

# ROZ HLEDY

**MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ**

ČASOPIS PRO ZÁJEMCE O MATEMATIKU, FYZIKU A INFORMATIKU

ROČNÍK 95 (2020) • ČÍSLO 3

Vydává Jednota českých matematiků a fyziků  
tel.: 222 090 708-9, e-mail: jcmf@math.cas.cz  
za podpory MFF UK Praha a FJFI ČVUT Praha



Vychází 4 čísla v kalendářním roce

Obálku navrhl Bohuslav Šír

Sazbu programem  $\TeX$  připravil RNDr. Miloslav Závodný

Adresa redakce: MFF UK, V Holešovičkách 2, 182 00 Praha 8–Troja  
e-mail: rozhledy@jcmf.cz

Internetové stránky časopisu: <https://rozhledy.jcmf.cz/>

Vytiskla Tiskárna Pohline, Zálesí 1126/88, 142 00 Praha 4

Distribuci pro předplatitele provádí v zastoupení vydavatele  
MediaCall, s. r. o.  
Václavská 546/55, 639 63 Brno  
tel.: +420 532 165 165, e-mail: export@mediacall.cz  
web: [www.zahranicnitisk.com](http://www.zahranicnitisk.com)

ISSN 0035-9343

MK ČR E4691

© Jednota českých matematiků a fyziků, Praha 2020

---

## Redakční rada

Vedoucí redaktorka:

RNDr. Marie Snětinová, Ph.D., MFF UK Praha

Redaktorka pro matematiku:

doc. Ing. Lubomíra Dvořáková, Ph.D., FJFI ČVUT Praha

Redaktor pro fyziku:

doc. RNDr. Mgr. Vojtěch Žák, Ph.D., MFF UK Praha

Členové redakční rady:

doc. RNDr. Zdeněk Drozd, Ph.D., MFF UK Praha

RNDr. Petr Hanuš, FSv ČVUT Praha

doc. RNDr. Jaroslav Hora, CSc., FPE ZČU Plzeň

prof. RNDr. Ivo Kraus, DrSc., FJFI ČVUT Praha

doc. RNDr. Jan Kříž, Ph.D., PřF UHK Hradec Králové

doc. RNDr. Miroslav Lávička, Ph.D., FAV ZČU Plzeň

RNDr. Pavel Pokorný, Ph.D., VŠCHT Praha

RNDr. Miroslav Randa, Ph.D., PdF ZČU Plzeň

doc. RNDr. Jan Šlégr, Ph.D., PřF UHK Hradec Králové

prof. RNDr. Pavel Tlustý, CSc., PedF JU České Budějovice

doc. RNDr. Pavel Töpfer, CSc., MFF UK Praha

prof. Ing. Bohumil Vybíral, CSc., PřF UHK Hradec Králové

RNDr. Vladimír Wagner, CSc., ÚJF AV ČR Řež

## Hausdorffova dimenze fraktálních množin

Kateřina Panešová, Gymnázium Teplice

**Abstrakt.** V tomto článku se seznámíme s pojmy Hausdorffova míra a dimenze, jejíž výpočet ukážeme na příkladu. Zjistíme, že existují útvary, které „vylézají“ ze svého běžného rozměru a nachází se tak někde mezi křivkou a plošným obrazcem, či mezi plošným útvarem a prostorovým tělesem.

## 1. Jak změřit Sierpiňského trojúhelník

Fraktální útvar známý jako Sierpiňského trojúhelník vzniká z plošného trojúhelníka podle kroku znázorněného na obr. 1. „Vykusování“ prostředního trojúhelníku ze všech nově vzniklých trojúhelníků se neustále opakuje neboli iteruje.



Obr. 1: Výchozí trojúhelník a tři iterace Sierpiňského trojúhelníka

Přirozeně se můžeme ptát, jaký je obsah takového útvaru. Z obsahu útvaru v každém kroku ubyde právě  $\frac{1}{4}$ , tedy při každé iteraci se obsah zmenší na  $\frac{3}{4}$  předchozí hodnoty obsahu. Toto opakujeme donekonečna, abychom dosáhli dokonalého Sierpiňského trojúhelníka dle definice, obsah je tedy roven  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n$ , počítáme-li s jednotkovým obsahem původního celého trojúhelníka. To je zřejmě rovno nule.

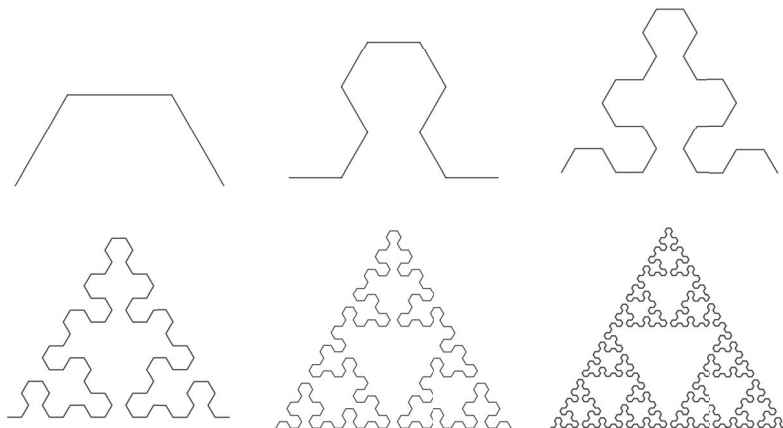
Tento fakt je zarážející, neboť Sierpiňského trojúhelník nějaké místo na papíře zabírá a intuitivně se nám přičí prohlásit jej za prázdnou množinu, protože i po všem tom „vykusování“ přeci *něco musí zbyť*. Nebo ne?

Bývá výhodné si složitou úlohu zjednodušit a pozorovat platné zákonitosti na snáze uchopitelném případě. Představme si, že bychom chtěli *změřit* čtverec. Už tato formulace zní nešikovně – jakou vlastnost čtverce přesně chceme měřit? Samozřejmě jeho obsah. Zastavme se zde na chvíli a zamysleme se, proč právě obsah.

Kdybychom měřili jeho objem, byl by nulový, a naopak (ačkoli to zní absurdně) jeho délka<sup>1)</sup> by byla nekonečná. Objem ani délka by nám o našem čtverci neřekly víc než o jakémkoli jiném plošném útvaru – u všech by tyto veličiny nabývaly stejných hodnot: 0 a  $\infty$ .

Zdá se proto důležité, ve kterém rozměru čtverec měříme. Pro praktické účely má smysl jej měřit právě ve 2D. Podobně to bude s Sierpiňského trojúhelníkem: je-li jeho obsah nulový, zkusme změřit jeho jednorozměrnou délku.

Existuje křivka, která se v limitě shoduje s Sierpiňského trojúhelníkem<sup>2)</sup>. Vzniká neustálým zakřívováním sebe sama, jak ukazuje obr. 2.



Obr. 2: Prvních 6 iterací „Sierpiňského křivky“

Všimněme si, že její délka se s každou iterací zvětší o  $\frac{1}{2}$  své délky, skutečná délka této křivky je tedy rovna  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{3}{2})^n$ , je-li délka výchozí úsečky 1. To se blíží k  $\infty$ , podobně jako délka dvourozměrného čtverce. Jelikož záleží na tom, v jaké dimenzi útvar měříme, je třeba měřit Sierpiňského trojúhelník v jemu příslušné dimenzi, která by mohla být někde mezi 1 a 2. Avšak ještě jsme nedefinovali ani *dimenzi*, ani to, co myslíme tím, že nějakou množinu *měříme*. Než tedy budeme moct pokračovat, je třeba podložit naše intuitivní úvahy pevným formálním základem.

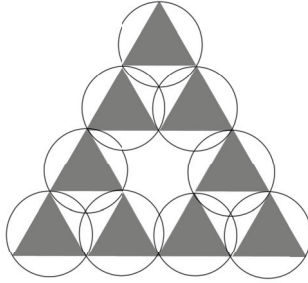
<sup>1)</sup>tzn. délka křivky, která čtverec vypisuje

<sup>2)</sup>důkaz tohoto tvrzení však přesahuje odbornost článku

## 2. Hausdorffova míra

Hausdorffovu neboli fraktální míru zavedl roku 1918 německý matematik Felix Hausdorff [1]. Tato míra<sup>3)</sup> zobecňuje pojem délky, obsahu i  $s$ -rozměrného objemu, dané  $s$  však vůbec nemusí přirozené číslo! To umožňuje měřit např. právě fraktální množiny jako Sierpiňského trojúhelník.

Hausdorffovu míru  $\mathcal{H}^s$  si představme jako funkci (zobrazení), jejíž vstupní hodnotou je množina<sup>4)</sup>, kterou chceme změřit. Hausdorffova míra vezme měřenou množinu a celou ji pokryje tzv. pokrývacími množinami určitého zadaného průměru. Na obr. 3 je jedno z možných pokrytí 2. iterace Sierpiňského trojúhelníka pokrývacími kruhy.



Obr. 3: Možné pokrytí Sierpiňského trojúhelníka

Přitom průměr pokrývacích kruhů je co nejmenší, limitně se blíží nule. Takto vznikají pokrytí, která jsou stále přesnější aproximací skutečného tvaru měřené množiny, ať je jakkoli složitá. Funkce  $\mathcal{H}^s$  poté pro každé pokrytí sečte obsahy všech nekonečně malých pokrývacích kruhů daného pokrytí. Možných pokrytí je nekonečně mnoho, a  $\mathcal{H}^s$  z obsahů všech možných pokrytí vezme jejich infimum, tzn. buď nejmenší obsah (pokud existuje), nebo hodnotu, ke které se obsahy pokrytí shora limitně blíží. Tato hodnota je Hausdorffovou mírou měřené množiny.

Opravdu zajímavé je ale to, že Hausdorffova míra tímto způsobem neměří pouze dvourozměrné útvary, nýbrž dokáže podobně změřit libovolnou podmnožinu prostoru  $\mathbb{R}^n$ .

Nyní už k formální definici Hausdorffovy míry:

<sup>3)</sup>co je to míra obecně a jaké má vlastnosti, si můžete přečíst v mé práci SOČ

<sup>4)</sup>podmnožina  $\mathbb{R}^n$

**Definice 1.** Necht  $A \subset \mathbb{R}^n$ ,  $0 \leq s < \infty$  a  $0 < \delta \leq \infty$ . Definujme

$$\mathcal{H}_\delta^s(A) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \alpha(s) \left( \frac{\text{diam } C_j}{2} \right)^s \mid A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} C_j, \text{diam } C_j \leq \delta \right\},$$

kde

$$\alpha(s) = \frac{\pi^{s/2}}{\Gamma(\frac{s}{2} + 1)}.$$

Zde je  $\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1} dx$ , kde  $0 < s < \infty$ , známá gamma funkce.

V definici se objevují pokrývací množiny  $C_j$ , kde  $j \in \{1, 2, 3, \dots\}$ , jejichž průměr  $\text{diam } C_j$  je menší nebo roven  $\delta$ . Tyto množiny pokryjí celou měřenou množinu  $A$ . Dle vzorce  $\alpha(s) \left( \frac{\text{diam } C_j}{2} \right)^s$  se určí  $s$ -rozměrný objem určité pokrývací množiny  $C_j$ . Zde je  $\alpha(s)$  normalizační konstanta, specifická pro dané  $s$ , které odpovídá dimenzi, ve které množinu  $A$  měříme.

**Příklad 1.** Spočítejme  $\alpha(s)$  pro  $s = 2$ .

$$\alpha(2) = \frac{\pi^{2/2}}{\Gamma(\frac{2}{2} + 1)} = \frac{\pi}{\Gamma(2)}$$

$$\begin{aligned} \Gamma(2) &= \int_0^\infty e^{-x} x^{2-1} dx = \int_0^\infty e^{-x} x dx = \\ &= \left[ -e^{-x} x \right]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-x} dx = 0 + \left[ -e^{-x} \right]_0^\infty = 1 \end{aligned}$$

Tedy  $\alpha(2) = \pi$ , což je přesně konstanta ve známém vzorci pro obsah kruhu  $\pi r^2$ .

**Příklad 2.** Pro zajímavost uveďme hodnotu  $\alpha(s)$  pro některá další běžná  $s$ .

$$\alpha(0) = \frac{\pi^0}{\Gamma(1)} = \frac{1}{\int_0^\infty e^{-x} dx} = 1$$

Zde bude  $\mathcal{H}^0$  běžná *počítací* míra, což znamená, že pro množinu bodů spočte, kolik bodů daná množina obsahuje. Výsledkem bude celé nezáporné číslo (nebo  $\infty$ ) – počet bodů.

$$\begin{aligned} \alpha(1) &= \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(\frac{3}{2})} = \frac{\sqrt{\pi}}{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} = 2 \\ \alpha(3) &= \frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{\Gamma(\frac{5}{2})} = \frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{\frac{3\sqrt{\pi}}{4}} = \frac{4\pi}{3} \end{aligned}$$

Obě konstanty  $\alpha(1)$  a  $\alpha(3)^{5)}$  se objevují ve vztazích pro délku úsečky, resp. křivky, a objem koule: délka úsečky  $d = 2r$  a objem koule  $V = \frac{4\pi}{3}r^3$ .

**Definice 2.** Mějme  $A$  a  $s$  z definice 1 a definujme  $s$ -rozměrnou Hausdorffovu míru na  $\mathbb{R}^n$

$$\mathcal{H}^s(A) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(A).$$

Hausdorffovu míru tedy získáme, pošleme-li  $\delta$  z definice 1 k nule, což odpovídá zmíněným stále přesnějším aproximacím měřené množiny  $A$ .

### 3. Hausdorffova dimenze

V definici 2 značí  $s$  dimenzi, ve které danou množinu  $A$  měříme. Viděli jsme, že pro čtverec by se  $\mathcal{H}^1$  limitně blížila nekonečnu a  $\mathcal{H}^3$  by byla rovna 0. Intuice nám napovídá, že pro všechny dimenze větší než 3 už bude  $\mathcal{H}^s$  čtverce 0 a pro všechny dimenze menší než 1 bude „nekonečná“. Dokonce by se nám líbilo, kdyby tento zlom, při kterém se nekonečná  $\mathcal{H}^s$  mění na nulovou, byl jen jeden, konkrétně v  $s = 2$ .

Naštěstí to platí. Lze dokázat<sup>6)</sup>, že pro určitou množinu  $A \subset \mathbb{R}^n$  nastane zlom mezi  $\mathcal{H}^s(A) = \infty$  a  $\mathcal{H}^s(A) = 0$  právě jednou. Tomuto bodu budeme říkat Hausdorffova dimenze množiny  $A$ .

**Definice 3.** Hausdorffova (fraktální) dimenze podmnožiny  $A$  prostoru  $\mathbb{R}^n$  je

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\dim}(A) &= \inf\{0 \leq t < \infty \mid \mathcal{H}^t(A) = 0\} = \\ &= \sup\{0 \leq s < \infty \mid \mathcal{H}^s(A) = \infty\}. \end{aligned}$$

**Poznámka 1.** Zápisy *inf* a *sup* znamenají *infimum* a *supremum*. Infimum je nejvyšší dolní mez množiny, supremum nejnižší horní mez. Tyto pojmy jsou nadřazeny pojmem minimum a maximum množiny, které nemusí vždy existovat, zato je-li množina zdola, resp. shora omezená, nutně už má infimum, resp. supremum.

**Příklad 3.** Jaká je Hausdorffova dimenze Sierpińského trojúhelníka?

<sup>5)</sup>vyčíslení integrálů  $\int_0^\infty (e^{-x}\sqrt{x})dx$  a  $\int_0^\infty (e^{-x}x^{\frac{3}{2}})dx$  svou náročností přesahuje odbornost tohoto článku

<sup>6)</sup>Důkaz naleznete v mé práci SOČ nebo v [2]

Množinu tvořící Sierpiňského trojúhelník označme  $S$ . Nejprve vyjádříme Hausdorffovu míru Sierpiňského trojúhelníka, a to tak, že spočítáme  $\mathcal{H}_\delta^s(S)$  pro  $\delta = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ , kde  $n$  značí, o kolikátou iteraci tvorby tohoto fraktálu se jedná. Zřejmě Sierpiňského trojúhelník dostaneme pro  $n \rightarrow \infty$ .

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\frac{1}{2}}^s(S) &= 3 \alpha(s) \left(\frac{1}{2}\right)^s \\ \mathcal{H}_{\frac{1}{4}}^s(S) &= 9 \alpha(s) \left(\frac{1}{4}\right)^s \\ &\dots \\ \mathcal{H}_{\frac{1}{2^n}}^s(S) &= 3^n \alpha(s) \left(\frac{1}{2^n}\right)^s \end{aligned}$$

Potom

$$\mathcal{H}^s(S) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ 3^n \alpha(s) \left(\frac{1}{2^n}\right)^s \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \alpha(s) \cdot 2^{-s} \left(\frac{3}{2^s}\right)^n \right]$$

Hledejme zlomový bod pro  $\mathcal{H}^s(S)$  v závislosti na  $s$ . Členy  $\alpha(s)$  a  $2^{-s}$  jsou pro dané  $s$  konstanty, zato člen  $\left(\frac{3}{2^s}\right)^n$  pro  $n \rightarrow \infty$  se může buď limitně blížit 0, je-li argument exponenciály menší než 1, nebo „jít do nekonečna“, je-li argument exponenciály větší než 1. Zlom tedy nastane pro  $\frac{3}{2^s} = 1$  a z toho už

$$\mathcal{H}_{dim}(S) = \log_2 3 \doteq 1.58496.$$

**Úloha 1.** Prokažte (např. výpočtem), že Hausdorffova dimenze „Sierpiňského křivky“ (obr. 2) je rovna dimenzi Sierpiňského trojúhelníka.

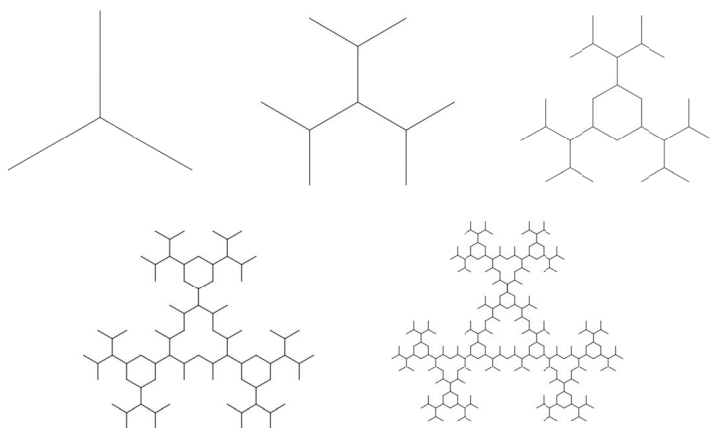
**Úloha 2.** Prohlédněte si několik prvních iterací fraktálu na obr. 4 a odhadněte jeho fraktální dimenzi v porovnání s Sierpiňského trojúhelníkem. Ověřte výpočtem.

Je tedy zřejmé, že samotné prokázání shodnosti dimenze ještě neznamená, že si jsou fraktály rovny, jako je tomu v případě Sierpiňského trojúhelníka a křivky. Danou dimenzi může mít více fraktálů, stejně jako existuje množství různých plošných útvarů.

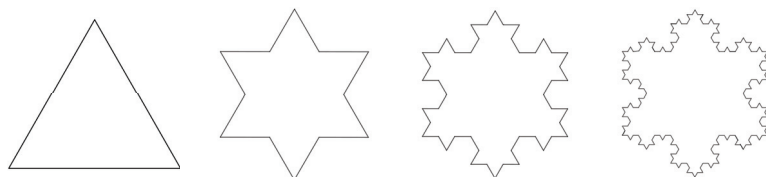
**Úloha 3.** Aby to nevypadalo, že všechny fraktály mají dimenzi 1,58496, vypočítejte Hausdorffovu dimenzi Kochovy hvězdy (obr. 5).

Pro lepší představu o fraktálech doporučujeme video [3].





Obr. 4: Prvních 5 iterací fraktálu z úlohy 2



Obr. 5: Výchozí trojúhelník a první tři iterace Kochovy hvězdy

### Literatura

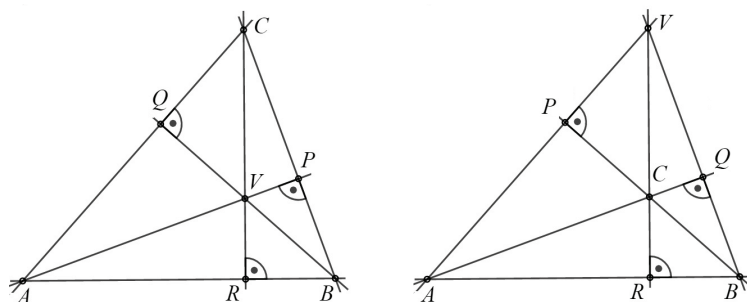
- [1] Hausdorff, F.: Dimension und äusseres Mass. *Mathematische Annalen*, roč. 79 (1918), s. 157–179.
- [2] Evans, L. C., Garipey, R. F.: *Measure Theory and Fine Properties of Functions*. Studies in Advanced Mathematics, CRC Press, 1992.
- [3] Sanderson, G.: *Fractals are Typically not Self-Similar*. Studies in Advanced Mathematics, 3Blue1Brown, 2017, <https://www.nagwa.com/en/videos/146197972673/>.

## Ortocentrické čtveřice bodů a trojúhelníků

*Jiří Lach, Gymnázium Matyáše Lercha, Brno*

**Abstrakt.** Článek se zabývá vlastnostmi čtveřice bodů, které tvoří vrcholy obecného trojúhelníku a jeho ortocentrum. Těchto vlastností pak využijeme v konstrukční úloze a dále také zjistíme, jakou vlastnost tyto body mají, budeme-li uvažovat ortický trojúhelník k danému trojúhelníku.

Učivo o trojúhelnících je nedílnou součástí každého vzdělávacího programu jak na základních, tak i středních školách. Každý z vás si jistě některou část tohoto učiva vybaví. V našem článku se seznámíme s pozoruhodnými vlastnostmi čtveřic bodů, které dostaneme, když ke trojici vrcholů  $A, B, C$  obecného trojúhelníku připojíme jako čtvrtý bod  $V$  – průsečík jeho výšek  $AP, BQ, CR$ , zvaný *ortocentrum* trojúhelníku  $ABC$ . Dva druhy takovýchto čtveřic bodů vidíte na obr. 1, nalevo pro ostroúhlý trojúhelník a napravo pro trojúhelník tupoúhlý, u kterého je třeba chápat výšky jako přímky, nikoliv jako úsečky. Jistě si snadno rozmyslíte, proč v článku o takovýchto čtveřicích bodů pomineme pravoúhlé trojúhelníky.



Obr. 1: Body  $A, B, C$  a  $V$  v různých pozicích

Ortocentrem každého obecného (dále vždy nepravoúhlého) trojúhelníku  $ABC$  je jediný bod  $V$  jeho roviny, pro který platí konjunkce tří kolmostí

$$\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{CV} \wedge \overleftrightarrow{BC} \perp \overleftrightarrow{AV} \wedge \overleftrightarrow{AC} \perp \overleftrightarrow{BV}.$$

Jistě jste si povšimli, že oba náčrtky na obr. 1 jsou až na označení čtveřice bodů písmeny  $A, B, C$  a  $V$  geometricky shodné. Navíc, jak možná s překvapením zjistíte, na obou z nich je každý ze čtyř bodů  $A, B, C$  a  $V$  ortocentrem trojúhelníku tvořeného zbylými třemi body. (Doporučujeme, abyste třeba všechny tři výšky trojúhelníku  $ABV$  dvojicemi jejich bodů určili.) Rovnocennost rolí bodů  $A, B, C, V$  v takové situaci přivedla matematiky k následující definici.

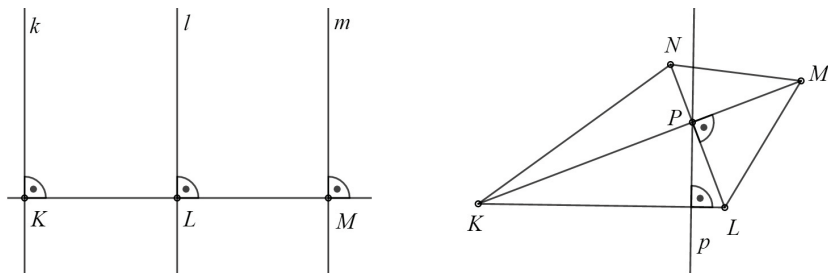
**Definice 1.** Řekneme, že čtveřice  $K, L, M, N$  navzájem různých bodů téže roviny je *ortocentrická*, jestliže jsou navzájem kolmé jak přímky  $KL$  a  $MN$ , tak přímky  $KM$  a  $LN$  a také přímky  $KN$  a  $LM$ . V této situaci čtveřici trojúhelníků  $KLM, KLN, KMN$  a  $LMN$ , jejichž ortocentra jsou po řadě body  $N, M, L$  a  $K$ , nazveme *ortocentrickou*.

Po zavedení nového pojmu nás při zkoumání vlastností ortocentrické čtveřice trojúhelníků asi nejprve napadne otázka, zda každá ortocentrická čtveřice trojúhelníků  $KLM, KLN, KMN$  a  $LMN$  vypadá tak, jako na obr. 1: tři z těchto trojúhelníků jsou tupouhlé a stýkají se podél společných stran tak, že jejich sjednocením je zbývající čtvrtý trojúhelník, který je ostroúhlý. K důkazu kladné odpovědi na tuto otázku, kterou uvedeme vzápětí jako větu 1, využijeme poznatek, který známe z hodin planimetrie ve škole: *Daný trojúhelník je ostroúhlý (resp. tupouhlý) právě tehdy, když jeho ortocentrum leží uvnitř (resp. vně) daného trojúhelníku.*

**Věta 1.** *Některý z libovolné ortocentrické čtveřice bodů leží uvnitř trojúhelníku s vrcholy v ostatních třech bodech této čtveřice.*

*Důkaz.* Stačí ukázat, že žádné tři z bodů  $K, L, M, N$  tvořících ortocentrickou čtveřici neleží v jedné přímce a že všechny čtyři body  $K, L, M, N$  nejsou vrcholy konvexního čtyřúhelníku. K ověření obou tvrzení sporem využijeme náčrtků z obr. 2. Kdyby např. body  $K, L, M$  ležely v jedné přímce, z relací  $KN \perp LM, LN \perp KM$  a  $MN \perp KL$  by vyplynulo, že bod  $N$  by musel ležet na každé ze znázorněných kolmic  $k, l, m$ , které jsou ovšem rovnoběžky a nemají tedy žádný společný bod.

Kdyby body  $K, L, M, N$  byly vrcholy konvexního čtyřúhelníku jako na obrázku, jeho navzájem kolmé uhlopříčky  $KM$  a  $LN$  by se protály v bodě  $P$ . Z podmínky  $KL \perp MN$  by vyplynulo, že přímka  $MN$  by musela být rovnoběžná s přímkou  $p$  vedenou bodem  $P$  kolmo k přímce  $KL$ . Tato přímka však rozděluje pravý úhel  $KPL$ , a tedy i k němu vrcholový úhel  $MPN$ , a tak body  $M$  a  $N$  odděluje. Nemůže proto platit  $MN \parallel p$ .  $\square$



Obr. 2: K důkazu věty 1

Dokázaná věta 1 má pro zkoumání ortocentrických čtveřic velký význam. Vždy totiž můžeme předpokládat, že daná ortocentrická čtveřice je tvořena třemi vrcholy ostroúhlého trojúhelníku a jeho ortocentrem. Uplatníme to v dalším textu s velkou výhodou.

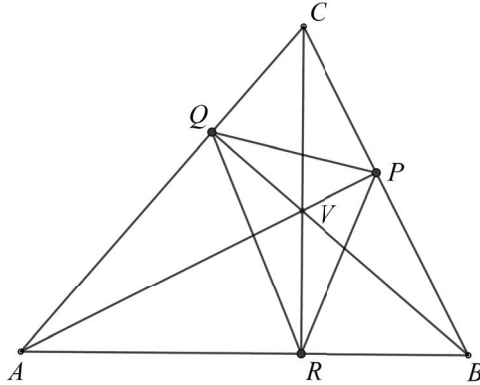
Podívejme se nyní, jak s tématem ortocentrických čtveřic souvisí významné body trojúhelníků, *paty výšek*. Je zřejmé, že pokud průsečíky kolmic  $KL$  a  $MN$ ,  $KM$  a  $LN$ , respektive  $KN$  a  $LM$ , o kterých se píše v definici ortocentrické čtveřice  $K, L, M, N$ , označíme  $P, Q, R$ , pak tyto body jsou patami výšek *všech čtyř* trojúhelníků  $KLM, KLN, KMN$  a  $LMN$  (připomeňte si obr. 1 s pomyslnou záměnou bodů  $A, B, C$  a  $V$  čtveřicí  $K, L, M, N$  v jakémkoliv pořadí). Protože jeden z trojúhelníků  $KLM, KLN, KMN$  a  $LMN$  je vždy ostroúhlý, jsou paty výšek  $P, Q, R$  vnitřními body jeho stran, což znamená, že neleží v jedné přímce a tvoří tedy vrcholy trojúhelníku. Jsou-li tedy  $AP, BQ$  a  $CR$  výšky obecného trojúhelníku  $ABC$ , pak vždy existuje trojúhelník  $PQR$ . Říkáme, že trojúhelník  $PQR$  je *ortický trojúhelník* daného trojúhelníku  $ABC$ .

V předchozím odstavci jsme vysvětlili, že pokud je trojúhelník  $PQR$  ortický k některému trojúhelníku, je dokonce společným ortickým trojúhelníkem alespoň čtyř trojúhelníků. Jak nyní ukážeme, naopak pro *každý* trojúhelník  $PQR$  v rovině existují právě čtyři trojúhelníky s patami výšek v daných bodech  $P, Q, R$ . Je jasné, že tyto čtyři trojúhelníky tvoří ortocentrickou čtveřici a my v řešení následujícího příkladu ukážeme, jak tuto čtveřici sestojit.

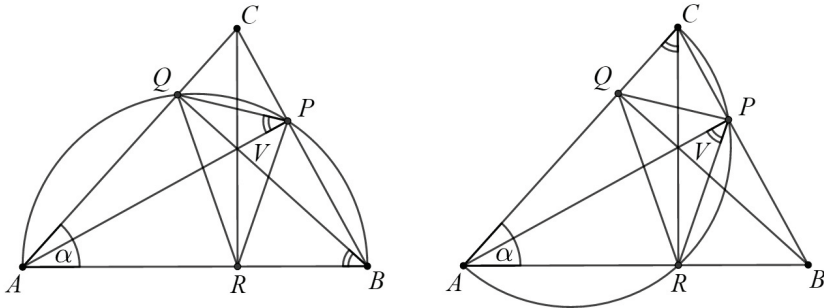
**Příklad 1.** V rovině jsou dány body  $P, Q, R$ , které neleží v jedné přímce. Sestrojte trojúhelník s patami výšek  $P, Q, R$ .

*Řešení.* Na základě předchozích poznatků již můžeme říct, že každým řešením této úlohy bude ortocentrická čtveřice bodů  $A, B, C, V$ , kterou tvoří ostroúhlý trojúhelník  $ABC$  a tři tupoúhlé trojúhelníky  $ABV, ACV$

a  $BCV$  (viz obr. 3). Jejich konstrukční nalezení bude spočívat v následujících úvahách. Vzhledem k tomu, že výšky trojúhelníku jsou vždy na jeho strany kolmé, jsou trojúhelníky  $ABQ$  a  $ABP$  pravoúhlé s pravými úhly u vrcholů  $P$  a  $Q$ . Z toho vyplývá, že body  $P$  a  $Q$  leží na Thaletově kružnici nad průměrem  $AB$ , jak můžeme vidět na obr. 4 vlevo.



Obr. 3: Ortocentrická čtveřice trojúhelníků s patami výšek  $P, Q, R$



Obr. 4: Thaletovy kružnice nad průměry  $AB$  a  $AC$

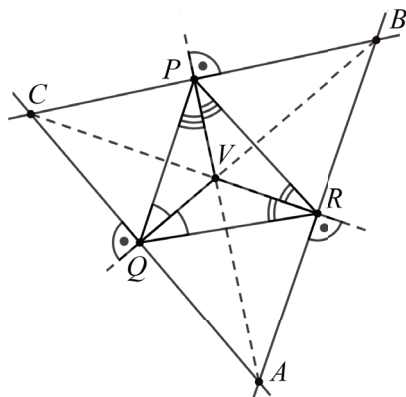
Částí této kružnice je oblouk  $AQ$ , jemuž náleží obvodové úhly  $ABQ$  a  $APQ$ , které mají stejnou velikost. Vyjádříme ji z pravoúhlého trojúhelníku  $ABQ$ :  $|\sphericalangle ABQ| = |\sphericalangle APQ| = 90^\circ - \alpha$ .

Nyní se podívejme na Thaletovu kružnici nad průměrem  $AC$ , která je znázorněna na obr. 4 vpravo. Leží na ní oblouk  $AR$ , jemuž přísluší obvodové úhly  $RCA$  a  $RPA$ . Z pravoúhlého trojúhelníku  $ARC$  plyne, že

$$|\sphericalangle RCA| = |\sphericalangle RPA| = 90^\circ - \alpha.$$

Dokázali jsme tedy rovnost  $|\sphericalangle APQ| = |\sphericalangle RPA|$ . Podobně bychom mohli ukázat, že platí rovnosti  $|\sphericalangle PQB| = |\sphericalangle BQR|$  a  $|\sphericalangle QRC| = |\sphericalangle CRP|$ . Tímto jsme dokázali, že výšky  $AP$ ,  $BQ$  a  $CR$  hledaného ostroúhlého trojúhelníku  $ABC$  leží na osách vnitřních úhlů jeho ortického trojúhelníku  $PQR$ .

Nyní již lze konstrukci řešení příkladu 1 snadno popsat. V trojúhelníku  $PQR$  sestrojíme osy vnitřních úhlů a jejich průsečík označíme  $V$ . V dalším kroku vedeme každým z bodů  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  kolmici k sestrojené ose, která z tohoto bodu vychází (obr. 5). Průsečíky těchto tří kolmic označíme  $A$ ,  $B$ ,  $C$ . Řešením příkladu 1 pak jsou právě čtyři trojúhelníky: ostroúhlý trojúhelník  $ABC$  a tři tupouhlé trojúhelníky  $ABV$ ,  $BCV$  a  $ACV$ .



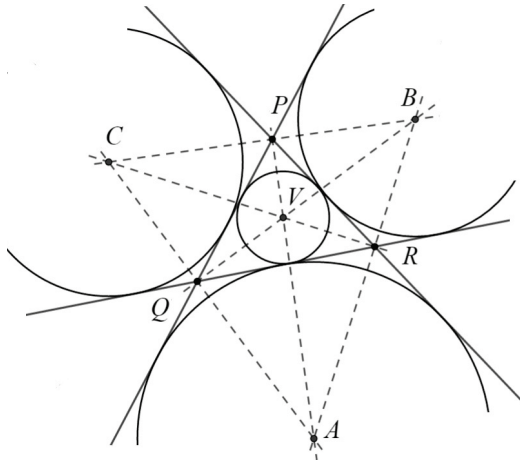
Obr. 5: Konstrukce řešení příkladu 1

Řešení příkladu 1 ukončíme důkazem správnosti konstrukce z obr. 5. Ten provedeme, když ukážeme, že body  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , které jsme určili jako průsečíky tří přímk vedných vrcholy trojúhelníku  $PQR$  kolmo k osám  $PV$ ,  $QV$ ,  $RV$  jeho vnitřních úhlů, leží po řadě na těchto osách. (To pak totiž bude znamenat, že body  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  jsou skutečně patami výšek čtyř sestrojených trojúhelníků.) Vysvětlení je snadné: sestrojené tři kolmice jsou osami *vnějších* úhlů trojúhelníku  $PQR$ , takže například bod  $A$  má stejnou vzdálenost od přímek  $PQ$  a  $RQ$  i stejnou vzdálenost od přímek  $PR$  a  $RQ$ , a tak leží na polopřímce  $PV$ . Podobně se vysvětlí potřebné polohy bodů  $B$  a  $C$ . Tím je úplné řešení příkladu 1 ukončeno.

Podané úplné řešení příkladu 1 přináší ještě jedno významné poučení. Podle konstrukce z obr. 5 je bod  $V$  středem kružnice vepsané trojúhelníku

níku  $PQR$ , má tedy od přímek  $PQ$ ,  $PR$  a  $RQ$  stejnou vzdálenost. Jak jsme v závěru řešení dokázali, tuto vlastnost mají i body  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , takže jsou středy tří dalších kružnic, které se všech tří přímek  $PQ$ ,  $PR$ ,  $RQ$  dotýkají a kterým říkáme kružnice *připsané* jednotlivým stranám trojúhelníku  $PQR$ . Vidíme je na obr. 6, který ilustruje zajímavý a dosti překvapivý pohled na obecnou ortocentrickou čtveřici bodů. Plyne z našeho řešení příkladu 1 a vyjádříme ho závěrečnou větou 2, kterou jsme již vlastně dokázali. Před tím ještě upřesněme, že kružnici připsanou kupříkladu straně  $AB$  daného trojúhelníku  $ABC$  rozumíme kružnici, která se dotýká strany  $AB$  v jejím vnitřním bodě a současně se dotýká přímek  $AC$  a  $BC$  vně trojúhelníku  $ABC$ .

**Věta 2.** *Každá ortocentrická čtveřice bodů je tvořena středy čtyř kružnic, z nichž jedna je vepsána některému trojúhelníku  $PQR$  a ostatní tři připsány jeho jednotlivým stranám. Naopak každý trojúhelník  $PQR$  takto určuje jedinou ortocentrickou čtveřici  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $V$  (obr. 6).*



Obr. 6: Vepsaná a připsané kružnice

Literatura

[1] Altshiller-Court, N.: *College Geometry: An Introduction to the Modern Geometry of the Triangle and the Circle*. Dover publications, New York, 2007.  
 [2] Švrček, J., Vanžura, J.: *Geometrie trojúhelníka*. SNTL, Praha, 1988.

## Algebraické identity a cirkulační matice

*Oliver Bukovianský, Gymnázium Praha 5, Na Zatlance*

**Abstrakt.** Seznámíme se s algebraickou identitou  $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$ , a představíme si její důležité vlastnosti. Zejména se budeme věnovat jejímu vyjádření ve tvaru determinantu cirkulační matice (dále jen CM). Zaměříme se i na determinanty CM jiných řádů, které budeme rozkládat na součin ireducibilních polynomů s využitím pravidel pro determinanty. Dále definujeme Kroneckerův součin a zmíníme jeho souvislost s mocninami determinantů CM. V závěru je uveden pokročilejší problém týkající se koeficientů výsledných determinantů CM.

### 1. Algebraické identity

Asi každý s elementární znalostí matematiky má povědomí o následujících třech algebraických vzorcích, vztazích nebo jinak řečeno identitách:

$$\begin{aligned} a^2 + 2ab + b^2 &= (a + b)^2, \\ a^2 - 2ab + b^2 &= (a - b)^2, \\ a^2 - b^2 &= (a + b)(a - b). \end{aligned}$$

Kromě těchto základních identit známe i komplikovanější vzorce:

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

nebo

$$a^7 - 7a^6b + 21a^5b^2 - 35a^4b^3 + 35a^3b^4 - 21a^2b^5 + 7ab^6 - b^7 = (a - b)^7.$$

Všechny uvedené vztahy dávají do rovnosti dvě možná vyjádření stejného výrazu. Jsou zapsané tak, aby na levé straně rovnosti byl polynom v tzv. roznásobené podobě a na pravé straně polynom v tzv. rozložené podobě. Tohoto pojmenování se budeme dále držet.

Krásu podobných rovností můžeme náležitě ocenit přidáním třetí proměnné  $c$ , díky čemuž vznikne řada zajímavějších vztahů. Jedním z nejjednodušších a nejelegantnějších polynomů tří proměnných je známá identita

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc).$$



Možná jste na ni už narazili, je totiž celkem oblíbená v algebraických úlohách, například při úpravách výrazů. Skutečně platí, že velmi jednoduchý výraz na levé straně rovnosti lze rozložit na komplikovaný součin dvou závorek. K odvození vztahu samozřejmě postačuje roznásobit pravou stranu  $(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)$  a sečíst členy lišící se jen koeficientem – tím dostaneme levou stranu  $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$  v roznásobené podobě.

Z takového postupu ale nevyplyne hlubší důvod, proč právě mezi těmito polynomy platí rovnost. Podstatu rovnosti můžeme nalézt při upravitelní výrazu  $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ , ze kterého se budeme pokoušet vytvořit výše zmíněný součin dvou závorek (rozložit polynom na součin). Po několika úpravách skutečně dojdeme k pravé straně, přičemž budeme využívat elementární algebraické manipulace, jako například vytýkání závorek nebo známé vzorce:

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 + c^3 - 3abc &= (a + b)^3 + c^3 - 3ab^2 - 3ab^2 = \\ &= (a + b + c)[(a + b)^2 - (a + b)c + c^2] - 3ab(a + b + c) = \\ &= (a + b + c)(a^2 + 2ab + b^2 - ac - bc + c^2 - 3ab) = \\ &= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc). \end{aligned}$$

Důležité je zmínit, že závorka  $(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)$  je již dále nerozložitelná na součin polynomů nižších stupňů s reálnými koeficienty. Z toho důvodu nazvěme polynom  $(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)$  *ireducibilním nad množinou*  $\mathbb{R}$  a spokojme se s jeho současnou podobou.

Polynom  $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$  a jeho rozklad

$$(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)$$

mají zajímavou vlastnost, která se v souvislosti s algebraickou identitou často zmiňuje. Představíme ji na číselném triku: Posлуhačovi řekneme, aby nám sdělil tři čísla, jejichž součet je roven nule. Posлуhač nám bude jistě chtít ztížit situaci a nadiktuje nám tři velká čísla, samozřejmě v souladu s naší počáteční podmínkou: 589, 437,  $-1\,026$ . My ho poté překvapíme tvrzením, že se součet třetích mocnin těchto tří čísel rovná trojnásobku jejich součinu. Ohromený posлуhač s kalkulačkou v ruce dojde v obou případech ke stejnému výsledku:  $-792\,255\,654$ . Důvod je prostý. Hledaná tři čísla označme proměnnými  $a, b, c$ . Rovnost  $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$  nastane například tehdy, když pro  $a, b, c$  platí původní podmínka  $a + b + c = 0$ , jelikož se pak bude rovnat nule i celý

součin  $(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)$ , přičemž, jak víme, tento součin je jen jiným vyjádřením polynomu  $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ .

## 2. Cirkulační matice a jejich determinanty

Identita  $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)$  nabízí další zajímavost. Lze ji totiž vyjádřit jako determinant takzvané *cirkulační matice*. Nejprve ke druhému pojmu názvu. Matice je tabulka čísel nebo jiných matematických objektů, neboli prvků, obecně obdélníkového tvaru. Často využívané jsou, zejména v lineární algebře, čtvercové matice se stejným počtem řádků jako sloupců. Cirkulační matice jsou speciálním typem čtvercových matic. Jejich prvky se cyklicky opakují, čehož si můžeme všimnout na obecném zápisu cirkulační matice a jejího zkráceného značení:

$$C_{n,n} = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_{n-1} & c_n \\ c_n & c_1 & c_2 & \cdots & c_{n-2} & c_{n-1} \\ c_{n-1} & c_n & c_1 & \cdots & c_{n-3} & c_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_3 & c_4 & c_5 & \cdots & c_1 & c_2 \\ c_2 & c_3 & c_4 & \cdots & c_n & c_1 \end{pmatrix} = \text{Circ}(c_1, c_2, c_3, \dots, c_{n-1}, c_n).$$

Pro čtenáře, kteří pojem determinant matice slyší poprvé, se ho pokusíme stručně vysvětlit (korektní definice viz [1]). Determinant lze počítat pouze ze čtvercových matic. Pokud jsou prvky matice  $A$  pouze reálná čísla, výsledkem determinantu matice  $A$  bude součet členů tvořených reálnými čísly, tudíž celý determinant bude roven reálnému číslu. Determinant se definuje pomocí permutace množiny  $\{1, 2, \dots, n\}$  a znaménka dané permutace:

$$|A_{n,n}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\pi} \text{sgn}(\pi) a_{1,\pi(1)} a_{2,\pi(2)} \cdots a_{n,\pi(n)}.$$

Stručně řečeno, prvky matice se skládají do jednotlivých členů takovým způsobem, aby byly v každém členu obsaženy prvky ze všech řádků a

ze všech sloupců čtvercové matice právě jednou. A znaménko  $\text{sgn}(\pi)$  vyjadřuje, zda je počet inverzí v dané permutaci  $\pi$  sudý ( $\text{sgn}(\pi) = 1$ ) nebo lichý ( $\text{sgn}(\pi) = -1$ ). Přičemž inverze v permutaci  $\pi$  je dvojice prvků  $(i, j)$ ,  $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ , taková, že  $i < j$  a zároveň  $\pi(i) > \pi(j)$ .

Zkusme nyní spočítat determinanty z cirkulačních matic (dále v textu značené CM) obsahujících proměnné. Determinant CM  $1 \times 1$  (1. řádu) je pouze samotná proměnná  $a$ . Determinant CM 2. řádu je poněkud zajímavější, jedná se dokonce o algebraickou identitu zmíněnou výše:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix} = a^2 - b^2 = (a + b)(a - b).$$

Nyní se dostáváme k výpočtu determinantu CM 3. řádu. Zde se opět objevuje polynom  $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ .

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc).$$

Seznámíme se i s determinanty CM čtvrtého a vyšších řádů. Nejprve nás ale bude zajímat rozložená forma polynomu. Po výpočtu determinantu čistě z definice jsme obdrželi výraz  $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ . Mohli bychom výpočtem determinantu jiným způsobem obdržet ihned rozloženou formu  $(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)$ ? Odpověď na otázku zní ano, nejprve ale bude třeba zmínit několik pravidel pro práci s determinanty (viz [1]).

1. Determinant horní trojúhelníkové matice je roven součinu prvků na hlavní diagonále.
2. Determinant matice obsahující lineárně závislé řádky či sloupce je roven nule.
3. Jestliže matice  $B$  vznikla z matice  $A$  prohozením dvou řádků nebo dvou sloupců, pak platí  $|A| = -|B|$ .
4. Jestliže matice  $B$  vznikla z matice  $A$  vynásobením jednoho řádku nebo sloupce reálným číslem  $c$ , pak platí  $c|A| = |B|$ .
5. Jestliže matice  $B$  vznikla z matice  $A$  přičtením libovolného násobku řádku k jinému řádku nebo libovolného násobku sloupce k jinému sloupci, pak se determinanty matic  $A, B$  rovnají.

Díky výše uvedeným pravidlům bude velmi snadné determinant CM 3. řádu vyjádřit v rozložené formě:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a+b+c & b & c \\ c+a+b & a & b \\ b+c+a & c & a \end{vmatrix} = (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & a & b \\ 1 & c & a \end{vmatrix} = \\ &= (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc). \end{aligned}$$

V prvním kroku jsme použili pravidlo 5. (přičetli jsme druhý a třetí sloupec k prvnímu a determinant se nezměnil), ve druhém kroku jsme použili pravidlo 4.

Rozklad na součin jednotlivých polynomů vzniklých výpočtem z definice determinantu je téměř neproveditelný jednoduchým algebraickým výpočtem. Je to zřejmé u polynomu

$$a^4 - b^4 + c^4 - d^4 - 2a^2c^2 + 2b^2d^2 - 4a^2bd + 4ab^2c - 4bc^2d + 4acd^2,$$

který je roven determinantu CM 4. řádu. Tento polynom čtyř proměnných lze upravit do tvaru součinu tří ireducibilních polynomů. Výpočet je složitý nejenom díky přílišné délce výrazu (což samo o sobě nemusí být podmínkou náročného výpočtu), ale především kvůli nutnosti použít řadu sofistikovanějších algebraických úprav působících trikově. Rozklad na součin můžeme ovšem mnohem elegantněji provést pomocí úprav determinantu, stejně jako jsme dospěli k rozkladu

$$(a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)$$

v minulém odstavci. Nejdříve k prvnímu sloupci přičteme všechny zbylé sloupce podle pravidla 5.:

$$\det(\text{Circ}(a, b, c, d)) = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \\ c & d & a & b \\ b & c & d & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b+c+d & b & c & d \\ d+a+b+c & a & b & c \\ c+d+a+b & d & a & b \\ b+c+d+a & c & d & a \end{vmatrix}.$$

Nyní si vzpomeňme na 4. pravidlo a z determinantu vytkneme výraz

$(a + b + c + d)$ . V prvním sloupci díky této úpravě zbudou samé jedničky:

$$(a + b + c + d) \begin{vmatrix} 1 & b & c & d \\ 1 & a & b & c \\ 1 & d & a & b \\ 1 & c & d & a \end{vmatrix}.$$

Je dobré zmínit, že vytknutá závorka je již jedním ze tří hledaných polynomů tvořících rozklad. Nyní se z determinantu pokusíme vytknout druhou závorku pomocí výše zmíněných pravidel. Sčítání sloupců ale nikam nevede, asi nelze sestavit výraz, který bychom mohli vytknout s využitím 4. pravidla. Zaměříme se proto na řádky. Přičtení všech řádků k prvnímu opět nikam nevede. K libovolnému řádku determinantu můžeme přičíst ale i libovolný násobek jiného řádku, jak nám říká 5. pravidlo. Proto od prvního řádku můžeme odečíst druhý a čtvrtý řádek a následně přičíst třetí řádek:

$$(a + b + c + d) \begin{vmatrix} 1 - 1 + 1 - 1 & b - a + d - c & c - b + a - d & d - c + b - a \\ 1 & a & b & c \\ 1 & d & a & b \\ 1 & c & d & a \end{vmatrix}.$$

Nejen že se zbavíme jedniček, ale po vytknutí  $-1$  ze vzniklých výrazů získáme shodnou závorku, která násobí všechny prvky prvního řádku:

$$(a + b + c + d) \begin{vmatrix} 0 - (a - b + c - d) & (a - b + c - d) & -(a - b + c - d) & (a - b + c - d) \\ 1 & a & b & c \\ 1 & d & a & b \\ 1 & c & d & a \end{vmatrix},$$

přičemž je zřejmé, že nulu lze přepsat takto:  $0(a - b + c - d)$ . Nyní je jasné, že závorku lze vytknout před determinant:

$$= (a + b + c + d)(a - b + c - d) \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & a & b & c \\ 1 & d & a & b \\ 1 & c & d & a \end{vmatrix}.$$

Pokud bychom se snažili ze zbylého determinantu vytknout další ireducibilní polynom, naše snaha by se nám nevyplatila. Výsledek determinantu je totiž ireducibilní polynom. Proto nám nezbyde nic jiného, než determinant spočítat z definice nebo využít Laplaceův rozvoj, abychom dospěli ke kompletnímu rozkladu na součin polynomů.

Laplaceův rozvoj je další metodou sloužící k zrychlení výpočtu determinantu. Pomocí rozvoje jsme schopni determinant matice  $n$ -tého řádu upravit na součet determinantů řádů  $n - 1$ , což může v mnoha případech výpočet usnadnit. Definici Laplaceova rozvoje je možné nalézt např. v [1].

Ukážeme, jak k úpravě determinantu

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & a & b & c \\ 1 & d & a & b \\ 1 & c & d & a \end{vmatrix}$$

dojdeme pomocí rozvoje. Kvůli usnadnění výpočtu pomocí rozvoje upravíme determinant tak, aby jeden z jeho řádků nebo sloupců obsahoval co největší množství nul. Pokud se nám podaří takový řádek či sloupec sestavit pomocí známých úprav, budeme mít šanci, že se tím výpočet velmi zredukuje. Mnoho determinantů nižších řádů se vynuluje kvůli tomu, že je budeme násobit právě některými nulovými prvky sestaveného řádku nebo sloupce. V našem případě je nejvhodnější rozvoj provádět podle prvního řádku, který upravíme. Třetí sloupec přičteme ke čtvrtému sloupci a druhý sloupec přičteme ke třetímu sloupci:

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & a & a+b & b+c \\ 1 & d & d+a & a+b \\ 1 & c & c+d & d+a \end{vmatrix}.$$

Tím vzniklo v prvním řádku dostatečné množství nul. Použijeme Laplaceův rozvoj (viz [1]) a dostaneme:

$$(-1)(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & a+b & b+c \\ 1 & d+a & a+b \\ 1 & c+d & d+a \end{vmatrix}.$$

Náš výpočet tak přešel k výpočtu determinantu matice  $3 \times 3$ . Výsledkem je ireducibilní polynom  $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 2ac - 2bd$ . Celý rozklad pak vypadá následovně:

$$\begin{aligned} & \det(\text{Circ}(a, b, c, d)) = \\ &= a^4 - b^4 + c^4 - d^4 - 2a^2c^2 + 2b^2d^2 - 4a^2bd + 4ab^2c - 4bc^2d + 4acd^2 = \\ &= (a + b + c + d)(a - b + c - d)(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 2ac - 2bd). \end{aligned}$$

### 3. Kroneckerův součin

Co kdybychom některou proměnnou nebo proměnné v CM nahradili nulou? Tím se bezpochyby cirkulačnost matice nezmění. Podstatně se ale změní výsledný determinant, jak je vidět v ukázce, kde u determinantu CM 3. řádu došlo k nahrazení proměnné  $c$  nulou:

$$\det(\text{Circ}(a, b, 0)) = a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 + b^2 - ab).$$

My budeme věnovat pozornost především pravidelnému nahrazování proměnných nulou. Pokud nahradíme například v determinantu CM 4. řádu každou druhou proměnnou nulou, vznikne následující polynom v rozložené formě, který je roven druhé mocnině determinantu CM 2. řádu:

$$\det(\text{Circ}(a, 0, c, 0)) = \begin{vmatrix} a & 0 & c & 0 \\ 0 & a & 0 & c \\ c & 0 & a & 0 \\ 0 & c & 0 & a \end{vmatrix} = [(a + c)(a - c)]^2 = (\det(\text{Circ}(a, c)))^2.$$

Podobně náhradou čtyř z proměnných v CM 6. řádu obdržíme velmi podobný výsledek:

$$\det(\text{Circ}(a, 0, 0, d, 0, 0)) = [(a + d)(a - d)]^3 = (\det(\text{Circ}(a, d)))^3.$$

Nebo náhradou za každou druhou proměnnou, ovšem znovu s determinantem CM 6. řádu, obdržíme:

$$\begin{aligned} & \det(\text{Circ}(a, 0, c, 0, e, 0)) = \\ &= [(a + c + e)(a^2 + c^2 + e^2 - ac - ae - ce)]^2 = (\det(\text{Circ}(a, c, e)))^2. \end{aligned}$$

Zdá se, že s jakou frekvencí proměnné nahrazujeme nulami, takové získáváme mocniny determinantů CM nižších řádů. Naši hypotézu lze dokázat pomocí Kroneckerova součinu. Kroneckerův součin dvou matic dává matici třetí, kterou spočítáme pomocí následujícího schématu:

$$\begin{aligned}
 A_{m,n} \otimes B_{k,l} &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1l} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{k1} & b_{k2} & \cdots & b_{kl} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} a_{11}B_{k,l} & a_{12}B_{k,l} & \cdots & a_{1n}B_{k,l} \\ a_{21}B_{k,l} & a_{22}B_{k,l} & \cdots & a_{2n}B_{k,l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B_{k,l} & a_{m2}B_{k,l} & \cdots & a_{mn}B_{k,l} \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

My využijeme pro důkaz hypotézy větu (1) z článku [2], spojující determinant matice a Kroneckerův součin. Pro Kroneckerův součin čtvercových matic  $A_{m,m}$ ,  $B_{n,n}$  platí vztah:

$$\left| A_{m,m} \otimes B_{n,n} \right| = \left| (A_{m,m}) \right|^n \left| (B_{n,n}) \right|^m. \tag{1}$$

Vztah působí elegantně, ovšem velmi „nedobytně“. Proč něco takového platí? Pouze napovíme, že důkaz věty využívá vlastních čísel matic.

Pokud zmíněný vztah pro determinant Kroneckerova součinu aplikujeme na náš problém, je důkaz naší hypotézy velmi snadný. Chceme dokázat, že pro determinant obecné CM  $\text{Circ}(c_1, c_2, c_3, \dots, c_{n-1}, c_n)$  s prvky střídavě proloženými řadou  $k$  nul

$$\det(\text{Circ}(c_1, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{k \times}, c_2, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{k \times}, c_3, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{k \times}, \dots, \dots, c_{n-1}, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{k \times}, c_n))$$

bude platit, že výsledný determinant vyjde jakožto jeho  $k + 1$  mocnina

$$(\det(\text{Circ}(c_1, c_2, c_3, \dots, c_{n-1}, c_n)))^{k+1}.$$



Nejprve se zaměříme na nejjednodušší případ cirkulační matice rozšiřované nulou

$$\text{Circ}(a, 0, b, 0) = \begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ b & 0 & a & 0 \\ 0 & b & 0 & a \end{pmatrix}.$$

Rozšířenou cirkulační matici lze přepsat jako Kroneckerův součin původní cirkulační matice s jednotkovou maticí  $2 \times 2$ , protože nuly v jednotkové matici způsobí vložení nul a jedničky ponechání prvků původní matice:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & b \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ b \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ b & 0 & a & 0 \\ 0 & b & 0 & a \end{pmatrix}.$$

Je zřejmé, že i libovolnou matici

$$\text{Circ}(c_1, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{k \times}, c_2, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{k \times}, c_3, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{k \times}, \dots, c_{n-1}, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{k \times}, c_n)$$

lze vyjádřit jako Kroneckerův součin příslušné  $\text{Circ}(c_1, c_2, \dots, c_{n-1}, c_n)$  a jednotkové matice řádu o jeden vyšší než počet vložených nul, tedy  $k + 1$ :

$$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_{n-1} & c_n \\ c_n & c_1 & c_2 & \cdots & c_{n-2} & c_{n-1} \\ c_{n-1} & c_n & c_1 & \cdots & c_{n-3} & c_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_3 & c_4 & c_5 & \cdots & c_1 & c_2 \\ c_2 & c_3 & c_4 & \cdots & c_n & c_1 \end{pmatrix} \otimes \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{I_{k+1}}.$$

Nyní to už bude velmi snadné, jelikož jednotková matice  $I$  libovolného řádu má determinant roven jedné.

Použitím vztahu (1) dostáváme:

$$\begin{aligned}
 & \det(\text{Circ}(c_1, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{k \times}, c_2, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{k \times}, c_3, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{k \times}, \dots, \\
 & \quad \dots, c_{n-1}, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{k \times}, c_n)) = \\
 & = \det((\text{Circ}(c_1, c_2, c_3, \dots, c_{n-1}, c_n)) \otimes I_{k+1}) \\
 & = \det(\text{Circ}(c_1, c_2, c_3, \dots, c_{n-1}, c_n))^{k+1} (\det(I_{k+1}))^n \\
 & = \det(\text{Circ}(c_1, c_2, c_3, \dots, c_{n-1}, c_n))^{k+1}.
 \end{aligned}$$

Tím je důkaz hotov.

### Úloha pro čtenáře

Na závěr uvedme zajímavost, kterou jsme vypořizovali pro členy CM. Pokud se zaměříme na determinanty CM sudých řádů, nikde zde nenajdeme člen, ve kterém by byly obsaženy všechny proměnné. Naopak pro liché řády bude platit, že tu vždy bude člen se všemi proměnnými. Důkaz obou těchto vlastností ponecháváme jako úkol pro čtenáře. Napovíme jen, že k řešení je příhodné využít vlastnosti permutací a modulární aritmetiky.

### Poděkování

Děkuji doc. Ing. Lubomíře Dvořákové, Ph.D., za nabídku k napsání článku v souvislosti s mojí prací SOČ. Vážím si její obětavé pomoci se strukturou a celkovou formou článku.

### Literatura

- [1] Olšák, P.: *Determinant*. [online]. [cit. 01.03.2020].  
Dostupné z: <http://petr.olsak.net/bilin/determinant4.pdf>
- [2] Schäcke, K.: *On the Kronecker product*. [online]. [cit. 01.03.2020].  
Dostupné z: <https://www.math.uwaterloo.ca/~hwolkowi/henry/reports/kronthesisschaecke04.pdf>
- [3] Motl, L., Zahradník, M.: *Pěstujeme lineární algebru*. 3. vyd., Karolinum, Praha, 2002, <http://matematika.cuni.cz/zahradnik-pla.html>.

## Jak budu splácet hypotéku

*Pavel Pokorný, VŠCHT Praha*

*Jak budu splácet hypotéku?* To je otázka, kterou by si měl položit (a zodpovědět) každý, kdo uvažuje řešit otázku bydlení hypotékou. Tento článek vám sice neporadí, kde sehnat finanční prostředky na splátky hypotéky, ale podíváme se na matematické souvislosti spojené s výpočtem výše splátek.

### Úrok

Hypoteční úvěr (zkráceně hypotéka) je úvěr zajištěný zástavním právem k nemovitosti. Dlužník se s věřitelem dohodnou na výši půjčené částky (jistina), na době, kdy bude půjčka splacena, a na odměně za půjčku. Výše této odměny je obvykle úměrná výši jistiny v jistém poměru a udává se v procentech za rok (latinsky per annum, zkratka p. a.).

Např. když si půjčíme 100 000,- Kč s úrokem 4 % p. a., tak za rok dlužíme  $100\,000 \times 1,04 = 104\,000,-$  Kč. Pokud tuto částku nevrátíme, tak za další rok už dlužíme  $104\,000 \times 1,04 = 108\,160,-$  Kč. Pokud úrokovou míru (např. 4 % p. a.) vyjádříme koeficientem  $q$  (zde  $q = 1,04$ ), tak po  $n$  letech, při počáteční jistině  $a_0$ , dlužíme

$$a_n = a_0 q^n$$

a to je částka, kterou bychom měli věřiteli vrátit, pokud se domluvíme, že dluh splatíme najednou ve stanovenou dobu.

V případě hypotečního úvěru, který banka poskytuje fyzické nebo právnické osobě, se ale splácení většinou provádí v konstantních měsíčních splátkách. Uvažujme tedy časový krok jeden měsíc, půjčenou částku  $a_0$ , konstantní pravidelnou (měsíční) splátku  $s$ , úrokovou sazbu vyjádřenou (měsíčním) koeficientem  $q$ . Na začátku dlužíme bance  $a_0$  korun. Po jednom měsíci naroste dluh v poměru  $q$  a klesne o výši splátky  $s$ , tedy bude

$$a_1 = a_0 q - s.$$

Po dvou měsících bude dluh

$$a_2 = a_1 q - s = (a_0 q - s)q - s = a_0 q^2 - sq - s.$$

## MATEMATIKA

Po třech měsících bude

$$a_3 = a_2q - s = (a_0q^2 - sq - s)q - s = a_0q^3 - sq^2 - sq - s.$$

Po  $n$  měsících bude dluh

$$a_n = a_0q^n - s(1 + q + \dots + q^{n-1}). \quad (2)$$

Výraz v závorce je součet geometrické posloupnosti, pro který si odvodíme jednoduchý vztah.

### Součet geometrické posloupnosti

Označme

$$r = 1 + q + \dots + q^{n-1}.$$

To lze také zapsat

$$r = \sum_{i=0}^{n-1} q^i.$$

Je-li  $q = 1$ , je  $r = n$ . Pro  $q \neq 1$  vynásobíme tento vztah hodnotou  $q$

$$rq = q + q^2 + \dots + q^n,$$

odečteme  $r$  a dostaneme (protože většina členů se vyruší)

$$rq - r = q^n - 1$$

a po vydělení nenulovým výrazem  $(q - 1)$  dostaneme pro součet geometrické posloupnosti

$$r = \sum_{i=0}^{n-1} q^i = \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

### Výpočet splátky

Tedy výraz (2) pro dluh po  $n$  měsících bude

$$a_n = a_0q^n - s \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Naším cílem je nastavit výši splátky  $s$  tak, že po  $n$  pravidelných splátkách bude dluh zcela splacen, tedy

$$a_n = 0,$$

tedy

$$a_0q^n - s \frac{q^n - 1}{q - 1} = 0.$$

Tak dostáváme po jednoduché úpravě vztah mezi počátečním dluhem  $a_0$ , výší splátky  $s$ , počtem splátek  $n$  a úrokem vyjádřeným koeficientem  $q$  ve tvaru

$$s = a_0 \frac{q - 1}{1 - q^{-n}}.$$

Např. při půjčené částce  $a_0 = 100\,000,-$  Kč, době splácení 5 let, tedy  $n = 60$  měsíců (zde pro jednoduchost uvažujeme všechny měsíce stejně dlouhé; přesněji bychom tedy místo o měsíci měli hovořit o dvanáctině roku) a úrokové míře 4 % p. a., tedy koeficient odpovídající jednomu měsíci je  $q = 1,04^{\frac{1}{12}} \doteq 1,003\,27$ , vychází výše pravidelné měsíční splátky

$$s \doteq 1\,838,- \text{ Kč.}$$

Celková částka, kterou bance zaplatíme bude

$$ns = 110\,306,- \text{ Kč.}$$

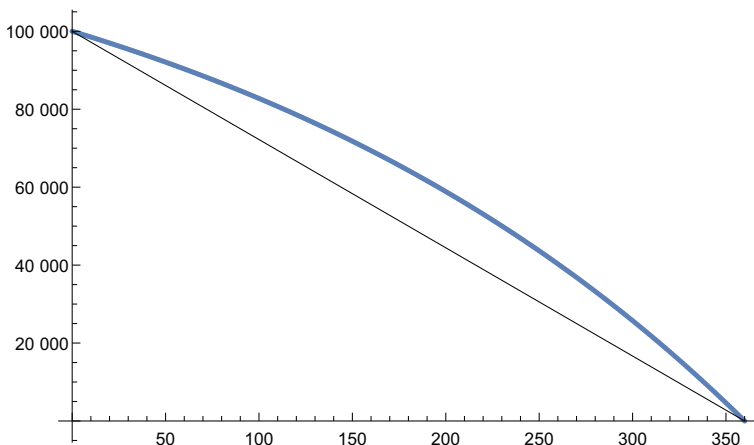
Některé banky kromě úroků vyžadují i další platby spojené s poskytnutím úvěru, např. poplatek za vyřízení úvěru, poplatek za vedení účtu, poplatek za odhad ceny nemovitosti, pojištění nemovitosti, pojištění schopnosti splácet. Aby bylo možné porovnávat nabídky úvěrů od různých bank, je rozumné sledovat číslo RPSN (roční procentní sazba nákladů). To je číslo, které udává procentuální podíl z půjčené částky, který musíme celkem zaplatit. Od 1. 1. 2002 jsou poskytovatelé úvěru v České republice povinni RPSN uvádět v nabídce úvěru.

Jaké důsledky bude mít prodloužení doby splácení úvěru? Např. pokud v našem příkladu zvýšíme dobu splácení z 5 na 30 let, tedy z 60 na 360 měsíců, bude měsíční splátka  $s \doteq 473,-$  Kč, tedy výrazně nižší než splátka 1 838,- Kč. Nepříznivý důsledek je, že celková zaplacená částka bude  $ns = 170\,389,-$  Kč. S prodlužováním doby splácení úvěru klesá měsíční splátka, ale roste celková splacená částka.

Obr. 1 ukazuje, jak dlužná částka klesá v čase z počáteční hodnoty  $a_0 = 100\,000,-$  Kč na konečnou hodnotu  $a_{360} = 0$ . Na obrázku je také zakreslena úsečka spojující krajní body, aby bylo dobře vidět, že časová závislost výše dluhu na čase není lineární, ale je mírně prohnutá nahoru (konkávní). To je dáno tím, že konstantní měsíční splátka se skládá ze

splátky úroku a splátky jistiny (úmoru). Na začátku je splátka úroku vyšší a dluh (hodnota nesplacené části jistiny) klesá pomalu, na konci období je splátka úroku nižší a dluh klesá rychleji.

Pro velmi velký počet splátek ( $n \rightarrow \infty$ ) se výše splátky blíží hodnotě  $a_0(q - 1)$ , tedy výši samotného úroku, ale celková splacená částka roste do nekonečna. Prostě splácíme pouze úrok, ale výše dluhu zůstává, tedy splácíme stále.



Obr. 1: Závislost výše dluhu v korunách na čase v měsících (silná prohnutá křivka), která ukazuje, že pokles není lineární, ale zpočátku je pomalejší a ke konci období je rychlejší. Pro srovnání je zakreslena ještě úsečka spojující krajní body

## Exponenciální růst a exponenciální pokles

Ukázali jsme si, že bez průběžných splátek nám bude dlužná částka v důsledku úroku exponenciálně růst v čase. Takovýto exponenciální růst pozorujeme nejen u dluhu, ale také v řadě biologických, chemických, fyzikálních i společenských jevů.

Např. pokud mají bakterie dostatek živin a příhodné podmínky, tak jejich počet roste exponenciálně s časem. Za určité období se každá buňka rozdvojí a z jedné buňky vzniknou dvě nové. To se v čase opakuje, dokud mají dost potravy.

Na podobném principu pracuje fotonásobič. To je přístroj, který umožňuje detekovat velice slabé elektromagnetické záření. Když dopadající foton uvolní z katody elektron, je tento elektron urychlován vloženým

elektrickým polem. Při dopadu na další elektrodu vyrazí větší počet elektronů, které jsou následně opět urychleny, aby vyvolaly emisi ještě většího počtu elektronů. Nakonec proud elektronů dopadá na anodu a je detekován. Celkové zesílení může dosáhnout až  $10^8$ , tak lze detekovat i jednotlivé fotony.

Podobně ve společenských hrách typu letadlo (anglicky Ponzi scheme) se organizátoři snaží přesvědčit účastníky, aby každý získal alespoň dva další účastníky (kteří zaplatí vstupní poplatek), aby inkasovali velké odměny.

Ve všech těchto případech je důležité, že k exponenciálnímu růstu může dojít pouze po přechodné počáteční období, dokud se nevyčerpají zdroje.

Společným rysem těchto systémů je, že časový přírůstek je úměrný stavu systému (počet jedinců nebo koncentrace). Matematicky takový dynamický systém můžeme popsat diferencí rovnicí

$$a_{n+1} = q a_n,$$

kteřá má řešení

$$a_n = a_0 q^n.$$

Nebo diferenciální rovnicí

$$\frac{da}{dt} = ka,$$

kteřá má řešení

$$a(t) = a(0)e^{kt}.$$

Pro  $q > 1$  či  $k > 0$  hovoříme o kladné zpětné vazbě. Výsledkem je exponenciální růst. Pro  $0 < q < 1$  či  $k < 0$  hovoříme o záporné zpětné vazbě a výsledkem je exponenciální pokles. V případě biologického systému dochází k odumírání jedinců. V případě chemického systému jde o rozpad chemickou reakcí prvního řádu. Mezi známé fyzikální systémy s tímto typem chování patří např. radioaktivní rozpad, vybíjení nabitého kondenzátoru přes konstantní odpor, chlazení horkého předmětu vedením tepla nebo snižování koncentrace látky difuzí. Čas, za který sledovaná veličina  $a(t)$  klesne na polovinu, se nazývá poločas rozpadu.

I v případě složitějších dynamických systémů, které nelze popsat jednoduchými lineárními diferencími nebo diferenciálními rovnicemi, je tento lineární popis užitečný alespoň jako aproximace v okolí rovnovážných stavů např. pro vyšetřování jejich stability.

## Permutace s opakováním a rozmisťování do přihrádek

*Emil Calda, MFF UK Praha*

**Abstrakt.** This article describes how to derive the number of ways in which  $n$  identical objects can be located in  $r$  boxes.

Nejprve si připomeneme, že permutace s opakováním z  $n$  prvků je uspořádaná  $n$ -tice, v níž je každý z daných  $n$  prvků zastoupen ve stanoveném počtu, každý aspoň jednou. Počet těchto permutací z prvků  $a_1, a_2, \dots, a_n$  obsahujících  $k_1$ -krát prvek  $a_1$ ,  $k_2$ -krát prvek  $a_2$ , ...,  $k_n$ -krát prvek  $a_n$ , budeme značit  $P'(k_1, k_2, \dots, k_n)$ . Pro  $k_1 = k_2 = \dots = k_n = 1$  dostáváme permutace bez opakování, které tak lze považovat za zvláštní případ permutací s opakováním. Jistě si také vzpomínáte, že pro počet  $P'(k_1, k_2, \dots, k_n)$  permutací s opakováním z  $n$  prvků platí

$$P'(k_1, k_2, \dots, k_n) = \frac{(k_1 + k_2 + \dots + k_n)!}{k_1! k_2! \dots k_n!}.$$

Jako cvičení na použití tohoto vzorce určíme počet způsobů, jimiž lze seřadit všechna písmena slova MATEMATIKA tak, aby v žádném jejich pořadí nebyla vedle sebe tři písmena A.

Hledaný počet způsobů určíme tak, že od počtu všech možných pořadí deseti písmen tvořících slovo MATEMATIKA odečteme počet těch pořadí, v nichž tři písmena A stojí vedle sebe.

Počet všech možných pořadí deseti písmen slova MATEMATIKA je zřejmě  $P'(2, 3, 2, 1, 1, 1)$ , neboť jde o permutace s opakováním, v nichž M se opakuje dvakrát, A třikrát, T dvakrát a zbývající písmena E, I, K každé jednou.

Počet pořadí z daných deseti písmen, v nichž tři písmena A stojí vedle sebe, zjistíme tak, že trojici AAA budeme považovat za jedno písmeno, které označíme třeba X, a určíme počet všech pořadí tvořených písmeny M, M, T, T, E, I, K, X. Protože počet těchto pořadí je roven  $P'(2, 2, 2, 1, 1, 1)$ , je hledaný počet způsobů roven rozdílu



$$\begin{aligned}
 P'(2, 3, 2, 1, 1, 1) - P'(2, 2, 1, 1, 1, 1) &= \\
 &= \frac{(2 + 3 + 2 + 1 + 1 + 1)!}{2! 3! 2! 1! 1! 1!} - \frac{(2 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1)!}{2! 2! 1! 1! 1! 1!} = \\
 &= \frac{10!}{2! 3! 2!} - \frac{8!}{2! 2!} = \frac{7 \cdot 8!}{2}.
 \end{aligned}$$

Ukážeme si nyní, jak lze těchto poznatků o permutacích s opakováním použít k řešení úloh o *rozmístování nerozlišitelných předmětů do přihrádek*.

Dejme tomu, že máme devět nerozlišitelných předmětů, které se mají rozmístit do pěti přihrádek tak, že některé mohou zůstat prázdné. Chceme určit, kolika způsoby to lze provést. Dvě rozmístění přitom považujeme za různá, existuje-li předmět, který není v obou rozmístěních ve stejné přihrádce. K vyřešení použijeme schéma, ve kterém každý z devíti nerozlišitelných předmětů je znázorněn kroužkem a každé ze čtyř přepážek mezi pěti přihrádkami odpovídá svislá čárka. Například rozmístění, v němž jsou v první přihrádce dva předměty, ve druhé tři, ve třetí jeden, ve čtvrté žádný a v páté tři, je znázorněno schématem

$$oo \mid ooo \mid o \mid \mid ooo.$$

Podobně schéma

$$o \mid o \mid o \mid o \mid ooooo$$

představuje rozmístění, ve kterém je v první, ve druhé, ve třetí i ve čtvrté přihrádce jeden předmět a zbývajících pět je v přihrádce páté.

Je zřejmé, že každému rozmístění devíti nerozlišitelných předmětů do pěti přihrádek odpovídá jediné takovéto schéma a že také obráceně každému takovému schématu odpovídá jediné rozmístění těchto předmětů; znamená to, že počet možných rozmístění je roven počtu schémat. Protože však každé takovéto schéma je vlastně permutace s opakováním ze dvou prvků, z nichž jeden se opakuje devětkrát a druhý čtyřikrát, máme výsledek: Počet způsobů rozmístění devíti nerozlišitelných předmětů do pěti přihrádek, z nichž některé mohou zůstat prázdné, je dán číslem  $P'(9, 4) = \frac{13!}{9! 4!}$ .

Jak se tento výsledek změní, budeme-li požadovat, aby žádná přihrádka prázdná nebyla? Dosáhneme toho tak, že do každé z pěti přihrádek vložíme právě jeden z devíti předmětů (je jedno který, protože

jsou nerozlišitelné) a zbývající čtyři rozmístíme libovolně. Dostaneme tak: Počet způsobů rozmístění devíti nerozlišitelných předmětů do pěti přihrádek tak, že žádná nezůstane prázdná, je dán číslem  $P'(4, 4) = \frac{8!}{4!4!}$ .

Snadným zobecněním obou předcházejících úloh dostaneme:

Počet způsobů rozmístění  $n$  nerozlišitelných předmětů do  $r$  přihrádek v případě, že

a) připouštíme prázdné přihrádky, je:

$$P'(n, r - 1) = \frac{(n + r - 1)!}{n!(r - 1)!};$$

b) nepřipouštíme prázdné přihrádky, je:

$$P'(n - r, r - 1) = \frac{(n - 1)!}{(n - r)!(r - 1)!}.$$

Poznamenejme ještě, že je zbytečné si tyto vzorce pamatovat; uvedeným způsobem si je v případě potřeby jistě odvodíte sami. Můžete si to ověřit hned v následující úloze.

**Úloha.** Určete, kolika způsoby se dá mezi sedm dětí rozdělit dvacet modrých a patnáct červených kuliček, jestliže kuličky téže barvy jsou nerozlišitelné a

- připouštíme, že některé děti nemusejí dostat žádnou kuličku;
- každé dítě dostane aspoň dvě modré a jednu červenou kuličku.

*Řešení.* a) Nemusí-li některé děti dostat žádnou kuličku, dá se dvacet modrých kuliček mezi ně rozdělit  $P'(20, 6) = \frac{26!}{20!6!}$  způsoby a patnáct kuliček červených  $P'(15, 6) = \frac{21!}{15!6!}$ . Protože každému rozdělení modrých kuliček lze přiřadit  $P'(15, 6)$  způsobů rozdělení kuliček červených, je hledaný počet způsobů rozdělení kuliček obou barev roven součinu  $P'(20, 6) \cdot P'(15, 6)$ .

b) Aby požadovaná podmínka byla splněna, dáme každému dítěti právě dvě kuličky modré a právě jednu červenou; zbývajících šest modrých a osm červených rozdělíme libovolně. Počet způsobů rozdělení kuliček obou barev je v tomto případě roven součinu  $P'(6, 6) \cdot P'(8, 6)$ .

## Literatura

- [1] Calda, E., Dupač, V.: *Kombinatorika, pravděpodobnost, statistika (Matematika pro gymnázia)*. Prometheus, Praha, 2008.
- [2] Vilenkin, N. J.: *Kombinatorika*. SNTL, Praha, 1977.

## Záření v atmosféře Země – od rozptylu a absorpce ke globálnímu oteplení

*Jan Bednář, Jaroslav Kopáček, Michal Žák  
Katedra fyziky atmosféry MFF UK, Praha*

Obdobně jako v minulém čísle tohoto časopisu nabízíme čtenáři zajímavé čtení z knihy *Jak vzniká počasí* [1].

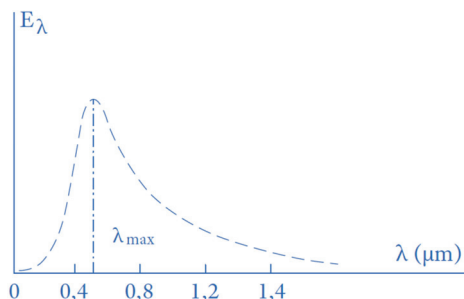


V tomto článku budeme mimo jiné hledat odpovědi na otázky, proč je obloha někdy modrá a jindy spíše bělavá, jak mohou vzniknout přízemní mrazíky a čím je způsoben skleníkový efekt. Původní text knihy byl pro potřeby tohoto článku mírně upraven.

## SLUNEČNÍ ZÁŘENÍ

Sluneční záření, jež představuje základní zdroj energie pro veškeré procesy probíhající v atmosféře a na zemském povrchu, lze rozdělit na dvě části, a to sluneční záření přímé a rozptýlené (difuzní). *Přímé sluneční záření* přichází do oka pozorovatele od slunečního disku a vzhledem k velké vzdálenosti Země od Slunce tvoří svazek prakticky rovnoběžných paprsků. *Rozptýlené sluneční záření* vzniká následkem rozptylu přímého slunečního záření na molekulách plynných složek vzduchu, na vodních kapičkách, ledových částicích a na nejrůznějších aerosolových částicích vyskytujících se v zemském ovzduší. Rozptýlené sluneční záření pozorujeme jako záření oblohy a bez něj by se nebeská klenba jevila i během dne černá s ostře zářícím slunečním diskem a s hvězdami.

Sluneční záření je elektromagnetické záření o charakteristickém spektru vlnových délek  $\lambda$ , které se před vstupem do zemské atmosféry přibližně podobá spektru dokonale černého tělesa o povrchové teplotě přibližně 6 000 K. Zastoupení jednotlivých vlnových délek v tomto spektru si můžeme znázornit *spektrální funkcí*  $E_\lambda$ , kterou vidíme na obr. 1.



Obr. 1 Znárodnění spektra slunečního záření před jeho vstupem do zemské atmosféry

Sluneční záření můžeme rozdělit na:

1. *ultrafialové sluneční záření* s vlnovými délkami menšími než 400 nm, které tvoří před vstupem do zemské atmosféry energeticky asi 7 % celkového slunečního záření a je z velké části absorbováno atmosférickým ozonem ve stratosféře,
2. *viditelné sluneční záření* s vlnovými délkami přibližně od 400 do 750 nm (asi 48 % energie celkového slunečního záření před vstupem do atmosféry) vytvářející spektrum barev od fialové po červenou,

3. *infračervené sluneční záření*, které má vlnové délky větší než 750 nm a před vstupem do atmosféry představuje asi 45 % energie slunečního záření.

Vlnová délka  $\lambda_{\max} \doteq 475$  nm odpovídající před vstupem do atmosféry maximu spektrální funkce  $E_\lambda$  (viz obr. 1) se nalézá ve viditelné oblasti spektra a odpovídá nazelenale modrému barevnému odstínu. Základní veličinou při popisu přímého slunečního záření je jeho intenzita  $I$ , kterou definujeme jako množství zářivé energie, jež za jednotku času dopadá na jednotkovou plochu orientovanou kolmo ke slunečním paprskům. Množství přímého slunečního záření dopadající za jednotku času na jednotkovou plochu horizontálního zemského povrchu nazýváme *insolací*  $I'$  a z elementární geometrické úvahy okamžitě vyplývá vztah

$$I' = I \sin \alpha \quad \text{nebo} \quad I' = I \cos \theta, \quad (3)$$

kde  $\alpha$  značí úhlovou výšku Slunce nad ideálním (geometrickým) obzorem a  $\theta$  úhlovou vzdálenost Slunce od zenitu (tzv. zenitový úhel Slunce). Ve vztazích (3) představuje  $I$  intenzitu přímého slunečního záření na zemském povrchu, kterou lze vyjádřit vzorcem

$$I = I_* \frac{R_{\text{OZ}}^2}{R_Z^2} P, \quad (4)$$

v němž  $I_*$  značí tzv. *solární konstantu* (solární konstanta – intenzita slunečního záření vně zemské atmosféry ve vzdálenosti od Slunce, jež se rovná střední vzdálenosti Země–Slunce,  $I_* \doteq 1,36 \text{ kW} \cdot \text{m}^{-2}$ ),  $R_{\text{OZ}}$ , resp.  $R_Z$  střední, resp. okamžitou vzdálenost Země od Slunce a  $P$  propustnost zemské atmosféry pro přímé sluneční záření.<sup>1)</sup> Maximální vzdálenost Země od Slunce je přibližně 152 milionů km a minimální vzdálenost asi 147 milionů km. Hodnota faktoru  $R_{\text{OZ}}^2/R_Z^2$  proto v průběhu roku kolísá v rozmezí zhruba  $\pm 0,035$  kolem jedné, což znamená, že intenzita přímého slunečního záření při vstupu do zemské atmosféry  $I_0$  se může od

<sup>1)</sup>Známe-li hodnotu solární konstanty, můžeme zhruba určit celkový příkon  $P$  slunečního záření dopadajícího na Zemi. Vzhledem k významu a fyzikální jednotce solární konstanty ( $\text{kW} \cdot \text{m}^{-2}$ ) stačí, když ji vynásobíme obsahem „zemského kotouče“ (kruhu o zemském poloměru  $R_{\text{ZE}}$ ). Pro příkon pak dostáváme  $P = I_* S = I_* \pi R_{\text{ZE}}^2 = 1,36 \cdot 10^3 \cdot 3,14 \cdot (6,38 \cdot 10^6)^2 \text{ W} \doteq 2 \cdot 10^{17} \text{ W}$ . Pro zajímavost dodejme, že je to téměř o 4 řády (10 000krát) více než výkon, se kterým disponuje současná lidská civilizace. Na čtenáři necháváme případný řádový výpočet výkonu Slunce, který je spojený s elektromagnetickým zářením. (Vyjde  $P \doteq 4 \cdot 10^{26} \text{ W}$ .)

solární konstanty  $I_*$  maximálně lišit asi o 3,5 % její hodnoty. Nejblíže je Země ke Slunci (perihelium, přísluní) na počátku ledna, v největší vzdálenosti (afelium, odsluní) se nalézá na počátku července. Přímé sluneční záření je v atmosféře zeslabováno rozptylem a absorpcí.

## Rozptyl

Pokud jde o *rozptyl*, povšimněme si jeho dvou základních typů, a to rozptylu *na molekulách vzduchu* (molekulární rozptyl) a rozptylu *na větších částicích* přítomných v atmosféře (vodní kapičky, ledové částice, různé prachové částice apod.). Účinnost molekulárního rozptylu  $i$  je úměrná čtvrté mocnině převrácené hodnoty vlnové délky  $\lambda$  rozptylovaného záření, tj.

$$i \approx \frac{1}{\lambda^4}, \quad (5)$$

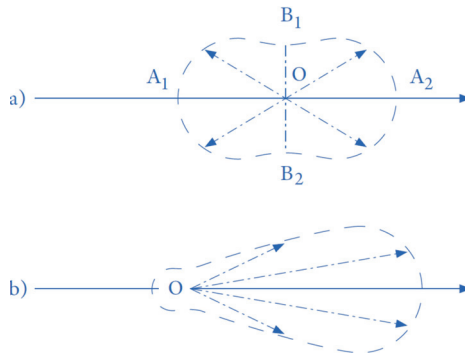
a z tohoto důvodu jsou v rozptýleném slunečním záření nejvíce zastoupeny krátké vlnové délky příslušející v oblasti viditelné části slunečního spektra především fialové a modré barvě. Naproti tomu rozptyl slunečního záření na částicích, jež jsou ve srovnání s molekulami o několik řádů větší, má vzhledem k vlnové délce neutrální charakter, tzn., že různé vlnové délky jsou stejně účinně rozptylovány a rozptýlené světlo má přirozenou bílou barvu. Z těchto skutečností okamžitě vyplývá vysvětlení modré až modrofialové barvy bezoblačné oblohy, působené slunečním zářením rozptýleným především molekulami vzduchu, a bílé barvy ozářených oblaků, neboť v tomto případě vnímáme sluneční záření rozptýlené zejména oblačnými kapkami nebo ledovými částicemi. V případě výraznějšího zakalení atmosféry prachovými částicemi nebo produkty kondenzace vodní páry (drobné kapičky), které rozptylují sluneční záření neutrálně vzhledem k vlnové délce, je modrá (modrofialová) barva oblohy tlumena a nebeská klenba nabývá bělavého vzhledu. Naproti tomu tmavě modrá až fialová barva svědčí o velké průzračnosti vzduchu.

Další rozdíl mezi rozptylem slunečního záření na molekulách vzduchu a na větších částicích spočívá v odlišném rozložení účinností rozptylu do různých směrů vzhledem ke směru dopadajících přímých slunečních paprsků. Na obr. 2a vidíme prostorový diagram, tzv. rozptylovou indikatrix, kde vodorovná šipka znázorňuje směr dopadajících přímých slunečních paprsků, rozptylující element objemu vzduchu se nalézá v bodě  $O$  a zakreslená křivka znázorňuje rozložení intenzity rozptýleného záření do různých směrů. Z tohoto obrázku je patrné, že molekulární rozptyl má

symetrický charakter vzhledem k rovině kolmé ke směru dopadajících paprsků a procházející bodem  $O$ , tj. množství záření rozptylovaného do směrů, které se směrem původního paprsku svírají úhel menší než  $90^\circ$ , je stejné jako množství záření rozptylovaného do směrů svírajících se směrem tohoto paprsku úhel větší než  $90^\circ$ . Na obr. 2a dále platí

$$|OA_1| = |OA_2| = 2|OB_1| = 2|OB_2|,$$

tzn., že rozptyl kolmo na směr paprsků přímého slunečního záření je polovinou rozptylu přímo do jejich směru nebo do směru přesně opačného.



Obr. 2 Prostorový diagram rozptylu slunečního záření a) molekulární rozptyl, b) rozptyl na aerosolových částicích

Obr. 2b ukazuje typický rozptyl slunečního záření na částicích řádově větších ve srovnání s molekulami vzduchu. Jak je patrné, má rozptyl v tomto případě silně asymetrický charakter, většina rozptýleného záření směřuje do poměrně úzkého úhlu kolem směru původních přímých slunečních paprsků. Skutečnost, že větší (aerosolové, oblačné) částice rozptylují svazek rovnoběžných slunečních paprsků především směrově dopředu, může na první pohled vypadat podivně, ale fyzikální vysvětlení je evidentní. Jde především o působení ohybu paprsků na konturách optického průřezu těchto částic kolmému ke směru dopadajících paprsků.

## Absorpce

Druhým činitelem ovlivňujícím průchod slunečního záření atmosférou je absorpce. Bezoblačná atmosféra absorbuje sluneční záření poměrně slabě, asi 15–20 % z jeho vstupujícího množství. Na této absorpci se největší měrou podílí vodní pára, a to především v infračervené oblasti spektra, ultrafialové záření je intenzivně absorbováno atmosférickým ozonem

a z dalších plynných složek ovzduší se na zmíněné absorpci určitou mírou podílí zejména oxid uhličitý. Pokud by si čtenář přál poněkud blíže se seznámit s matematickým popisem průchodu slunečních paprsků zemskou atmosférou, lze ho odkázat např. na publikaci [2].

Označíme-li  $J$  množství rozptýleného (difuzního) slunečního záření dopadající za jednotku času na jednotku plochy horizontálního zemského povrchu, potom součet

$$S = I' + J,$$

v němž  $I'$  představuje insolaci, nazýváme *globálním slunečním zářením*. Teplo, jež získává jednotka plochy zemského povrchu za jednotku času absorbováním slunečního záření, je zřejmě rovno

$$S(1 - A),$$

kde  $A$  značí *albedo (odrazivost)* zemského povrchu definované jako poměr množství slunečního záření odraženého a dopadlého.

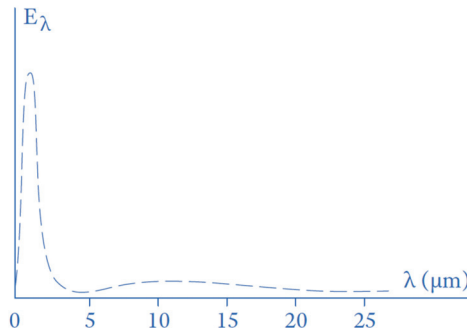
Z reálných povrchů má v přírodě největší albedo sněhová pokrývka (popř. zaledněné oblasti), neboť čistý čerstvě napadlý sníh odráží asi 70 % a někdy i více z dopadajícího slunečního záření. Ostatní přirozené povrchy půdy a vegetačního krytu mají albedo většinou v rozmezí 0,05–0,30 (tj. odrážejí 5–30 % dopadajícího slunečního záření), přičemž relativně vysoké hodnoty mají zejména povrchy písků (pouště) nebo povrchy porostlé řídkou suchou trávou. Albedo vodních ploch velmi výrazně závisí na výšce Slunce nad obzorem. Velké albedo při malých výškách Slunce se např. k večeru projevuje zrcadlovým leskem vodních ploch a malé albedo při polohách Slunce vysoko nad obzorem naopak jejich tmavým odstínem v poledních hodinách.

Poměr množství slunečního záření odraženého Zemí jako planetou do kosmického prostoru ku množství téhož záření vstupujícího do zemské atmosféry se nazývá planetární albedo Země a podle družicových měření je přibližně rovno 0,30, tzn., že Země jako celek odráží zhruba 30 % slunečního záření, které na ni dopadá. Na planetárním albedu Země má největší podíl odraz slunečního záření od oblaků, jejichž vlastní albedo se nejčastěji pohybuje v rozmezí 0,50–0,80 (tj. 50–80 %), dále se na něm podílí zpětný rozptyl slunečního záření na molekulách plynných složek vzduchu (rozptyl směrem vzhůru, který je u molekulárního rozptylu slunečního záření stejně velký jako rozptyl k zemskému povrchu) a v oblastech bez oblačné pokrývky i vlastní albedo zemského povrchu.



## DLOUHVLNNÉ ZÁŘENÍ, SKLENÍKOVÝ EFEKT, GLOBÁLNÍ OTEPLENÍ

Kromě absorbování slunečního záření zemský povrch sám vyzařuje dlouhovlnné neboli tepelné záření a tím se ochlazuje. Sluneční i zmíněné dlouhovlnné záření jsou fyzikální podstatou elektromagnetická záření, ale liší se vlnovými délkami. Zatímco největší část slunečního záření přísluší vlnovým délkám  $10^{-7}$ – $10^{-6}$  m a zastoupení vlnových délek větších než  $5 \cdot 10^{-6}$  m je ve spektru slunečního záření z energetického hlediska prakticky zanedbatelné, je dlouhovlnné záření nejvíce tvořeno vlnovými délkami řádově  $10^{-5}$ – $10^{-4}$  m. Společné schematické znázornění spektra vlnových délek slunečního a dlouhovlnného záření vidíme na obr. 3.



Obr. 3 Spektrum slunečního a dlouhovlnného záření

Právě zmíněná schematicnost zobrazení spočívá v tom, že poměr výšek dvou znázorněných maxim (ostré maximum v oblasti vlnových délek odpovídajících slunečnímu záření a ploché maximum pro vlnové délky příslušející dlouhovlnnému záření) je v realitě velmi výrazně větší než lze technicky zobrazit na tomto obrázku.

Kdyby zemský povrch vyzařoval jako dokonale černé těleso, bylo by množství záření dáno Stefanovým–Boltzmannovým zákonem

$$G = \sigma T_g^4, \quad (6)$$

kde  $G$  značí množství záření za jednotku času jednotkou plochy povrchu černého tělesa o teplotě  $T_g$  (v kelvinech) a  $\sigma$  představuje Stefanovu–Boltzmannovu konstantu. Pro reálný zemský povrch však spíše platí vztah

$$G = \varepsilon \sigma T_g^4, \quad (7)$$

v němž  $\varepsilon$  je kladné číslo bez fyzikálního rozměru menší než jedna, které nazýváme *vyzařovací schopnost* daného povrchu nebo též *emisivita*. Protože u většiny typů zemského povrchu je  $\varepsilon$  pouze o málo menší než jedna, lze v případech hrubšího přiblížení i pro reálný zemský povrch používat  $\varepsilon = 1$  a považovat tak zemský povrch v oboru dlouhovlnného záření za prakticky černý.

Dlouhovlnné záření vyzařuje i zemská atmosféra a tok této radiace směřující dolů a měřený v úrovni zemského povrchu nazýváme *zpětné záření atmosféry*. Na vzniku zpětného záření se z plyných složek atmosféry zdaleka největší měrou podílí vodní pára, avšak nezanedbatelný doplňkový účinek přísluší oxidu uhličitému. Ostatní plynné složky přirozeného ovzduší přispívají ke zpětnému záření velmi málo, ale jeho silným zdrojem jsou oblaky. Označíme-li  $E$  tok zpětného záření dopadající na jednotku plochy zemského povrchu, potom podle tzv. Kirchhoffova zákona tato jednotka plochy absorbuje za jednotku času množství dlouhovlnného záření rovné  $\varepsilon E$ . Protože však, jak jsme již uvedli, hodnota vyzařovací schopnosti  $\varepsilon$  je pro většinu typů reálného zemského povrchu poměrně blízká jedné, lze v prvním („hrubém“) přiblížení předpokládat, že všechno dopadající zpětné záření je zemským povrchem absorbováno.

Pro radiční režim zemského povrchu má velký význam tzv. *efektivní vyzařování*  $E^*$ , které za zjednodušujícího předpokladu  $\varepsilon = 1$  zavádíme jako rozdíl vlastního vyzařování zemského povrchu  $G$  a zpětného záření atmosféry  $E$ , tj.

$$E^* = G - E, \tag{8}$$

Protože vlastní vyzařování zemského povrchu  $G$  je zpravidla větší než zpětné záření atmosféry  $E$ , působí efektivní vyzařování radiční ochlazování zemského povrchu a v noci, kdy chybí kompenzující příkon slunečního záření, tak může docházet k vytváření přízemních radičních inverzí teploty nebo za vhodných podmínek ke vzniku přízemních mrazků radičního původu. Efektivní vyzařování výrazně roste se zvětšující se teplotou zemského povrchu, klesá s rostoucím obsahem vodní páry ve vzduchu a je výrazně zeslabováno oblačností. Vysokých hodnot proto dosahuje při jasné obloze.

Dlouhovlnné záření směrem k zemskému povrchu působí jeho oteplování a vytváří tak tzv. skleníkový efekt zemské atmosféry. Tento pojem však představuje jen formální analogii k působení stěn skleníku, které – obdobně jako zemská atmosféra – relativně dobře propouštějí sluneční záření dovnitř, avšak významně omezují únik dlouhovlnné tepelné radi-

ace ven. Oteplující vliv skleníku však souvisí též s tím, že jeho stěny brání zchlazování působenému v přírodě vnější ventilací. V současné době je průměrná teplota zemského povrchu v planetárním měřítku vyhodnocována jako blížká  $15\text{ }^{\circ}\text{C}$  ( $288\text{ K}$ ). Jednoduché výpočty však spolehlivě ukazují, že v případě neexistence skleníkového efektu, tj. absence zpětného záření atmosféry, by tato teplota byla nižší o přibližně  $33\text{ K}$ , tj. dosahovala by asi  $-18\text{ }^{\circ}\text{C}$  ( $255\text{ K}$ ).

Ze složek zemské atmosféry se na vzniku skleníkového efektu zdaleka největší měrou podílí vodní pára, popř. též voda zkondenzovaná v oblacích. Menšinový, avšak zdaleka nikoli zanedbatelný podíl však přísluší oxidu uhličitému  $\text{CO}_2$ . Ke kontinuálnímu růstu obsahu tohoto plynu v zemské atmosféře dochází po celou dobu průmyslové éry lidské civilizace. Je to způsobeno především rostoucí intenzitou nejružnějších spalovacích procesů (energetika, průmysl, doprava atd.). Pokud by tento trend pokračoval i v bezprostřední budoucnosti, lze se obávat zesílení skleníkového efektu a určitého oteplení zemského povrchu s velice závažnými důsledky. Obecně se to dnes označuje jako *problém globálního oteplení (oteplování)*.

Zemská atmosféra je však velice dynamickým systémem a každá změna v globálním rozložení teploty se pak nutně musí projevit změnami v atmosférické cirkulaci. Je zřejmé, že právě zmíněné globální oteplení by se mělo více projevit v polárních oblastech, a to především z důvodu zdejší nižší úrovně přirozeného energetického příkonu slunečního záření. Je velmi pravděpodobné, že s touto skutečností se setkáváme již dnes. Oteplení Arktidy a Antarktidy se evidentně projeví zmenšením rozsahu polárního zalednění a následným zvýšením hladiny světového oceánu s těžkými důsledky pro nízko položené pobřežní oblasti a ostrovy. Dojde však i ke snížení teplotního kontrastu mezi polárními a rovníkovými oblastmi, jenž je do značné míry odpovědný za současně převládající tzv. zonální typ atmosférické cirkulace, tj. za skutečnost, že převažující atmosférická cirkulace probíhá podél rovnoběžek. Důsledkem zmíněného globálního oteplení pak zřejmě bude podstatné zhoršení podmínek přenosu vláhly z oceánských do kontinentálních oblastí zemského povrchu a zintenzivnění tzv. meridionálních složek atmosférické cirkulace podmiňujících např. vpády arktického (antarktického) vzduchu do mírných zeměpisných šířek nebo naopak vysouvání se tropického vzduchu směrem k polárním oblastem. Evidentními důsledky by pak např. v řadě oblastí Země byl růst suchosti klimatu, mnohde sklon k větší variabilitě průběhu počasí a zřejmě i vzrůst četností výskytu extrémnějších počasí-

vých forem (anomální srážky, bouře, extrémně suchá období, jarní nebo podzimní mrazové epizody apod.).

Antropogenní příčiny zesílení skleníkového efektu zemské atmosféry a s tím související rizika tzv. globálního oteplení se však dnes neuvažují jen v souvislosti s růstem obsahu  $\text{CO}_2$  v ovzduší. Obdobný, a z hlediska kvantitativního hodnocení důsledků zřejmě srovnatelný význam má celý soubor tzv. skleníkových (radiačně aktivních) plynů, jejichž emise se dnes dostávají z antropogenních příčin do vzduchu. V této souvislosti jde zejména o metan ( $\text{CH}_4$ ), oxidy dusíku (především oxid dusný  $\text{N}_2\text{O}$ ) nebo řadu dalších látek typu halogenovaných uhlovodíků. Mezi skleníkové plyny patří i ozon.

Našemu čtenáři je zřejmě známo, že zde stručně připomenutá problematika antropogenního, tzv. globálního oteplení je dnes považována za zcela zásadní problém na současném stupni civilizačního rozvoje lidské společnosti. Evidentně obsahuje podstatná a velmi znepokojující rizika, a to nejen pro člověka, ale doslova pro celý globální ekosystém Země.

#### Literatura

- [1] Kopáček, J., Bednář, J., Žák, M.: *Jak vzniká počasí*. Karolinum, Praha, 2020.
- [2] Bednář, J.: *Meteorologie: Úvod do studia dějů v zemské atmosféře*. Portál, Praha, 2003.

## Fyzikální toulky: Křížem krážem republikou

*Věra Koudelková, KDF MFF UK, Praha*

*Na webovém portálu [matfyz.cz](http://matfyz.cz) vycházel toto léto seriál o fyzikálních zajímavostech Čech, Moravy a Slezska. Se svolením autorky vám přinášíme jeden díl tohoto seriálu [1]. Nechte se jím inspirovat a těšte se fyzikou kolem vás!*

### **Kde svisle není svisle**

Přibližně 5 km jihozápadně od centra dnešní Karviné stojí nejmikmější stavba u nás. Kostel sv. Petra z Alkantary [2] byl postaven v roce 1736 na mírném vršku v centru tehdejšího města Karvinná, kde nahradil původní dřevěný kostel sv. Martina. Obrat v rozvoji původně nenápadné

zemědělské vsi založené ve 13. století znamenal nález černého uhlí z konce 18. století. Městem se Karvinná stala v roce 1923, před 2. světovou válkou zde žilo přes 20 tisíc obyvatel. A to až do roku 1949, kdy byli kvůli těžbě obyvatelé původního města a několika sousedních obcí přesídlení – vznikla tak dnešní Karviná s pozměněným názvem.

Z původního města s mnoha reprezentativními budovami se do dnešní doby zachoval jen jeden z kostelů – ten dnes stojí osamocen mezi loukami, lesy a odkališti v místní části Karviná-Doly jako památka na kdysi prosperující město. Od roku 1854 bylo pod kostelem vytěženo 27 slojí černého uhlí o celkové mocnosti skoro 50 m. Kostel, který původně stál na mírném vršku, je dnes na rovině – během několika desítek roků poklesl o 37 metrů a naklonil se o  $6,8^\circ$  jižním směrem. Jen dvě desetiny stupně náklonu mu tak chybí, aby dohnal slavnou věž v Pise. Pokud vejdete dovnitř, budete mít pocit, že na vás zdi padají a že se vše houpe jako na moři. Svisle jsou zde jen pověšené lustry.



Kostel sv. Petra z Alkantary  
v Karviné



Socha před šikmým kostelem

### Kde se potkává geometrie s fyzikou

Květná zahrada v Kroměříži [3] je zapsána v seznamu UNESCO. Založil ji v 2. polovině 17. století biskup Karel II. z Lichtenštejna-Kastelkornu v geometrickém stylu francouzské zahrady. Z leteckého pohledu je vidět pravidelná symetrie zahrady – její severní část tvoří čtverec o straně 220 m, který je rozdělen na 4 menší čtverce, z nichž každý je tvořen dal-

## FYZIKA

šími 4 čtverci. Uprostřed celého tvaru je osmiboká rotunda. Za návštěvu určitě stojí kolonáda na jedné straně zahrady. Původně sloužila jako hlavní vstup do květné zahrady, historický vchod zdobí pozvání „Vstupte, hosti!“ i v latině „Ingredere Hospes!“. Uvnitř kolonády je 44 soch představujících řecké a římské bohy i významné osobnosti tehdejšího veřejného života. Z fyzikálního pohledu jsou ale zajímavější konce kolonády, které díky svému tvaru slouží jako akustické zrcadlo. Pokud promluvíte do zdi na jedné straně, uslyší vás na druhém konci 244 m daleko.

Budete-li zde v době, kdy je otevřená rotunda uprostřed zahrady, můžete navštívit i Foucaultovo kyvadlo. To sem umístil v roce 1908 místní gymnaziální profesor František Nábělek – zlatá koule demonstrující zemskou rotaci visí na provázku délky 25 m, svou dráhu kreslí do jemného písku na kamenném stole.



Květná zahrada v Kroměříži



„Akustické zrcadlo“



Kolonáda v Květné zahradě

## Kde je zima i v létě

V České republice je několik míst, která jsou i v létě výrazně chladnější než jejich okolí. Jedním z nich je rokle Apatyka na Kokořínsku [4]. Ta se jmenuje podle léčivých bylin, které se tu hojně sbíraly. V úzké hluboké rokli dochází k teplotní inverzi – na jaře se prohřívá jen horní vrstva vzduchu, proto tu zůstává dlouho ležet sníh. V létě sem stéká studený vzduch z okolí a teplý stoupá nahoru. Tím je způsobena vegetační inverze – chladnomilné druhy, které jsou typické pro vyšší nadmořské výšky, rostou hluboko v rokli. Naopak teplomilné rostliny z nízkých nadmořských výšek rostou nad rokli.

Podobný jev můžete pozorovat i v soutěsce Sibiř v Teplických skalách – průměrná roční teplota se zde pohybuje jen okolo 7 °C.

## Kde voda končí ve třech mořích

Hora Klepý neboli Klepáč na hranici České republiky a Polska v pohoří Králický Sněžník je vysoká 1145 m, přičemž česká strana je o metr nižší. Polský název jinak nevýznamného vrcholu napovídá, proč stojí za to se sem vydat: Trójmorski Wierch. Pokud vylijete vodu na západní (polský) svah, steče do Kladské Nisy a doteče do Baltského moře. Voda z východních svahů steče do řeky Moravy, která patří do úmoří Černého moře. A z jižních svahů vodu odvádí Lipkovský potok, který se vlévá do Tiché Orlice, voda tak doteče do Severního moře. Vrchol je proto občas označován i jako střecha Evropy.

## Zdroje

- [1] Fyzikální toulky: Křížem krážem republikou: <https://www.matfyz.cz/clanky/fyzikalni-toulky-krizem-krazem-republikou>
- [2] Kostel sv. Petra z Alkantary v Karvině: <https://www.karvina.cz/mesto-karvina/sikmy-kostel-sv-petra-z-alkantary-rarita-v-celem-cesku>
- [3] Květná zahrada v Kroměříži: <https://www.kvetnazahrada-kromeriz.cz/cs>
- [4] Soutěska Apatyka na Kokořínsku: <https://www.kudyznudy.cz/aktivity/rokle-apatyka-na-kokorinsku>

### Středoevropská olympiáda v informatice CEOI 2020

*Pavel Töpfer, MFF UK Praha*



Rok 2020 nebyl pro mezinárodní předmětové olympiády příznivý. S ohledem na probíhající celosvětovou epidemii koronaviru byla většina plánovaných a již připravených mezinárodních soutěží zcela zrušena nebo proběhla nějakým náhradním způsobem distančně. Vzácnou výjimkou se tak stala letošní Středoevropská olympiáda v informatice (CEOI – Central European Olympiad in Informatics), jejíž 27. ročník se uskutečnil klasickou prezenční formou, jak jsme byli u olympiád po léta zvyklí. Tedy formou, která přináší nejen zaručenou objektivitu při soutěži, ale také spoustu zajímavých cestovatelských zážitků pro všechny účastníky.

Středoevropská olympiáda v informatice CEOI 2020 se konala ve dnech 23.–29. 8. 2020 v Maďarsku ve městě Nagykanizsa. Původně plánovaný termín byl z konce června kvůli koronaviru o dva měsíce odložen. Soutěž probíhala v počítačových učebnách místního gymnázia Lajos Batthyány. Soutěžící studenti byli ubytováni v nedalekém hotelu Oázis, zatímco vedoucí bydleli v druhém hotelu Central. Bylo velmi příjemné, že do místa konání soutěže všichni došli ze svých hotelů pohodlně pěšky během několika minut. Celkem soutěžilo 55 studentů ze 13 zemí. Vedle osmi tradičních účastnických středoevropských států (Česká republika, Chorvatsko, Maďarsko, Německo, Polsko, Rumunsko, Slovensko, Slovinsko) se navíc zúčastnili jako hosté soutěžící z Itálie, Litvy, Nizozemí, Rakouska a Švýcarska. Pořadatelská země postavila v souladu s pravidly CEOI dvě soutěžní družstva.

Letošní pandemie koronaviru nezpůsobila jenom změnu termínu konání CEOI. I přes posunutí termínu na konec srpna se družstva z některých zemí nemohla nebo nechtěla soutěže zúčastnit prezenčně. Organizátoři proto mimořádně umožnili těmto zemím soutěžit online formou, podobně jako bude probíhat v polovině září i celá letošní Mezinárodní olympiáda v informatice IOI. Tuto distanční formu účasti zvolili soutěžící z Chorvatska, Itálie, Litvy, Rakouska, Rumunska a Slovinska.

Reprezentační družstvo České republiky bylo sestaveno na základě výsledků dosažených v ústředním kole 69. ročníku Matematické olympiády kategorie P, které proběhlo na konci března 2020 formou online soutěže.



Kvůli opatřením spojeným s epidemií nebylo letos možné uskutečnit tradiční výběrové soustředění. Na celosvětovou informatickou olympiádu IOI 2020 (online soutěž konaná v září 2020) byli proto vysláni čtyři naši nejlepší studenti z ústředního kola MO-P, pro účast na CEOI 2020 byli vybráni čtyři soutěžící s nejlepšími výsledky praktických úloh, kteří ještě nejsou v maturitním ročníku. Naši mladší soutěžící tak dostali příležitost získat na CEOI cenné zkušenosti, které mohou následně využít při úspěšné reprezentaci České republiky na IOI v příštím roce. Letos se CEOI zúčastnili tito studenti:

*Jiří Kalvoda*, student gymnázia na tř. Kpt. Jaroše v Brně,

*Václav Janáček*, student gymnázia na tř. Kpt. Jaroše v Brně,

*Adam Blažek*, student gymnázia na Mikulášském nám. v Plzni,

*Ondřej Sladký*, student gymnázia na Mikulášském nám. v Plzni.

Vedoucími české delegace byli *doc. RNDr. Tomáš Pitner, Ph.D.*, z Fakulty informatiky Masarykovy univerzity v Brně a *doc. RNDr. Pavel Töpfer, CSc.*, z Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v Praze.

Vlastní soutěž se tradičně odehrává v průběhu dvou soutěžních dnů. V každém dni soutěžící řeší tři úlohy, na které mají vždy pět hodin času. Večer před soutěží vedoucí všech delegací společně schválí soutěžní úlohy navržené pořadatelskou zemí, upraví podle potřeby jejich formulace a přeloží je pak do mateřského jazyka svých studentů. Čeští studenti tedy dostali jak anglickou, tak i českou verzi zadání úloh.

Každý soutěžící pracuje na přiděleném osobním počítači s nainstalovaným soutěžním prostředím, které umožňuje vyvíjet a testovat programy a odesílat je k vyhodnocení. Výsledné programy jsou testovány pomocí připravené sady testovacích dat a se stanovenými časovými limity. Tím je zajištěna nejen kontrola správnosti výsledků, ale pomocí časových limitů se také odliší kvalita použitého algoritmu. Při testování každé úlohy se používají sady testovacích dat různé velikosti a různé složitosti, takže teoreticky správné řešení založené na neefektivním algoritmu zvládne dokončit výpočet pouze pro některé, menší a jednodušší, testy. Takové řešení je potom ohodnoceno částečným počtem bodů.

Soutěž byla již tradičně doplněna také zajímavým doprovodným programem, který byl navíc letos mimořádně bohatý. Hned v prvním dnu pobytu proběhlo nejen slavnostní zahájení, ale všichni účastníci se mohli seznámit i s počítači a se soutěžním prostředím a také s historickým centrem města Nagykanizsa. Odpoledne po prvním soutěžním dnu všichni společně navštívili místní rekreační oblast s jezerem Boating lake. Mezi oběma soutěžními dny byl ponechán jeden volný den, ve kterém se účast-

níci olympiády vypravili do nově budovaného výzkumného a technologického centra Zala u města Zalaegerszeg, které se věnuje vývoji a testování autonomně řízených vozidel a počítačové simulaci. Odpoledne jsme se přemístili do nedalekého města Keszthely na prohlídku zámku a na vyjížďku lodí po jezeře Balaton. Po druhém soutěžním dnu nejprve všichni společně navštívili místní továrnu Tungsram na výrobu svítidel LED, studenti pak ještě univerzitu Pannon a vedoucí delegací místo toho arboretum Budafa. Na závěr pobytu v Maďarsku strávili soutěžící jeden den v zábavním parku Zobor, zatímco vedoucí se jeli podívat na jezero Kis-Balaton (Malý Balaton) a do jeho okolí.

Poslední den proběhlo slavnostní zakončení soutěže s vyhlášením výsledků. Každá ze soutěžních úloh byla hodnocena maximálně 100 body, takže celkově bylo teoreticky možné získat až 600 bodů. To se letos nikomu nepodařilo, úlohy byly poměrně náročné, takže i celkový vítěz Tomasz Nowak z Polska získal pouze 466 bodů. Jednu ze soutěžních úloh dokonce nikdo nevyřešil na plný počet bodů. Úspěšnější polovina soutěžících dostává na CEOI medaili, přičemž zlaté, stříbrné a bronzové medaile se rozdělují v přibližném poměru 1 : 2 : 3. Na CEOI 2020 byly uděleny celkem 4 zlaté, 10 stříbrných a 14 bronzových medailí. Středoevropská olympiáda v informatice je soutěží jednotlivců, žádné pořadí zúčastněných zemí v ní není vyhlášováno.

Naši reprezentující dosáhli následujících výsledků:

- 3. Jiří Kalvoda, 437 bodů, zlatá medaile,
- 32. Ondřej Sladký, 198 bodů,
- 33. Václav Janáček, 188 bodů,
- 46. Adam Blažek, 118 bodů.

Získání zlaté medaile je pro nás velkým úspěchem, zlatou medaili získal náš reprezentant na CEOI naposledy v roce 1995, tedy před 25 lety.

Slovenské družstvo letos získalo dvě bronzové medaile. Nejúspěšnější zemí na CEOI bylo tradičně Polsko se dvěma zlatými a dvěma stříbrnými medailemi.

Veškeré informace o soutěži, texty úloh i podrobné výsledky všech soutěžících lze nalézt na Internetu na adrese <http://ceoi2020.inf.elte.hu/>.

Následující 28. ročník Středoevropské olympiády v informatice CEOI 2021 se bude konat v Chorvatsku v Záhřebu.

## Upoutávka na knihu Ivo Krause a Štefana Zajace Česká a slovenská fyzika 1945–2005

*Zdeněk Janout*

Publikace *Česká a slovenská fyzika 1945–2005* časově navazuje na knihu *Fyzika za první republiky*, kterou vydalo nakladatelství Academia v roce 2017 v edici První republika. Stejně jako v předcházející knize, kde se autoři neomezuji pouze na meziválečné období (časovým přesahem tam byla kapitola II. *Tradice československé fyziky od založení pražské univerzity do roku 1918*), tak i v novější monografii se neomezuji pouze na léta ohraničená letopočty 1945 a 2005. Uvedené roky jsou symbolické mezníky. Rok 1945 je rokem, kdy skončila druhá světová válka, kdy byla znovu obnovena výuka na československých vysokých školách a kdy u nás začal široký rozvoj fyzikálního výzkumu. Rok 2005 je rokem, kdy celosvětově fyzikové vzpomněli stého výročí průkopnických prací A. Einsteina vyhlášením Světového roku fyziky (OSN). Je přirozené a logické, že monografie má časové přesahy přes uvedené roky.

Monografie je rozdělena na čtyři části. První část, *Fyzika v českých zemích*, začíná obdobím před rokem 1945, konkrétně protektorátem Böhmen und Mähren, kdy byly české vysoké školy uzavřeny a jejich profesori a studenti šikanováni. Pozornost je věnována činnosti České akademie a vědeckých společností. Výuka fyziky probíhala pouze na dvou německých vysokých školách, a to v Praze a v Brně. Dále je pak, v období od 1945 do 2005, popsána výuka fyziky a výzkum na vysokých školách, organizace vědeckého výzkumu, stanovení hlavních směrů výzkumu, činnost fyzikálních ústavů a výzkum v atomové a jaderné fyzice. V závěru této části je pojednáno o českých fyzicích, kteří trvale pracovali v zahraničí.

Druhá část, *Fyzika na Slovensku*, pojednává o fyzice v období Slovenského státu 1939–1945, dále o výuce a výzkumu ve fyzice na slovenských vysokých školách po roce 1945 a o výzkumu ve Slovenské akademii věd od roku 1953.

Třetí část, *Technický pokrok ve druhé polovině 20. století ve světě a v Československu*, je věnována technickému pokroku, jsou zde popsána technická zařízení československé konstrukce a výroby, materiálové inženýrství, pokroky v silnoproudé a slaboproudé elektrotechnice.

Čtvrtou část knihy tvoří *Biografická hesla*; jde o téměř 150 krátkých

životopisů významných fyziků diskutované doby. Autoři čerpali informace o fyzicích z českých i zahraničních pramenů, jmenovitě z biografických slovníků, autobiografií, časopisů, memoárů, nekrologů, z hesel na internetu, ale i z archivů. Kromě toho shromažďovali a ověřovali potřebné informace o fyzicích a jejich výzkumech během svých zahraničních cest a pracovních pobytů na zahraničních univerzitách a institutech.

Monografie je doplněna třiceti šesti obrázky, portréty osobností, fotografiemi titulních listů vysokoškolských učebnic, univerzitních budov, fyzikálních přístrojů, pamětních medailí a dalšími dokumenty, které vhodně doplňují text. V závěru je uveden seznam literatury a jmenný rejstřík.

Autory monografie jsou pedagogové Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze. Prof. RNDr. Ivo Kraus, DrSc., patří mezi naše přední odborníky na dějiny přírodních věd. Doc. Ing. Štefan Zajac, CSc., byl mnohaletým předsedou Jednoty českých matematiků a fyziků. Jeho odbornou specializací jsou magnetické vlastnosti materiálů a na fakultě přednáší teorii pevných látek. K napsání této monografie se autoři připravovali několik let. Monografie je výsledkem cílevědomé, systematické a vytrvalé práce autorů.

Monografie je napsána čtivě a svým pojetím jistě upoutá čtenáře z řad široké veřejnosti, zejména zájemce o historii přírodních a technických věd. Vhodně rozšiřuje a doplňuje informace obsažené v učebnicích fyziky, matematiky a dějepisu středních i vysokých škol. Pokud je mi známo, podobná monografie nebyla u nás doposud vydána. Monografie *Česká a slovenská fyzika 1945–2005* vyšla v červenci 2020 v Nakladatelství Academia v edici Galileo.

Knihu lze zakoupit na  
<http://www.academiaknihy.cz>  
 nebo  
<http://www.eknihy.academia.cz>.



## Fyzikální čtvrtky na MFF

Ústav teoretické fyziky Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy pořádá již mnoho let velmi zajímavé fyzikální semináře s názvem *Filozofické problémy fyziky* a *Přednášky z moderní fyziky*.

V letošním akademickém roce budou jednotlivé přednášky obou seminářů živě streamovány a zároveň nahrávány. Záznamy těchto přednášek se objeví na webových stránkách seminářů.

### FILOZOFICKÉ PROBLÉMY FYZIKY

Seminář se věnuje filosoficky motivovaným tématům ze současnosti i historie fyziky s důrazem na její přírodovědný a kulturní kontext.



Seminář se koná jednou za čtrnáct dní ve **čtvrtek od 18.15.**

V zimním semestru akademického roku 2020/2021 jsou připravena následující témata:

- 8. 10. Pavel Krtouš: *Směr toku a času*
- 22. 10. pracovníci MFF a AsÚ AV: *Nobelova cena 2020 za černé díry*
- 5. 11. Pavel Krtouš: *Feynmanova–Wheelerova časově symetrická elektrodynamika*
- 19. 11. Jiří Podolský: *Řád času podle Carla Rovelliho*  
*Rozpad času*
- 3. 12. Jiří Podolský: *Řád času podle Carla Rovelliho*  
*Svět bez času a Zdroje času*
- 17. 12. Pavel Krtouš: *Může čas běžet pozpátku?*
- 7. 1. Pavel Krtouš: *Svobodná vůle v deterministickém vězení*

## ZPRÁVY

Více informací, včetně odkazů na videozáznamy přednášek z minulých let, naleznete na webových stránkách semináře:

<https://utf.mff.cuni.cz/seminare/filos.pl>.

## PŘEDNÁŠKY Z MODERNÍ FYZIKY

Tento seminář je tradičním (letos již 50.) podzimním cyklem přednášek pro středoškoláky, tentokrát na téma *Velké teorie a observatoře dnešní fyziky*.



Seminář se koná jednou za čtrnáct dní ve **čtvrtek od 18.30**.

Na letošní rok jsou naplánovány následující přednášky:

- 15. 10. prof. J. Podolský: *Kosmické poselství elektromagnetických vln*
- 29. 10. prof. J. Podolský: *Kosmické poselství gravitačních vln*
- 12. 11. prof. R. Leitner: *Minulost, současnost a budoucnost částicové fyziky*
- 26. 11. dr. M. Prouza: *Proč a jak pracují čeští fyzikové na celosvětových projektech?*
- 10. 12. prof. J. Řídký: *Kosmické poselství částic s ultravysokou energií*

Více informací, včetně odkazů na videozáznamy přednášek z minulých let, naleznete na webových stránkách semináře:

<http://utf.mff.cuni.cz/popularizace/PMF/>.

## 👉 **Objednávky časopisu** 👈

Od roku 2020 vyřizuje objednávky časopisu  
Rozhledy matematicko-fyzikální  
společnost

**MediaCall, s. r. o.**

**Vídeňská 546/55**

**639 63 Brno**

**tel: +420 532 165 165**

**e-mail: [export@mediacall.cz](mailto:export@mediacall.cz)**

Objednávky lze realizovat i přes web:

**[www.zahranicnitisk.com](http://www.zahranicnitisk.com)**

Tato informace se netýká členů JČMF. Pro ně vyřizuje objednávky předplatného sekretariát JČMF a předplatné je hrazeno spolu s členskými příspěvky.

Elektronická verze čísla 3/2020 je ke stažení na adrese:

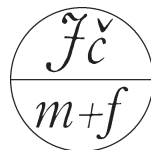
<https://rozhledy.jcmf.cz/wp-content/uploads/RMF-95-3.pdf>

heslo: Cip9sek

# ROZHLEDY matematicko-fyzikální

Ročník 95 (2020), číslo 3

---



## OBSAH

K. Panešová: Hausdorffova dimenze fraktálních množin . . . . .	1
J. Lach: Ortocentrické čtveřice bodů a trojúhelníků . . . . .	8
O. Bukovianský: Algebraické identity a cirkulační matice . . . . .	14
P. Pokorný: Jak budu splácet hypotéku . . . . .	25
E. Calda: Permutace s opakováním a rozmístování do přihrádek . .	30
J. Bednář, J. Kopáček, M. Žák: Záření v atmosféře Země – od rozptylu a absorpce ke globálnímu oteplení . . . . .	33
V. Koudelková: Fyzikální toulky: Křížem krážem republikou . . . . .	42
P. Töpfer: Středoevropská olympiáda v informatice CEOI 2020 . .	46
Z. Janout: Upoutávka na knihu I. Kraus, Š. Zajac: Česká a slovenská fyzika 1945–2005 . . . . .	49
Fyzikální čtvrtky na MFF . . . . .	51

---

### Pokyny pro autory

Příspěvky dodávejte na adresu redakce v elektronické podobě. Nejlépe napsané ve formátu  $\LaTeX$ , přijatelný je i formát Plain $\TeX$ , je akceptovatelný i text připravený editorem Word či podobným.

Pokud jde o obrázky, je žádoucí, aby byly připraveny v reprodukovatelné podobě. Každý obrázek nechtě je v samostatném souboru, nejlépe ve formátu eps nebo pdf. Přípustná je též bitmapa v dostatečném rozlišení.

Ke každému zasílanému příspěvku (ne u soutěží, zpráv a recenzí) přiložte krátkou anotaci v českém jazyce. Dále je žádoucí, aby u každého příspěvku byla uvedena literatura, na kterou je v textu odkazováno.