovat a být schopen řešit vzniklé problémy a nečekané situace. Mít přehled o procesu, kterým prochází pacient, a to nejen z fyzikálního hlediska.



Během Dne lékařského fyzika máte možnost si sami vyzkoušet, co práce lékařského fyzika obnáší. Co může být zajímavějšího, než spojit

dvě společensky uznávané profese a být zároveň zdravotníkem i fyzikem? A co může být užitečnějšího, než své schopnosti použít pro záchranu lidských životů a zdraví?

Více se dozvíte na: <https://dlf.fjfi.cvut.cz/>

Den reaktorovým fyzikem

Ondřej Novák, FJFI ČVUT v Praze

Chceš zjistit, jak funguje jaderný reaktor? Vyzkoušet si měření neutronů v reaktoru? Víš, jak je potřeba poskládat palivo, aby reaktor fungoval? Nejen to se dozvíš na *Dni reaktorového fyzika*, který se bude konat v úterý 22. 9. 2020. V rámci akce navštívíš školní reaktor VR-1 a vyzkoušíš si měření důležitých fyzikálních veličin nezbytných pro provoz reaktoru. Mimo to pro tebe bude připraveno několik zajímavých přednášek z oblasti provozu jaderného reaktoru, jaderné bezpečnosti a vývoje energetiky. Den reaktorovým fyzikem pořádá Katedra jaderných reaktorů, FJFI ČVUT v Praze na školním reaktoru VR-1.



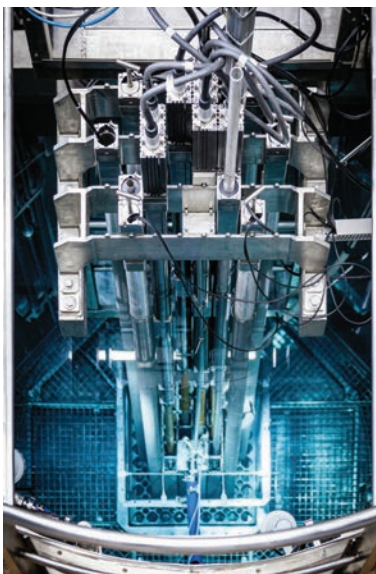
O reaktoru VR-1

Školní reaktor VR-1 je lehkovodní jaderný reaktor nulového výkonu s obohaceným uranem. Jeho konstrukce odpovídá požadavkům na snadnou dostupnost aktivní zóny s ohledem na výuku studentů a výchovu kvalifikovaných pracovníků pro jadernou energetiku. Bazénové uspořádání reaktoru umožňuje jednoduchý a rychlý přístup k aktivní zóně, snadné zakládání a vyjímání různých experimentálních vzorků a detektorů, jednoduchou a bezpečnou manipulaci s palivovými články. Lehká

ZPRÁVY

voda, která slouží jako moderátor, reflektor a chladiivo, navíc plní funkci biologického stínění, což umožňuje snadný přístup k aktivní zóně reaktoru a jejím součástem.

Díky malému výkonu je pro odvod tepla uvolněného při štěpení uranu v aktivní zóně dostatečné přirozené proudění bez nutnosti použití čerpadla, které je však v aktivní zóně instalováno a zajišťuje lepší průtok vody mezi trubkami palivových článků. Reaktor je provozován při atmosférickém tlaku při teplotě cca 20 °C (přesná teplota závisí na teplotě okolního prostředí).



Registrace na Den reaktorovým fyzikem probíhá do 10. 9. 2020. Kapacita je omezená. Registrovat se můžete na adrese: drf.fjfi.cvut.cz

Nabídka dalších aktivit FJFI ČVUT

Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská ČVUT v Praze nabízí i mnoho dalších zajímavých aktivit. Zde máte jejich přehled.

Akce pro středoškolské studenty

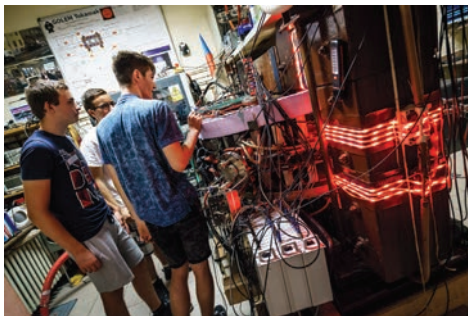
STAŇ SE NA DEN VĚDKYŇÍ Fakulta u příležitosti Mezinárodního dne žen a dívek ve vědě pořádá 11. února 2021 pro studentky akci, kde se mohou věnovat částicové fyzice, kvantovým technologiím či třeba matematickým problémům. vedkyne.fjfi.cvut.cz



Staň se na den vědkyňí

INTERNATIONAL PARTICLE PHYSICS MASTERCLASSES Studentky a studenti v roli částicových fyziků analyzují reálná data z experimentu ALICE nebo ATLAS na urychlovači LHC v CERN. Seznámí se s hlavními myšlenkami kvantové mechaniky. mc.casticova-fyzika.cz

TÝDEN VĚDY NA JADERCE Týden vědecké práce na zkoušku. Studentské týmové vědecké miniprojekty, exkurze dle vlastního výběru, přednášky, experimentální laboratoře, ale i večerní zábava v dobré partě. Na webu najdete jak přihlášku, tak sborníky a fotky z minulých let. tydenvedy.fjfi.cvut.cz



Týden vědy na Jaderce

Odborné kurzy pro učitele – DVPP

Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská ČVUT v Praze připravila odborné kurzy pro učitele ze středních škol. Kurzy jsou akreditovány MŠMT v rámci programu dalšího vzdělávání pedagogických pracovníků (DVPP). Pedagogové ze středních škol obdrží na závěr kurzu osvědčení o absolvování vzdělávací akce.

MATEMATIKA PRO ŽIVOT FJFI ve spolupráci s Pedagogickou fakultou UK pořádají jednodenní akci s názvem Matematika pro život. Na programu kurzu jsou ukázky aplikací matematiky v průmyslové i akademické praxi. Přednáší přední odborníci v jednotlivých oblastech. Kurz je akreditován pod číslem MSMT-32682/2018-1-98 jako akce dalšího vzdělávání pedagogických pracovníků. matematika.fjfi.cvut.cz

CHEMIE NA ČVUT V pátek 5. února 2021 pořádá univerzita ve spolupráci se Vzdělávacím institutem LETEC jednodenní vzdělávací kurz pro učitele středních škol a jejich studenty s názvem Chemie na ČVUT. Po stručném představení aktuálního výzkumu tří fakult a jednoho ústavu ČVUT, které chemii běžně využívají ve výuce i vědecké činnosti, bude následovat blok přednášek předních odborníků a odborníků v různých chemických disciplínách doplněný o laboratorní cvičení. Kurz je akreditován v rámci dalšího vzdělávání pedagogických pracovníků (DVPP). Účastníci z řad učitelů středních škol obdrží na závěr kurzu potvrzení o absolvování vzdělávací akce a studenti osvědčení o účasti. chemie.cvut.cz

Zajímavá vědecká pracoviště lze navštívit online

Uzavření univerzit během epidemie Covid-19 motivovalo pracovníky FJFI k představení zajímavých vědeckých pracovišť online. Záznamy jsou nyní dostupné na Facebooku fakulty www.facebook.com/jaderka/ i YouTube kanálu www.youtube.com/user/videoFJFI.

Série celkem šesti návštěv zajímavých vědeckých pracovišť začala u termonukleárního fúzního reaktoru – tokamaku Golem. Hned první přímý přenos přilákal tolik diváků, že by se nevešli ani do největší posluchárny FJFI! V následujících týdnech pak vždy ve čtvrtek od deseti hodin přibyl další nový videopřenos: návštěva štěpného jaderného reaktoru VR-1 Vrabec, fotochemického reaktoru katedry jaderné chemie, představení výroby tenkých vrstev katedry inženýrství pevných látek, detektorů částic Centra aplikované fyziky a pokročilých detekčních systémů (CAPADS) a koncem května využití fyziky v medicíně.

👉 **Objednávky časopisu** 👈

Od roku 2020 vyřizuje objednávky časopisu
Rozhledy matematicko-fyzikální
společnost

MediaCall, s. r. o.

Vídeňská 546/55

639 63 Brno

tel: +420 532 165 165

e-mail: export@mediacall.cz

Objednávky lze realizovat i přes web:

www.zahranicnitisk.com

Tato informace se netýká členů JČMF. Pro ně vyřizuje objednávky předplatného sekretariát JČMF a předplatné je hrazeno spolu s členskými příspěvky.

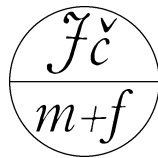
Elektronická verze čísla 2/2020 je ke stažení na adrese:

<https://rozhledy.jcmf.cz/wp-content/uploads/RMF-95-2.pdf>

heslo: R8kosn94ek

ROZHLEDY matematicko-fyzikální

Ročník 95 (2020), číslo 2



OBSAH

L. Spíchal: Od řetězovky k číslu π	1
T. Bártlová: Příběh jedné konstanty	11
V. Vopravil: Hry Nim	16
E. Šubert: Vědecké zásady krájení dortu	31
K. Mudruňka: Řešení kvadratické rovnice odstartovalo projekt CSE-Lab	34
P. Pokorný: Pod jakým úhlem a z jaké výšky lze dostříknout nejdále	37
J. Bednář, J. Kopáček, M. Žák: Vznik a složení zemské atmosféry – fyzika v širších souvislostech	42
Z. Koupilová, D. Mandíková, M. Snětinová: Elektronická Sbirka řešených úloh z fyziky	52
T. Hanušová: Den lékařským fyzikem	55
O. Novák: Den reaktorovým fyzikem	57
Nabídka dalších aktivit FJFI ČVUT	58

Pokyny pro autory

Příspěvky dodávejte na adresu redakce v elektronické podobě. Nejlépe napsané ve formátu \LaTeX , přijatelný je i formát Plain \TeX , je akceptovatelný i text připravený editorem Word či podobným.

Pokud jde o obrázky, je žádoucí, aby byly připraveny v reprodukovatelné podobě. Každý obrázek nechte v samostatném souboru, nejlépe ve formátu eps nebo pdf. Přípustná je též bitmapa v dostatečném rozlišení.

Ke každému zasílanému příspěvku (ne u soutěží, zpráv a recenzí) přiložte krátkou anotaci v českém jazyce. Dále je žádoucí, aby u každého příspěvku byla uvedena literatura, na kterou je v textu odkazováno.