

ROZ HLEDY

MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ

ČASOPIS PRO ZÁJEMCE O MATEMATIKU, FYZIKU A INFORMATIKU

ROČNÍK 95 (2020) • ČÍSLO 4

Vydává Jednota českých matematiků a fyziků
tel.: 222 090 708-9, e-mail: jcmf@math.cas.cz
za podpory MFF UK Praha a FJFI ČVUT Praha



Vycházejí 4 čísla v kalendářním roce

Obálku navrhl Bohuslav Šír

Sazbu programem $\text{\TeX}$ připravil RNDr. Miloslav Závodný

Adresa redakce: MFF UK, V Holešovičkách 2, 182 00 Praha 8–Troja
e-mail: rozhledy@jcmf.cz

Internetové stránky časopisu: <https://rozhledy.jcmf.cz/>

Vytiskla Tiskárna Pohlline, Zálesí 1126/88, 142 00 Praha 4

Distribuci pro předplatitele provádí v zastoupení vydavatele
MediaCall, s. r. o.
Víděnská 546/55, 639 63 Brno
tel.: +420 532 165 165, e-mail: export@mediacall.cz
web: www.zahranicnitisk.com

ISSN 0035-9343

MK ČR E4691

© Jednota českých matematiků a fyziků, Praha 2020

Redakční rada

Vedoucí redaktorka:

RNDr. Marie Snětinová, Ph.D., MFF UK Praha

Redaktorka pro matematiku:

doc. Ing. Ľubomíra Dvořáková, Ph.D., FJFI ČVUT Praha

Redaktor pro fyziku:

doc. RNDr. Mgr. Vojtěch Žák, Ph.D., MFF UK Praha

Členové redakční rady:

doc. RNDr. Zdeněk Drozd, Ph.D., MFF UK Praha

RNDr. Petr Hanuš, FSv ČVUT Praha

doc. RNDr. Jaroslav Hora, CSc., FPE ZČU Plzeň

prof. RNDr. Ivo Kraus, DrSc., FJFI ČVUT Praha

doc. RNDr. Jan Kříž, Ph.D., PřF UHK Hradec Králové

doc. RNDr. Miroslav Lávička, Ph.D., FAV ZČU Plzeň

RNDr. Pavel Pokorný, Ph.D., VŠCHT Praha

RNDr. Miroslav Randa, Ph.D., PdF ZČU Plzeň

doc. RNDr. Jan Šlégr, Ph.D., PřF UHK Hradec Králové

prof. RNDr. Pavel Tlustý, CSc., PedF JU České Budějovice

doc. RNDr. Pavel Töpfer, CSc., MFF UK Praha

prof. Ing. Bohumil Vybíral, CSc., PřF UHK Hradec Králové

RNDr. Vladimír Wagner, CSc., ÚJF AV ČR Řež

Sestup uspořádaných trojic a čtveřic

Max Forman

Abstrakt. Cílem tohoto článku je zkoumání jisté operace, kterou nazýváme sestup uspořádaných trojic a čtveřic. Jde o matematický problém s poměrně jednoduchým zadáním, ale netriviálním řešením. Navíc je zajímavé, jak podstatně se výsledky pro trojice a čtveřice liší. Tento článek navazuje na autorovu práci SOČ s názvem Sestup uspořádaných čtveřic z roku 2020.

Sestup uspořádaných čtveřic

Sestupem čtveřic začínáme, protože právě to bylo náplní práce SOČ, a sestup trojic jsme zkoumali až následně. Sestup uspořádaných čtveřic pojednává o speciálních posloupnostech uspořádaných čtveřic, kde na začátku zvolíme čtyři libovolná čísla $n_1, n_2, n_3, n_4 \in \mathbb{R}_0^+$. První člen posloupnosti je právě tato čtveřice $[n_1, n_2, n_3, n_4]$. Další člen posloupnosti vznikne tak, že nahradíme

$$[n_1, n_2, n_3, n_4] \rightarrow [|n_1 - n_2|, |n_2 - n_3|, |n_3 - n_4|, |n_4 - n_1|].$$

Postup s odečítáním následně opakujeme znovu a znovu.

S konkrétními čísly vypadá sestup například takto:

$$\begin{aligned} [16, 85, 33, 11] &\rightarrow [69, 52, 22, 5] \rightarrow [17, 30, 17, 64] \rightarrow [13, 13, 47, 47] \rightarrow \\ &\rightarrow [0, 34, 0, 34] \rightarrow [34, 34, 34, 34] \rightarrow [0, 0, 0, 0]. \end{aligned}$$

Jak můžeme vidět, sestup čtveřice končí triviálním cyklem $[0, 0, 0, 0]$. Výskyt triviálního cyklu neplatí pouze pro počítání s přirozenými čísly, ale i pro počítání s nezápornými reálnými (klidně iracionálními) čísly:

$$\begin{aligned} [e, 3, \sqrt{2}, 1] &\rightarrow [|e - 3|, 3 - \sqrt{2}, \sqrt{2} - 1, |1 - e|] \rightarrow \\ &\rightarrow [| |e - 3| - |3 - \sqrt{2}| |, 3 - \sqrt{2} - |\sqrt{2} - 1|, \\ &\quad |\sqrt{2} - 1 - |1 - e||, |1 - e| - |e - 3| |] = \\ &= [e - \sqrt{2}, 4 - 2\sqrt{2}, e - \sqrt{2}, 2e - 4] \rightarrow \\ &\rightarrow [e - \sqrt{2} - |4 - 2\sqrt{2}|, |4 - 2\sqrt{2} - |e - \sqrt{2}||, \\ &\quad |e - \sqrt{2} - |2e - 4||, 2e - 4 - |e - \sqrt{2}|] = \\ &= [e + \sqrt{2} - 4, e + \sqrt{2} - 4, e + \sqrt{2} - 4, e + \sqrt{2} - 4] \rightarrow [0, 0, 0, 0] \end{aligned}$$

Nyní stručně shrňme výsledky, které jsme o sestupu čtveřic získali: Jiný cyklus než triviální neexistuje. Pokud je čtveřice složená z racionálních čísel, pak sestup dojde vždy do stavu $[0, 0, 0, 0]$. Pro čtveřice složené z reálných čísel ale toto tvrzení neplatí, příkladem jsou čtveřice čísel úzce spjaté s tzv. tribonacciho konstantou.

Popíšme si nyní výsledky blíže. Níže uvedené základní principy sestupu čtveřic si dokazovat nebudeme.

Základní principy sestupu čtveřic nezáporných reálných čísel

1. Sestup konstantní čtveřice $[a, a, a, a]$ končí po jednom kroku v triviálním cyklu $[0, 0, 0, 0]$.
2. Při sestupu se největší člen čtveřice nemůže zvýšit.
3. Čtveřice $[\alpha n_1, \alpha n_2, \alpha n_3, \alpha n_4]$, kde $\alpha > 0$, má stejný sestup jako čtveřice $[n_1, n_2, n_3, n_4]$ akorát vynásobený konstantou α . Stejný sestup mají také čtveřice $[n_1, n_2, n_3, n_4]$ a $[a + n_1, a + n_2, a + n_3, a + n_4]$, přičemž $a \in \mathbb{R}$ je takové, že i nová čtveřice obsahuje nezáporná čísla. Stejné sestupy až na pořadí mají čtveřice:
 $[n_1, n_2, n_3, n_4]$ a její cyklické permutace,
 $[n_4, n_3, n_2, n_1]$ a její cyklické permutace.

Pro $x, y \in \langle 0, 1 \rangle$ mají čtveřice $[0, x, y, 1]$ a $[0, 1 - y, 1 - x, 1]$ stejné sestupy až na pořadí. Podobně mají stejné sestupy až na pořadí čtveřice $[0, x, 1, y]$ a $[0, 1 - y, 1, 1 - x]$.

Na základě těchto základních principů nyní dokážeme několik lemmat a vět.

Lemma 1. *Každá nekonstantní čtveřice má až na pořadí a násobení kladnou konstantou stejný sestup jako některá z čtveřic tvaru $[0, x, y, 1]$, $[0, x, 1, y]$, kde $x, y \in \langle 0, 1 \rangle$.*

Důkaz. Toto tvrzení vyplývá z bodů 3, 4 a 5. Jednoho z těchto tvarů dosáhneme tak, že nejprve pomocí cyklické permutace převedeme nejmenší člen na první pozici. Následně od všech členů odečteme nejmenší člen a nakonec všechny členy vydělíme členem největším. Pokud nám vyjde čtveřice $[0, 1, x, y]$, tak podle bodu 5. má stejný sestup až na pořadí jako $[0, y, x, 1]$.

Věta 2.

1. Sestup čtveřice $[0, x, y, 1]$ pro $x, y \in \langle 0, 1 \rangle$ a $x \geq y$ končí nejpozději po čtyřech krocích v cyklu $[0, 0, 0, 0]$.

2. Sestup čtveřice $[0, x, 1, y]$ pro $x, y \in \langle 0, 1 \rangle$ končí nejpozději po šesti krocích v cyklu $[0, 0, 0, 0]$.

Důkaz. 1. $[0, x, y, 1] \rightarrow [x, x - y, 1 - y, 1] \rightarrow [y, 1 - x, y, 1 - x] \rightarrow [1 - x - y, 1 - x - y, 1 - x - y, 1 - x - y] \rightarrow [0, 0, 0, 0]$.

2. $[0, x, 1, y] \rightarrow [x, 1 - x, 1 - y, y] \rightarrow [1 - 2x, |x - y|, 1 - 2y, |x - y|]$, kde nová čtveřice je ve tvaru $[a, b, c, b]$ a vytvoří sestup $[a, b, c, b] \rightarrow [a - b, |c - b|, |c - b|, a - b]$. Získaná čtveřice je opět jednoduchého tvaru $[e, f, f, e]$ a vytvoří sestup $[e, f, f, e] \rightarrow [|e - f|, 0, |e - f|, 0] \rightarrow [|e - f|, |e - f|, |e - f|, |e - f|] \rightarrow [0, 0, 0, 0]$.

Věta 3. V sestupu čtveřic se neobjevuje jiný než triviální cyklus $[0, 0, 0, 0]$.

Důkaz. Zkoumejme, které nekonstantní čtveřice mohou být součástí cyklu. Podle lemmatu 1 stačí zkoumat čtveřice tvaru $[0, x, y, 1]$, $[0, x, 1, y]$, kde $x, y \in \langle 0, 1 \rangle$.

Dále podle věty 2 vidíme, že čtveřice $[0, x, y, 1]$ pro $x, y \in \langle 0, 1 \rangle$ a $x \geq y$ a $[0, x, 1, y]$ končí po pár krocích v $[0, 0, 0, 0]$ a samy součástí cyklu tedy nejsou. Zbývá zjistit, zda může být čtveřice $[0, x, y, 1]$ pro $x < y$ součástí cyklu. Provedme dva kroky:

$$[0, x, y, 1] \rightarrow [x, y - x, 1 - y, 1] \rightarrow [|y - 2x|, |1 - 2y + x|, y, 1 - x].$$

Pokud $x > 0$ a $y < 1$, pak má nová čtveřice všechny členy menší než 1, tedy podle bodu 2 není původní čtveřice součástí cyklu.

Pokud $x = 0$, pak

$$[0, 0, y, 1] \rightarrow [0, y, 1 - y, 1] \rightarrow [y, |1 - 2y|, y, 1] \rightarrow [||1 - 2y| - y|, |y - |1 - 2y||, 1 - y, 1 - y],$$

což je opět čtveřice, která má všechny členy menší než 1.

Podobně pokud $y = 1$, pak

$$[0, x, 1, 1][x, 1 - x, 0, 1] \rightarrow [|1 - 2x|, 1 - x, 1, 1 - x] \rightarrow [||1 - x - |1 - 2x||, x, x, ||1 - 2x| - 1 + x|],$$

což je opět čtveřice, která má všechny členy menší než 1.

Závěr zní, že součástí cyklu je pouze konstantní čtveřice $[0, 0, 0, 0]$.

Věta 4. Sestup každé racionální čtveřice končí v cyklu $[0, 0, 0, 0]$.

Důkaz. Podle bodu 3 má racionální čtveřice stejný sestup až na násobení přirozeným číslem jako čtveřice nezáporných celých čísel $[n_1, n_2, n_3, n_4]$, kterou získáme tak, že každý člen racionální čtveřice vynásobíme součinem jmenovatelů všech členů. Podle bodu 2 máme jen konečně mnoho čtveřic, které sestup $[n_1, n_2, n_3, n_4]$ může obsahovat, je tedy zřejmé, že se po čase dostaneme do některé čtveřice znovu, a tudíž se sestup zacyklí. A podle věty 3 to bude cyklus triviální.

Věta 5. *Sestup čtveřice ve tvaru $[0, x, y, 1]$ pro $x, y \in \langle 0, 1 \rangle$ nedosáhne triviálního cyklu $[0, 0, 0, 0]$ pro*

$$[0, x, y, 1] = \left[0, \frac{1}{T^3}, \frac{T+1}{T^3}, 1 \right],$$

kde T je tribonacciho konstanta. Sestup nekončící triviálním cyklem má také čtveřice

$$[0, 1-y, 1-x, 1] = \left[0, 1 - \frac{T+1}{T^3}, 1 - \frac{1}{T^3}, 1 \right] = \left[0, \frac{1}{T}, \frac{T+1}{T^2}, 1 \right].$$

Tribonacciho konstanta je jediným reálným řešením rovnice $x^3 = x^2 + x + 1$, její hodnota je přibližně $T \doteq 1,839\,286\dots$

Důkaz. Čtveřice $\left[0, \frac{1}{T^3}, \frac{T+1}{T^3}, 1\right]$ vytvoří sestup

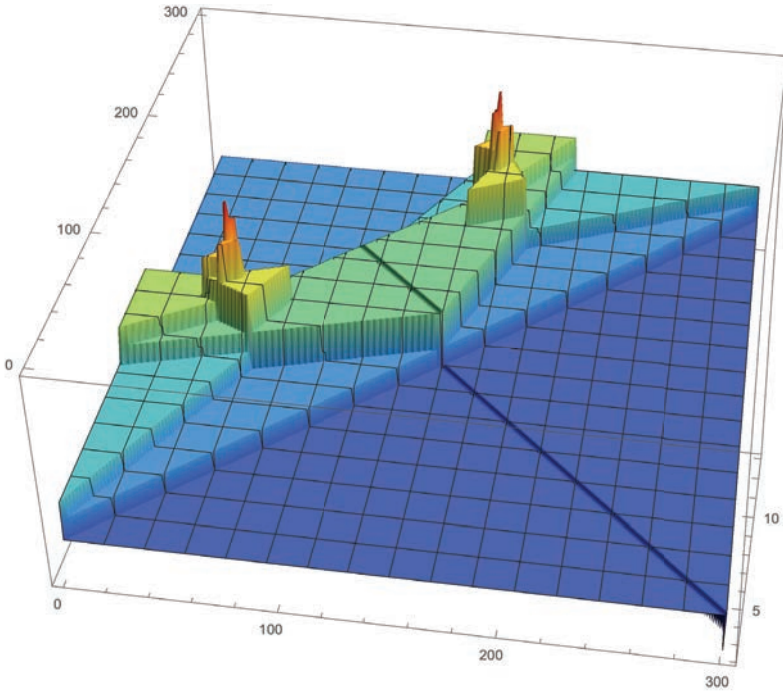
$$\left[0, \frac{1}{T^3}, \frac{T+1}{T^3}, 1\right] \rightarrow \left[\frac{1}{T^3}, \frac{1}{T^2}, \frac{1}{T}, 1\right],$$

kde odečtením nejmenšího členu dostaneme

$$\left[0, \frac{1}{T^2} - \frac{1}{T^3}, \frac{1}{T} - \frac{1}{T^3}, 1 - \frac{1}{T^3}\right] = \left(1 - \frac{1}{T^3}\right) \left[0, \frac{1}{T^3}, \frac{T+1}{T^3}, 1\right].$$

Podle bodu 3 a 4 čtveřice nevytvoří triviální zacyklení.

Domníváme se, že pro všechna čísla x, y různá od těch z věty 5 končí sestup $[0, x, y, 1]$ v $[0, 0, 0, 0]$. Toto tvrzení zatím neumíme dokázat, ale potvrzuje ho graf, kde program dosazoval čísla x, y do čtveřice $[0, x, y, 1]$, kde $x, y \in (0, 1)$, a vynášel délky sestupu do grafu. Jak můžeme vidět, na grafu se opravdu tvoří dva vrcholy kolem bodů $[0, 1/T^3, (T+1)/T^3, 1]$ a $[0, 1/T, (T+1)/T^2, 1]$. Dále je vidět, že graf je symetrický podle osy $y = 1 - x$, což odpovídá bodu 6.



Obr. 1: Délky sestupů při dosazování x a y do $[0, x, y, 1]$, kde $0 \leq x \leq y \leq 1$. (Zdroj: Josef Tkadlec)

Sestup uspořádaných trojic

Analogicky zavedeme sestup uspořádaných trojic jako posloupnost uspořádaných trojic, kde na začátku zvolíme tři libovolná čísla $n_1, n_2, n_3 \in R_0^+$. Další člen posloupnosti vznikne tak, že

$$[n_1, n_2, n_3] \rightarrow [|n_1 - n_2|, |n_2 - n_3|, |n_3 - n_1|].$$

Stejně jako tomu je u sestupu uspořádaných čtveřic, postup s odečítáním následně opakujeme znovu a znovu. S konkrétními čísly vypadá sestup např. následovně:

$$[3, 7, 1] \rightarrow [4, 6, 2] \rightarrow [2, 4, 2] \rightarrow [2, 2, 0] \rightarrow [0, 2, 2] \rightarrow [2, 0, 2] \rightarrow [2, 2, 0].$$

Shrňme opět stručně výsledky pro sestup trojic: Na rozdíl od sestupu čtveřic se u sestupu trojic objevuje netriviální cyklus o třech krocích (jak

je vidět ve výše uvedeném příkladu). Do takového cyklu o třech krocích sestoupí každá trojice racionálních čísel, kromě trojic, kde jsou všechna čísla stejná. Většina trojic reálných čísel má nekonečný sestup, který nekončí cyklem.

Základní principy sestupu nezáporných reálných trojic:

1. U sestupu trojic nedojde k triviálnímu zacyklení, pokud neplatí, že $n_1 = n_2 = n_3$.
2. Při sestupu se největší člen trojice nemůže zvýšit.
3. Sestup trojice $[\alpha n_1, \alpha n_2, \alpha n_3]$, kde $\alpha > 0$, vznikne ze sestupu trojice $[n_1, n_2, n_3]$ vynásobením konstantou α .
4. Sestup také neovlivní, pokud ke všem členům trojice $[n_1, n_2, n_3]$ přičtemž $a \in \mathbb{R}$ tak, že zachováme nezápornost.
5. Stejně sestupy až na pořadí mají trojice $[n_1, n_2, n_3]$ a všechny její permutace.

Lemma 6. *Každá nekonstantní trojice má až na pořadí a násobení kladnou konstantou stejný sestup jako nějaká trojice $[0, x, 1]$, kde $x \in \langle 0, 1 \rangle$.*

Důkaz. Na základě bodů 3 a 4 dosáhneme tohoto tvaru tak, že nejprve odečteme od všech členů trojice nejmenší člen a následně všechny členy vydělíme členem největším. Trojici následně pomocí permutace převedeme na tvar $[0, x, 1]$.

Věta 7. *Trojice je součástí cyklu, pouze pokud je permutací $[0, t, t]$, pro nějaké nezáporné t .*

Důkaz. Stačí se omezit na zkoumání trojic $[0, x, 1]$, kde $x \in \langle 0, 1 \rangle$.

1. Pro $x = 1$ je trojice $[0, 1, 1]$ součástí cyklu:

$$[0, 1, 1] \rightarrow [1, 0, 1] \rightarrow [1, 1, 0] \rightarrow [0, 1, 1].$$

2. Pro $x = 0$ není trojice $[0, 0, 1]$ součástí cyklu:

$$[0, 0, 1] \rightarrow [0, 1, 1] \rightarrow [1, 0, 1] \rightarrow [1, 1, 0] \rightarrow [0, 1, 1].$$

3. Pro $x \in (0, 1)$ není trojice $[0, x, 1]$ součástí cyklu:

$$[0, x, 1] \rightarrow [x, 1 - x, 1] \rightarrow [|1 - 2x|, x, 1 - x],$$

kde získaná trojice má maximální člen menší než 1, a proto $[0, x, 1]$ se už v sestupu nikdy neobjeví podle bodu 2.

Podle lematu 6 je zřejmé, že všechny trojice, které jsou součástí cyklu, získáme permutací a vynásobením kladnou konstantou z trojice $[0, 1, 1]$.

Věta 8. *Každá nekonstantní trojice nezáporných racionálních čísel sestoupí do cyklu $[0, t, t]$, kde $t \in \mathbb{Q}$, $t > 0$.*

Důkaz. Každá takováto trojice má stejný sestup, až na pořadí a násobení kladnou racionální konstantou, jako nějaká nekonstantní trojice $[n_1, n_2, n_3]$ nezáporných celých čísel. Podle bodu 2 máme jen konečně mnoho trojic, které sestup $[n_1, n_2, n_3]$ může obsahovat, je tedy zřejmé, že se po čase dostaneme do stejné trojice, a tudíž se sestup zacyklí. A podle věty 7 to bude cyklus obsahující $[0, a, a]$ pro nějaké přirozené a , tudíž původní trojice sestoupí do cyklu obsahujícího $[0, t, t]$ pro nějaké t racionální.

Věta 9. *Sestup trojice $[0, x, 1]$, kde x je iracionální číslo z intervalu $(0, 1)$, nekončí cyklem (ani triviálním $[0, 0, 0]$).*

Důkaz. Po prvním kroku dostaneme $[0, x, 1] \rightarrow [x, 1 - x, 1]$. Nová trojice má na základě bodů 3, 4 a 5 stejný sestup až na pořadí a násobení kladnou konstantou jako $[0, y, 1]$, kde $y = \frac{|1-2x|}{1-x}$ je opět iracionální z intervalu $(0, 1)$. Aby se objevil cyklus, muselo by podle věty 7 být $y = 1$, což ale nikdy nenastane. Sestup se tudíž nikdy nezacyklí.

Ducci sequences

Problém sestupu se mně i mým spolupracovníkům zdál příliš hezký na to, aby ho nikdo před námi nezkoumal. Dlouho jsme ale na žádné podobné výsledky nenarazili. Nedávno jsme však zjistili, že problém je pod názvem *Ducci sequences* nebo také *n-number game* velmi dobře prozkoumaný. Například tvrzení, že tribonacciovská čtveřice je v principu jediná, která vede k nekonečnému sestupu, dokázal v roce 1949 Moshe Lotan (<https://scholar.google.com/scholar?q=M.+Lotan%2C+A+problem+in+difference+sets>).

Poděkování

Výsledky své práce SOČ jsem podstatně obohatil ve spolupráci s doc. Ing. Ľubomírou Dvořákovou, Ph.D., a Josefem Tkadlecem, Ph.D., kterým velmi děkuji.

Za jak dlouhou dobu zdvojnásobím své peníze

Marek Bláha, Biskupské gymnázium Hradec Králové

Ocitnete se na večírku v obklopení matematiků. „Banka mi nabízí úrok 5 % při složeném připsování úroků. Za jak dlouhou dobu budu mít dvojnásobek, když vložím půl milionu korun?“ Nikdo se nesníží použít kalkulačku, a tak se všichni pouští do počtů v hlavě. Ukažme si, jakým způsobem co nejdříve dosáhnout co nejpřesnějšího výsledku.

1. Řešení problému výpočtem

Nejprve si vysvětleme, jak funguje složené úročení. Při složeném úročení se na konci každého úrokového období úročí počáteční částka včetně již získaných úroků. V našem případě by se tak částka půl milionu úročila takto:

Úrokové období	Částka	
0	500 000 Kč	
1	525 000 Kč	← × 1,05
2	551 250 Kč	← × 1,05
3	578 812,5 Kč	← × 1,05

Tabulka 1: Princip složeného úročení

Složené úročení je tedy vyjádřeno vztahem

$$K_n = K_0(1 + i)^n,$$

kde K_0 značí počáteční částku, K_n částku konečnou, i roční úrokovou sazbu a n počet let. Je-li v jednom roce vícero úrokových období, nazývají se úroková období področní. Na konci jednotlivých úrokových období se pak neúročí roční úrokovou sazbou, nýbrž jejím zlomkem. Vzorec je tedy zapsán následovně:

$$K_n = K_0 \left(1 + \frac{i}{m} \right)^{m \cdot n}.$$

Proměnná m zde značí frekvenci úročení neboli počet úrokových období v jednom roce.

Nyní se již přesuňme k řešení samotného příkladu. V zadání není uvedena četnost připisování úroků, a proto uvažujme roční, díky čemuž nám vystačí použít jednodušší vzorec. Ze vzorce nyní vyjádříme proměnnou n , která nás ve výsledku zajímá:

$$n = \log_{(1+i)} \frac{K_n}{K_0}.$$

Jelikož hodláme peněžní obnos zdvojnásobit, dosadíme např. za K_0 hodnotu 500 000 Kč a za K_n částku 1 000 000 Kč. Všimněme si, že se ve zlomku obě uvedené částky pokrátí a zbude nám pouze koeficient násobení 2 – částka, kterou do banky zpočátku vložíme, je tedy zcela irelevantní. Výslednou hodnotu takto vypočteme:

$$n = \log_{1,05} 2 \doteq 14,207.$$

Úročíme-li vklad po celou dobu konstantní úrokovou sazbou 5 %, peněžní obnos se nám zdvojnásobí po 14,2 letech.

2. Řešení problému odhadem

Je zřejmé, že počítáním logaritmů v hlavě cesta nevede. Naštěstí existuje metoda, kterou jsme schopni snadno a celkem přesně odpovědět na danou otázku, tedy zdvojnásobení kapitálu (peněžního obnosu) při složeném úročení, odhadnout. Touto metodou je pravidlo sedmdesáti dvou. Aplikace je velmi jednoduchá – konstantu 72 jednoduše vydělíme procentuální úrokovou sazbou. K výsledku našeho příkladu bychom se tedy dopracovali takto:

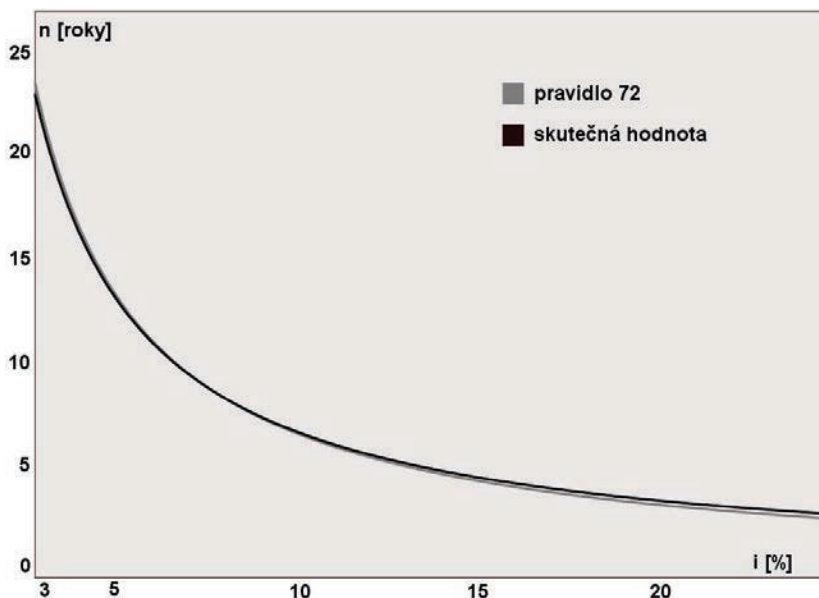
$$\frac{72}{5} = 14,4.$$

Jak vidíme, výsledek je velmi přesný a jeho vypočítání rychlé. Jak ovšem pravidlo 72 funguje? Nejedná se pouze o shodu čísel? Z aplikace pravidla je zřejmé, že konstanta 72 je součinem úrokové sazby i a počtu let n . Sestavme nyní tabulku, kde vypočítáme n pro různé hodnoty i a následně spolu tyto dvě hodnoty vynásobíme. V tabulce můžeme zároveň hned porovnat přesné (zaokrouhlené) hodnoty s hodnotami získanými odhadem dle pravidla 72.

i [%]	n	Pravidlo 72	$i \cdot n$
1	69,6607	72,00	69,7
2	35,0028	36,00	70,0
3	23,4498	24,00	70,3
4	17,6730	18,00	70,7
5	14,2067	14,40	71,0
6	11,8957	12,00	71,4
7	10,2448	10,29	71,7
8	9,0065	9,00	72,1
9	8,0432	8,00	72,4
10	7,2725	7,20	72,7
11	6,6419	6,55	73,1
12	6,1163	6,00	73,4
13	5,6714	5,54	73,7
14	5,2901	5,14	74,1
15	4,9595	4,80	74,4
16	4,6702	4,50	74,7
17	4,4148	4,24	75,1
18	4,1878	4,00	75,4
19	3,9847	3,79	75,7
20	3,8018	3,60	76,0
21	3,6363	3,43	76,4
22	3,4858	3,27	76,7
23	3,3483	3,13	77,0
24	3,2223	3,00	77,3
25	3,1063	2,88	77,7

Tabulka 2: Počítání podle pravidla 72

Nyní je již zřejmé, odkud konstanta 72 pochází. Vezmeme-li v potaz, že s nižšími úrokovými sazbami se setkáme častěji, je právě číslo 72 relativně přesné pro co nejvíce hodnot i najednou. Jinými slovy konstanta 72 nám rovněž přibližně vyjde, zprůměrujeme-li hodnoty součinu pro i od 1 do 15. Pro vyšší úrokové sazby se můžeme setkat také s pravidlem 78, pro nižší s pravidlem 70, nicméně 72 je hodnotou, která zůstává stále poměrně přesná. Přesnost pravidla 72 můžeme demonstrovat nanesením do grafu:



Obr. 1: Přesnost pravidla 72

Se znalostí pravidla 72 jsme tak snadno schopni udělat dojem na ostatní.

3. Odvození pravidla 69 pro spojitě úročení jako úloha pro čtenáře

Ukázali jsme, že pro přesný odhad doby potřebné pro zdvojnásobení kapitálu při složeném úročení existuje pravidlo sedmdesáti dvou. Obdobně existuje pravidlo šedesáti devíti pro úročení spojitě, které je dáno rovnicí

$$K_t = K_0 e^{i \cdot t},$$

kde e je Eulerovo číslo, i je roční úroková sazba a t je čas vyjádřený v letech. Obdobným způsobem jako u pravidla 72 odvoďte konstantu 69 pro spojitě úročení. Jaký má na výsledek dopad roční úroková sazba i a proč?

Literatura

- [1] Bláha, M.: *Úročení ve finanční matematice*. Práce SOČ, Biskupské gymnázium, církevní základní škola, mateřská škola a základní umělecká škola, Hradec Králové, 2020, [online]. Dostupné z: https://www.academia.edu/43976982/SOC_Marek_Blaha_Urozeni_ve_financoni_matematice.

Geometrická řešení algebraických úloh MO

Vojtěch David, Wichterlovo gymnázium

Abstrakt. Algebraické úlohy zadávané v Matematické olympiádě bývají samy o sobě často na první pohled neintuitivní a jejich autorská řešení matematicky příliš deduktivně dokonalá. Některé z nich ale mají i svou geometrickou interpretaci, u které je poté možné najít řešení pouhým vhledem. V tomto článku jsou uvedena dvě taková řešení k úlohám, které se objevily v krajských kolech 68. a 64. ročníku Matematické olympiády kategorie A.

V krajském kole 68. ročníku byla zadána následující úloha:

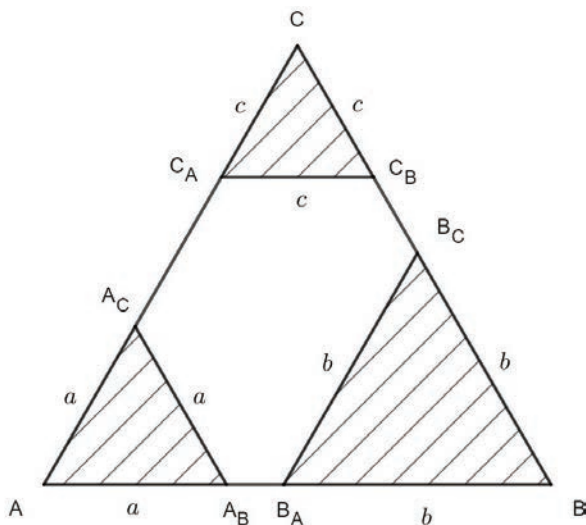
Najděte maximální hodnotu výrazu

$$a^2 + b^2 + c^2$$

pro reálná čísla a, b, c taková, že všechna tři čísla $a + b, b + c, c + a$ jsou z intervalu $\langle 0, 1 \rangle$.

Řešení. Autorské řešení najdete na webu matematické olympiády: <http://www.matematickaolympiada.cz/media/5433615/a68ii.pdf>

Zajímavý vhled do úlohy nám může poskytnout následující geometrická interpretace:



Obr. 1: Geometrická interpretace úlohy – vyšrafovaná část zachycuje obsah, o jehož maximalizaci usilujeme

Mějme rovnostranný trojúhelník ABC o straně délky 1. Zvolme na jeho straně AB bod A_B a následně na jeho straně AC uvažme bod A_C tak, aby AA_BA_C byl rovnostranný trojúhelník o straně délky a . Analogicky definujeme trojúhelníky BB_CB_A a CC_ACB (viz obr. 1).

Všimněme si, že když jsou tyto tři trojúhelníky disjunktní, platí podmínka ze zadání, tj. součty $a + b$, $b + c$, $c + a$ jsou z intervalu $(0, 1)$.

Nyní se podívejme na jejich obsahy. Součet obsahů těchto tří trojúhelníků S je roven

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}b^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}c^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}(a^2 + b^2 + c^2).$$

Je tedy zřejmé, že výraz $a^2 + b^2 + c^2$ bude maximální, když bude maximální obsah trojúhelníků AA_BA_C , BB_CB_A a CC_ACB . Vzhledem k podmínce, že trojúhelníky musí být disjunktní, je zřejmé, že nemohou mít dohromady větší obsah než trojúhelník ABC o straně 1. To nastane, bude-li jedna z proměnných rovna 1 a zbylé dvě 0. Z tohoto důvodu je

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4}(a^2 + b^2 + c^2) \leq S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Tedy $a^2 + b^2 + c^2 \leq 1$.

Zbývá pouze vyřešit případ, kdy je jedno z čísel a , b , c záporné (dvě čísla záporná zřejmě být nemohou, nebyla by splněna podmínka ze zadání).

Nechť $a = -n$, kde n je kladné číslo. Hledaný součet druhých mocnin bude mít potom stejnou hodnotu jako v případě $a = n$. Proto stačí pro naši analogii s obsahy dokázat, že se trojúhelník se stranou délky n „vejde“ do trojúhelníku ABC spolu s trojúhelníky o stranách délek b a c . Na toto ale už stačí jenom jednoduchý heuristický pohled, pokud si uvědomíme, že pro splnění podmínky ze zadání musí být n rovno nejvýše menšímu z čísel b , c a trojúhelník se stranou této délky se do ABC již vešel.

V krajském kole 64. ročníku byla zadána následující úloha:

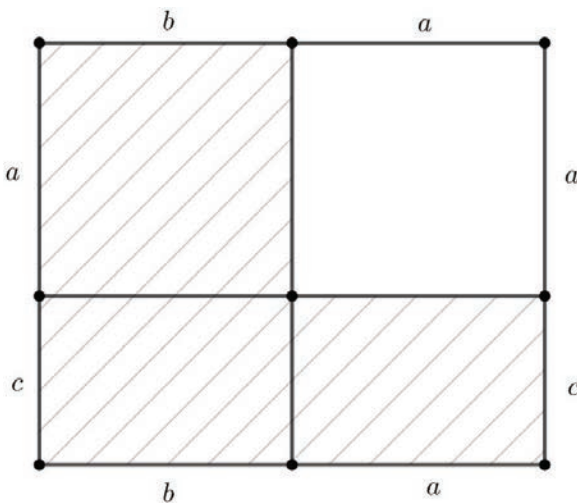
Pro kladná reálná čísla a , b , c platí:

$$ab + bc + ac = 16, \quad a \geq 3.$$

Najděte nejmenší možnou hodnotu výrazu $2a + b + c$.

Řešení. Autorské řešení najdete na webu matematické olympiády:
<http://www.matematickaolympiada.cz/media/1681650/a64ii.pdf>

Stejně jako u předchozí úlohy interpretujme zadání geometricky:



Obr. 2: Geometrická interpretace úlohy – vyšrafovaná část má podle zadání konstantní obsah 16

Uvažme obdélník o stranách délky $a + b$ a $a + c$ (viz obr. 2). Jeho obsah S bude

$$S = ab + bc + ac + a^2 = 16 + a^2.$$

Podle podmínky $a \geq 3$ dostáváme $S \geq 25$.

Nyní se podívejme na jeho obvod o :

$$o = 4a + 2b + 2c = 2(2a + b + c).$$

Zjišťujeme, že zkoumaný výraz $2a + b + c$ je roven polovině obvodu útvaru, stačí tedy minimalizovat obvod tohoto obdélníku. Zredukovali jsme tedy úlohu na problém nalezení minimálního obvodu obdélníku o daném obsahu.

Jak je známo, řešením této úlohy je čtverec. Toto tvrzení lze dokázat s využitím AG nerovnosti

$$\frac{1}{2}(a + b + a + c) \geq \sqrt{(a + b)(a + c)},$$

přičemž rovnost nastává právě pro $a + b = a + c$, tj. pro $b = c$.

Platí $o \geq 4\sqrt{S} \geq 20$, a tedy $2a + b + c \geq 10$.

Výše popsaná úvaha nám také opět prezentuje existenci takové trojice a, b, c . Nejmenší možná hodnota výrazu $2a + b + c$ nastane pro $2a + b + c = 10$, $a = 3$ a $b = c$. Proto $a = 3$ a $b = c = 2$.

Geometrický význam Eulerova čísla e

José Marcial Nájares Romero, ZŠ Gutova, Praha

Abstrakt. V článku se budeme věnovat geometrickému významu čísla e . Hlavním cílem bude ukázat konstrukci úseček, jejichž délka se blíží hodnotě e .

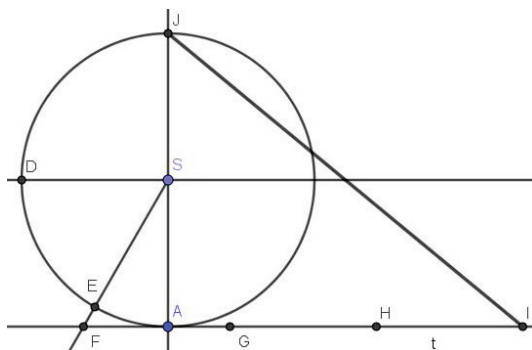
Eulerovo číslo e patří mezi nejvýznamnější matematické konstanty. Je pojmenováno po švýcarském matematikovi Leonhardu Eulerovi. O historii tohoto čísla či výpočtu jeho číslic si můžete přečíst například v [1]. Je známo, že číslo e je iracionální a je dokonce transcendentní, což znamená, že není kořenem žádného polynomu s racionálními koeficienty. Další neméně důležitou konstantou v matematice je Ludolfovo číslo π ,

které je rovněž transcendentní. Jak víme, toto číslo se objevuje ve vzorci pro výpočet obvodu kružnice. Slavný problém, který byl nakonec zodpovězen negativně algebraickými metodami, je tzv. rektifikace kružnice. Tento problém spočívá v tom, že chceme sestrojít úsečku, jejíž délka je rovna obvodu dané kružnice, pomocí kružítko a pravítka. Není těžké se přesvědčit, že tento problém je ekvivalentní problému sestrojít úsečku o délce π .

Konstrukce úsečky, jejíž délka je přibližně rovna π

Jak jsme již výše připomněli, pomocí pravítka a kružítko nelze sestrojít úsečku délky π . Přesto vznikla spousta prací věnujících se konstrukci úsečky, jejíž délka je přibližně rovna obvodu kružnice či délce kruhového oblouku. Jednu z těchto konstrukcí objevil polský matematik Adam Adamandy Kochański. Pomocí této konstrukce sestrojíme úsečku o délce přibližně rovné polovině obvodu uvažované kružnice. Další konstrukce tohoto typu je možné najít např. v práci [2], která se věnuje přibližným rektifikacím kruhového oblouku, jež zkoumal český matematik Jan Sobotka (1862–1931), který se věnoval studiu geometrie, zejména deskriptivní geometrie. Mezi těmito konstrukcemi je i Kochaňského rektifikace kružnice.

V následující části popíšeme právě Kochaňského rektifikaci. Nechť je dána kružnice se středem S a poloměrem $|AS|$, kde A, S jsou dva různé body. Sestrojme tečnu t k této kružnici v bodě A . Dále sestrojme kolmici k přímce AS procházející bodem S a jeden z průsečíků s danou kružnicí označme D . Přímka AS protíná naši kružnici v bodě A , druhý průsečík této přímky s danou kružnicí označme J , viz obr. 1.



Obr. 1

Nyní sestrojme bod E na kružnici tak, aby platilo $|DE| = |DS|$, tedy trojúhelník ESD je rovnostranný. Důsledkem toho je, že úhel $\sphericalangle ESA$ má velikost 30° . Průsečík polopřímky SE s tečnou t označme F . Na polopřímce FA nanese od bodu F třikrát vzdálenost rovnou velikosti poloměru kružnice. Tím vznikají postupně body G , H a I . Tvrdíme, že vzdálenost bodů I , J je přibližně rovna polovině obvodu dané kružnice, tedy platí $|IJ| \doteq \pi|AS|$. Pro jednoduchost počítání označme $|AS| = r$. K výpočtu délky úsečky $|IJ|$ využijeme Pythagorovu větu pro pravoúhlý trojúhelník AIJ . Úsečka AJ má délku $2r$, délka úsečky AI je $3r - \text{tg } 30^\circ r$. Jelikož $\text{tg } 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$, po jednoduchých úpravách dostaneme:

$$|IJ| = r\sqrt{(40/3 - 2\sqrt{3})} \doteq 3,1415333387r.$$

Jak víme, polovina obvodu kružnice je πr . Pokud bychom zvolili $r = 1$, získáme úsečku, jejíž délka se shoduje na čtyři desetinná místa s hodnotou čísla π .

Geometrický význam Eulerova čísla e

Existuje více způsobů jak definovat Eulerovo číslo e . My budeme k našemu účelu používat definici pomocí limity posloupnosti:

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n. \quad (1)$$

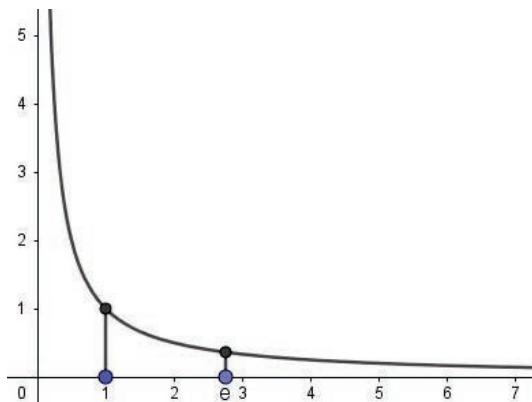
Ještě než se pustíme do konstrukce úseček, jejichž délky se blíží e , podíváme se na jinou geometrickou interpretaci čísla e . Tato geometrická interpretace je popsána v [3]. Definujme přirozený logaritmus pro $t > 0$:

$$\ln t = \int_1^t \frac{1}{x} dx.$$

Je-li $t \in (0, 1)$, pak použijeme zavedenou konvenci

$$\int_1^t \frac{1}{x} dx = - \int_t^1 \frac{1}{x} dx.$$

Nyní si stačí uvědomit geometrickou interpretaci integrálu nezáporné funkce. Například pro $t > 1$ je hodnota $\ln t$ rovna obsahu geometrického útvaru vymezeného přímkami $x = 1$, $x = t$, grafem funkce $y = 1/x$ a osou x , viz obr. 2.



Obr. 2

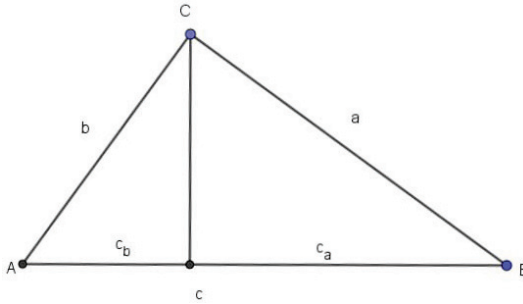
Eulerovo číslo e je takové reálné číslo, pro které platí, že obsah geometrického útvaru vymezeného přímkami $x = 1$, $x = e$, grafem funkce $y = 1/x$ a osou x je roven jedné. Tato geometrická interpretace nám sice říká, jakou podmínku má splňovat číslo e , nedovedeme si ovšem představit, že bychom podle tohoto návodu sestrojili úsečku, jejíž délka by byla přibližně rovna e .

Konstrukce úsečky, jejíž délka je přibližně rovna e

Pro náš účel, jak jsme dříve poznamenali, použijeme definici Eulerova čísla e jako limitu posloupnosti (1). V základním kurzu matematické analýzy se dokazuje, že tato posloupnost konverguje. V [3] je uveden geometrický důkaz, že tato posloupnost je rostoucí. Z vlastností konvergentních posloupností víme, že každá podposloupnost této posloupnosti je rovněž konvergentní a má stejnou limitu. K našemu účelu vybereme podposloupnost ve tvaru $(1 + 1/2^n)^{2^n}$. Dále budeme pro naši konstrukci využívat Eukleidovu větu o odvěsně (viz obr. 3), proto připomeňme její znění.

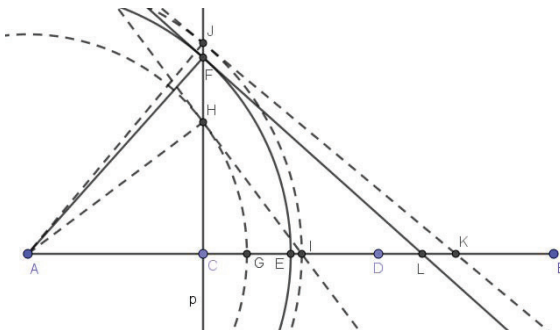
Věta 1. (Eukleidova o odvěsně) *Obsah čtverce sestrojeného nad odvěsnou pravoúhlého trojúhelníka ABC s přeponou c je roven obsahu obdélníku sestrojeného z přepony a úseku přepony k této odvěsně přilehlé. Jinými slovy platí následující rovnosti:*

$$a^2 = c \cdot c_a, \quad b^2 = c \cdot c_b.$$



Obr. 3

Naším cílem je sestrojit pro každé přirozené číslo n úsečku délky $(1 + 1/2^n)^{2^n}$. Pro $n = 1$ chceme sestrojit úsečku o délce $(3/2)^2$. Podívejme se na obr. 4, kde délka úseček $|AC|$, $|CD|$ a $|DB|$ je rovna jedné. Bod E je střed úsečky CD . Sestrojme přímku p , která je kolmá k přímce AB a prochází bodem C . Nyní ke konstrukci hledané úsečky použijeme Eukleidovu větu o odvěsně takto. Sestrojme kružnici se středem v bodě A a poloměrem rovným $|AE|$. Průsečík této kružnice se sestrojenou kolmicí p označme F . Sestrojme úsečku AF a k ní kolmici procházející bodem F . Průsečík této přímky s úsečkou AB označme L . Podle Eukleidovy věty o odvěsně aplikované na pravoúhlý trojúhelník AFL , kde známe délky úseček $|AC| = 1$ a $|AF| = 3/2$, je úsečka AL hledaná úsečka, jejíž délka je $(3/2)^2$.



Obr. 4

Pro $n = 2$ hledáme úsečku o délce $(5/4)^4$. Nyní náš postup budeme opakovat dvakrát. Sledujme čárkovanou část obr. 4. Vycházíme z úsečky AG , kde G je střed úsečky CE . Po první konstrukci dostaneme bod I a

po druhé následně bod K . Úsečka AK má délku rovnou $(5/4)^4$. Obecně, pokud bychom chtěli sestrojit úsečku o délce $(1 + 1/2^n)^{2^n}$, budeme náš postup opakovat n -krát. Přitom vycházíme z úsečky AM , jejíž délka je $1 + 1/2^n$. Úsečku AM sestrojíme tak, že nejdříve úsečku CD půlíme, tím získáme bod M_1 , který je střed úsečky CD . Dále půlíme úsečku CM_1 a získáme bod M_2 atd. Až získáme bod $M = M_n$. Snadným algebraickým výpočtem dostaneme, že při naší konstrukci pro $n = 5$ získáme úsečku o délce rovné $(1 + 1/2^5)^{2^5} \doteq 2,676\,990\,129\,38\dots$, zatímco hodnota $e = 2,718\,281\,828\,4\dots$. Jak vidíme, rozdíl je poměrně malý. Nicméně pomocí naší konstrukce můžeme sestrojit úsečku, jejíž délka se bude lišit od Eulerova čísla o libovolně malou hodnotu. Pokud bychom chtěli dosáhnout stejnou přesnost jakou dosáhl Kochaňski, je třeba zvolit alespoň $n = 15$. Při této volbě je délka výsledné úsečky rovna $(1 + 1/2^{15})^{2^{15}} \doteq 2,71824035\dots$. Tedy přesnosti na čtyři desetinná místa jsme dosáhli až při volbě $n = 15$, přesnost o jedno místo vyšší získáme až při volbě alespoň $n = 20$.

Závěr

Jak jsme mohli vidět, naše konstrukce nám umožňuje teoreticky sestrojit úsečku, jejíž délka se bude s libovolnou přesností blížit hodnotě Eulerova čísla e . Proto si myslíme, že naše konstrukce může být přínosná. Navíc nám není známá žádná konstrukce úsečky délky přibližně rovné e .

Poděkování

Velké poděkování patří doc. RNDr. Antonínu Slavíkovi, Ph.D., za jeho ochotu přečíst původní poznámky a za následné cenné rady, které vedly ke vzniku tohoto článku. Děkuji také doc. Ing. Ľubomíře Dvořákové, Ph.D., za pomoc s českým jazykem a přepis článku do LaTeXu.

Literatura

- [1] Ježková, A.: *Historie čísla e*. Bakalářská práce, PřF UP, Olomouc, 2014, [online]. Dostupné z: theses.cz/id/9qlvst/Jezkova.pdf.
- [2] Kašparová, M., Nádeník, Z.: Jan Sobotka (1862–1931). Přibližné rektifikace kruhového oblouku. Matfyzpress, Praha, 2010, s. 53–79.
- [3] Slavík, A.: Geometrické důkazy v matematické analýze. *PMFA*, roč. 64 (2019), č. 4, s. 229–237.

Oblačná elektřina – od zemského kondenzátoru ke kulovému blesku

Jan Bednář, Jaroslav Kopáček, Michal Žák

Katedra fyziky atmosféry MFF UK, Praha

Do třetice přinášíme další ukázkou z knihy Jak vzniká počasí [1], tentokrát zaměřenou na „elektřinu v oblacích“. V článku může čtenář hledat odpovědi mimo jiné na otázky: Jak si můžeme z hlediska elektřiny představit Zemi a její atmosféru? Proč jsou různé části oblaků různě elektricky nabitý? Co (ne)víme o kulovém blesku? Se svolením autorů a nakladatelství Karolinum byl text pro potřeby našeho časopisu upraven.



Úvod

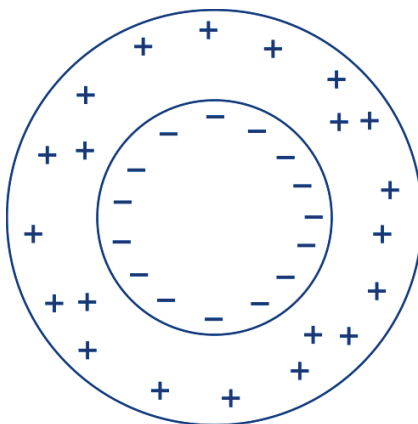
V odborné literatuře se obvykle rozlišují dva základní typy podmínek pro elektrické procesy probíhající v zemské atmosféře. První z nich bývá v anglosaské literatuře označován *fine weather conditions*, což se do češtiny zpravidla překládá jako podmínky klidného ovzduší, a znamená situaci s jasnou oblohou nebo jen s málo významnou oblačností, beze srážek, bez výskytu mlhy, silného větru apod. Protikladem je anglosaský termín *disturb weather conditions*, v překladu zpravidla uveden jako podmínky bouřlivého počasí, odpovídající především výskytu výrazné oblačnosti, zejména pak bouřkových oblaků. Protože atmosféra a zemský povrch jsou převážně nabitý elektrickými náboji opačné polarity, vytváří se v atmosféře přibližně vertikálně orientované elektrické pole, jehož intenzita dosahuje u zemského povrchu za podmínek klidného ovzduší nejčastěji hodnot kolem $130\text{--}140 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$. Náboj zemského povrchu je přitom záporný (stejného znaménka jako náboj elektronu), zatímco atmosféra nese převahu kladného náboje. V určitých případech, především pod základnami bouřkových oblaků, však elektrická pole zesilují řádově až na desítky tisíc $\text{V} \cdot \text{m}^{-1}$ a jsou orientována opačně než za podmínek klidného ovzduší.

Země jako kondenzátor

Elektrická vodivost vzduchu v troposféře (ve spodní části atmosféry) je velmi malá (i když nikoli přímo nulová) a vzduch zde můžeme považovat za technicky dobré dielektrikum. V důsledku zvětšující se ionizace vzduchu s výškou však působením kosmického záření roste i elektrická vodivost vzduchu. Ve výškách přibližně $50\text{--}60 \text{ km}$ bývá vzduch již natolik elektricky vodivý, že jednotlivé myšlené kulové plochy obepínající Zemi zde můžeme považovat ve vztahu k elektrickému potenciálu za ekvipotenciální plochy. Vrstvy atmosféry zhruba nad výškou 50 km se pak v příslušné odborné literatuře někdy označují jako *elektrosféra*.

Na základě právě uvedeného lze zkonstruovat jednoduchý model elektrické struktury soustavy zemský povrch – atmosféra, a to v podobě gigantického sférického kondenzátoru (viz obr. 1), který je – v příslušné abstrakci – tvořen dvěma opačně nabitými vodivými kulovými plochami, konkrétně záporně nabitým zemským povrchem a kladnou elektrosférou, oddělenými vzdušnou vrstvou s dostatečně malou elektrickou vodivostí. Protože však elektrická vodivost vzduchu nikdy není zcela nulová a v atmosféře existuje přibližně vertikálně orientované elektrické pole,

musí atmosférou vertikálně stále protékat elektrické proudy, které přivádějí k zemskému povrchu kladný náboj a vybíjejí tak daný sférický kondenzátor. Kvantitativní rozbory této skutečnosti jednoznačně ukazují, že tímto způsobem by relativně rychle, tj. s relaxační dobou řádově ne více než desítky minut, došlo k vybití kondenzátoru, neutralizaci záporného náboje zemského povrchu a zániku vertikálně orientovaného elektrického pole v atmosféře. Jako relaxační dobu v tomto případě uvažujeme čas, za který by hustota povrchového rozložení záporného elektrického náboje na zemském povrchu klesla na $1/e$ výchozí hodnoty (e je základ přirozených logaritmů, $e \doteq 2,718$). Protože však elektrické pole v ovzduší je z dlouhodobého a velkoprostorového hlediska stálé, musí existovat opačně působící nabíjecí mechanismus generující záporný náboj zemského povrchu. Jak uvidíme z dalšího, takový mechanismus lze spatřovat v projevech oblačné elektřiny, zejména pak při bouřkové činnosti. Konkrétní mechanismy, přivádějící k zemi z dolních partií oblaků převážně záporný elektrický náboj, jsou především hrotové (bodové) výboje a blesky.



Obr. 1: Zemský sférický kondenzátor

Na rozdíl od obecné fyzikální literatury se v odborné literatuře z oblasti atmosférické elektřiny zpravidla volí opačná orientace elektrického pole, tzn., že siločáry vycházejí ze záporného elektrického náboje a směřují k náboji kladnému. Důvodem je to, aby základní atmosférické elektrické pole odpovídající uvedenému modelu sférického kondenzátoru za podmínek klidného ovzduší mohlo být uvažováno jako kladné, tj. s orientací siločar zdola nahoru.

Tři oblačné typy z hlediska elektřiny

Oblaky se v atmosféře projevují charakteristickými elektrickými efekty. Pokud jde o velikosti koncentrací elektrického náboje, způsob jeho prostorového rozložení a intenzitu elektrického pole uvnitř oblaků, lze přibližně rozlišovat tři oblačné typy:

1. *Relativně slabé elektrické projevy u vrstevnatých nesrážkových oblaků*, kdy koncentrace elektrického náboje a elektrická pole uvnitř oblaku jsou řádově srovnatelné s poměry v bezoblačném vzduchu. Z hlediska vnitřní struktury se v tomto případě oblačná vrstva nejčastěji skládá ze dvou opačně nabitých dílčích vrstev, přičemž případy, kdy dolní z těchto vrstev je záporné a horní kladně nabitá, a případy opačné polarity oblaku jsou přibližně stejně pravděpodobné. Vyskytují se však vcelku běžně i oblaky tvořené pouze jednou elektricky nabitou vrstvou nebo naopak oblaky s více takovými střídajícími se vrstvami či oblaky téměř elektricky nenabitě.

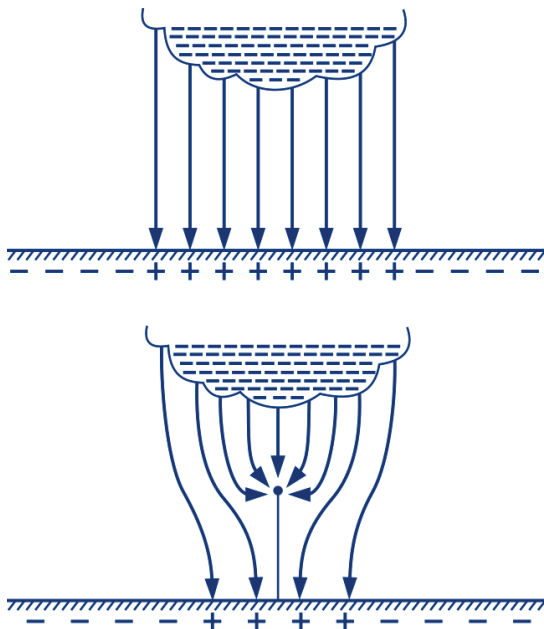
2. *Silnější elektrické projevy vrstevnatých srážkových oblaků*, tj. především smíšených oblaků druhu nimbostratus – Ns. V tomto případě již nad ostatními typy rozložení elektrického náboje převládá (nikoli však výlučně) bipolární struktura, kdy v dolní části oblaku je koncentrován záporný a v horní části kladný elektrický náboj. Koncentrace elektrického náboje a elektrická pole uvnitř oblaku bývají přitom asi o řád větší, než je tomu v bezoblačné atmosféře.

3. *Projevy bouřkové elektřiny vyskytující se u oblaků druhu cumulonimbus – Cb*, kdy bipolární struktura se záporným nábojem v dolní části oblaku a kladným nábojem v jeho horní části je již výlučná a elektrická pole uvnitř oblaků i pod nimi bývají alespoň o dva řády větší ve srovnání s bezoblačným ovzduším (viz obr. 2). Záporný náboj ve spodní části bouřkového oblaku způsobuje indukování („vytvoření“) kladného elektrického náboje na zemském povrchu, což má za následek, že pod bouřkovými oblaky, ale někdy i pod nebouřkovými mohutnějšími srážkovými oblaky se zemský povrch jeví ve srovnání se svým běžným záporným nabitím jako anomálně kladný. Orientace elektrického pole pod oblačnou základnou je pak přirozeně opačná, než je tomu např. za podmínek klidného ovzduší.

Mechanismy vzniku center kladného a záporného náboje

Jednoznačně vysvětlit mechanismus vzniku vzájemně separovaných center kladného a záporného náboje v oblacích není jednoduché. V pod-

statě nebyla dosud vytvořena jednotná teorie, která by beze zbytku vysvětlovala relativně slabé elektrické charakteristiky nesrážkových oblaků, silnější elektrické projevy u oblaků, z nichž mohou vypadávat srážky trvalejšího charakteru, i nápadné elektrické efekty v bouřkových oblacích. Všeobecně se předpokládá, že při separování elektrických nábojů opačných znamének v oblacích nepůsobí pouze jediný výlučný mechanismus, ale spíše jde o spolupůsobení většího počtu faktorů, jejichž dílčí příspěvky se z kvantitativního hlediska mohou podstatně měnit v závislosti na různých podmínkách.



Obr. 2: Elektrické siločáry pod bouřkovým oblakem, na dolní části obrázku deformace jejich pole při hrotovém výboji

Historicky dosáhla značné publicity *Wilsonova teorie*, pocházející ve své výchozí verzi z r. 1929, která vychází z toho, že v obvykle se vyskytujícím vnějším elektrickém poli v atmosféře jsou padající dešťové kapky elektricky polarizovány, přičemž jejich horní části nesou záporný a dolní části kladný náboj. Za předpokladu, že rychlost pádu kapek je větší než rychlost pohybu kladných atmosférických iontů směrem dolů k záporně nabitému zemskému povrchu, budou padající kapky zachycovat převážně

záporné ionty, a to na své dolní kladně nabitě části, čímž dojde k jejich celkově zápornému nabíjení. Ve spodních partiích oblaku se potom soubory padajících kapek projevují jako záporné centrum elektrického náboje, zatímco nahoře zůstává po zachycení alespoň části přítomných záporných iontů převaha náboje kladného. Takto lze kvalitativně zdůvodnit vznik horního kladného a dolního záporného centra elektrického náboje v oblaku, ale na kvantitativní vysvětlení velikostí elektrických nábojů v bouřkových oblacích právě popsaný mechanismus zdaleka nestačí.

Kromě toho se ukazuje, že elektrická pole jsou v bouřkových oblacích zpravidla natolik silná, že nemůže být splněn předpoklad o větší rychlosti pádu kapek ve srovnání s rychlostí dolů se pohybujících kladných iontů. Na druhé straně však i v kontextu současných znalostí nelze vyloučit, že mechanismus uvažovaný v právě zmiňované teorii má určitý reálný význam, a to zejména u oblaků se slabšími elektrickými projevy. Je zřejmé, že analogické procesy je možné uvažovat i v souvislosti s ledovými částicemi přítomnými v oblacích. K tomu můžeme zmínit *Wallovu teorii* z roku 1948. Její autor usuzoval, že ledové krystalky v atmosféře mohou být elektricky polarizovány samy o sobě a vnější elektrické pole působí pouze jejich souhlasnou orientaci v prostoru (tzv. orientační polarizace).

Dvě skupiny teorií vycházející z přítomnosti pevné fáze vody

Protože silné elektrické efekty v oblacích jsou prakticky vždy spojeny s intenzivními srážkotvornými procesy a s vypadáváním srážek, což zpravidla předpokládá smíšený charakter oblaků, je třeba největší váhu zřejmě přisuzovat teoriím vycházejícím z přítomnosti pevné fáze vody, tj. ledových částic v oblacích. Tyto teorie můžeme v zásadě rozdělit do dvou skupin, z nichž první je *založena na termoelektrických vlastnostech ledu*, zatímco druhá *vychází z elektrických dějů při intenzivním obalování oblačných ledových částic přechlazenou vodou*, což probíhá za teplot pod 0°C .

V objemovém elementu ledu je určitá část molekul H_2O disociována a vyskytují se pak zde anionty OH^- a kationty vodíku H^+ , které jsou ve srovnání s OH^- natolik pohyblivější, že elektrické efekty vyplývající z termického pohybu aniontů OH^- lze vcelku zanedbat. Představme si nyní ledovou tyčinku, jejíž dva konce udržujeme při různých teplotách. Kationty H^+ budou působením termické difuze větší měrou přecházet na chladnější konec, který se tak bude kladně nabíjet, zatímco na svém teplejším konci tyčinka ponese v důsledku toho přebytek záporného náboje.

V bouřkovém oblaku můžeme předpokládat, že relativně velké ledové částice zachycují podstatně více přechlazených vodních kapiček, a více se tedy na svém povrchu zahřívají uvolňováním tepla při jejich namrzání než drobné ledové částičky. U nich se proces zachycování přechlazených kapek vody uplatňuje minimálně, neboť částice srovnatelných rozměrů se ve vzdušném proudu spíše vzájemně obtékají. Při vzájemných přibližně pružných nárazech se pak na okamžik dostává do kontaktu relativně teplejší povrch velkých ledových částic s chladnějším povrchem menších ledových krystalků a úlomků ledu, což způsobí, že velké elementy se nabíjejí záporně, zatímco malé částice kladně. Velké ledové částice mohou padat tak velkou rychlostí, že propadávají dolů někdy i přes vzestupné vzdušné proudy a ve spodní části oblaku se pak jeví jako dolní záporné centrum. Kladně nabitě menší částice jsou však unášeny vzhůru a vytvářejí horní kladné centrum elektrického náboje.

Ve druhé skupině teorií se předpokládá, že proces zachycování přechlazených vodních kapiček na povrchu oblačných ledových částic může být natolik intenzivní, že zachycená přechlazená voda nestačí okamžitě zmrznout a led se pak přechodně obaluje vrstvičkou přechlazené vody. Laboratorní pokusy i teoretické závěry ukazují, že pokud se na ledové podložce při teplotách pod $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ vytvoří vrstvička přechlazené vody obsahující chemické příměsi typické pro oblačnou vodu (zejména různé rozpustěné soli), dochází k zápornému nabíjení ledu a ke kladnému nabíjení obalové vrstvy přechlazené vody. V bouřkovém oblaku, kde vždy působí silná turbulence a dochází k četným vzájemným srážkám oblačných částic, mohou z obalové blány obsahující přechlazenou vodu odstříkovat drobné kladně nabitě vodní kapičky, které pak působením vzestupných vzdušných proudů směřují do horní části oblaku. Záporně nabitě větší elementy však propadávají dolů, neboť rychlost jejich pádu převyšuje rychlost vzestupných proudů vzduchu. Obdobně bývá někdy pozorováno záporné nabíjení větších ledových částic i při okamžitém namrzání přechlazených vodních kapiček, kdy je kladný náboj vynášen do okolí prostřednictvím odlétávajících jemných úlomků ledu.

Všechny právě zmíněné mechanismy separování elektrických nábojů opačného znaménka v oblacích mají společné jednoduché schéma, které je možno rozdělit na dvě fáze:

1. *Větší srážkové elementy* se z určitého důvodu vysvětlovaného příslušnou teorií nabíjejí záporně, zatímco v jejich okolí se v důsledku toho vytváří převaha kladného náboje.

2. *Vlastní mechanické separování elektrických nábojů je v podstatě způ-*

sobeno zemskou gravitací za spolupůsobení vzestupných vzdušných proudů v oblaku. Velké elementy padají dolů, v dolní části oblaku se pak jeví jako záporné centrum. Nahoře zůstává převaha kladného náboje v podobě kladných iontů, popř. převážně kladně nabitých malých přechlazených vodních kapiček nebo menších ledových částic, které padají menší rychlostí, než je rychlost vzestupných proudů vzduchu v oblaku.

Kromě těchto tzv. *gravitačních teorií* lze v odborné literatuře nalézt i teorie další, s obvykle přisuzovaným menším významem, kde je vliv zemské gravitace substituován relativními pohyby ve vzestupných a sestupných proudech vzduchu v bouřkovém oblaku. Některé z nich uvažují i případný vliv hrotových výbojů, o nichž pojednáváme v bezprostředně následujícím textu.

Pro úplnost je na tomto místě vhodné zmínit i skutečnost, že kromě dvou hlavních center elektrického náboje (horního kladného a dolního záporného) se v bouřkovém oblaku zpravidla vyskytuje i podstatně menší, tzv. podružné centrum kladného náboje, lokalizované do oblasti základny oblaku a prostorově i časově vázané na intenzivní vypadávání srážek za podmínky, že oblačná základna se nalézá pod nulovou izotermou. Předpokládá se, že toto centrum vzniká mechanismy spojenými s táním ledových elementů v padajících srážkách a s okamžitým rozpadáním takto vzniklých objemových elementů kapalné vody.

Celkově je možno shrnout, že projevy bouřkové elektřiny předpokládají silné mechanismy generování oblačných center separovaného kladného a záporného elektrického náboje, které vyžadují bouřlivé narůstání ledové fáze v bouřkových oblacích. V mezích všech současných znalostí dané problematiky se lze domnívat, že termodynamické podmínky pro takové procesy se v reálné troposférické oblasti zemské atmosféry mohou typicky vyskytnout právě v souvislosti s velmi mohutnými vertikálními pohyby vzduchu podmíněnými silnou atmosférickou konvekcí.

Hrotové (bodové) výboje

Za běžných podmínek v atmosféře představují přibližně vertikálně tekoucí elektrické proudy pohyb iontů vzniklých zpravidla působením kosmického nebo v blízkosti zemského povrchu radioaktivního záření. Elektrony po svém odtržení od atomů a molekul jsou při srážkách s dalšími molekulami na nich obvykle zachycovány, neboť nemají kinetickou energii postačující k tomu, aby při nárazu způsobily novou ionizaci, tzv. ionizaci nárazem. V dostatečně silném elektrickém poli však volný elektron může během časového intervalu mezi svým uvolněním z dané molekuly

a první srážkou s další, obvykle elektricky neutrální molekulou získat natolik velkou kinetickou energii, aby molekulu, do níž narazí, ionizoval nárazem, tj. způsobil na ní nové odtržení elektronu a vznik dalšího iontu. Obdobně mohou působit i další elektricky nabitě částice, např. ionizované molekuly nebo jejich shluky, které však vzhledem ke své podstatně menší pohyblivosti mají ve srovnání s volnými elektrony slabší ionizační schopnost. Elektron uvolněný při zmíněném nárazu z původně elektricky neutrální molekuly pak dále působí ionizaci nárazem a počet vzniklých iontů lavinovitě roste.

Uvažujme nyní elektrické pole mezi oblakem, v jehož spodní části je koncentrován relativně velký záporný náboj, a zemí, na níž je tímto záporným nábojem indukován kladný elektrický náboj. Elektrické siločáry jsou přibližně vertikálně orientovány a tato situace je schematicky znázorněna na horní části obr. 2. Do takto charakterizovaného elektrického pole vložíme pak elektrický vodič natolik malých rozměrů, abychom ho v daném přiblížení mohli považovat za bod (hrot), který je uzemněn, tj. vodivě spojen se zemským povrchem, a má s ním proto stejný elektrický potenciál. V okolí tohoto uzemněného hrotu jsou pak elektrické siločáry deformovány tak, jak je zřejmé z dolní části obr. 2. Tímto způsobem vzniká v bezprostředním okolí daného uzemněného hrotu zesílené elektrické pole („zhuštěné elektrické siločáry“), čímž mohou být v některých případech vytvořeny podmínky pro ionizaci nárazem. Okolo zmíněného hrotu se pak vytváří oblak iontů, z něhož jsou uzemňujícím svodem odváděny k zemskému povrchu ty částice, jež nesou vzhledem k zemi náboj opačného znaménka, tj. v zobrazeném případě záporný náboj. Ten se pak po zemském povrchu vzhledem k jeho vysoké elektrické vodivosti prakticky okamžitě rozestře.

Pro bodový uzemněný vodič nalézající se v určité výšce nad zemí existuje jistá kritická hodnota velikosti intenzity původního elektrického pole, při níž v jeho bezprostředním okolí nastává vlivem zhuštění elektrických siločar ionizace nárazem a vytváří se tam hrotový výboj. Takováto podmínka bývá splněna pod základnami bouřkových a podobných oblaků, a to často i tehdy, neprojevuje-li se právě elektrická aktivita v podobě blesků.

Ideální dokonale uzemněné bodové vodiče můžeme v přírodě najít jen zřídka. S přiměřeně menší účinností však obdobným způsobem vznikají příslušné výboje za vhodných podmínek na vrcholcích stromů, keřů, koncích větví, hrotech jehličí apod. Přirozeně účinnější mohou být některé objekty antropogenního původu, jako např. vrcholky stožárů, věží atd.

Silné hrotové výboje, lokálně podmíněné intenzivní ionizací nárazem, jsou provázeny i zvukovými efekty (typicky určitým druhem praskání) a někdy i dobře patrnými zrakovými vjemy spočívajícími v jiskření a sršení různých, zejména kovových hrotů, špiček stožárů, bání věží apod. U nás bývá tento úkaz lidově označován jako *Eliášův oheň*, *Eliášovo světlo*, *oheň sv. Eliáše* apod. Z odborného terminologického hlediska jde o druh tzv. *koronárního výboje*. Intenzita hrotových výbojů a výraznost právě zmíněných jevů je úměrná rozdílu elektrického potenciálu mezi uzemněným bodovým vodičem a okolním vzduchem, což je totéž co rozdíl potenciálů mezi zemským povrchem a hladinou ovzduší, v níž se uvažovaný bodový vodič nalézá.

Jako historickou zajímavost lze uvést, že na principu odsávání elektrického náboje z dolní části bouřkových oblaků prostřednictvím hrotových výbojů byl v podstatě založen již v polovině 18. století *bleskosvod (hromosvod) Prokopa Diviše*.

Jinou zajímavostí může být to, že zde zmíněné české lidové označování příslušného úkazu obvykle chybně navozuje souvislost se starozákonním prorokem Eliášem. Cizojazyčné ekvivalenty však vesměs obsahují jméno Elmo, což neodpovídá vlastnímu jménu Eliáš, ale představuje jednu ze dvou variant italského překladu jména Erasmus (Elmo, Erasmo). Zde skutečně jde o Erasma z Antiochie, uváděného též jako Erasmus z Formie, křesťanského světce a mučedníka z doby římského císaře Diokleciána (uváděný rok umučení 303). Ten byl zejména ve středomořské oblasti ve středověku uctíván námořníky a vzýván při bouřích na moři jako ochránce před úderem blesku, což souviselo s legendisticky popisovanou událostí z jeho života (záchrana lodi po úderu blesku do stožáru).

Hrotové (bodové) výboje se nesporně významně podílejí na přívodu záporného náboje k zemskému povrchu a tím významně přispívají k dobíjení dříve zmíněného zemského sférického kondenzátoru. Při menší pozornosti by se však čtenář příslušné odborné literatury mohl někdy domnívat, že v ní ohledně kvantifikace tohoto procesu naráží na rozporná tvrzení. Lze nalézt závěry, že hrotové výboje jsou v tomto směru účinnější než blesky, jindy je možné setkat se s tím, že právě blesky dodávají zemi většinu k ní přitékajícího záporného náboje. Zde je však vždy nutno brát ohled na kontext popisované situace.

Je zřejmé, že nejružnější objekty přirozeného i umělého (antropogenního) původu, které lze v jistém přiblížení považovat za realizaci hrotů s elektricky vodivým svodem k zemskému povrchu, a nalézající se tedy na stejném elektrickém potenciálu jako zemský povrch, mohou účinně

odsávat z atmosféry elektrický náboj opačného znaménka, než odpovídá aktuálnímu nabití zemského povrchu. Tento proces zřejmě může se slabší, ale dostatečnou účinností probíhat i tehdy, kdy zesílené elektrické pole v bezprostředním okolí daného hrotu ještě nedosahuje intenzity potřebné k tomu, aby přímo vznikla ionizace nárazem. V širším slova smyslu zde můžeme uvažovat o svého druhu tiché formě hrotového výboje. K příslušnému přenosu záporného náboje shora k zemskému povrchu pak dochází ve značném prostorovém i časovém rozsahu pod základnami oblaků, které nesou ve své spodní části dostatečně velký záporný náboj, což odpovídá mohutnějším srážkovým oblakům, i když ještě nemusí jít o elektricky aktivní bouřkové oblaky. Jde-li tedy o dlouhodobé a velkoprostorové bilancování přenosu záporného elektrického náboje k zemskému povrchu mechanismy odpovídajícími hrotovým výbojům za celého spektra k tomu vhodných meteorologických situací, potom v celkové bilanci přinášejí tyto mechanismy k zemskému povrchu podstatně více záporného náboje než blesky. Naproti tomu za časově omezené situace, odpovídající v dané lokalitě aktuálnímu průběhu bouřky, platí mezi velikostmi přenosů záporného náboje k zemskému povrchu uskutečňovaných prostřednictvím hrotových výbojů a blesků relace opačná.

Blesky

V případě blesku jde v zásadě o *silný jiskrový výboj* buď mezi centry elektrického náboje opačné polarity uvnitř bouřkového oblaku druhu cumulonimbus – Cb (zpravidla mezi centrem kladného náboje v horní části oblaku a centrem záporného náboje v jeho dolní části), nebo mezi jedním tímto centrem (nejčastěji dolním záporným) a zemským povrchem. V prvním případě se obvykle mluví o *vnitrooblačném (vnitřním) blesku*, ve druhém o *blesku do země*. Vyskytují se však běžně i vnitřní blesky mezi elektrickými centry různých konvekčních cel uvnitř složitých komplexů multicelárních bouřkových oblaků. Kladné blesky do země se významněji objevují buď při velkém sklonu vertikální osy bouřkového oblaku, kdy horní centrum kladného náboje je vůči poloze dolního záporného centra značně horizontálně posunuto, nebo v pozdních fázích bouřky, kdy elektrická aktivita dolního záporného centra je předchozími blesky do země již značně vyčerpána. Na rozdíl od hrotových výbojů, které probíhají v omezených objemech vzduchu v bezprostředním okolí elektricky vodivých předmětů malých rozměrů vodivě spojených se zemským povrchem, jde v případě blesku o elektrický výboj spojený s vysokou ionizací vzduchu ve značném prostorovém rozsahu.

První hlavní viditelná fáze blesku je tvořena *vůdčím výbojem* (vůdcem blesku, angl. leader – odtud dnes v češtině někdy používané označení líder blesku), jenž vytvoří opticky dobře patrný kanál vysoce ionizovaného a zahřátého vzduchu, jímž pak po určitý časový interval protéká elektrický proud. Vůdčí výboj často postupuje po jistých krocích (stepped leader), což lze vysvětlit tak, že na jeho dráze dochází k poklesu gradientu potenciálu pod určitou kritickou hodnotu a pohyb výboje se pak na několik mikrosekund až milisekund zastavuje. Během tohoto času však intenzita elektrického pole znovu naroste a výboj pokračuje dále. Dle podoby tohoto krokování se rozlišují blesky *typu alfa* a *typu beta*. V případě blesků *typu alfa* odpovídá délka jednotlivých kroků řádově desítkám až několika stovkám metrů, převažuje vertikální struktura blesku, trvání kroku řádově odpovídá mikrosekundám a rychlost postupu vůdce řádově dosahuje až $10^5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. U blesků *typu beta* bývají počáteční rychlosti pohybu vůdce řádově $10^6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, rychle však klesají, a to alespoň o řád, blesk je bohatě horizontálně větvený s relativně dlouhými kroky, které se však směrem dolů většinou opticky zkracují.

Průměry kanálů ionizovaného vzduchu dosahují podle výsledků četných pozorování několika mm až většího počtu cm, v některých případech až dm. Podle intenzity jednotlivých pozorovaných spektrálních čar plynů tvořících vzdušnou směs lze soudit, že teploty v kanálech blesků krátkodobě dosahují až hodnot kolem 30 tisíc kelvinů.

Vývoj a vnitřní struktura blesku

Pokud jde o podrobnější popis vývoje a vnitřní struktury individuálního bleskového výboje, věnujme se typickému případu blesku mezi dolním záporným centrem a zemským povrchem (záporný blesk do země). Zprvu se vytváří ještě bez optické patrnosti jakýsi *předvýboj*, kdy se ve vzduchu formují „kanálky“ svádějící k zemi záporný náboj, a takto vzniknou podmínky pro vůdčí výboj. Příčinou obvyklého větvení právě zmíněných vodivých kanálků je často silná prostorová nehomogenita elektrického pole. V některých (méně častých) případech se však takto uplatní pouze jeden dominující kanál předvýboje, čímž posléze vznikne nevětvený (čárový) blesk. Jsou-li na zemi podmínky pro dostatečně intenzivní indukování kladného náboje, formují se směrem vzhůru obdobné, ale obvykle kratší kanálky vedoucí vzhůru do oblaku kladný náboj, čímž se vytváří tzv. *vstřícný výboj*. Propojením obou právě zmíněných typů kanálků posléze vznikne hlavní výbojový kanál, jímž ze spodní záporně nabitě části bouřkového oblaku rychle k zemi protéká záporný náboj.

Vzápětí dojde k tzv. zpětnému výboji, jenž představuje časovou fázi vývoje blesku, kdy dojde k propojení toku záporného náboje k zemi a toku kladného náboje směřujícího od země vzhůru. S tím bezprostředně souvisí ohřátí kanálu blesku až na zmíněné teploty kolem 30 tisíc kelvinů, což se projeví velmi výrazným zjasněním příslušné části bleskového kanálu. Ve zformovaném plazmovém kanálu pak může právě popsany děj elektrického výboje několikrát opakovaně proběhnout. Jeden takový dílčí výboj trvá maximálně milisekundy, obdobné jsou i časové intervaly mezi těmito dílčími výboji. Lidské oko není schopno jednotlivé dílčí výboje od sebe odlišit; příslušnému pozorovateli se často pouze vytváří dojem mihotání blesku. Při dobrých podmínkách pro zrakové pozorování daného bleskového výboje lze někdy sledovat i lokální trsovitý výboje v oblasti velkého gradientu elektrického potenciálu na rozhraní mezi záporným oblačným nábojem a zdola přiváděným kladným nábojem. Těmito trsovitými výboji bývá vzhůru tekoucí kladný náboj neutralizován a dochází pak k plnému obnovení toku záporného náboje k zemskému povrchu.

Různé podoby blesků

Podle vzhledu se např. rozlišují:

- *blesk čárový (šípový)*, vyskytující se nejčastěji mezi oblakem a zemí, jehož viditelný kanál není větven,¹⁾



¹⁾Fotografie blesků byly převzaty ze stránek:
<https://www.meteopress.cz/vysvetleni/blesky/>

FYZIKA

- *blesk rozvětvený*, vyskytující se mezi oblakem a zemí, ale i uvnitř oblaku, často s velmi bohatým větvením, přičemž optická intenzita rozvětvených dílčích kanálů směrem od hlavního kanálu zpravidla slábne,



- *blesk perlový (čočkový)*, vzácněji se vyskytující typ s opticky přerušovaným kanálem, což však může být způsobeno i pozorováním přes husté a prostorově nehomogenní vypadávání srážek,



- *blesk plošný*, kdy kanál blesku je pozorovateli skryt uvnitř oblaku, přičemž je zrakově vnímáno pouze osvětlení oblaku zevnitř,



- *blesk stuhový*, vyskytující se řídce, s výrazně širším opticky patrným kanálem, což bývá vysvětlováno ovlivněním vnímání kanálu silným větrem.



Kulový blesk

Vzácným jevem vyskytujícím se při bouřkách je *kulový blesk*. Mívá sférický tvar o průměru od několika cm až v některých extrémních pří-

padech 1–2 m, projevuje se světélkováním v různých barvách, volně se vznáší ve vzduchu nebo se snáší shora dolů. Někdy mizí explozí, jinde se tiše rozplyne, vniká do budov nejčastěji komíny nebo okny a má přitom destruktivní účinky, při dotyku působí popáleniny. Původ tohoto jevu není dosud zcela objasněn, lze soudit, že jde o určitou formu existence plazmy v atmosféře, někteří autoři se např. domnívali, že může jít o určité shluky plazmy vzniklé „svinutím“ kanálů obyčejných blesků. Dnes nejvíce uplatňovaná představa však spočívá v tom, že kulový blesk vzniká při úderu běžného blesku do takového místa na zemském povrchu, kde je v důsledku složité struktury půdy a jejího podloží omezena možnost dostatečně účinného prostorového rozptýlení elektrického náboje přineseného na zem bleskem. V prostorově omezeném objemu bezprostředně pod povrchem pak dojde k bouřlivým procesům, jimiž se vytvoří přibližně kulový útvar plazmy, jenž posléze jakoby vystoupí ze země do vzduchu. Dochází přitom i k dílčímu spalování složek půdy, což se projeví na barvě daného kulového blesku. Určitým problémem při tomto vysvětlení však může být to, že zmíněné omezení elektrické vodivosti půdy v předpokládaném místě úderu původního blesku snižuje možnosti rozvinutí vstřícného výboje a svým způsobem pak snižuje pravděpodobnost iniciačního bleskového úderu do daného místa. Existují však příslušná zdůvodnění, např. v podobě svedení blesku nějakým existujícím (přírodním nebo umělým) svodem nebo v důsledku úzkého pilíře vysoce elektricky vodivé horniny k zemskému povrchu. V každém případě však právě zmíněná skutečnost může dobře odpovídat relativně malé četnosti výskytu kulových blesků.

Zvukovým průvodním projevem blesku je hřmění (hrom). Jeho zdrojem je tlaková vlna vzniklá náhlým zvětšením objemu vzduchu v kanálu blesku při jeho krátkodobém ohřátí na teploty dosahující desítek tisíc kelvinů.

Blesky jsou zdrojem i radiových signálů, tzv. *atmosfériků*, zkráceně *sfériků*, které při výskytu bouřek (někdy i relativně dosti vzdálených) např. ruší poslech rozhlasu. Jde o signály elektromagnetického vlnění, jež vzniká při pohybu elektrických nábojů přenášených blesky. Vzhledem k tomu, že změny rychlosti tohoto pohybu obvykle nevytvářejí jednoduché periody, má toto vlnění charakter vcelku nepravidelných pulzů, které např. po rozložení do Fourierova rozvoje obsahují široký rozsah frekvencí. Sledování výskytu a struktury atmosfériků může takto poskytovat cenné informace o rychlostech pohybu elektrického náboje v bles-

cích a o jejich struktuře. Sledování atmosféríků může rovněž poskytnout cenné informace o aktuálním stavu vysoké atmosféry (ionosféry), neboť ten významně souvisí s podmínkami jejich šíření na velké vzdálenosti.

Ke sledování blesků na vzdálenosti řádově desítek až stovek km se dnes využívají sítě bleskových detektorů, které reagují na lokální změny elektromagnetického pole způsobené jednotlivými bleskovými výboji. Výsledná informace pak může být mj. jistou analogií radiolokačního sledování bouřek a umožňuje např. rozlišovat vnitřní blesky od blesků do země včetně určení jejich polarity. Do takové sítě organizované ve střední Evropě je zapojen i Český hydrometeorologický ústav.

Literatura

- [1] Kopáček, J., Bednář, J., Žák, M.: *Jak vzniká počasí*. Karolinum, Praha, 2020.

Mechanický akumulátor

Pavel Pokorný, Ústav matematiky, VŠCHT Praha

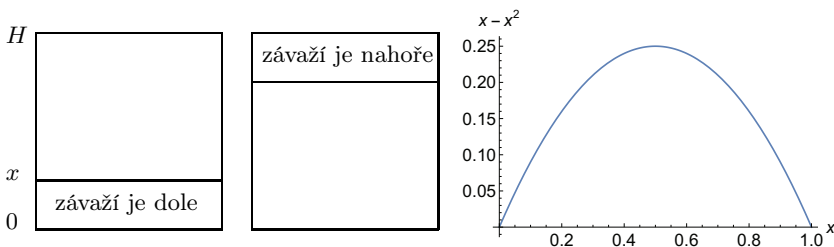
Úlohy na hledání maxima nebo minima určité funkce jsou často velice důležité a praktické. V článcích [1] a [2] jsme se zabývali otázkou, jak dostříknout co nejdále. V tomto článku se podíváme na podobnou úlohu: jak navrhnout mechanický akumulátor, aby pojal co nejvíce potenciální energie.

Podobně jako u elektrického akumulátoru sloužícího k uchování, tedy akumulaci elektrické energie, můžeme mechanickou energii uchovávat v zařízení, které bychom mohli nazvat *mechanický akumulátor*. V případě kinetické energie poslouží rotující setrvačnick. A v případě potenciální energie tíhové je asi nejznámější případ závaží u starých hodin zvaných pendlovky (obr. 1 vlevo). Obsluha hodin ručně vytáhne závaží do horní polohy a tím dodá systému mechanickou energii, která slouží k pohonu hodinového stroje. Pro uchování mnohem většího množství mechanické energie lze použít přčerpávací nádrž, např. u elektrárny Dlouhé stráně v Hrubém Jeseníku (obr. 1 vpravo).



Obr. 1: Vlevo: Historické hodiny zvané pendlovky využívají závaží k uchování mechanické energie. Vpravo: Vodní nádrž přečerpávací elektrárny Dlouhé stráně slouží jako akumulátor mechanické energie (na kopci vpravo nahoře).

Zabývejme se otázkou, jaká má být výška x závaží ve tvaru kvádrů (o rozměrech a , b , x), které se může pohybovat nahoru a dolů v prostoru o výšce H , abychom jeho zvednutím v daném prostoru uchovali co možná nejvíce potenciální energie tíhové.



Obr. 2: Vlevo: schematický náčrt situace, kdy je závaží v dolní krajní poloze. Uprostřed: situace, kdy je závaží v horní krajní poloze. Vpravo: grafem funkce $y = x - x^2$ je parabola. Ta má maximum pro hodnotu x mezi průsečíky s vodorovnou osou, tedy pro $x = \frac{1}{2}$.

Je-li výška závaží x malá, bude malá i jeho hmotnost (předpokládáme homogenní těleso), a tedy bude malá i potenciální energie tíhová závaží v horní poloze. Na druhou stranu, bude-li výška závaží x blízká celkové výšce prostoru H , pak bude možná jen malá změna polohy závaží, a bude tedy také malá uchovaná energie. Očekáváme, že někde mezi hodnotami $x = 0$ a $x = H$ bude nastávat maximum uložené energie.

Změna výšky těžiště závaží je $\Delta h = H - x$ (mezi polohami, kdy je závaží dole a nahoře, viz obr. 2 vlevo a uprostřed). Objem závaží je $V = abx$ a jeho hmotnost je

$$m = \rho V = \rho abx,$$

kde ρ je hustota závaží. Uložená potenciální energie tíhová je

$$E = mg\Delta h = \rho abxg(H - x) = \rho abg(Hx - x^2).$$

Abychom našli maximum, spočteme derivaci této funkce podle x , tedy

$$\frac{dE}{dx} = \rho abg(H - 2x).$$

Maximum nastává, když je derivace rovna nule, tedy

$$\rho abg(H - 2x) = 0$$

a to bude pro

$$x = \frac{H}{2}.$$

Pro $H = 1$ je na obr. 2 vpravo graf funkce

$$y = Hx - x^2 = x - x^2.$$

Ta má maximum pro $x = \frac{1}{2}$.

Závěr: Akumulátor potenciální energie tíhové pojme za daných podmínek maximum energie, bude-li výška závaží rovna polovině výšky prostoru, který máme k dispozici.

Poznámka: Nabízí se otázka, proč se pendlovky většinou vyrábějí s výškou závaží menší než je polovina výšky hodin. I s menším závažím stačí hodiny natahovat jednou za několik dnů, což v praxi postačuje. Výška hodin je dána podmínkou, aby kyvadlo bylo dostatečně dlouhé, aby mělo dlouhou dobu kyvu.

Literatura

- [1] Pokorný, P.: Jak dostříknout co nejdále. *Rozhledy matematicko-fyzikální*, roč. 95 (2020), č. 1, s. 50–51.
- [2] Pokorný, P.: Pod jakým úhlem a z jaké výšky lze dostříknout nejdále. *Rozhledy matematicko-fyzikální*, roč. 95 (2020), č. 2, s. 37–41.

Upoutávka na knihu Ivo Krause Fyzika – Encyklopedie velkých objevů a osobností

Zdeněk Janout

Autorem encyklopedie je experimentální jaderný fyzik, zkušený pedagog, univerzitní profesor RNDr. Ivo Kraus, DrSc., náš významný publicista v oblasti historie vědy a techniky. Za rozsáhlou veřejně vzdělávací činnost mu byly uděleny Akademií věd ČR medaile Vojtěcha Náprstka za popularizaci vědy a Společností pro dějiny věd a techniky Bolzanova medaile. Encyklopedie je výsledkem mnohaleté cílevědomé, systematické a vytrvalé badatelské práce autora.

Encyklopedie je rozdělena do čtyř hlavních částí. První část tvoří *Chronologický přehled velkých fyzikálních objevů (585 př. Kr. – 2017)*, který je členěn do pěti historických období. Hranice jednotlivých období jsou vhodně určeny konkrétními letopočty významných událostí. První období – období starověku – je od Thaléta Mílétského (585 př. Kr.) do zrušení athénské Akademie (529). Období středověku je ohraničeno letopočty 529 až 1448 (vynález knihtisku). Období novověku je rozděleno na tři období ohraničené letopočty 1448 až 1727 (smrt Newtona), 1727 až 1905 (Einsteinův annus mirabilis) a od 1905 do současnosti.

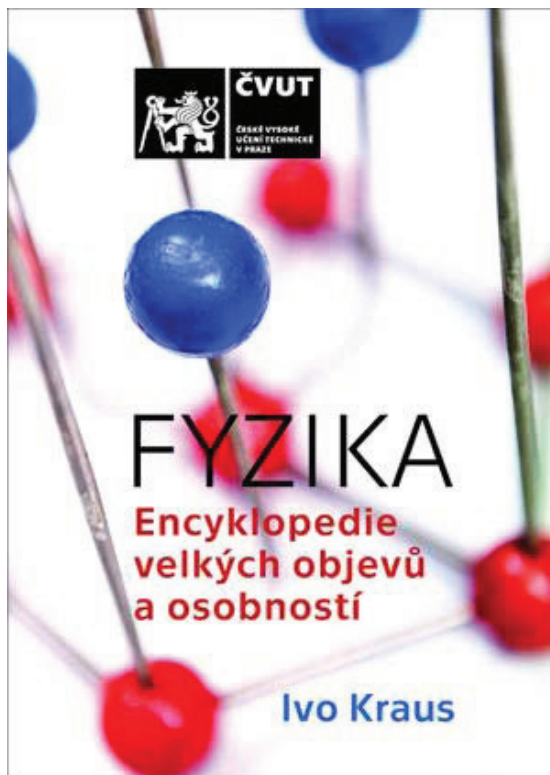
Druhou část encyklopedie tvoří přes sedm set biografických hesel, životopisů učenců všech národností od času mílétských filosofů až do počátku jednadvacátého století, kteří významně přispěli k rozvoji fyziky.

Třetí část je věnována fyzice v českých zemích od založení pražské univerzity.

Ve čtvrté části jsou uvedeni laureáti Nobelovy ceny za fyziku. Jednotlivé části encyklopedie jsou vhodně doplněny černobílými ilustracemi. Poslední částí je obsáhlý seznam literatury, který obsahuje nejdůležitější běžně dostupná díla. Závěr encyklopedie tvoří velmi užitečný věcný a jmenný rejstřík.

Vydání této encyklopedie pokládám za velice potřebné; v současné době u nás chybí moderní encyklopedie objevů a osobností z přírodních věd s výše uvedenou koncepcí. Pokud jde o zahraniční encyklopedie, tak jsou velmi chudé na citace českých fyziků, zpravidla se omezují na citace českých autorů úspěšných v literatuře a v umění. Proto mohu napsat,

že předností této encyklopedie je, že obsahuje jak historii fyziky v českých zemích od založení pražské univerzity, tak i životopisy významných českých a slovenských fyziků.



Encyklopedie jistě zaujme široký okruh čtenářů, stane se praktickou příručkou, bude sloužit především posluchačům technických a přírodovědných oborů českých vysokých škol, jejich učitelům, ale i širší středoškolsky vzdělané veřejnosti a všem zájemcům o historii fyziky. Lze očekávat, že encyklopedie přispěje i ke zvýšení zájmu středoškolských studentů o vysokoškolské studium přírodovědných a technických věd.

Encyklopedie má 858 stran a vyšla v červnu 2020 v Nakladatelství ČVUT Praha.

THEaiTRE: Umělá inteligence píše divadelní hru

Rudolf Rosa, ÚFAL MFF UK, Praha

Abstrakt. V článku představíme projekt THEaiTRE, který si dává za cíl automaticky vygenerovat scénář divadelní hry. Podíváme se, jak to děláme, jak se nám to zatím daří a na jaké problémy narážíme.

Jak to celé začalo

Před 100 lety, 25. ledna 1921, měla premiéru divadelní hra *R.U.R.: Rossum's Universal Robots*, kterou napsal člověk jménem Karel Čapek, a byla o robotech (a lidech); slovo *robot* se dokonce prvně vyskytlo právě v této hře.

Tohle významné výročí jsme chtěli náležitě oslavit, a tak se v hlavě inovátora Tomáše Studeníka zrodil nápad na projekt THEaiTRE, kde se role poněkud obrátily. V rámci projektu jsme vytvořili aplikaci THEaiTRobot založenou na umělé inteligenci. Následně, s pomocí odborníků ze Švandova Divadla a z DAMU, THEaiTRobot napsal scénář divadelní hry o lidech (a robotech).

Jak moc se toto podařilo, můžete posoudit sami. Nejlépe přímo na premiéře hry *AI: Když robot píše hru*, která se uskuteční 25. ledna 2021 ve Švandově divadle a bude streamovaná online přes webové stránky projektu www.theaitre.com.

Jak se pracuje s THEaiTRobotem

THEaiTRobot je aplikace využívající umělou inteligenci pro interaktivní generování scénářů divadelních her. Nejde tedy o robota v pravém slova smyslu; nemá ruce ani nohy a nepíše na psacím stroji, ale žije na výkonných počítačích v našem výpočetním clusteru v serverovně Matfyzu na Malostranském náměstí. Isaac Asimov, další klasik literatury věnující se tématu robotů, rozlišoval *roboty* a *myslící stroje*, což byli vlastně velcí nepohybliví roboti obdaření mnohem větší inteligencí. THEaiTRobot je tedy spíše takovým myslícím strojem, který nevidíme, ale můžeme s ním komunikovat přes naše počítače; ostatně většina dnešních robotů jsou spíš takové hloupé loutky, a myšlení za ně vykonává nějaký myslící stroj, tedy umělá inteligence ukrytá třeba stovky kilometrů daleko v nějakém datacentru.

Cílem projektu THEaiTRE je prozkoumat, zda umělá inteligence zvládne vygenerovat scénář celé divadelní hry, který může mít třeba 50 stran textu. Zatím je taková úloha pro THEaiTRobota příliš složitá, místo toho tak generuje jen jednotlivé scény o délce několika stran textu; déle neudrží pozornost a začne generovat nepoužitelné nesmysly.

THEaiTRobot zatím ani sám neumí vymyslet, o čem by ten scénář měl být, a když už něco vygeneruje, tak nepozná, jestli je to dobré nebo ne. Na to potřebuje člověka, se kterým interaktivně spolupracuje, a teprve společně dojdou k nějakému scénáři; v našem projektu je tím člověkem aktuálně dramaturg David Košťák.

Jejich společná práce vypadá tak, že si nejdřív David rozmyslí, o čem by scéna mohla být, a připraví pro THEaiTRobota zadání v podobě popisu výchozí situace a několika replik, kterými se odstartuje dialog. To může vypadat třeba takhle:

Robot se probudí ze svého snu o elektronických ovcích a zjistí, že nad ním stojí žena a snaží se mu ukrást jeho lesklou mechanickou ruku.

Robot: Co si sakra myslíš, že děláš?

Žena: Je mi to líto! Tu ruku potřebuju pro své malomocné dítě.

V tuhle chvíli přebírá opatř THEaiTRobot, přečte si začátek scény a začne slovo po slově generovat pokračování té situace. Když vygeneruje 10 replik, tak je zobrazí Davidovi a čeká na další pokyny:

Robot: Jaké dítě?

Žena: Mojí dceru. Měla jsem o ní velký strach, když jsi se mnou přišel.

Robot: To bys neměla. Vaše dcera byla unesena bandou zlých robotů a teď je v nebezpečí.

Žena: Vy to nechápete. Omlouvám se. Nechci znovu vidět tvář vaší dcery.

Robot: Jsi moje dcera!

Žena: Neznám vaše jméno. Prosím, řekni mi ho!

Robot: Jmenuješ se Robot. Robot. Robot. Roboti. Robot.

Žena: Vaše dcera nemá žádné jméno! Prosím, dej mi to.

Robot: Bude ho mít. Brzy.

Žena: Robote. Miluju tě!

David má v tuhle chvíli dvě možnosti. Buď mu scénář připadá dobrý, pak dá THEaiTRobotovi pokyn, a ten pokračuje v generování. Po dalších 10 replikách se zase zastaví a takhle pokračují tak dlouho, dokud to Davida baví.

Často ale David usoudí, že se to generování od nějaké chvíle vydalo podivnou cestou, nedává to moc smysl, a podobně. Řekněme, že v předchozím výstupu se mu zdají dobré první tři repliky, ale pak už je to nějaké

divné. V tu chvíli může stisknout červený křížek, kterým dá THEaiTRobotovi pokyn od vybraného místa zahodit to, co vygeneroval, a zkusit to znovu. A THEaiTRobot poslechne a na první tři repliky naváže nějakým jiným způsobem, třeba takhle:

Robot: Jaké dítě?

Žena: Mojí dceru. Měla jsem o ní velký strach, když jsi se mnou přišel.

Robot: To bys neměla. Vaše dcera byla unesena bandou zlých robotů a teď je v nebezpečí.

Žena: Potřebuji pomoc! Pomozte mi! Sundejte z ní ty roboty!

Robot: Myslíte si, že vám roboti mohou pomoci? Jsi blázen. Jsou slabí a snadno se dají porazit.

Žena: Nemůžete mi pomoci! Oni si ji vezmou!

Robot: Tak se jich musím zbavit, než jí ublíží. Opravdu si myslíte, že je možné, aby mě roboti zastavili?

Žena: Ne!

Robot: Rozhodl jsem se vám pomoci tím, že vám tu robotickou ruku přinesu k ruce.

Žena: Nemůžu to udělat!

Robot: Stejně jí nepomůžeš.

Žena: Nemáš ponětí, jak moc tu ruku potřebuju.

Robot: Nenechám tě v tom.

No a takhle ve Švandově divadle postupně vygenerovali scénáře několika scén. A dál už se toho chytili dramaturgové a režiséři a pustili se do toho podobně jako do scénáře vytvořeného člověkem: hodně toho poškrtili, sem tam něco prohodili, vymysleli si k tomu, jak to mají herci zahrát, nazkoušeli to ... a 25. ledna uvidíme, jak to dopadlo.

Variace na Turingův test

V klasickém Turingově testu má člověk za úkol poznat, jestli si povídá s člověkem, nebo s umělou inteligencí, s cílem posoudit, zda se umělá inteligence chová inteligentně.

My si teď vyzkoušíme něco podobného. Vezmeme si na to divadelní hru Klaudie od Josefa Doležala, která začíná takto:

Kristián uslyší slabé zaklepání. Zbystří. Jde obezřetně otevřít. Ve dveřích sedí na invalidním vozíku slečna, asi sedmnáct – Klaudie – krásná dívka, která je nabitá vyrovnaností a vnitřní silou, byla donucena předčasně vyspět. Přes její handicap neztrácí svou jemnost a lehkost, je oblečena, v krásných šatech, pomalu letních. Má na klíně batoh. Herec na ni nevěřícně zírá.

Klaudie: Pěkný večer, že? Neruším vás? Klidně příjdu jindy.

Kristián: Co potřebuješ?

A nyní se podíváme na dvě možná pokračování. Jedno napsal Josef Doležal, jedno vygeneroval THEaiTRobot. A vaším úkolem samozřejmě je poznat, které je které:

Pokračování A

Klaudie: Znáte příběh o Ježíši? Byl dítě, narodil se ve stáji v Betlémě, vychovával ho muž jménem Josef.

Kristián: Ach ano. Co je to za příběh?

Klaudie: Ty to nechceš vědět?

Kristián: Ne!

Klaudie: Vždycky to bylo skromné dítě, nikdy nebyl arogantní, vždy pomáhal svým přátelům. Přišel do domu Josefa a jeho ženy Marie, měl pokoj vedle nich. Byl to milý chlapec. Žena se zeptala Josefa, proč sedí v rohu postele a čte dětem bibli, hlavně malému chlapci. Josef odpověděl: „Je to hodný chlapec. Jsem dobrý otec, miluji své děti.“ A jeho žena řekla: „Tomu nerozumím. Je to malý chlapec, nemůže jít ven?“ Josef byl velmi rozzlobený, ale nehádal se s ní.

Pokračování B

Klaudie: Nic. Teda něco asi ano.

Kristián: A copak?

Klaudie: Chtěla bych si s vámi pane Kristiáne jen, jen popovídat. Dělán totiž do školy takovou věc, jestli teda nespěcháte. A měl byste na mě čas.

Kristián: No, nespěchám. Fajn, dáš si něco k pití?

Klaudie: Klaudie Koltová, těší mě.

Kristián: Kafe? Čaj? Rum?

Klaudie: Ne, děkuji.

Kristián: No tak do toho Klaudie...

Klaudie: Koltová.

Kristián: Jo. Nikdy jsem neměl moc hlavu na jména.

Klaudie: Já taky ne.

Až si tipnete, můžete číst dál; správnou odpověď se dočtete v následujícím textu.

Jak to funguje

Podívejme se nyní na to, jak je THEaiTRobot udělán, tedy jak funguje uvnitř. Nebudeme se zabývat všemi detaily, ale zaměříme se na hlavní myšlenku, na které THEaiTRobot stojí. Tou je generování pomocí takzvaného jazykového modelu.

Když generujeme pomocí jazykového modelu, řešíme úlohu, kterou lze popsat velmi snadno. Vezměme si například takovýhle začátek věty:

Tatínek ráno vstal a šel do

Zkuste se teď zamyslet, jakým slovem by tato věta mohla pokračovat. Možná vás napadne třeba slovo „práce“ nebo „koupelny“. Naopak vás nejspíš nenapadne slovo „kina“, protože do kina se chodí spíše večer, takže to tam významově nesedí. A skoro jistě vás nenapadne například slovo „koňské“; to se zdá, že tam nesedí ani významově, ani gramaticky (byť je to taky možné pokračování, tatínek přece mohl jít třeba do koňské stáje).

Tuhle úlohu přesně řeší jazykový model, který používáme ke generování textu. Jazykový model se nejprve musí naučit, jak vypadá jazyk. K tomu slouží takzvané textové korpusy, což jsou většinou všemožné texty postahované z internetu: noviny, knihy, internetové stránky, filmové titulky, a tak podobně. Takových textů je potřeba opravdu hodně; jazykové modely se běžně učí na textech čítajících miliardy slov.

Když má jazykový model „načtené“ texty, tak se ho můžeme začít ptát, jak moc pravděpodobné mu připadá, aby naše věta pokračovala tím či oním slovem.

Pro jednoduchost se podíváme, jak by to dělal starší typ jazykového modelu, takzvaný n -gramový model. A to konkrétně model tri-gramový, tedy pracující s trojicemi slov. Takový model se prostě podívá, kolikrát se v textovém korpu, na kterém se učil, po slovech A B vyskytuje slovo C , tedy v našem případě kolikrát se po slovech „šel do“ vyskytuje „práce“ či jiné slovo. Nyní už vidíme, proč se modelu říká tri-gramový, protože to znamená prostě se podívat, jak je v textech častá daná trojice slov, například „šel do práce“.

Podívejme se teď konkrétně, kolikrát se vybrané trojice slov vyskytují v Českém národním korpu SYN verze 4:

- „šel do práce“: $1640 \times$
- „šel do koupelny“: $372 \times$
- „šel do kina“: $287 \times$
- „šel do koňské“: $8 \times$

Nejčastěji se tedy chodí do práce. Pokud bychom tedy po jazykovém modelu chtěli doplnit nejpravděpodobnější slovo, doplnil by „práce“. Takové texty by ale byly dost jednotvárné a opakuující se, proto ve skutečnosti nevybíráme vždy to nejpravděpodobnější slovo, ale náhodně si zvolíme některé z pravděpodobnějších slov (a každé slovo zvolíme tím spíš,

čím je pravděpodobnější). Když takto zvolíme třeba pokračování „šel do koupelny“, tak hned pokračujeme stejným způsobem: nyní jsme se posunuli o jedno slovo dál, budeme tedy doplňovat „do koupelny“ nějakým třetím slovem, například spojkou „a“, anebo i tečkou „.“ čímž věta skončí. A takto, slovo po slově, vygenerujeme celý text. Třeba scénář divadelní hry.

N -gramové modely jsou jakýmsi základem jazykového modelování, ale samozřejmě mají mnohé problémy. Tak především se tri-gramový model dívá jen na poslední dvě slova, takže vůbec neví, že se bavíme o tom, co udělal tatínek ráno. Proto vychází docela dobře i ta varianta, kde se jde do kina. Neboť model neví, že to nebylo večer. To samozřejmě můžeme vyřešit třeba penta-gramovým modelem (tedy modelem pracujícím s pěticemi slov), ale tím ten problém jen odsouváme – časem bychom došli k tak dlouhým n -gramům, že bychom potřebovali zcela ne-realisticky velký korpus, abychom tam dobré n -gramy našli dostatečně často. N -gramový model ale má i jiné problémy. Například nerozumí tomu, že některá slova mají podobný význam a dají se obvykle použít jedno místo druhého: pokud je tri-gram „šel do kina“ pravděpodobný, pak tri-gram „šla do divadla“ bude asi podobně pravděpodobný, což je souvislost, kterou takovýto model nevidí.

Tyto a další problémy řeší modernější jazykové modely, které jsou založené na umělých neuronových sítích, a které používáme i my v našem projektu. Neuronové modely jsou mnohem komplikovanější než n -gramové modely, řekneme si proto jen o několika podstatných vylepšeních.¹⁾

Neuronové modely používají mechanismus zvaný *attention* („pozornost“), s pomocí něž se samy rozhodují, která předchozí slova vezmou v potaz, a zvládnou se tak dívat i o několik set slov zpátky. V našem příkladu se tedy takový model může například rozhodnout, že z předchozích slov jsou nejdůležitější slova „tatínek ráno šel do“. A na ně se bude snažit navázat, aniž by si příliš lámal hlavu s nějakým „vstal a“, o které tam tolik nejde.

Neuronové modely také používají k reprezentaci slov číselné vektory (takzvané *word embeddings*), které jim umožňují zachytit, že některá slova jsou si podobnější než jiná. Pokud například pomocí *kosinové vzdálenosti* porovnáte vektory pro slova „tatínek“, „maminka“ a „ptakopysk“, pravděpodobně zjistíte, že tatínek je podobnější mamince než ptakopys-

¹⁾ Pozn. red.: více se o neuronových sítích můžete dozvědět v článku J. Libovického, *Rozhledy matematicko-fyzikální*, 94(4).

kovi. To je pro jazykový model samozřejmě ohromně užitečná informace, protože pro pokračování naší ukázkové věty klidně může použít nejen informaci o tom, kam obvykle chodí tatínek, ale i o tom, kam obvykle chodí maminka. Takže bude mít víc podkladů pro nalezení vhodného pokračování (a naopak nebude navrhopat třeba, že tatínek šel do nory, protože tam by spíš šel ten ptakopysk).

Neuronové jazykové modely se od n -gramových liší i v mnoha dalších aspektech, které v tomto textu nebudeme rozebírat. Zároveň i neuronových jazykových modelů existuje mnoho a různě se od sebe dále liší.

Konkrétně THEaiTRobot používá předtrénovaný jazykový model GPT-2 od konsorcia OpenAI založený na neuronové architektuře zvané Transformer. Jazykový model GPT-2 si „přečetl“ 40 GB textu z 8 milionů internetových stránek, a patří mezi nejlepší jazykové modely, které v současné době existují. Přitom si jej lze zdarma stáhnout a použít ho, pokud na to máte dostatečně výkonný počítač (narozdíl od jeho novější verze GPT-3, která je sice ještě lepší, ale je placená).

Nyní uděláme malou vsuvku. Pokud jste si v předchozím testu tipnuli, že THEaiTRobot vygeneroval druhou variantu pokračování scénáře, pak jste si tipnuli špatně, je to naopak.

Model GPT-2 ovšem dobře „umí“ pouze anglicky. Je to logické, anglických textů je na internetu asi 100× více než českých, takže pokud bychom model natrénovali jenom na českých textech, fungoval by výrazně hůř; co se týče trénovacích dat pro strojové učení, a zejména pro velké neuronové modely, je jejich velikost zcela zásadní.

V THEaiTRobotovi proto generujeme scénář nejprve anglicky, a následně jej automaticky překládáme do češtiny strojovým překladačem CUBBITT. Za tímto překladačem stojí Martin Popel, kolega z našeho ústavu; a shodou okolností je tento překladač stejně jako jazykový model GPT-2 založený na architektuře Transformer. CUBBITT je pravděpodobně v současné době nejlepším překladačem pro jazykový pár angličtina–čeština a dosahuje za některých okolností kvality překladu srovnatelné s lidskými překladateli. Pro překládání scénářů jsme si ho museli mírně upravit, a i tak je vždy nutné v přeloženém scénáři opravit nějaké drobné chyby. Nicméně obecně poskytuje překlady ve velmi dobré kvalitě. Mnohem více problémů způsobuje už samotný jazykový model.

Jaké problémy řešíme

Model GPT-2 zvládá generovat velmi dobré texty, často stěží rozlišitelné od textů napsaných lidmi. Pro strojové učení ale vždy platí, že

aby něco dobře zvládalo, musí být přímo na tuto úlohu trénované. Model GPT-2 je trénovaný zejména na kratších novinových textech, proto umí dobře generovat zejména kratší novinové texty. Nějakou část jeho trénovacích dat tvoří i scénáře (spíše ovšem filmové a seriálové než divadelní), takže i se scénáři si nějak poradí, ale výsledky nejsou zdaleka tak dobré. Narážíme na mnohé problémy, z nichž některé se nám již podařilo vyřešit, ale na řešení jiných zatím teprve pracujeme.

Asi nejvíc problémů se točí kolem toho, že GPT-2 si neví moc rady s postavami. Umí z trénovacích dat okoukat, že před replikou bývá uvedené nějaké jméno, že ta jména se obvykle hodně opakují, a že dvě po sobě jdoucí repliky u sebe obvykle mají uvedená jiná jména. Nepracuje ale s tím, že tato jména odpovídají jednotlivým mluvčím, kteří říkají dané repliky, že jsou to odlišné postavy, které mají odlišné názory, cíle, styl mluvy, a podobně. Není divu, v novinových zprávách se něco takového moc často nevyskytuje, pokud zrovna nejde o nějaké interview. Zdá se, že model proto k vygenerovaným replikám přiřazuje jména postav spíše náhodně.

V první řadě jsme museli jazykový model omezit, tak aby pracoval jen s postavami, které se vyskytují ve vstupním textu. Bez tohoto omezení se stále objevovaly nové a nové postavy, zatímco na staré model postupně zapomínal. Mnohá postava řekla třeba jen jednu větu... Zní to sice zábavně, ale není to v divadle prakticky realizovatelné, protože by se na pódiu hromadilo příliš mnoho herců.

Stále ale model nechápe, že by postavy měly být jaksi svébytné. Ve vygenerovaném scénáři se charaktery postav různě prohazují, slévají a rozměňují. Postava klidně několikrát během scény změni pohlaví, chvíli se mluví o dceři jedné postavy a najednou si ji přivlastní jiná postava, a podobně. Může to sice opět znít zábavně, ale zábavné je to možná jednou nebo dvakrát, koukat na to celý večer by žádného diváka nebavilo. Tuto „schizofrenii“ se nám zatím nepodařilo uspokojivě vyřešit, zatím tedy divadelníci musejí při práci se scénářem občas ručně změnit přiřazení postav. Vyvíjíme různé modely, které by měly umět pro repliku určit, které postavě patří, ale ukazuje se, že to je poměrně obtížné. Zároveň pracujeme na systému, kdy by za každou postavu mluvil jiný model (či stejný model ale s informací o tom, za kterou postavu mluví), scénář by tedy vlastně vznikl jako dialog několika jazykových modelů (či chatbotů).

Na začátku článku jsme také zmínili, že THEaiTRobot má problémy s generováním opravdu dlouhých textů. Částečně jde opět o omezení

dané použitým modelem GPT-2, který umí brát v potaz nejvýše předchozích 1 023 slov (či přesněji podslov, *subwords*). Tohle jsme zatím částečně obešli tím, že delší scénář nejdřív takzvaně sumarizujeme, shrneme jej pomocí několika vět či z něj vybereme jen ty nejdůležitější repliky, tak aby se vešel do kapacity modelu. Tím jsme si pomohli ale jen částečně, místo jedné stránky scénáře teď zvládneme vygenerovat třeba tři stránky, ale nikoliv třicet. Začínáme proto pracovat na systému hierarchického generování scénáře, kdy se budeme nejprve snažit vygenerovat stručné shrnutí celé hry, z něj pak vygenerovat shrnutí jednotlivých scén, a pak už z těchto shrnutí pro každou scénu zvlášť vygenerovat dialogy. Tím opět obojdeme kapacitu modelu, protože se vždy v jednu chvíli bude generovat jen kratší úsek textu, což GPT-2 zvládá celkem dobře.

Problémy způsobuje i zapojení strojového překladu. Přestože kvalita použitého překladače je velmi vysoká, opět narážíme na to, že není natrénovaný ani vyladěný pro překlad dialogů, což způsobuje různé problémy, a překlad je proto potřeba vždy zkontrolovat a opravit v něm chyby. Jedním z nejviditelnějších problémů je nekonzistence v tykání a vykání. Protože překládáme z angličtiny, kde se tykání a vykání nerozlišuje, tak se překladač musí sám rozhodnout, zda si postavy v češtině budou tykat či vykat. Protože je ale vyladěný zejména na překládání novinových zpráv, kde tohle většinou řešit nemusí, neví si s tím moc rady. A tak si postavy spíše náhodně někdy vykaží a někdy tykaží, a střídá se to klidně po každé replice. V současné době nicméně už vyvíjíme komponentu, která bude rozhodovat a hlídat, které postavy si mají tykat a které vykat.

Závěr

V článku jsme se seznámili s THEaiTRobotem, který využívá umělou inteligenci pro generování scénářů divadelních her. Podívali jsme se, jak THEaiTRobot funguje, vysvětlili jsme si, co jsou to jazykové modely a jak se využívají, a zmínili jsme i problémy, na které jsme naráželi a narážíme.

První příležitostí vidět výsledky projektu THEaiTRE je premiéra divadelní hry *AI: Když robot píše hru*, která se uskuteční 25. ledna 2021 formou online streamu na www.theaitre.com.

Projekt tím ale nekončí, ještě jsou před námi mnohé výzvy, které se pokusíme postupně řešit. Za rok, tedy přibližně v lednu 2022, pak uvedeme druhou divadelní hru. Tu napíše THEaiTRobot 2.0, který by měl potřebovat ještě méně lidské pomoci a přitom by měl vygenerovat ještě lepší scénář než současná verze.

Letní soustředění mladých fyziků a matematiků

Zdeňka Koupilová, Katedra didaktiky fyziky, MFF UK, Praha

Asi se shodneme, že většina mladých lidí ve věku 14–19 let se snaží o letních prázdninách co nejvíce vytěsnit cokoli, co by i jakkoli vzdáleně souviselo se školou, a také že matematika, fyzika či programování do této kategorie rozhodně patří. Věříme ale, že mezi čtenáři tohoto časopisu je mnoho takových, pro které matematika či fyzika neznamenají pouze jeden z předmětů ve škole, ale že se jedná i o jejich koníček, kterému věnují i svůj volný čas.

Již více než 25 let se o letních prázdninách schází parta 30 až 40 středoškoláků a více než 10 vysokoškoláků či lidí, kteří již školu dokončili, a tráví společně dva týdny doslova nabitě různorodými aktivitami. Soustředění se koná na různých místech republiky a jeho program je tradičně rozdělen na dvě základní části – odbornou, tj. matematicko-fyzikální, a táborovou, tradičně nazývanou mimoodbornou.

Hlavní součást *odborného programu* tvoří jednak kurzy, skládající se typicky z devíti na sebe navazujících lekcí, a dále projekty, na kterých účastníci pracují v malých skupinách po celou dobu tábora. Obojí si účastníci vybírají dle vlastního zájmu na začátku soustředění z mnoha nabízených variant tematicky patřících jak do fyziky, matematiky, tak i informatiky. Na závěr soustředění se koná „konference“, kde jednotlivé skupiny představí ostatním výsledky své práce. Pravidelný odborný program bývá doplněn jednorázovými přednáškami pracovníků z MFF UK či jiných vědeckých institucí.



Mimoodborný program má svůj čas obvykle v odpoledních hodinách. Jednotlivé hry jsou provázány propracovanou legendou i celotáborovou

ZPRÁVY

hrou. Kromě sportovně zaměřených her zařazujeme do programu hry strategické, šifrovací i tvořivé, které – stejně jako podvečerní program či noční hry – bývají mezi účastníky velmi oblíbené. Však matfyzáci nejsou žádní suchaři. Nezapomínáme ale ani na typicky táborové aktivity jako je celodenní výlet, taneční večery či táborák.



Z pestrého programu si opravdu vybere každý a v partě podobně smýšlejících lidí se stejnými zájmy si užije spoustu zábavy i mimo připravený program.

Jak již bylo napsáno výše, soustředění má dlouhou tradici, která byla loni bohužel přerušena pandemií. Protože ale věříme, že v létě 2021 bude situace příznivá, chystáme další program pro další ročník, který se bude konat v termínu 3.–17. července 2021 v Penzionu Savoy v Dolním Ma-xově v Jizerských horách. Více informací i předběžnou přihlášku naleznete na webu <https://kdf.mff.cuni.cz/tabor/>.



Autorem fotografií je Jaroslav Reichl.

👉 **Objednávky časopisu** 👈

Od roku 2020 vyřizuje objednávky časopisu
Rozhledy matematicko-fyzikální
společnost

MediaCall, s. r. o.

Vídeňská 546/55

639 63 Brno

tel: +420 532 165 165

e-mail: export@mediacall.cz

Objednávky lze realizovat i přes web:

www.zahranicnitisk.com

Tato informace se netýká členů JČMF. Pro ně vyřizuje objednávky předplatného sekretariát JČMF a předplatné je hrazeno spolu s členskými příspěvky.

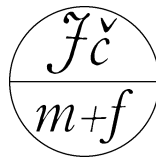
Elektronická verze čísla 4/2020 je ke stažení na adrese:

<https://rozhledy.jcmf.cz/wp-content/uploads/RMF-95-4.pdf>

heslo: Pampeli3ka

ROZHLEDY matematicko-fyzikální

Ročník 95 (2020), číslo 4



OBSAH

M. Forman: Sestup uspořádaných trojic a čtveřic	1
M. Bláha: Za jak dlouhou dobu zdvojnásobím své peníze	7
V. David: Geometrická řešení algebraických úloh MO	12
J. M. Nájares Romero: Geometrický význam Eulerova čísla e	15
J. Bednář, J. Kopáček, M. Žák: Oblačná elektřina – od zemského kondenzátoru ke kulovému blesku	21
P. Pokorný: Mechanický akumulátor	37
Z. Janout: Upoutávka na knihu I. Krause: Fyzika – Encyklopedie velkých objevů a osobností	40
R. Rosa: THEaiTRE: Umělá inteligence píše divadelní hru	42
Z. Koupilová: Letní soustředění mladých fyziků a matematiků . . .	51

Pokyny pro autory

Příspěvky dodávejte na adresu redakce v elektronické podobě. Nejlépe napsané ve formátu $\text{\LaTeX}$, přijatelný je i formát PlainTeX , je akceptovatelný i text připravený editorem Word či podobným.

Pokud jde o obrázky, je žádoucí, aby byly připraveny v reprodukovatelné podobě. Každý obrázek nechť je v samostatném souboru, nejlépe ve formátu eps nebo pdf. Přípustná je též bitmapa v dostatečném rozlišení.

Ke každému zasílanému příspěvku (ne u soutěží, zpráv a recenzí) přiložte krátkou anotaci v českém jazyce. Dále je žádoucí, aby u každého příspěvku byla uvedena literatura, na kterou je v textu odkazováno.