ROZHLEDY

MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ

ČASOPIS PRO ZÁJEMCE O MATEMATIKU, FYZIKU A INFORMATIKU

ROČNÍK 96 (2021) • ČÍSLO 1

Vydává Jednota českých matematiků a fyziků
tel.: 222 090 708-9, e-mail: jcmf@math.cas.cz
za podpory MFF UK Praha a FJFI ČVUT Praha

Vycházejí 4 čísla v kalendářním roce

Obálku navrhl Bohuslav Šír

Sazbu programem TEX připravil RNDr. Miloslav Závodný

Adresa redakce: MFF UK, V Holešovičkách 2, 182 00 Praha 8 – Troja
e-mail: rozhledy@jcmf.cz

Internetové stránky časopisu: https://rozhledy.jcmf.cz/

Vytiskla Tiskárna Pohlline, Zálesí 1126/88, 142 00 Praha 4

Distribuci pro předplatitele provádí v zastoupení vydavatele
MediaCall, s. r. o.
Vídeňská 546/55, 639 63 Brno
tel.: +420 532 165 165, e-mail: export@mediacall.cz
web: www.zahranicnitisk.com

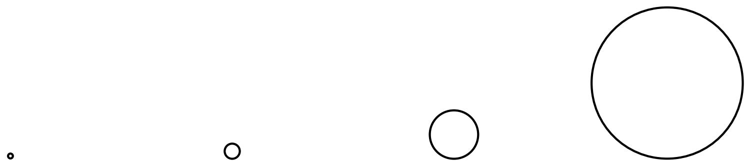
ISSN 0035-9343 MK ČR E4691

Matematika nošení roušek

Eduard Šubert, Praha

Určitě jste si v posledním roce položili jednu z otázek: „Jak pravděpodobné je, že se nakazím, když nebudu nosit roušku?“ „Jak se změní šance na nákazu pro ostatní, když naopak roušku nosit budu?“ „Co kdyby nosili roušku všichni?“ „A co kdyby nikdo?“ Na všechny tyto otázky si v článku odpovíme.

Na začátek si pro představu uveďme základní hodnoty. Když nakažená osoba dýchá, vypouští asi tisíc (10^3) virových částic každou minutu. Když nakažená osoba mluví, naprská asi deset tisíc (10^4) virových částic každou minutu. Když zakašle, dostane ze sebe asi sto tisíc (10^5) virových částic, a když kýchne, vypraví před sebe až milion (10^6) virových částic!



(a) $S \sim 10^3$ (b) $S \sim 10^4$ (c) $S \sim 10^5$ (d) $S \sim 10^6$

Obr. 1: Srovnání velikosti virové nálože

Čím více virových částic se přenese z člověka na člověka, tím větší je šance, že se přenese i nákaza. Je tedy zřejmé, že bychom se měli snažit omezit přenos virových částic.

Pro značení budeme uvažovat jedince jako uspořádané dvojice z množiny $\{\texttt{:}, \texttt{\%}\} \times \{\texttt{\#}, \texttt{)}\}$, kde `:` je zdravá osoba, `%` je nemocná, `#` nosí roušku, `)` roušku nenosí.

`:#`	`:)`
(a) zdravá s rouškou	(b) zdravá bez roušky
`%#`	`%)`
(c) nemocná s rouškou	(d) nemocná bez roušky

Obr. 2: Všechny prvky z $\{\texttt{:}, \texttt{\%}\} \times \{\texttt{\#}, \texttt{)}\}$

V tomto článku nebudeme řešit, jestli rouška funguje. Budeme předpokládat, že rouška zastaví nějaké procento virových částic a tím sníží pravděpodobnost nákazy. Je důležité si uvědomit, že tohle snížení se nekoná jen jednou. Nakažená osoba nošením roušky sníží pravděpodobnost, že nakazí ostatní, a zdravá zase nošením roušky chrání před nákazou sebe. Obecně rouška nemusí chránit stejnoměrně oběma směry, ale pro jednoduchost budeme předpokládat, že pro každého rouška sníží o 50 % pravděpodobnost, že se nakazí od svého okolí, i pravděpodobnost, že nakazí své okolí.

Existují čtyři možné situace v nošení roušky pro setkání mezi nakažlivou a nakazitelnou osobou. Ani jedna nemá roušku, jen nakažlivá má roušku, jen nakazitelná má roušku a obě mají roušku. Když nikdo nemá roušku, tak se pravděpodobnost nákazy nijak nezmění, tedy žádný pokles.

$$\texttt{\%)} + \texttt{:)} \Rightarrow \text{pokles o } 0\,\%$$

Když má roušku jen jedna z osob, tak je dle našeho předpokladu pokles o 50 %.

$$\texttt{\%)} + \texttt{:\#} \Rightarrow \text{pokles o } 50\,\%$$
$$\texttt{\%\#} + \texttt{:)} \Rightarrow \text{pokles o } 50\,\%$$

Když mají roušku obě, tak je to teprve zajímavé. Rouška nakažlivé osoby pravděpodobnost nákazy sníží o 50 % a to samé se stane i u roušky nakazitelné osoby, 50 % ještě o půlku klesne na 25 %. Pokles v tomto případě je tedy o 75 %!

$$\texttt{\%\#} + \texttt{:\#} \Rightarrow \text{pokles o } 75\,\%$$

Co nám pokles pravděpodobnosti nákazy pro konkrétní setkání dvou lidí řekne o poklesu šíření v celé populaci? Podívejme se nejdříve na extrémy. Kdyby nikdo nenosil roušku, tak budeme mít pouze setkání prvního druhu a pokles v šíření bude nulový, to je asi jasné.

$$\left.\begin{aligned} 1\cdot[\,&\texttt{\%)} + \texttt{:)}\,] \\ +\,0\cdot[\,&\texttt{\%)} + \texttt{:\#}\,] \\ +\,0\cdot[\,&\texttt{\%\#} + \texttt{:)}\,] \\ +\,0\cdot[\,&\texttt{\%\#} + \texttt{:\#}\,] \end{aligned}\right. \quad \Rightarrow \text{pokles o } 0\ \%$$

Kdyby naopak všichni nosili roušku, tak bychom měli pouze setkání čtvrtého druhu a šíření nákazy by pokleslo o celých 75 %.

$$\begin{aligned} &0\cdot[\,\%)+:)\,]\\ +&0\cdot[\,\%)+:\#\,]\\ +&0\cdot[\,\%\#+:)\,]\\ +&1\cdot[\,\%\#+:\#\,]\end{aligned}\quad\Rightarrow \text{pokles o } 75\,\%$$

A co někde mezi tím, co kdyby roušku nosilo jen 50 % lidí? Tak se na to podívejme, jaká je pravděpodobnost prvního druhu setkání? To by se musel setkat člověk bez roušky, těch je 50 %, s člověkem bez roušky, kterých je také 50 %. Pravděpodobnost setkání prvního druhu je tedy 25 %. Je zřejmé, že stejným výpočtem určíme i pravděpodobnosti ostatních setkání.

Po spočtení váženého průměru zjistíme, že když 50 % lidí nosí roušky, tak průměrně šíření nákazy pro všechny klesne o 43,75 %.

$$\begin{aligned} &\frac{1}{4}\cdot(\%)+:))\\ +&\frac{1}{4}\cdot(\%)+:\#)\\ +&\frac{1}{4}\cdot(\%\#+:))\\ +&\frac{1}{4}\cdot(\%\#+:\#)\end{aligned}\quad\Rightarrow \text{pokles } 43{,}75\,\%$$

Zajímavé také je, že pro ty s rouškou klesne průměrně šance na nakažení o 62,5 %, kdežto pro ty bez roušky jen o 25 %.

Tohle je matematika nošení roušky. Pokles v šíření nákazy není stejný jako efektivita roušky a často je vyšší, než bychom si mohli myslet.

Co když ale rouška není stejně efektivní na obě strany? A co když ji nenosí jen 50 % lidí? To jsou velmi dobré otázky, ale na ně už v tomto článku není místo. Určitě se podívejte na článek [1]. Můžete si v něm vyzkoušet měnit všechny parametry a zjistit tak odpovědi na všechny vaše otázky.

Literatura

[1] Bhatia, A., Reich, H.: *The Multiplicative Power of Masks*. Přeložil P. Kasík: Překvapivá účinnost roušek a respirátorů. MinutePhysics, 2020, https://aatishb.com/maskmath/.

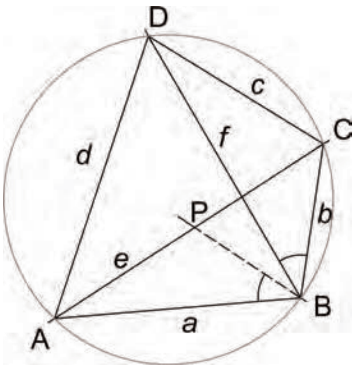
Ptolemaiova věta ve dvou úlohách

Emil Calda, MFF UK, Praha

Klaudios Ptolemaios (90–165 n. l.) patří spolu s Hipparchem (180–125 př. n. l.) k nejznámějším starověkým astronomům. Ve třinácti knihách svého rozsáhlého díla známého pod názvem Almagest zdokonalil geocentrickou soustavu, upřesnil vzdálenosti Slunce a Měsíce od Země a na základě svých výpočtů předpověděl doby zatmění Slunce i Měsíce na mnoho let dopředu. V Almagestu je také dokázána věta o tětivovém čtyřúhelníku, tj. o konvexním čtyřúhelníku, kterému lze opsat kružnici; tato věta byla později nazvána větou Ptolemaiovou:

V tětivovém čtyřúhelníku je součet součinů velikostí protilehlých stran roven součinu velikostí jeho úhlopříček.

K odvození této věty použijeme obr. 1, na němž je sestrojen tětivový čtyřúhelník $ABCD$, jehož strany mají velikosti a, b, c, d a úhlopříčky e, f. Máme ukázat, že platí: $ac + bd = ef$.



Obr. 1: Tětivový čtyřúhelník $ABCD$

Veďme bodem B přímku protínající úhlopříčku AC v bodě P tak, že úhly ABP a DBC jsou shodné, a všimněme si trojúhelníků ABP a DBC. Kromě úhlů ABP a DBC se shodují i v úhlech BAP a BDC (obvodové úhly nad tětivou BC), takže jsou podobné; znamená to, že platí:

$$\frac{|AB|}{|AP|} = \frac{|DB|}{|DC|}$$

neboli

$$|AB| \cdot |DC| = |AP| \cdot |DB|,$$

tj.

$$ac = |AP| \cdot f.$$

V dalším kroku se zaměříme na trojúhelníky ABD a PBC. Shodují se jednak v úhlech ADB a PCB (obvodové úhly nad tětivou AB), jednak v úhlech ABD a PBC, což plyne ze shodnosti úhlů ABP a DBC. Trojúhelníky ABD a PBC jsou tedy podobné, takže platí:

$$\frac{|BD|}{|AD|} = \frac{|BC|}{|PC|}$$

neboli

$$|BC| \cdot |AD| = |BD| \cdot |PC|,$$

tj.

$$bd = |PC| \cdot f.$$

Sečtením získaných výrazů pro ac a bd a vzhledem k tomu, že

$$|AP| + |PC| = e,$$

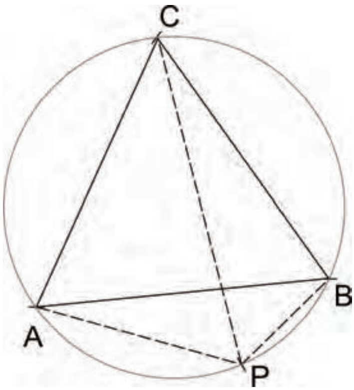
dostáváme:

$$ac + bd = (|AP| + |PC|) \cdot f = ef,$$

což je tvrzení Ptolemaiovy věty. S její pomocí snadno vyřešíme dvě následující úlohy.

Příklad 1. Na kružnici opsané rovnostrannému trojúhelníku ABC je libovolně zvolen bod P různý od vrcholů A, B, C. Dokažte, že velikost nejdelší z úseček PA, PB, PC je rovna součtu velikostí zbývajících dvou.

Řešení. Na obr. 2 je sestrojen rovnostranný trojúhelník ABC a na kružnici jemu opsané je zvolen bod P různý od jeho vrcholů.



Obr. 2: Kružnice opsaná rovnostrannému trojúhelníku ABC

Z Ptolemaiovy věty pro tětivový čtyřúhelník $APBC$ plyne

$$|AP| \cdot |BC| + |BP| \cdot |AC| = |CP| \cdot |AB|$$

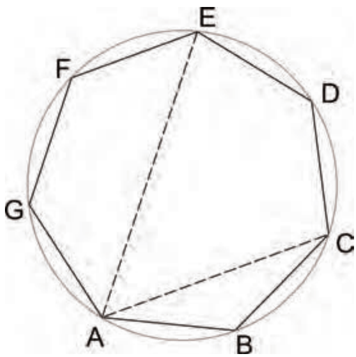
a vzhledem k tomu, že trojúhelník ABC je rovnostranný, dostáváme odtud, že platí:

$$|AP| + |BP| = |CP|,$$

což jsme měli dokázat.

Příklad 2. Dokažte, že v pravidelném sedmiúhelníku $ABCDEFG$ platí:

$$\frac{1}{|AB|} = \frac{1}{|AC|} + \frac{1}{|AD|}.$$



Obr. 3: Pravidelný sedmiúhelník $ABCDEFG$

Řešení. V pravidelném sedmiúhelníku $ABCDEFG$ na obr. 3 uvažujme tětivový čtyřúhelník $ACDE$. Podle Ptolemaiovy věty pro něj platí:

$$|AC| \cdot |DE| + |CD| \cdot |AE| = |AD| \cdot |CE|.$$

Vydělíme-li obě strany této rovnosti součinem $|AB| \cdot |AC| \cdot |AD|$, dostaneme po úpravě a zkrácení

$$\frac{|ED|}{|AB| \cdot |AD|} + \frac{|CD| \cdot |AE|}{|AB| \cdot |AC| \cdot |AD|} = \frac{|CE|}{|AB| \cdot |AC|};$$

Přihlédneme-li dále k tomu, že v uvedeném pravidelném sedmiúhelníku je

$$|CD| = |DE| = |AB|, \quad |AE| = |AD|, \quad |AC| = |CE|,$$

získáme po zkrácení požadovaný výsledek:

$$\frac{1}{|AD|} + \frac{1}{|AC|} = \frac{1}{|AB|}.$$

Poznámka 1. Právě dokázaná vlastnost pravidelného sedmiúhelníku je pomocí komplexních čísel odvozena v řešeném příkladu v kapitole 4 gymnaziální učebnice [2].

Uveďme ještě na závěr (bez důkazu), že platí i věta obrácená k větě Ptolemaiově:

Jestliže v konvexním čtyřúhelníku je součet součinů velikostí protilehlých stran roven součinu velikostí jeho úhlopříček, je tento čtyřúhelník tětivový.

L i t e r a t u r a

[1] Pomykalová, E.: *Planimetrie – učebnice pro gymnázia.* Prometheus, Praha, 2007.

[2] Calda, E.: *Komplexní čísla – učebnice pro gymnázia.* Prometheus, Praha, 2008.

Jednotková parabola, zlatý řez a parabolické π

Luděk Spíchal, Přírodovědecká fakulta, MU, Brno

Kvadratické funkce, podobně jako funkce goniometrické, patří zcela jistě k elementární výbavě, se kterou by měli studenti opouštět střední školy. Koneckonců v obou případech mluvíme o takových oblastech matematiky, které svými kořeny zasahují až do starověku a jejichž rozvoj byl patrně nejprve poháněn spíše praktickými potřebami a teprve posléze i samotnou touhou po poznání. Pokud k uvedené dvojici přidáme ještě navíc kuželosečky, které lze rovněž řadit mezi významná témata antických matematiků, pak získáme spojení, ze kterého se postupně, v průběhu staletí rozrostl košatý strom různých aplikací prolínajících se napříč matematikou, umožňujících dosáhnout řady úspěchů při řešení problémů i v oblastech, které zdánlivě s uvedenými problematikami přímo nesouvisí.

Objektem našeho zájmu bude zejména graf funkce

$$y = 1 - x^2,$$

který označíme jako *jednotkovou parabolu.* Graf jednotkové paraboly použijeme při konstrukci hodnoty zlatého řezu a převrácených hodnot čísel. Dále ukážeme, že lze zavést parabolickou konstantu analogickou číslu π a poukážeme na její souvislost s výpočtem plochy parabolické úseče. Na závěr zmíníme některé vlastnosti parabolických goniometrických funkcí.

1. Jednotkové kuželosečky

Pojem *jednotkové kružnice* odpovídající grafu funkce určené rovnicí

$$x^2 + y^2 = 1, \tag{1}$$

je dobře známý ze středoškolské matematiky, kde se používá pro definici goniometrických funkcí. V kurzech vyšší matematiky se objevuje pojem hyperbolických funkcí, jejichž definici lze provést pomocí grafu funkce určené rovnicí

$$x^2 - y^2 = 1. \tag{2}$$

V tomto případě můžeme mluvit o *jednotkové hyperbole.* V literatuře jsou hyperbolické funkce zaváděny obvykle pomocí exponenciálních funkcí

- hyperbolický sinus

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{e^{2x} - 1}{2e^x},$$

- hyperbolický kosinus

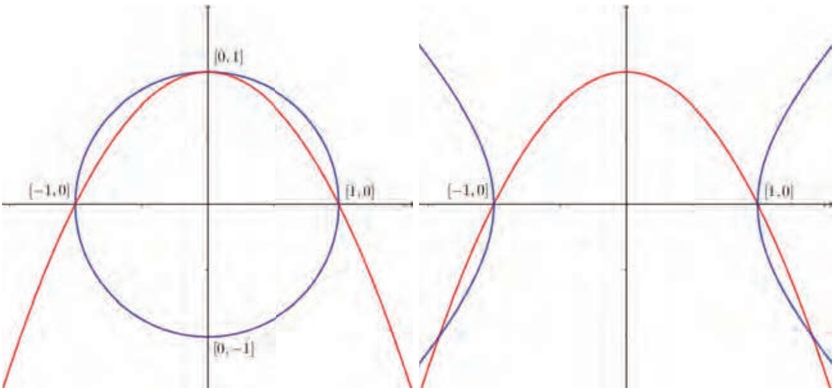
$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{e^{2x} + 1}{2e^x}.$$

Doplňme, že grafem funkce hyperbolický kosinus je tzv. *řetězovka*, tedy křivka, kterou vytvoří řetěz, který je zavěšen na svých koncích (více např. [5]). Z aplikací zmiňme např. možnost vyjádřit Lorentzovu transformaci (obecná relativita) pomocí hyperbolických funkcí.

Pojem *jednotkové paraboly* by měl být analogií k výše uvedeným jednotkovým kuželosečkám. Jak již bylo zmíněno v úvodu, budeme za jednotkovou parabolu považovat graf funkce dané rovnicí

$$x^2 + y = 1. \tag{3}$$

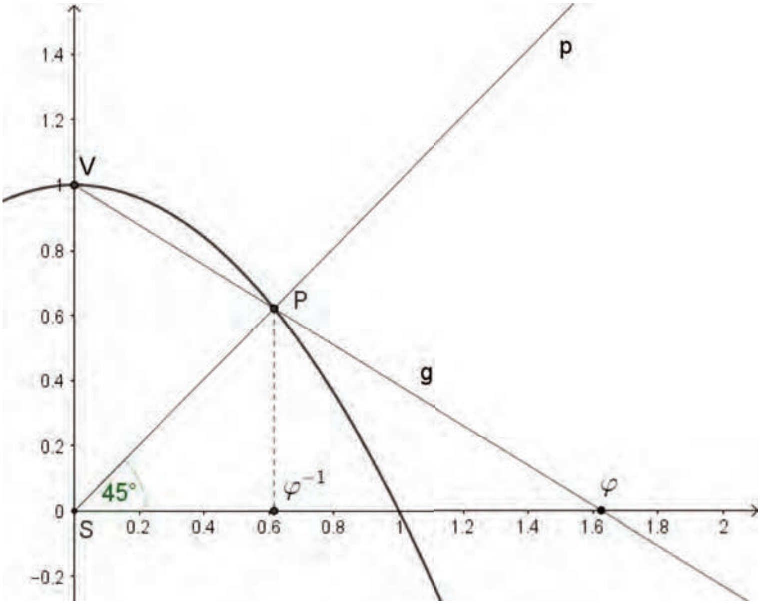
Srovnání jednotkové kružnice a hyperboly s jednotkovou parabolou můžeme sledovat na obr. 1.



Obr. 1: Srovnání jednotkové kružnice a paraboly (vlevo), jednotkové hyperboly a paraboly (vpravo)

2. Konstrukce zlatého řezu pomocí jednotkové paraboly

V této části ukážeme, že pomocí jednotkové paraboly je možné konstruovat hodnotu tzv. *zlatého řezu*. Připomeňme, že *zlatý řez* je číslo, které označuje přesný poměr, kdy se úsečka dělí do dvou částí takovým způsobem, že poměr celé úsečky vůči větší části se rovná poměru větší části k té menší [4].



Obr. 2: Konstrukce zlatého řezu $\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ pomocí jednotkové paraboly

Konstrukce zlatého řezu je na obr. 2. K jejímu důkazu nejprve vypočteme souřadnice průsečíku P paraboly dané rovnicí $y = 1 - x^2$ a přímky $p\colon y = x$, které určíme z řešení rovnice $x^2 + x - 1 = 0$. Z dvojice kořenů

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2},$$

vyhovuje

$$x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Zlatý řez je x-ovou souřadnicí průsečíku přímky g určené vrcholem paraboly V a bodem P s osou x. Jestliže rovnici přímky g zapíšeme ve směrnicovém tvaru $y = kx + q$, pak $q = 1$ a směrnici k určíme dosazením souřadnic bodu $P\left[\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right]$:

$$\frac{-1+\sqrt{5}}{2} = k \cdot \frac{-1+\sqrt{5}}{2} + 1$$

a po zjednodušení je

$$k = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

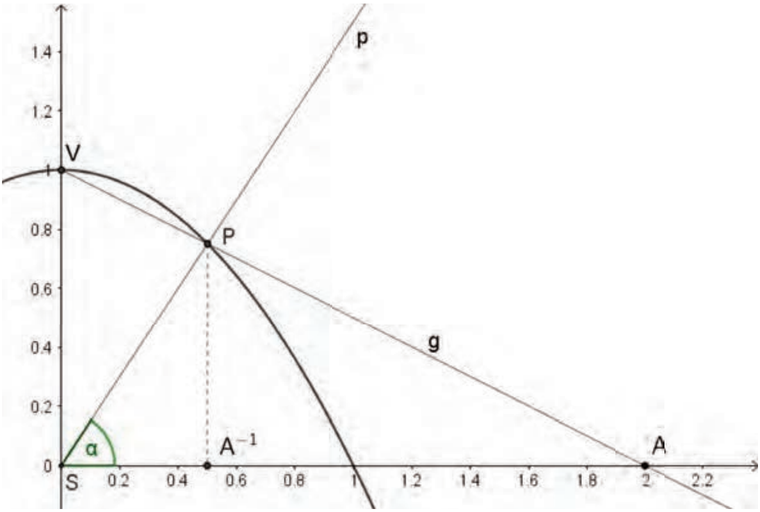
Přímka

$$g\colon y = \frac{1-\sqrt{5}}{2}x + 1$$

protíná osu x v bodě o souřadnicích

$$x = \frac{1+\sqrt{5}}{2},\ y = 0.$$

Tedy hodnota x představuje hodnotu tzv. zlatého řezu $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Všimněme si rovněž, že x-ová souřadnice průsečíku P určuje hodnotu $\varphi^{-1} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, tedy převrácené hodnoty zlatého řezu.



Obr. 3: Konstrukce převrácené hodnoty čísla pomocí jednotkové paraboly

Hodnotu zlatého řezu jsme získali pro volbu úhlu $\alpha = 45°$. Ukažme nyní, že konstrukce popsaná na obr. 2 a 3 znázorňuje převrácené hodnoty čísel pro libovolnou volbu velikosti úhlu α. Jestliže označíme $[t, 0]$

průsečík přímky g a osy x, pak přímka g má rovnici

$$g\colon y = 1 - \frac{x}{t}.$$

Průsečík přímky g a paraboly získáme porovnáním jejich rovnic

$$1 - x^2 = 1 - \frac{x}{t},$$

kde po zjednodušení je

$$x(tx - 1) = 0,$$

a tedy

$$x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{1}{t}.$$

3. Parabolické číslo π

Tématem této kapitoly bude poněkud provokativní otázka, zda nějaká podoba čísla π může být racionální. Hned na úvod předesíláme, že nemáme v úmyslu ignorovat nebo rozporovat takové skutečnosti, jakými jsou:

- důkaz, že číslo π nelze vyjádřit zlomkem (tj. je iracionální), který podal roku 1761 Johann Heinrich Lambert,[1)]
- důkaz, že číslo π není kořenem žádného polynomu s racionálními koeficienty (tj. je transcendentní), který uveřejnil v r. 1882 Ferdinand von Lindemann.[2)]

Zdůrazněme naopak, že záměrem je určení parabolické konstanty (parabolické π, π_p), která by byla analogická k číslu π definovanému v kružnici.

Nejprve ukážeme, že v *jednotkové parabole* lze definovat goniometrické funkce obdobným způsobem jako v jednotkové kružnici, přičemž postup odvození bude odpovídat postupu v článcích [1, 2].

V jednotkové kružnici určené rovnicí (1) definujeme goniometrické funkce sinus ($\sin\vartheta$) a kosinus ($\cos\vartheta$) jako souřadnice průsečíku koncového ramene úhlu ϑ a jednotkové kružnice (obr. 4 vlevo).

---

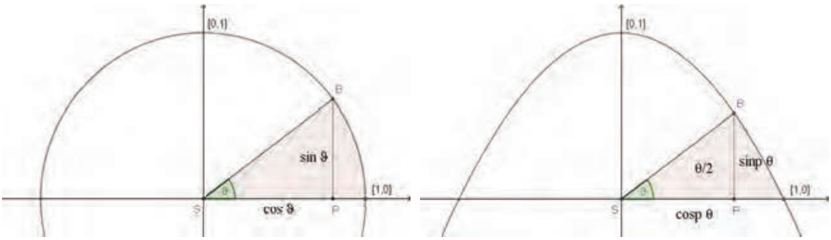
1) Johann Heinrich Lambert (1728–1777) byl švýcarský matematik, fyzik, astronom a filozof.

2) Ferdinand von Lindemann (1852–1939) byl německý matematik.

Parabolické goniometrické funkce (PGF), tj. parabolický sinus ($\operatorname{sinp}\theta$) a parabolický kosinus ($\operatorname{cosp}\theta$) definujeme jako souřadnice bodu, který náleží parabole s rovnicí

$$x^2 + y = 1,\ -1 \leq x \leq 1, \tag{4}$$

kde hodnota argumentu θ je rovna dvojnásobku obsahu plochy omezené rameny úhlu ϑ a parabolou (obr. 4 vpravo) [1, 2].[3)]



Obr. 4: Definice goniometrických funkcí v jednotkové kružnici (vlevo), definice PGF (vpravo) jako souřadnic bodu $B[\operatorname{cosp}\theta; \operatorname{sinp}\theta]$, kde θ je dvojnásobek plochy omezené rameny úhlu ϑ a parabolou (upraveno podle [1])

Argument θ (plocha výseče paraboly) má v případě PGF obdobný význam jako ϑ (délka oblouku) pro funkce definované v jednotkové kružnici, můžeme tedy analogicky uvažovat o „parabolickém čísle pí" (π_p). Pro argument θ odpovídající volbě $\operatorname{cosp}\theta = 0$, $\operatorname{sinp}\theta = 1$ (na obr. 4 vrchol jednotkové paraboly) platí

$$\theta = 2\int_0^1 (1-\mu^2)d\mu = \frac{\pi_p}{2}, \tag{5}$$

a dále

$$\begin{aligned} &\operatorname{sinp} 0 = 0, \qquad && \operatorname{sinp} \pi_p/2 = 1, \qquad && \operatorname{sinp} \pi_p = 0,\\ &\operatorname{cosp} 0 = 1, && \operatorname{cosp} \pi_p/2 = 0, && \operatorname{cosp} \pi_p = -1. \end{aligned}$$

[3)] Volba hodnoty argumentu θ je analogická situaci v jednotkové kružnici. Obsah kruhové výseče θ odpovídající středovému úhlu ϑ (v radiánech) je ($r = 1$)

$$\theta = \pi r^2 \cdot \frac{\vartheta}{2\pi} = \frac{\vartheta}{2} \to \vartheta = 2\theta.$$

Pokud vypočítáme integrál v rovnici (5), pak

$$\pi_p = \frac{8}{3},$$

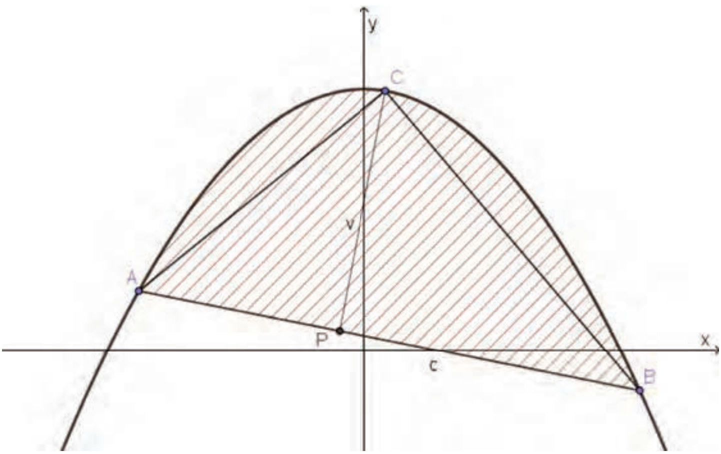
kde hodnota π_p je racionální.

Archimédés v knize *Kvadratura paraboly* popsal metodu určení obsahu parabolické úseče, přičemž dospěl ke vzorci, který plochu úseče udává jako 4/3 plochy trojúhelníku, jehož základnu tvoří úsečka omezující úseč a výšku pak (nejdelší) kolmice k základně omezená vrcholem úseče, tj. nejvzdálenějším bodem od základny (obr. 5)

$$S = \frac{4}{3}cv.$$

Pokud bychom využili výše uvedené hodnoty $\pi_p = 8/3$, pak můžeme pro obsah parabolické úseče psát

$$S = \pi_p \cdot \frac{cv}{2} = \frac{8}{3} \cdot \frac{cv}{2} = \frac{4}{3}cv.$$



Obr. 5: Obsah parabolické úseče

Závěr

Parabolické goniometrické funkce jsou v literatuře zmiňovány jen v několika málo případech, uveďme proto některé další vlastnosti těchto funkcí. Další informace lze nalézt v článcích [1, 2].

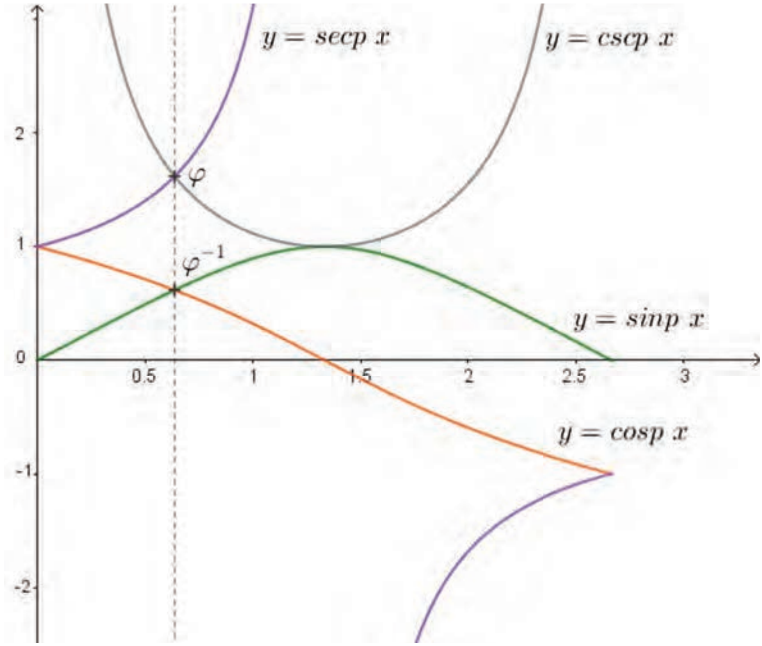
Podobně jako v případě goniometrických funkcí definovaných pomocí jednotkové kružnice, které splňují rovnost

$$\sin^2 \vartheta + \cos^2 \vartheta = 1, \tag{6}$$

platí pro PGF vzhledem k rovnici (3)

$$\operatorname{cosp}^2 \theta + \operatorname{sinp} \theta = 1, \tag{7}$$

kde θ je dvojnásobek plochy omezené rameny úhlu ϑ a parabolou (obr. 4).



Obr. 6: Grafy parabolických funkcí $y = \operatorname{sinp} x, y = \operatorname{cosp} x$, $y = \operatorname{cscp} x = \frac{1}{\operatorname{sinp} x}$ a $y = \operatorname{secp} x = \frac{1}{\operatorname{cosp} x}$, $x \in [0, \frac{8}{3}]$, φ označuje hodnotu zlatého řezu

Vzhledem k definici, která se opírá o parabolu, nejsou uvedené funkce periodické. Na obr. 6 jsou dále znázorněné funkce

$$y = \operatorname{cscp} x = \frac{1}{\operatorname{sinp} x},$$

tj. parabolický kosekans, který je převrácenou hodnotou parabolického sinu a

$$y = \operatorname{secp} x = \frac{1}{\operatorname{cosp} x},$$

tj. parabolický sekans, který je převrácenou hodnotou parabolického kosinu. Na obr. 3 je hodnota parabolického sekans vyjádřena délkou úsečky $|SA|$ (argumentem funkce je dvojnásobek plochy omezené polopřímkou SP, parabolou a kladnou částí osy x). Postup odvození funkcí, které byly použity pro konstrukci grafů na obr. 6, je založen na použití diferenciálního a integrálního počtu, podrobný popis odvození lze nalézt např. v [2].

Vzájemný vztah kružnicových (KGF) a parabolických goniometrických funkcí můžeme odvodit z obr. 7, ze kterého je zřejmé, že body P, C leží na přímce s rovnicí

$$y = \frac{\sin\vartheta}{\cos\vartheta} x$$

a souřadnice bodu P tak získáme z rovnice

$$\frac{\sin\vartheta}{\cos\vartheta} x = 1 - x^2,$$

kde po úpravě je

$$\operatorname{cosp}\theta = \frac{1}{2\cos\vartheta}\left(\sqrt{4 - 3\sin^2\vartheta} - \sin\vartheta\right),$$

a použitím rovnice (7)

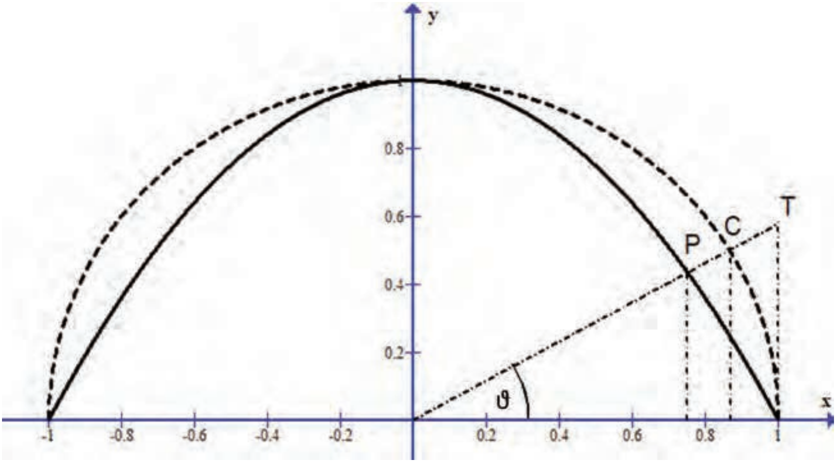
$$\operatorname{sinp}\theta = \frac{\operatorname{tg}\vartheta}{2\cos\vartheta}\left(\sqrt{4 - 3\sin^2\vartheta} - \sin\vartheta\right).$$

Hodnoty PGF můžeme tedy celkem snadno určit ze známých hodnot KGF, kde např. pro $\vartheta = \frac{\pi}{4}$ je

$$\operatorname{sinp}\theta = \operatorname{cosp}\theta = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1),$$

pro $\vartheta = \frac{\pi}{3}$ je

$$\operatorname{sinp}\theta = \frac{1}{2}(\sqrt{21} - 3), \quad \operatorname{cosp}\theta = \frac{1}{2}(\sqrt{7} - \sqrt{3}).$$



Obr. 7: Goniometrické funkce definované na kružnici (čárkovaná čára) a parabole (plná čára, upraveno podle [1])

Literatura

[1] Dattoli, G., Gielis, J., Di Palm, E., Licciardi, S.: *Parabolic Trigonometry*. 2018, Dostupné z: `https://www.researchgate.net/publication/327652282_Parabolic_Trigonometry`

[2] Dattoli, G., Migliorati, M., Quattromini, M., Ricci, P. E.: *The Parabolic-Trigonometric Functions*. 2011, Dostupné z: `https://www.researchgate.net/publication/48203985_The_Parabolic-Trigonometric_Functions`.

[3] Harkin, A. A., Harkin, J. B.: Mathematics Magazine. *Permutations*, roč. 77 (2004), č. 2, s. 118–129.

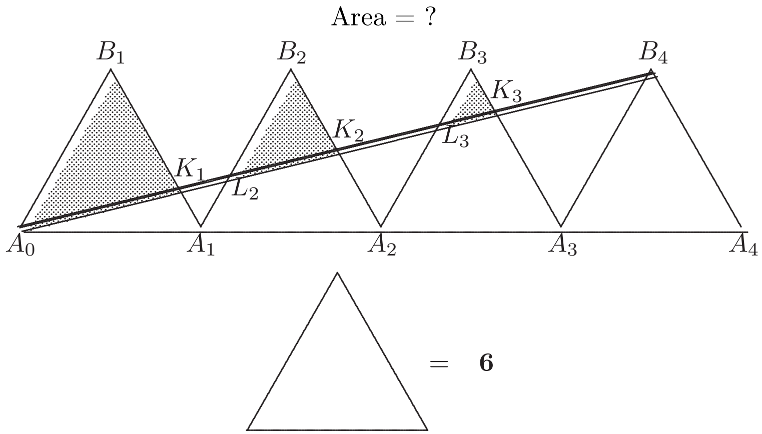
[4] Bellos, A.: *Alexova dobrodružství v zemi čísel*. Dokořán, Praha, 2015.

[5] Spíchal, L.: Od řetězovky k číslu π. *Rozhledy matematicko-fyzikální*, roč. 95 (2020), č. 2, s. 1–11.

Řada trojúhelníků

Vlastimil Dlab, Bzí u Železného Brodu

Nedávno mne jeden z mých přátel upozornil na zajímavý matematický problém *Triangles In a Row* zadaný na YouTube `https://youtu.be/m0xnEn9qWwo`:



Obr. 1: Triangles In a Row

Úkolem je nalézt součet obsahů označených trojúhelníků $A_0K_1B_1$, $L_2K_2B_2$ a $L_3K_3B_3$ za předpokladu, že každý z rovnostranných trojúhelníků $A_tA_{t+1}B_{t+1}$, $t = 0, 1, 2, 3$, má obsah 6.

Ve videu autor podává řešení, to je ale k mému zklamání založeno na naučeném vzorečku. Takový přístup zastínil podstatu problému a zakryl zásadní fakt, že strany a úhly trojúhelníků nehrají v úloze žádnou roli.

Vysvětleme znovu nepřiměřené užívání nabiflovaných vzorců na tomto extrémním příkladu: Úkolem je určit obsah S trojúhelníku, jehož strany jsou $a = 5$, $b = 12$, $c = 13$. Bez jakéhokoliv uvažování, naučený Heronův vzorec

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \quad \text{kde } s = \frac{a+b+c}{2},$$

dává výsledek $S = \sqrt{15 \cdot 10 \cdot 3 \cdot 2} = \sqrt{900} = 30$. Když si ale všimneme, že jde o pravoúhlý trojúhelník, vyhneme se několika výpočtům, protože obsah pravoúhlého trojúhelníku se rovná polovině součinu jeho odvěsen, tedy $\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 12 = 30$. Připomeňme, že tento trojúhelník patří mezi (pravoúhlé) trojúhelníky splňující rovnosti $c - b = 1$ a $c + b = c^2 - b^2 = a^2$. Ty tvoří posloupnost trojúhelníků o stranách

$$a = 2k + 1,\ b = 2k(k + 1),\ c = 2k(k + 1) + 1 \quad \text{pro } k = 1, 2, \ldots$$

Dalším příkladem může být užití kosinové věty k důkazu rovnosti $u^2+v^2 = 2(a^2+b^2)$ mezi úhlopříčkami u, v a stranami a a b rovnoběžníku. Ušetříme si spoustu práce, když k důkazu použijeme Pythagorovu větu (viz článek [1] a reakci [4]).

Nyní se vraťme k naší úloze týkající se součtu obsahů řady trojúhelníků. Rozřešíme ji v plné obecnosti, přičemž zdůrazníme důležitou úlohu pojmu podobnosti trojúhelníků. Výsledek formulujme takto:

Věta. *Uvažujme posloupnost n libovolných shodných trojúhelníků*

$$\Delta_t = A_t A_{t+1} B_{t+1},\ t = 0, 1, \ldots, n - 1 \text{ (viz obr. 2).}$$

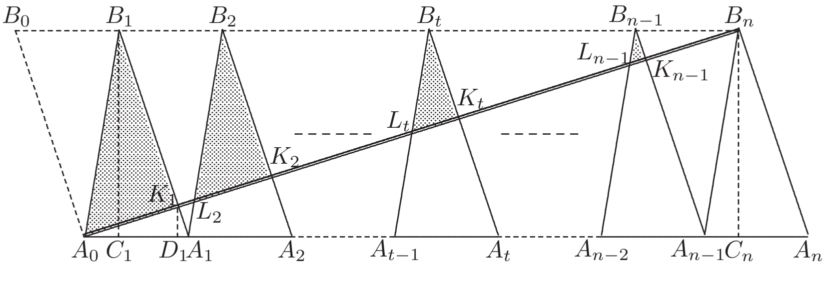
Označme obsah trojúhelníku Δ_t písmenem S. Úsečka A_0B_n definuje $n-1$ podobných trojúhelníků

$$\Omega_k = L_k K_k B_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n - 1,\ \text{kde } L_1 := A_0.$$

Součet obsahů těchto $n - 1$ trojúhelníků je

$$\frac{2n - 1}{6} S.$$

Zvolíme-li tedy $n = 4$ a $S = 6$, součet obsahů je 7.



Obr. 2: Součet obsahů $n - 1$ vyznačených trojúhelníků

Důkaz věty je zcela jednoduchý. Využívá podobnosti trojúhelníků $L_tB_nB_t$ pro $t = 1, 2, \dots, n-1$. Jelikož $A_0A_1 = B_tB_{t+1}$ pro všechna $t = 0, 1, \dots, n-1$, koeficient této podobnosti je

$$\frac{L_tB_t}{A_0B_1} = \frac{B_tB_n}{B_1B_n} = \frac{n-t}{n-1}.$$

Označíme-li tedy S_1 obsah trojúhelníku Ω_1, je obsah S_t trojúhelníku Ω_t pro $t = 2, 3, \dots, n-1$ roven

$$S_t = \left(\frac{n-t}{n-1}\right)^2 S_1.$$

Hledaný součet obsahů všech trojúhelníků Ω_t se proto rovná součtu

$$\frac{S_1}{(n-1)^2}\left(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2\right). \qquad (*)$$

Čekají nás tedy dva úkoly: Určit S_1 a sečíst $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2$.

Obsah S_1 je rozdílem obsahu S trojúhelníku $A_0A_1B_1$ a obsahu trojúhelníku $A_0A_1K_1$. Výšku K_1D_1 tohoto trojúhelníku určíme opět užitím podobnosti trojúhelníků, tentokrát $A_0A_1K_1$ a $A_0A_nB_n$, jejíž koeficient je $\frac{1}{n}$. Proto

$$K_1D_1 = \frac{1}{n}B_nC_n = \frac{v}{n},$$

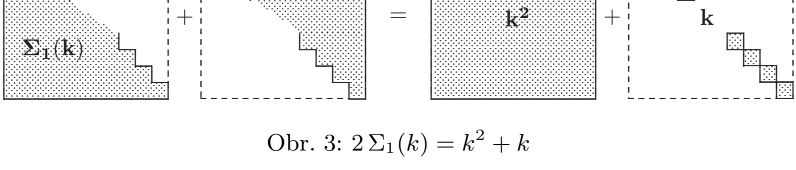
kde $v = B_1C_1$ je výška trojúhelníku $A_0A_1B_1$. Obsah S_1 nyní určíme snadno:

$$S_1 = S - \frac{1}{2}A_0A_1\frac{v}{n} = S - \frac{1}{n}S = \frac{n-1}{n}S.$$

Zbývá sečíst druhé mocniny prvních $n-1$ přirozených čísel

$$\Sigma_2(k) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2.$$

Součet $\Sigma_1(k) = 1 + 2 + 3 + \dots + k$ prvních k přirozených čísel určíme snadno, třeba sestřihem $k \times k$ čtverců, jak ukazuje obr. 3.



Obr. 3: $2\,\Sigma_1(k) = k^2 + k$

Je tedy $\Sigma_1(k) = \frac{1}{2}k(k+1)$. Tohoto poznatku nyní využijeme k výpočtu součtu $\Sigma_2(k)$. Rozepišme

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + (k+1)^3 = 1 + (1+1)^3 + (2+1)^3 + \cdots + (k+1)^3 =$$
$$1 + \left(1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + k^3\right) + 3\Sigma_2(k) + 3\Sigma_1(k) + k,$$

odkud dostáváme

$$(k+1)^3 = 1 + 3\,\Sigma_2(k) + 3\,\Sigma_1(k) + k,$$

a tedy

$$3\,\Sigma_2(k) = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 - 1 - \frac{3k(k+1)}{2} - k,$$

tj.

$$\Sigma_2(k) = \frac{2k^3 + 3k^2 + k}{6} = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}.$$

Poznamenejme, že tohoto výsledku dosáhneme zcela obecným způsobem, jak to učinil před tisíci lety matematik-fyzik Ibn al-Haytham (965–1040), známý Alhazen, pomocí schématu, které nalezneme např. v učebnici [3] na str. 73. Zde je nutné podotknout, že součty mocnin přirozených čísel mají své místo v teorii aritmetických posloupností vyšších řádů (viz [2] či [3]).

Nyní už můžeme dokončit důkaz věty. Prostě dosadíme do rovnosti $(*)$

$$S_1 = \frac{n-1}{n}S \quad \text{a} \quad \Sigma_2(n-1) = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$

a dostáváme součet obsahů označených trojúhelníků Ω_t:

$$\frac{(n-1)S}{n(n-1)^2}\,\frac{(n-1)n(2n-1)}{6} = \frac{2n-1}{6}\,S.$$

Poděkování. Děkuji recenzentovi za konečné úpravy textu.

Literatura

[1] Dlab, V.: Důkladné porozumění elementární matematice. *Učitel matematiky*, roč. 71 (2009), s. 169–182.

[2] Dlab, V.: Arithmetic progressions of higher order. *Teaching Math. Comp. Science*, roč. 9 (2011), č. 2, s. 225–239.

[3] Bečvář, J.: *Od aritmetiky k abstraktní algebře.* Serifa, Praha, 2016.

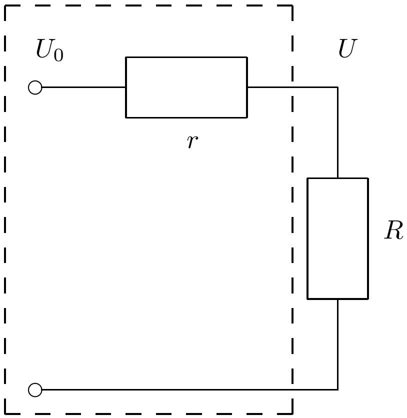
[4] Kuřina, F.: Chvála „biflování“. *Učitel matematiky* roč. 73 (2009), s. 49–52.

FYZIKA

Maximální výkon baterie

Pavel Pokorný, Ústav matematiky, VŠCHT Praha

V článcích [1, 2, 3] jsme se zabývali otázkou, jak najít optimální chování nebo stav mechanického systému, a tato fyzikální úloha vedla k matematické úloze najít maximum funkce. V tomto článku se podíváme na podobnou úlohu z elektřiny: *Jakou zvolit zátěž (její odpor), aby baterie dodávala do této zátěže maximální výkon?*



Obr. 1: Schematický náčrt zapojení baterie o elektromotorickém napětí U_0 a vnitřním odporu r. Spotřebič (zátěž) považujeme za rezistor o odporu R.

Uvažujme elektrickou baterii s konstantním elektromotorickým napětím U_0 a s konstantním vnitřním odporem r, obr. 1. Na tomto obrázku čárkovaná čára představuje hranici (obal) baterie, plné čáry představují elektrické vodiče a obdélníky představují rezistory. Odpor r je vnitřní odpor baterie a je dán chemickým složením a konstrukcí baterie. Odpor R je velikost zátěže, kterou k baterii připojíme. Zátěží, tedy spotřebičem, může být např. žárovka, elektromotor nebo elektronické zařízení, třeba počítač. My budeme pro zjednodušení předpokládat, že tato zátěž se chová jako rezistor o odporu R.

Zabývejme se úlohou, jaký má být odpor R vnější zátěže, aby elektrický výkon, který dodává baterie do této zátěže, byl maximální.

Má-li rezistor ve vnější části obvodu velký odpor R, pak jím protéká malý proud

$$I = \frac{U_0}{r + R},$$

a tedy je malý výkon

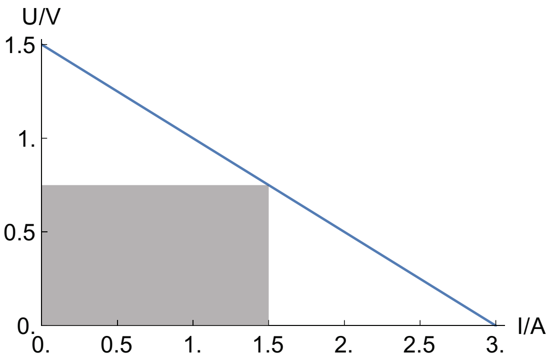
$$P = UI.$$

Na druhé straně, je-li odpor R malý, pak je malé napětí na rezistoru ve vnější části obvodu a je malý i výkon. V tomto případě se většina výkonu ztratí na vnitřním odporu r. Očekáváme, že někde mezi těmito dvěma krajními případy bude existovat hodnota odporu R, kdy bude výkon maximální.

Výkon dodávaný do zátěže je

$$P = UI = RI^2 = R\frac{U_0^2}{(r + R)^2} = U_0^2\frac{R}{(r + R)^2}.$$

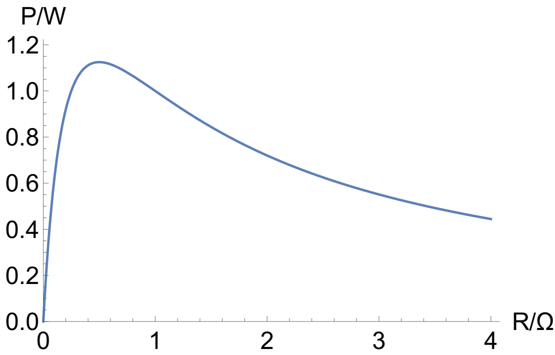
Charakteristiku baterie o elektromotorickém napětí $U_0 = 1{,}5$ V a vnitřním odporu $r = 0{,}5\ \Omega$ ukazuje obr. 2, závislost výkonu P na odporu zátěže R pro stejnou baterii ukazuje obr. 3.



Obr. 2: Závislost výstupního napětí U na výstupním proudu I baterie o elektromotorickém napětí $U_0 = 1{,}5$ V a vnitřním odporu $r = 0{,}5\ \Omega$. Vidíme, že napětí lineárně klesá s proudem od hodnoty U_0 do nuly. Obsah zobrazeného obdélníku odpovídá výkonu $P = UI$. Tento obsah chceme maximalizovat.

Maximum výkonu P najdeme tak, že si spočteme derivaci

$$\frac{dP}{dR} = U_0^2\frac{(r + R)^2 - 2R(r + R)}{(r + R)^4} = U_0^2\frac{r + R - 2R}{(r + R)^3} = U_0^2\frac{r - R}{(r + R)^3}.$$



Obr. 3: Závislost výkonu P na odporu zátěže R pro stejnou baterii. Vidíme, že výkon dosahuje maximální hodnoty pro odpor R zátěže přibližně uprostřed mezi 0 a 1, přesná hodnota je spočtena v hlavním textu.

Výkon bude maximální, když bude tato derivace nulová. Tím dostaneme rovnici

$$U_0^2 \frac{r - R}{(r + R)^3} = 0,$$

která má řešení $R = r$.

Tedy odpověď zní: Baterie bude dodávat maximální výkon, bude-li odpor zátěže R roven vnitřnímu odporu zdroje r. Pak bude ale stejný výkon ztracen uvnitř baterie na vnitřním odporu, což není žádoucí. Proto volíme vnitřní odpor zdroje co nejmenší, rozhodně mnohem menší než je odpor zátěže. Např. mikrotužkové alkalické baterie AAA s napětím 1,5 V mají vnitřní odpor v rozsahu 300 až 600 mΩ, zatímco nabíjecí NiMH baterie mají sice trochu nižší napětí (1,2 V), ale výrazně menší vnitřní odpor, typicky 70 mΩ.

Literatura

[1] Pokorný, P.: Jak dostříknout co nejdále. *Rozhledy matematicko-fyzikální*, roč. 95 (2020), č. 1, s. 50–51.

[2] Pokorný, P.: Pod jakým úhlem a z jaké výšky lze dostříknout nejdále. *Rozhledy matematicko-fyzikální*, roč. 95 (2020), č. 2, s. 37–41.

[3] Pokorný, P.: Mechanický akumulátor. *Rozhledy matematicko-fyzikální*, roč. 95 (2020), č. 4, s. 37–39.

Johannes Kepler – hledač harmonie světa

František Jáchim, Základní škola Dukelská, Strakonice

Abstrakt. On the occasion of the 400th anniversary of the publication of Kepler's book Harmonices mundi, we show Kepler's motivation to search for the interrelation between the motion of planets and geometry of their orbits. Briefly described the Kepler's cosmological model is created by inserting Platonic solids into the space between the spheres of planetary orbits. Kepler's laws were based essentially on Tycho Brahe's observations of Mars. At the end of the article, some examples of using the 3rd Kepler's law for calculations are given.

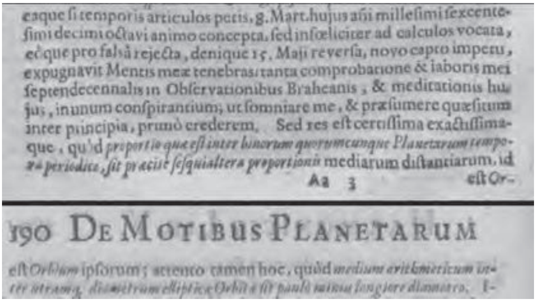
Obr. 1: Podobizna J. Keplera od neznámého autora z roku 1611

Roku 1619 vyšlo v Linci dílo *Harmonices mundi libri V* (*Pět knih o harmonii světa*[1]), jehož autorem je Johannes Kepler (1571–1630), astronom a matematik, který působil dvanáct let v Praze poblíž dvora císaře Rudolfa II. A po dobu asi jednoho roku také blízký spolupracovník neméně známé osobnosti Tychona Brahe. Kdesi uprostřed textu právě zmíněného díla, na stranách 189 a 190 páté knihy, je tato věta (obr. 2):

> (i) *Sed res est certissima exactissimaque, quòd proportio quae est inter binorum quorumcunque Planetarum tempora periodica, sit praecisè sesquialtera proportionis mediarum distantiarum, id est Orbium ipsorum; ...*

[1] Obvykle se název díla překládá *Harmonie světa*, čemuž gramaticky odpovídá nominativ *Harmonice mundi.*

(i) *Je ale absolutně jisté a exaktní, že poměr, který existuje mezi periodami oběhu kterýchkoli dvou planet, je přesně poměrem třípolovinových mocnin jejich středních vzdáleností, tj. sfér samotných; ...*



eaque ſi temporis articulos petis, 8. Mart. hujus añi milleſimi ſexcenteſimi decimi octavi animo concepta, ſed infœliciter ad calculos vocata, eóque pro falſâ rejecta, denique 15. Maji reverſa, novo capto impetu, expugnavit Mentis meæ tenebras, tanta comprobatione & laboris mei ſeptendecennalis in Obſervationibus Braheanis, & meditationis hujus, in unum conſpirantium; ut ſomniare me, & præſumere quæſitum inter principia, primò crederem. Sed res eſt certiſſima exactiſſimaque, quòd *proportio quæ eſt inter binorum quorumcunque Planetarum tempora periodica, ſit præciſe ſeſquialtera proportionis* mediarum diſtantiarum, id

Aa 3 eſt Or-

190 DE MOTIBUS PLANETARUM

eſt *Orbium* ipſorum; attento tamen hoc, quòd *medium arithmeticum inter utramq; diametrum ellipticæ Orbitæ ſit paulò minus longiore diametro.* I-

Obr. 2: Text v knize *Harmonices mundi libri V*

Umocníme-li právě zmíněný vztah na druhou, dostaneme dnešní formulaci 3. Keplerova zákona:

> *Druhé mocniny dob oběhu planet jsou ve stejném poměru jako třetí mocniny jejich hlavních poloos.*

V předchozích řádcích čteme vysvětlení, jak Kepler k tomuto vztahu došel:

> 8. března tohoto roku 1618, přeje-li si někdo přesný údaj času, se tento poměr vynořil v mé mysli. Neměl jsem však štěstí, když jsem jej ověřoval výpočtem, takže jsem jej zavrhl jako chybný. Konečně se však dne 15. května opět vrátil a v novém náporu přemohl temnoty mého ducha. Vyplynul přitom tak dokonalý souhlas mezi mou sedmnáctiletou prací nad Brahovými pozorováními a mou současnou úvahou, že jsem se zprvu domníval, že jsem snil a že jsem hledaný vztah vložil do výchozích předpokladů.[2)]

Rok 2018 znamenal velké vítězství pro lineckého astronoma-amatéra Ing. Ericha Meyera; podařilo se mu totiž identifikovat dům, ve kterém Kepler v době objevu třetího zákona bydlel. V korespondenci se uváděla Hofgasse, ale bez čísla. Téměř detektivním pátráním v Keplerových poznámkách a korespondenci vyhledal záznamy o pozorováních zatmění

[2)] `https://www.physics.muni.cz/astrohistorie/node10.html`; 2020-12-01.

Měsíce.[3] Rozhodující bylo zatmění 26. 8. 1616, kdy Měsíc krátce po maximu zatmění zašel za budovu hradu a konec zatmění již Kepler nemohl pozorovat, jak sám píše. Erich Meyer spočítal, že takto mohl Kepler vidět průběh zatmění jen z domu v Hofgasse 7, nejspíš ze třetího patra; jiné domy v ulici nevyhovovaly. Příběh pátrání pak zveřejnil slavnostně rakouský tisk a na dům byla umístěna pamětní deska připomínající objev 3. Keplerova zákona.

Věta (i), ač v textu knihy nezvýrazněná, je pozoruhodná. Je třetím zákonem doplňujícím dva předchozí zákony objevené Keplerem za jeho pražského pobytu, které zveřejnil ve spisu *Astronomia nova* z roku 1609.[4]

Keplerovy zákony popisující pohyb planet (ale i jiných těles ve sluneční soustavě) dnes uvádí na několika řádkách každá středoškolská učebnice fyziky. Zde jsou:

1. Planety obíhají kolem Slunce po elipsách, v jejichž společném ohnisku je Slunce.
2. Obsahy ploch, které jsou opsané průvodičem planety za stejné časové úseky, jsou konstantní.
3. Poměr druhých mocnin oběžných dob dvou planet se rovná poměru třetích mocnin jejich hlavních poloos

$$T_1^2 : T_2^2 = a_1^3 : a_2^3. \tag{1}$$

Můžeme říci, že tyto zákony popisují eleganci dění ve sluneční soustavě, pomineme-li vzájemné rušivé gravitační působení planet.

Kepler se domníval, že vesmír, jímž zde rozumějme sluneční soustavu, je harmonický, logicky uspořádaný, elegantní, a tedy krásný jak pohledem, tak činností, jako dobře sehrané soustrojí. Kepler po celý život v tuto harmonii věřil a usilovně ji hledal. Při příležitosti uplynulého 400letého výročí objevu jeho třetího zákona si tuto Keplerovu snahu znovu projděme.

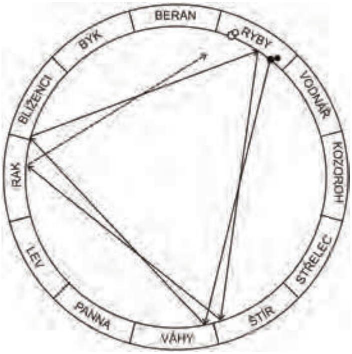
---

[3] `http://www.sternwarte.at/Kepler_Linz/Kepler_Linz_Hofgasse_7_EN.pdf`; podrobná historie objevu, 9 stran textu od Ericha Meyera

[4] Kepler začal zkoumat tvar trajektorie Marsu, když se mu konečně dostaly do rukou deníky Tychonových pozorování s polohami Marsu. Mezi lety 1602 až 1604 vyzkoušel různé druhy oválů a koncem roku 1604 vybral jako nejvhodnější elipsu. Spis *Astronomia nova* pak dokončil roku 1607, nechal ho tisknout v Heidelbergu a zveřejnil ho v Praze v roce 1609.

Tajemství vesmíru

Vše začalo zcela nenápadně u školní tabule na gymnáziu ve Štýrském Hradci, kde Kepler vyučoval studenty matematiku a astronomii. Na tabuli zakresloval do zvěrokruhu průměty několika konjunkcí Saturnu a Jupiteru. Jestliže první konjunkci zaznamenal do určitého místa, např. do znamení Ryb, druhá se zobrazila ve Štíru, třetí v Blížencích a čtvrtá opět v Rybách, ale asi o 9 stupňů posunutá ve směru zvěrokruhu (obr. 3). Zakresloval-li dále, stáčel se tento téměř uzavřený rovnostranný trojúhelník stále více, až vytvořil vzorek na obr. 4.



Obr. 3: Postup zakreslování konjunkcí Jupitera a Saturnu do zvěrokruhu. Tři po sobě jdoucí konjunkce vytvářejí téměř uzavřený rovnostranný trojúhelník

Obr. 4: Nákres řady konjunkcí Jupitera a Saturnu v Mysteriu

Zajímavé bylo i to, že poloměr zvěrokruhu k poloměru vnitřního malého kruhu byl 2 : 1, tj. přibližně stejný, jako poměr poloměrů sfér Saturnu a Jupiteru. Náhoda? Ale byl tu jistý motiv: Jestliže lze mezi dráhy Jupiteru a Saturnu skoro přesně vložit rovnostranný trojúhelník, nedaly by se pravidelné mnohoúhelníky vkládat i mezi sféry ostatních planet? Pravidelných mnohoúhelníků bylo k dispozici mnoho. Které však vybrat, aby poměr poloměrů kružnice opsané a vepsané odpovídal právě poměru velikostí sfér dvojice planet? Planety se ovšem nepohybují v rovině, nýbrž v prostoru. Proto se nabízela myšlenka pravidelné mnohoúhelníky nahradit pravidelnými mnohostěny. Těch už nebylo hodně, nýbrž pouze pět: čtyřstěn, krychle, osmistěn, dvanáctistěn, dvacetistěn (obr. 5). Jedná se o tzv. platónská tělesa. Antičtí učenci jim přiřadili základní stavební látky světa (tzv. živly[5]), dvanáctistěnu přiřadili vesmír jako celek.


190 DE MOTIBUS PLANETARUM

CAPVT I.

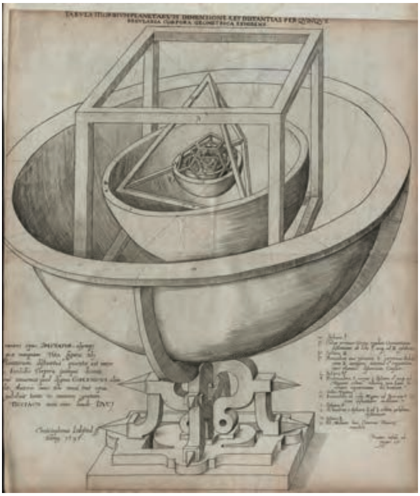
De quinque Figuris solidis regularibus.

HARMONICIS LIB. V. 181

Obr. 5: Pět tzv. platónských těles, jejich plášť je tvořen pravidelnými vždy stejnými mnohoúhelníky

Jelikož planet bylo v té době známo právě šest, podařila se Keplerovi unikátní sestava: Do sféry Saturnu vložil krychli tak, aby se svými vrcholy právě zevnitř Saturnovy sféry dotýkala, a naopak, aby krychle v sobě těsně uzavírala sféru Jupitera. A tak pokračoval blíž ke Slunci. Mezi sféru Jupiteru a Marsu vložil čtyřstěn, mezi Mars a Zemi dvanáctistěn, mezi Zemi a Venuši dvacetistěn a mezi Venuši a Merkur osmistěn. Sféra planety byla tedy vždy jednomu tělesu opsána a druhému vepsána. Keplerův model vesmíru je na obr. 6.

[5] Zemi, vodu, vzduch a oheň.



Obr. 6: Keplerův model vesmíru

Detaily tohoto modelu vesmíru Kepler vylíčil ve spisu zkráceně nazývaném *Mysterium cosmographicum* (*Tajemství vesmíru*) vydaném v roce 1596 a znovu roku 1621.[6] Na své dílo byl pyšný, domníval se, že nalezl opravdové uspořádání planet se Sluncem ve středu jejich sfér a i poměry jejich vzdáleností. Pohledem dneška sice Keplerův model posuzujeme jako fantazijní, avšak jistě budeme žasnout nad relativními vzdálenostmi planet od Slunce, jak vycházely z jeho modelu – viz tabulka.

Planeta	Vzdálenost v *Mysteriu*	Vzdálenost skutečná
Merkur	0,429	0,387
Venuše	0,762	0,723
Země	1,000	1,000
Mars	1,440	1,524
Jupiter	5,261	5,202
Saturn	9,163	9,567

[6] Celý název díla je *Úvod k pojednáním o vesmíru, jenž obsahuje kosmografické tajemství obdivuhodných rozměrů nebeských sfér a skutečné a konkrétní příčiny počtu, velikosti a periodického pohybu nebes, ukázané s pomocí pěti pravidelných geometrických těles.* Někdy se uvádí rok vydání 1597 (viz obr. 6), na titulním listu však je 1596.

Knihu proto poslal dánskému astronomovi Tychonovi Brahe s očekáváním jejího ocenění. Nestalo se tak. Tycho Brahe sice Keplerovi poslal spíše zdvořilostní dopis než zhodnocení knihy, Keplerovu učiteli Michaelu Mästlinovi ale psal o knize velmi kriticky.

Keplerova teorie mnohostěnů nedokázala vysvětlit několik závěrů z pozorování. Dráha planety neměla střed ve středu Slunce, ale poněkud stranou (zdálo se, že v žádném významném bodě), také nebylo možné vysvětlit souvislost mezi vzdáleností planety a dobou jejího oběhu. Kepler se sice snažil nalézt nějaký matematický vztah mezi vzdáleností planety od Slunce a dobou oběhu,[7)] ale ani tuto relaci se mu nepodařilo do modelu uspokojivě doplnit.

Nová astronomie

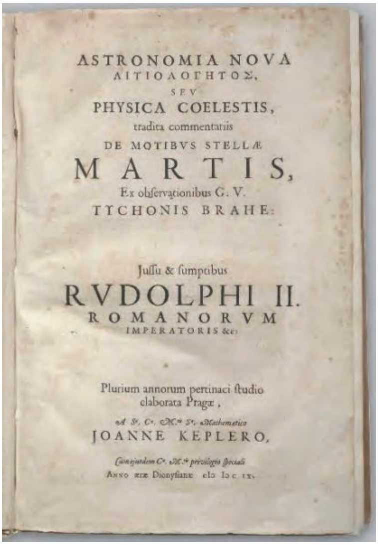
Koncepci *Mysteria* Tycho Brahe sice odsoudil, ale uznal, že autor je velmi schopný matematik, a tak následovala nabídka – pozvání k němu do Prahy. Od roku 1600 do jara roku 1612 působil Kepler v Praze. Ačkoli stále hledal vesmírnou harmonii, mohl se tentokrát opírat o neobyčejně přesná pozorování Tychona Brahe. Od něj také dostal první úkol pro svoji práci – pečlivě prozkoumat záznamy o pohybu Marsu, v nichž Tycho Brahe nenalézal žádnou zákonitost. Bohužel přímá spolupráce obou trvala pouze asi rok a byla ukončena Tychonovou smrtí v říjnu 1601. Problému běhu Marsu oblohou se ale Kepler věnoval celých dalších 8 let.

Jako první exaktní vztah odhalil souvislost rychlosti planety a její vzdálenosti od Slunce. Zjistil, že je-li planeta dále, pohybuje se pomaleji, je-li ke Slunci blíž, je její pohyb rychlejší. Dokázal nalézt matematickou formulaci tohoto jevu. Je to *zákon konstantní plošné rychlosti* (dnes uváděný jako 2. Keplerův zákon). Druhou otázkou, jíž se zabýval, byl tvar planetárních drah. Někdy ke konci roku 1604 problém konečně rozřešil: drahou Marsu je elipsa, v jejímž jednom ohnisku je Slunce. Tím byl objeven *zákon drah* (1. Keplerův zákon). Celá cesta k objevu prvních dvou zákonů je obsažena v Keplerově spisu *Astronomia nova* (*Nová astronomie*)[8)], vydaném v Praze roku 1609 (obr. 7). Je to možná nejvýznamnější

[7)] Domníval se, že rozdíl oběžných dob dvou planet může být dvojnásobkem rozdílu jejich vzdáleností od Slunce $T_1 - T_2 = 2(a_1 - a_2)$.

[8)] Celý název díla je *Nová astronomie, založená na studiu příčin čili nebeská fyzika, podávaná v komentářích o pohybu planety Marsu, kterou na základě pozorování urozeného pána Tychona Brahe, z rozkazu a na náklad Rudolfa II., císaře římského etc., vypracoval za několikaletého vytrvalého studia v Praze Johannes Kepler, matematik svatého císařského veličenstva.*

vědecká kniha, jaká kdy byla v Praze vydána, což bylo oceněno i vydáním poštovní známky ke čtyřsetletému jubileu (obr. 8).


ASTRONOMIA NOVA
ΑΙΤΙΟΛΟΓΗΤΟΣ,
SEU
PHYSICA COELESTIS,
tradita commentariis
DE MOTIBUS STELLÆ
MARTIS,
Ex observationibus G. V.
TYCHONIS BRAHE:

Jussu & sumptibus
RUDOLPHI II.
ROMANORUM
IMPERATORIS &c:

Plurium annorum pertinaci studio
elaborata Pragæ,

JOANNE KEPLERO,

Anno æræ Dionysianæ CIO IOC IX.

Obr. 7: Titulní list knihy *Astronomia nova*, popisující cestu k nalezení tvaru dráhy Marsu

Obr. 8: Známka České pošty k Mezinárodnímu roku astronomie 2009

Zdálo se, že harmonie a elegance v pohybu planet byla nalezena a že Kepler mohl být šťastný. Ovšem vědecký úspěch je jen jednou stranou mince života. Od roku 1610 byla jeho manželka Barbara těžce nemocná a rok nato zemřela. Tři jejich děti dostaly neštovice, zemřel šestiletý syn Friedrich. Také společenské klima se v Praze výrazně změnilo. Rudolf II. byl zbaven moci po pozvání pasovského vojska do Prahy, které zde zanechalo nesmazatelné stopy násilí a drancování. V lednu 1612 Rudolf II. zemřel a krátce nato i Martin Bacháček, rektor pražské univerzity a Keplerův přítel. Kepler tak ztratil část rodiny, ochránce i přátele a k Praze jej již nic nepoutalo. Po neúspěšné snaze dostat se na univerzitu do Tübingenu se Kepler se zbytkem rodiny odebral do Lince. Zde došlo k završení jeho astronomického díla, zatímco pobyt v Praze připomíná památník před Gymnáziem Jana Keplera na Pohořelci (obr. 9).

Obr. 9: Pomník Tychona Brahe a Johennesa Keplera v Praze na Pohořelci

Harmonie světa

Kepler tušil, že musí existovat nějaká souvislost mezi rychlostmi planet v periheliu a aféliu[9)] ve vztahu k jejich vzdálenostem od Slunce, a to i mezi planetami navzájem. Jak je ale uvedeno na začátku tohoto článku, třetí zákon – harmonický – vyjadřující tuto souvislost (1), objevil až po letech hledání dne 15. května roku 1618. Dílo *Harmonie světa*, vydané roku 1619 v Linci, připsal anglickému králi Jakubovi I. a vyjádřil naději, že tato harmonie nalezená ve vesmíru pomůže usmířit znesvářené církve. Paradoxně v tento čas vypukla v Evropě třicetiletá válka.

Vraťme se nyní k 3. Keplerovu zákonu. Až po objevení gravitačního zákona (roku 1687 Isaacem Newtonem) došlo k upřesnění 3. Keplerova zákona na tvar

$$\frac{a_1^3}{a_2^3} = \frac{T_1^2}{T_2^2} \cdot \frac{M + m_1}{M + m_2}, \tag{2}$$

[9)] Perihelium – bod, v němž je planeta ke Slunci nejblíže, afélium – bod, v němž je planeta od Slunce nejdále.

kde M je hmotnost centrálního tělesa (např. Slunce), m_1 a m_2 jsou hmotnosti těles (např. planet) obíhajících kolem ústředního tělesa. V případě planet a Slunce platí, že $m_1, m_2 \ll M$, a vztah (2) přechází s dostatečnou přesností ve vztah (1). Vztah (1) můžeme také zapsat v dalším tvaru, a vyjádřit tak podíl druhé mocniny oběžných dob dvou planety a třetích mocnin jejich hlavních poloos. Zobecnění pro pohyb více těles kolem Slunce lze psát jako

$$\frac{T_1^2}{a_1^3} = \frac{T_2^2}{a_2^3} = \frac{T_3^2}{a_3^3} = \cdots = \text{konst.} \tag{3}$$

S užitím gravitačního zákona a jednotek SI lze tuto konstantu zapsat ve tvaru

$$\frac{4\pi^2}{GM},$$

kde $M \doteq 1{,}98 \cdot 10^{30}$ kg je hmotnost Slunce a $G \doteq 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{m^3 \cdot s^{-2} \cdot kg^{-1}}$ gravitační konstanta. Hodnota konstanty ve vztahu (3) v jednotkách SI je pak $2{,}99 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{m^{-3} \cdot s^2}$.

Pro čtenáře bude ale jistě zajímavější vypočítat poměry T^2/a^3 pro planety sluneční soustavy, užijeme-li jednotkové údaje pro Zemi ($a = 1$ AU, $T = 1$ rok). Pohlédneme-li do následující tabulky, vidíme, že hodnota této konstanty je s dosti velkou přesností pro všechny planety číselně rovna jedné.

Planeta	T [roky]	a [AU]	T^2/a^3
Merkur	0,241	0,387	1,002
Venuše	0,615	0,723	1,001
Země	1,000	1,000	1,000
Mars	1,888	1,524	1,007
Jupiter	11,862	5,203	0,999
Saturn	29,458	9,540	0,999
Uran	84,011	19,180	1,000
Neptun	164,790	30,060	1,000

Několik výpočtů

Hlavní poloosa planetky Ceres

Když ředitel hvězdárny v Palermu Giuseppe Piazzi (1746–1826) pracoval na svém katalogu hvězd,[10] navečer dne 1. ledna 1801 zaznamenal těleso osmé hvězdné velikosti, které do následující noci změnilo svou polohu. Jak se ukázalo později, nebylo ani kometou ani planetou. Těleso bylo označeno jako planetka a dostalo název Ceres. Pokud budeme chtít znát, v jaké vzdálenosti od Slunce se první objevená planetka pohybuje, s užitím 3. Keplerova zákona a znalostí doby oběhu Země a hlavní poloosy její dráhy, můžeme při znalosti oběžné doby Cerery ($T_\mathrm{c} = 4{,}6$ roku) vypočítat hlavní poloosu její dráhy. Jako druhé těleso do 3. Keplerova zákona použijeme údaje pro Zemi ($T_\mathrm{z} = 1$ rok, $a_\mathrm{z} = 1$ AU):

$$\frac{T_\mathrm{c}^2}{T_\mathrm{z}^2} = \frac{a_\mathrm{c}^3}{a_\mathrm{z}^3},$$

z čehož po úpravě získáme

$$a_\mathrm{c} = \sqrt[3]{\frac{T_\mathrm{c}^2}{T_\mathrm{z}^2}} \cdot a_\mathrm{z} = \sqrt[3]{\frac{4{,}6^2}{1^2}} \cdot 1\ \mathrm{AU} = 2{,}77\ \mathrm{AU}.$$

Planetka Ceres obíhá po elipse s hlavní poloosou 2,77 AU.

Vzdálenost geostacionární družice

Podle stejného zákona lze např. také odhadnout, v jaké vzdálenosti nad povrchem Země obíhá geostacionární družice (zdánlivě „visící“ nad stejným místem zemského povrchu). Označíme-li oběžnou dobu družice $T_\mathrm{d} = 1$ den,[11] oběžnou dobu Měsíce $T_\mathrm{m} = 27{,}32$ dnů, střední vzdálenost Měsíce od Země $a_\mathrm{m} = 384\,000$ km, pak pro vzdálenost družice od středu Země platí (úpravou vztahu (1))

$$a_\mathrm{d} = \sqrt[3]{\frac{T_\mathrm{d}^2}{T_\mathrm{m}^2}} \cdot a_\mathrm{m} = \sqrt[3]{\frac{1^2}{27{,}32^2}} \cdot 384\,000\ \mathrm{km} \doteq 42\,300\ \mathrm{km}.$$

Družice bude ve výšce asi 36 000 km nad povrchem Země ($r = 6\,378$ km).

[10] Oba jím sestavené katalogy obsahovaly celkem 15 000 hvězd.

[11] Ve skutečnosti se porovnávají siderické oběžné doby, počítané vzhledem ke hvězdám (z latinského sidus = hvězda). U geostacionární družice Země tato doba trvá zaokrouhleně 23 hodin 56 minut, tj. 1 hvězdný den; odpovídá otočce Země o 360°. Diference 4 minut je však v tomto přibližném výpočtu zanedbatelná.

Hmotnost Marsu

Na závěr si na příkladu Marsu ukažme, jak lze vypočítat hmotnost některé z planet, u níž budeme znát dobu oběhu a vzdálenost některého jejího měsíce.

Označme a_m velkou poloosu Měsíce a T_m jeho oběžnou dobu, a_d velkou poloosu Marsova měsíce Deimos a T_d jeho oběžnou dobu, M_z hmotnost Země a M_m neznámou hmotnost Marsu. Zde musíme využít vztah (2), neboť centrální tělesa jsou v tomto případě různá (Země pro Měsíc, Mars pro Deimos). Proto z 3. Keplerova zákona pro tuto úlohu plyne

$$\frac{a_\mathrm{d}^3}{a_\mathrm{m}^3} = \frac{T_\mathrm{d}^2}{T_\mathrm{m}^2} \cdot \frac{M_\mathrm{m} + m_\mathrm{d}}{M_\mathrm{z} + m_\mathrm{m}}.$$

Jelikož hmotnosti měsíců vzhledem k hmotnosti jejich centrálních těles můžeme zanedbat, lze pro výpočet vycházet z upraveného vztahu

$$\frac{a_\mathrm{d}^3}{a_\mathrm{m}^3} = \frac{T_\mathrm{d}^2}{T_\mathrm{m}^2} \cdot \frac{M_\mathrm{m}}{M_\mathrm{z}},$$

který pro hmotnost Marsu dává

$$M_\mathrm{m} = \frac{a_\mathrm{d}^3}{a_\mathrm{m}^3} \cdot \frac{T_\mathrm{m}^2}{T_\mathrm{d}^2} \cdot M_\mathrm{z}$$

a po dosazení $a_\mathrm{m} = 384 \cdot 10^3$ km, $a_\mathrm{d} = 23{,}5 \cdot 10^3$ km, $T_\mathrm{m} = 27{,}3$ dnů, $T_\mathrm{d} = 1{,}26$ dnů dostáváme

$$M_\mathrm{m} = \left(\frac{23{,}5 \cdot 10^3}{384 \cdot 10^3}\right)^3 \cdot \left(\frac{27{,}3}{1{,}26}\right)^2 \cdot M_\mathrm{z} \doteq 0{,}107 M_\mathrm{z}.$$

Hmotnost Marsu je tedy přibližně desetinou hmotnosti Země.

Literatura

[1] Fergusonová, K.: *Tycho a Kepler.* Academia, Praha, 2009.

[2] Dittrich, A.: Jak Kepler objevil své zákony. *Časopis pro pěstování matematiky a fyziky*, roč. 42 (1913), č. 2, s. 237–240.

[3] Zajac, R., Šebesta, J.: *Historické pramene súčasnej fyziky I.* Alfa, Bratislava, 1990.

[4] Šolcová, A.: *Johannes Kepler.* Prometheus, Praha, 2004.

Zpívejte zábavně fyzikální vzorce a poučky!

Jan Obdržálek, ÚTF MFF UK

Všechny učitele fyziky i matematiky – a nejen je – jistě potěší a pobaví nová sbírka Písně lidu fyzikálního. Sborník obsahuje 25 písniček s jednoduchými nápěvy, notami a akordy, které jsou určené hlavně pro SŠ, ale najdete zde i témata vhodná pro ZŠ či VŠ.

Zpěvem se vydáte od výčtu základních jednotek SI, fyzikálních veličin (SŠ i ZŠ), přes volný pád, páky, zákony zachování, hydrodynamiku, lom světla a čočkovou rovnici, až k entropii, relativitě, nerozlišitelnosti a kvantové fyzice.

S výkladem, doporučeno JČMF.

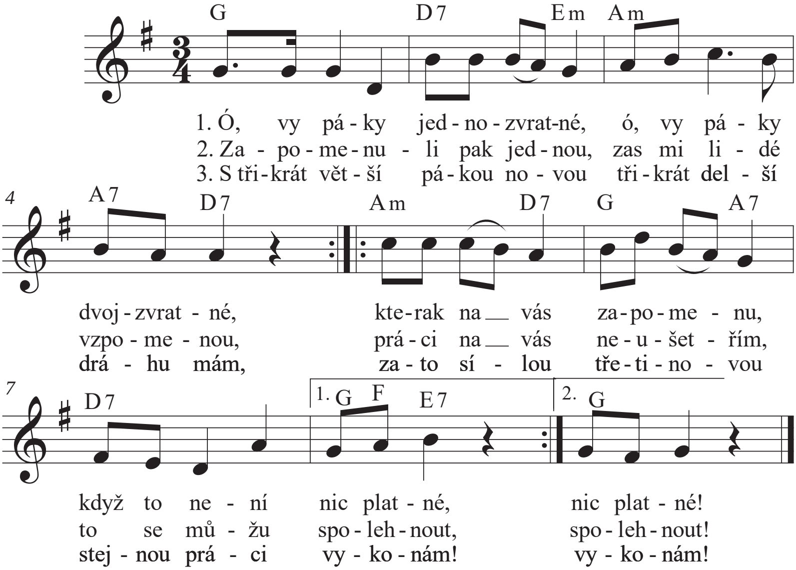
Sborník vyšel jako e-kniha:

`http://eknihyjedou.cz/pisne_lidu_fyzikalniho`

9. Ó, VY PÁKY JEDNOZVRATNÉ

nápěv: Ó, hřebíčku zahradnický

slova: Jan Obdržálek



Kolikrát je delší rameno, tolikrát slabší síla stačí na dodání stejné energie (vykonání práce ΔW), a to ať je páka dvojzvratná (síla ruky a tíha bedny působí na opačných stranách ve stejném směru), nebo jednozvratná (obě síly působí na stejné straně páky v opačných směrech)**. Energii ale nemůžeme ztratit, ani získat.** (Perpetuum mobile neexistuje.)

Matematicky (pro ty, co znají vektory):
Přírůstek energie (dodaná práce) ΔW je skalární součin síly $\boldsymbol{F}$ a posunutí $\Delta \boldsymbol{x}$, tedy $\Delta W = \boldsymbol{F} \cdot \Delta \boldsymbol{x}$ **.**
To je pravda i pro naši ruku, i pro bednu, kterou rukou pomocí páky držíme: $\Delta W_1 = -\Delta W_2$. Celková změna energie je tedy
$W = \Delta W_1 + \Delta W_2 = \boldsymbol{F}_1 \cdot \Delta \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{F}_2 \cdot \Delta \boldsymbol{x}_2 = 0$.
Takže nakonec nula od nuly pojde.

Matematika pro život

Ľubomíra Dvořáková a Jan Vybíral (organizátoři akce)

Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská ve spolupráci s Pedagogickou fakultou Univerzity Karlovy pořádala 15. ledna 2021 jednodenní akci s názvem Matematika pro život. Na programu kurzu byly ukázky aplikací matematiky v medicínské, průmyslové i akademické praxi. Šlo již o třetí akci stejného formátu v pořadí, ovšem letošní „covidový" ročník se od předchozích lišil. Celá akce se konala online, což na jednu stranu znemožnilo osobní kontakt účastníků a bezprostřední otázky na řečníky, ale na druhou stranu bylo možné nabídnout účast i středoškolským pedagogům ze vzdálených koutů republiky. Zatímco loni a předloni bylo účastníků kolem stovky, letos jich bylo více než dvojnásobek.

Přednášky představily použití matematiky v nejrůznějších oborech, například:

- velmi aktuální modelování pandemie koronaviru,
- matematické modely mozku,
- použití matematiky v lingvistice,
- aplikace v hudbě,
- použití diferenciálních rovnic v úlohách ze života,
- aplikace teorie grafů a algebry.

Přednášeli přední odborníci v jednotlivých oborech:

- Ing. Mgr. Jaroslav Hlinka, Ph.D. (ÚI AV ČR): *Co mají společného mozek a Königsberg*
- doc. RNDr. Antonín Jančařík, Ph.D. (PedF UK): *K čemu je to dobré aneb jak použít Čínskou větu o zbytcích v boji s pandemií*
- Mgr. Vítězslav Kala, Ph.D. (MFF UK): *Aplikace algebry v teorii čísel*
- Bc. Petr Koronthály, DiS. (matematik, hudebník): *Matematická teorie hudby*
- Ing. René Levínský, Ph.D. (CERGE-EI): *Model M – model města a epidemie*

- doc. RNDr. Karel Oliva, Dr. (jazykovědec): *Matematika a nečeský jazyk*
- doc. RNDr. Antonín Slavík, Ph.D. (MFF UK): *Diferenciální rovnice v matematickém modelování*
- Mgr. Jan Volec, Ph.D. (FJFI ČVUT): *Jednotažky a sedm mostů města Královce*

Byly pořízeny kvalitní záznamy přednášek, které jsou k dispozici na YouTube kanálu:
`www.youtube.com/channel/UCMwjxViEHA9ADUlUr8A5Daw`

Matematická soutěž MaSo

Kolektiv organizátorů MaSa

MaSo je týmová matematická soutěž pro žáky šestých až devátých tříd základních škol a odpovídajících ročníků víceletých gymnázií, která se koná dvakrát ročně. Nejde tu ovšem jen o počítání příkladů. Za spočítané příklady získávají týmy tahy do hry, která je pak hlavním zdrojem jejich bodů do celkového hodnocení. Hra je každý rok jiná. Týmy, které se již účastnily, tedy nemají výhodu její znalosti.

Žáci počítají matematické příklady a řeší různé logické úlohy. Za jejich vyřešení pak mohou odehrávat tahy ve hře. Kromě samostatné činnosti je důležitá i koordinace a vzájemná spolupráce. Umístění týmu na stupních vítězů záleží nejen na tom, kolik správně vyřeší příkladů, ale také na strategii ve hře. Během hry je povoleno používat papír a tužku, ostatní pomůcky jako tabulky (a další literatura) jsou zakázány. Pro Online MaSo jsme se rozhodli povolit kalkulačky bez grafického režimu a rýsovací pomůcky.

Chystáme pro vás další MaSo!

- Zapište si do kalendáře: MaSo proběhne **12. května 2021**, opět v online variantě.
- Přihlašování do soutěže bude spuštěno v polovině dubna.

  Podrobnější informace najdete brzy na našich webových stránkách: `https://maso.mff.cuni.cz/`

Vrabec letí do škol

Ondřej Novák, FJFI ČVUT v Praze (za organizátory akce)

Přibližně před rokem jsme si na Katedře jaderných reaktorů položili otázku, co bychom mohli dělat pro středoškolské pedagožky a pedagogy, abychom dále podpořili výuku jaderné fyziky. Chtěli jsme vytvořit program, který bude možné zakomponovat do hodin fyziky a bude úrovní informací odpovídat obsahu látky na střední škole. A tak vznikl online vzdělávací pořad Vrabec letí do škol.

Obsah pořadu jsme postavili na experimentech tak, abychom ukázali fyziku, kterou na školách ukazovat vyučující nemohou, protože nemají jaderný reaktor, detektory a zdroje ionizujícího záření. Při přípravě pořadu jsme se spojili se středoškolskými pedagogy, aby nám pomohli nastavit množství a úroveň informací tak, aby obsah odpovídal obsahu učiva na ZŠ a SŠ. Díky spolupráci s Mgr. Lenkou Plachtovou z Gymnázia Ostrava-Zábřeh jsme připravili pořad respektující specifika výuky žáků středních škol a žáků druhého stupně základních škol. Zpětná vazba žáků a pedagogů je pozitivní. Nakonec živé vysílání z reaktoru je v dnešní době online výuky příjemnou změnou.

Přibližně 40minutový pořad je vysílán ze školního reaktoru VR-1 (`http://www.reaktor-vr1.cz/cz/`), který je provozován Fakultou jadernou a fyzikálně inženýrskou, ČVUT v Praze a pořadem provázejí pedagogové z fakulty. Cílem pořadu je žákům vysvětlit, co je ionizující záření, jaké jsou jeho druhy a možnosti stínění, dále také princip štěpení a fungování jaderného reaktoru.

Pořad vysíláme každý měsíc živě. Na pořad se mohou hlásit celé třídy, semináře či jednotlivci. Datum a čas vysílání naleznete na webu události `https://katedra-reaktoru.cz/cz/pro-zajemce/vrabec-leti-do-skol`. Na uvedené webové stránce je možné se zaregistrovat k odebírání emailu s aktuálními informacemi o vysílání a také je zde ke stažení krátký test, který můžete využít po shlédnutí pořadu. Vysílání probíhá youtube streamem, kde mohou posluchači písemně pokládat dotazy. Na sledování není nutná registrace.

Týden vědy na Jaderce

Kateřina Hromasová, FJFI ČVUT, Praha

Jak nám prozrazují výsledky závěrečné ankety, většina žáků se o Týdnu vědy na Jaderce dozví od svého učitele. Ten jim řekne, že jde o týdenní vědecky popularizační akci pro středoškoláky konanou v Praze na Fakultě jaderné a fyzikálně inženýrské Českého vysokého učení technického (FJFI ČVUT). Výměnou za nevelký finanční příspěvek (většinou hrazený školou) mohou na týden v půlce června odjet do hlavního města, bydlet tam na vysokoškolské koleji, chodit na přednášky do auditorií FJFI a provádět vědecké experimenty pod vedením odborníka z oboru. Výsledky svého výzkumu poté zpracují stejnou formou, jakou mezi sebou komunikují vědci v mezinárodním kontextu, totiž konferenční ústní prezentací a sborníkovým příspěvkem. Navíc jsou pro ně nachystány exkurze na přední vědecká pracoviště v Praze, přírodovědná hra Pevnost Břehyard, diskuzní párty, večer v kasinu včetně prvotřídního bufetu... Pro mnoho žáků je to zajímavá nabídka a začnou na stránkách `tydenvedy.fjfi.cvut.cz` hledat další informace.

V tomto příspěvku shrneme, jak typický Týden vědy na Jaderce probíhá od začátku do konce. Ročník 2021 se tomuto rámci bude patrně vymykat, neboť bude provozován dálkově, avšak základní rysy zůstanou stejné.

Před začátkem Týdne vědy na Jaderce

Již dlouho před zahájením příprav na další ročník Týdne vědy se na stránkách `tydenvedy.fjfi.cvut.cz` otevírají předběžné přihlášky. Sem žák zadá pouze své jméno a e-mailovou adresu, aby mu měsíc před začátkem Týdne vědy přišla zpráva, že byly otevřeny ostré přihlášky. Zatímco žák čeká na mail, organizátoři Týdne vědy na Jaderce pod vedením Ing. Vojtěcha Svobody, CSc., mají napilno. Zajišťují ubytování účastníků na kolejích Strahov a Větrník, oslovují minulé i potenciálně nové vedoucí miniprojektů, žádají přední vědecká pracoviště v Praze o exkurze a sestavují nabídku přednášek.

V květnu je konečně zveřejněn finální výběr miniprojektů a exkurzí pro tento rok, otevřou se ostré přihlášky a začne první ze dvou kol přihlášek. Na Týden vědy se může přihlásit jakýkoli žák střední školy nebo vyššího stupně gymnázia včetně těch, co právě odmaturovali. Podmínkami je, aby žák byl samostatný, což zaručuje zasláním doporučujícího emailu některý z jeho pedagogů, a aby včas zaplatil účastnický poplatek. V přihlášce se zapíše ke třem miniprojektům a dvěma exkurzím, o které by měl zájem.

Přibližně po dvou týdnech se první kolo přihlášek uzavře a (většinou) všichni přihlášení jsou přijati. Co nejférovějším algoritmem jim jsou přiřazeny miniprojekty a exkurze a e-mailem o tom dostanou vyrozumění. Druhé kolo přihlášek trvá až do víkendu před Týdnem vědy. Zde si už žáci vybírají mezi miniprojekty a exkurzemi, co zbyly po jejich rychlejších kolezích. Není výjimkou, že před naplněním kapacity 180 žáků přijímáme účastníky ještě v pátek před začátkem Týdne vědy.

Neděle

Program Týdne vědy na Jaderce začíná v 10.00 v neděli. Účastníci se sejdou v budově FJFI v Břehové ulici a při registraci dostanou, podobně jako na opravdové vědecké konferenci, visačku se jménem, jízdenky na MHD, stravenky a zcela nezbytné a všemi milované reklamní předměty včetně trička s emblémem Týdne vědy. Většina dne je poté věnována úvodním a vědecky populárním přednáškám se dvěma důležitými výjimkami, jež představuje hromadný oběd v nedaleké restauraci a večerní hra Pevnost Břehyard. Tu inspirovala francouzská televizní soutěž Klíče od pevnosti Boyard. Účastníci zde utvoří skupinky po pěti a společnými silami plní matematicko-fyzikální úkoly, které pro ně studenti a učitelé FJFI připravili v prostorách fakulty. Příkladem budiž úkol zachycený na obr. 1, kde žáci měří atmosférický tlak za pomoci sloupce vody vedoucího centrálním schodištěm z přízemí až do třetího patra. Skupiny, které splní nejvíce úkolů, čekají ceny v podobě uranových sklenic, ročních předplatných populárně naučných časopisů (mj. i tohoto) nebo přednostního výběru miniprojektu v dalším ročníku Týdne vědy. Patřičně unavení se žáci vydají ubytovat na koleje a shánět večeři.

Pondělí

V pondělí ráno se účastníci seznámí s vedoucím svého miniprojektu a započnou pod jeho vedením vědeckou práci. Miniprojektů je celá řada a každý je jiný. Setkáme se s výpočetně zaměřeným miniprojektem *Monte Carlo simulace šíření nebezpečného viru*, miniprojektem z prostředí jaderných elektráren *Stanovení rozložení výkonu v aktivní zóně reaktoru*

VR-1 nebo environmentálně-radiačním miniprojetekm *Výpočet radonového indexu pozemku aneb Proč měl praotec Čech popojít o pár kilometrů dále.* Z tradičně oblíbených popišme *Základy diagnostiky vysokoteplotního plazmatu na tokamaku GOLEM*, zachyceného na obr. 2. V pondělní části tohoto miniprojektu dostanou účastníci zevrubné vysvětlení, co to je termojaderná fúze, k čemu slouží tokamak a jak ovládat tokamak GOLEM. Poté osadí tokamak jednoduchými diagnostikami a za pomoci webového rozhraní provedou tokamakový experiment, při kterém vytváří vysokoteplotní plazma a měří jeho vlastnosti jako teplotu a hustotu.

Pondělní odpoledne je věnováno přednáškám o vědecké komunikaci, kde se účastníci dozví, jak napsat kvalitní sborníkový příspěvek. Ti, kteří na Týdnu vědy již byli (bývá to čtvrtina až třetina účastníků) si místo toho užívají vědecky popularizační přednášky jako *Jak se scintilátory detekovat ionizující záření? Rychle, účinně a levně* nebo *Po stopách kvantové gravitace.* Pondělní večer je zpravidla věnován kulturnímu programu; v roce 2019 např. šlo o divadelní představení studentů Pražské konzervatoře *Hysterikon.*

Obr. 1: Pevnost Břehyard: měření atmosférického tlaku vodním sloupcem.

Obr. 2: Miniprojekt *Základy diagnostiky vysokoteplotního plazmatu na tokamaku GOLEM.*

Úterý

Úterý je celé věnováno práci na miniprojektech. V již zmiňovaném miniprojektu *Základy diagnostiky vysokoteplotního plazmatu na tokamaku GOLEM* se např. účastníci učí základům programovacího jazyka Python a zpracovávají v něm den předtím naměřená data. Z proudu probíhajícího plazmatem v tokamaku, tzv. napětí na závit, a počátečního tlaku neutrálního plynu spočtou dobu udržení energie, která vyjadřuje kvalitu spoutání plazmatu v tokamaku. Nakonec ověří, zda silnější magnetické pole opravdu plazma poutá lépe.

V úterý v 18.00 nastane první důležitý termín Týdne vědy, a to termín odevzdání několikastránkového sborníkového příspěvku shrnujícího výsledky výzkumu provedeného v rámci miniprojektu. Většina účastníků při této příležitosti zjistí, že i v 2–4členné skupince je vyplodit smysluplný záznam experimentu náročný úkon. Naštěstí mají při psaní plnou podporu vedoucího miniprojektu, který sborníkových příspěvků psal již mnoho a rád se podělí o tipy a triky. Sborníkový příspěvek nejenže navždy zachycuje práci studentů (sborníky jsou dostupné na stránkách Týdne vědy), ale také představuje cennou, ač nemilosrdnou školu vědecké práce.

Středa

Středeční dopoledne je věnováno vědecky popularizačním přednáškám a druhému dílu přednášek o vědecké komunikaci, tentokrát věnovanému kvalitním prezentacím svých výsledků. Po pauze na oběd následují exkurze na různá vědecká pracoviště, jako Protonové centrum, tokamak COMPASS na Ústavu fyziky plazmatu nebo do Thomayerovy nemocnice. Exkurze jsou pravidelně označovány jako jedna z nejzajímavějších částí Týdne vědy, možná proto, že některým účastníkům touto dobou již schází světlo dne.

Ve středu večer se na půdě Břehovky koná diskuzní párty. Studenti FJFI zde předvedou krátkou prezentaci na téma jako *Matematika v kasinu* nebo *Amatéři a profesionálové ve fyzice* a následně moderují diskuzi na toto a mnohá další témata. Některé diskuzní párty se zvrhnou ve vyslýchání přednášejících, jaké je na FJFI studovat a jestli je to dobrý nápad do budoucna. Tím Týden vědy propojuje středoškoláky s vysokoškolským prostředím.

Ve středu ve 20.00 je druhý důležitý termín Týdne vědy, a to termín odevzdání desetiminutové prezentace shrnující výsledky výzkumu při miniprojektu. Jelikož je na prezentace více času a všechny jsou prezentovány před publikem, bývají dobré kvality a zpravidla je na co být hrdý.

Čtvrtek

Čtvrtek je prakticky celý věnován studentské konferenci, zachycené na obr. 3. Jedna po druhé prezentují skupinky výsledky svých miniprojektů, vysvětlují, co se naučili, a varují před tím, co se úplně nepovedlo. Na prezentaci své skupiny se často přijdou podívat i vedoucí miniprojektu. Čtvrtek je proto dnem 15 minut trémy a vybičovaných emocí a po zbytek času ho vyplňuje mírná nuda. Účastníci jsou proto vybízeni, aby dávali dobrý pozor při prezentacích svých kolegů, kriticky o nich přemýšleli a kladli otázky, pokud se jim něco nezdá. I toto je součástí kultury vědeckých konferencí, kde je nejedna přednáška zakončena tak bouřlivou diskuzí, že ji předsedající musí mírným násilím přerušit a poprosit zúčastněné, ať v rozhovoru pokračují během přestávky na kávu.

Obr. 3: Prezentace ve čtvrteční konferenci.

Obr. 4: Kratochvíle ve čtvrtečním kasinu: páka se sázením na výsledek.

Na závěr poněkud suchého čtvrtka přichází nadmíru šťavnatá událost – kasino. Na střeše Břehovky studenti FJFI rozloží ruletu, šipky, petánky a množství dalších mírně až velmi hazardních her. Obr. 4 např. zachycuje zápolení v páce, kde si přihlížející mohou vsadit na výsledek. Účastníci Týdne vědy si za drobné úpisy (např. velmi populární „před držitelem úpisu na ulici třikrát zvolám ‚Korýš byl vzkříšen' ") koupí kapitál krytý Korupční bankou, který mohou v následujících hodinách rozmnožit nebo naopak rozfofrovat. Celý večer je k dispozici raut, jehož tradiční kvalita zaručuje kasinu pozici jedné z nejoblíbenějších částí Týdne vědy pro účastníky a jednoznačně nejoblíbenější části pro organizátory. Zvláště z malých dezertů a košíčků nezbude ani drobek. Kasino končí aukcí úpisů. Jestli však účastníci novému držiteli úpisu splní, k čemu se upsali, je mimo naši kontrolu. V roce 2018 jsem za astronomickou částku vystavila úpis „vypracuji vědeckou analýzu, zda se kakao rozpouští rychleji ve studeném nebo horkém mléce, a její výsledky zašlu organizátorům Týdne vědy". Jsou to tři roky a analýza nikde.

Pátek

Pátek je posledním dnem Týdne vědy. Ráno si žáci na koleji sbalí svých pár švestek a na Břehovku dorazí, stejně jako v neděli, obtíženi zavazadly. Proběhne ještě několik závěrečných prezentací studentské konference, než se hlavní organizátor, Vojtěch Svoboda, se všemi rozloučí a popřeje šťastnou cestu domů. Účastníci se naposledy naobědvají v menze a poté již jsou volní jako ptáci. Během několika dnů jim ještě přijde emailem žádost o vyplnění zpětnovazebné ankety, díky níž máme jakési ponětí, jak Týden vědy vypadá ze strany účastníka a co ještě můžeme zlepšovat.

Závěr

Týden vědy na Jaderce je šestidenní akce pro středoškoláky pořádaná FJFI ČVUT, jejíž účastníci si formou miniprojektů vyzkouší na vlastní kůži jak vědecký výzkum, tak zpracování a publikaci jeho výsledků. Jeho hlavním cílem je přiblížit žákům se zájmem o studium přírodních věd, jak to vypadá a chodí v akademické a vědecké sféře, aby se mohli lépe rozhodnout o své budoucnosti. Druhotným cílem je vytvořit nové vazby: mezi středoškoláky vzájemně, mezi SŠ a VŠ stupněm vzdělání i mezi středoškoláky a výzkumnými ústavy. Někteří účastníci Týdne vědy pokračují ve studiu na FJFI, jiní na Univerzitě Karlově a další si vyberou jiný obor než přírodní vědy. Všechny dveře jsou otevřené!

Pokud vás Týden vědy na Jaderce zaujal a rádi byste se zapojili jako účastník, vedoucí miniprojektu, přednášející nebo vedoucí exkurze, navštivte stránky `tydenvedy.fjfi.cvut.cz` nebo můžete napsat na adresu `tydenvedy@fjfi.cvut.cz`. Budeme se na vás těšit v ročníku 2021!

Den lékařským fyzikem

Tereza Hanušová, FJFI ČVUT v Praze a Thomayerova nemocnice

Začnu stejně, jako se dnes začíná ve všech médiích, ačkoliv se může zdát, že to s problematikou nesouvisí: koronavirus. Byla jsem na očkování. U nás v nemocnici, jako zaměstnanec, zdravotník. Sestra se zeptala: „A na jaké pozici u nás pracujete?“ Já na to: „Jsem radiologický fyzik tady na onkologii.“ Sestra mě málem vyhodila z ordinace. Nevěřila, že by v její nemocnici mohl pracovat fyzik, natož jaderný.

Právě proto pořádáme akci *Den lékařským fyzikem* (DLF). Aby se veřejnost – a zejména studenti středních škol – dozvěděli, že takové povolání existuje, že v nemocnicích pracují i jaderní fyzikové. A to konkrétně ve třech oborech, kde by se bez nich neobešli: rentgenová diagnostika, nukleární medicína a radioterapie. Na starost mají přístroje, které využívají ionizující záření ke snímkování pacientů nebo k jejich léčbě. Zabývají se radiační ochranou pacientů, personálu i veřejnosti. A v neposlední řadě spolupracují s lékaři, aby diagnostický obraz či léčba pacienta byly optimální a bezchybné. Radiologický fyzik je odborníkem v jaderné fyzice a zároveň má i zdravotnické vzdělání. Řadí se do kategorie nelékařský zdravotnický pracovník.

Není však potřeba působit právě v nemocnici. Jeden kolega prohlásil, že radiologičtí fyzikové v České republice by naplnili právě jeden autobus (nebyl asi daleko od pravdy). Tedy pracovní pozice čekají na absolventy s otevřenou náručí. Jak v komerční sféře (výrobci urychlovačů, gama kamer, rentgenů, detektorů. . .), tak ve výzkumu, vzdělávání nebo ve státní správě. Pokud toužíte být lékařem, ale při odběru krve omdléváte (stejně jako já), radiologická fyzika je tu právě pro vás. Pokud chcete zastávat čtyři nejprestižnější povolání v očích Čechů (lékař, vědec, zdravotní sestra, učitel na vysoké škole), a to v jedné osobě, stačí se stát radiologickým fyzikem.

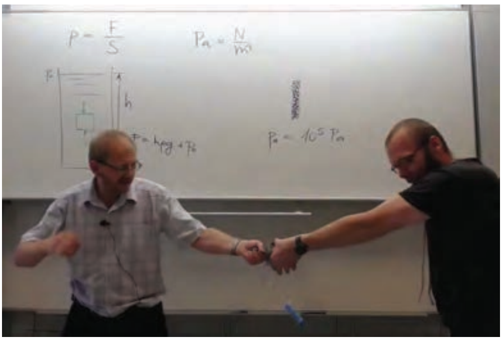
Nejbližší termín DLF je plánován na 2. června. Zda bude v prezenční formě nebo online, to je zatím otázkou. Obvykle se program dne skládá z přednášek na Fakultě jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze, z praktických laboratorních úloh, kde studenti sami provedou měření či plánování léčby, a z exkurzí do nemocnic na špičková pracoviště v Praze. Každý student si sám předem volí praktické cvičení a exkurzi dle zájmu.

V tomto je online forma této akce výhodou – nezmeškáte žádné měření ani exkurzi, můžete se podívat na vše. Kromě přednášek se i v distanční formě zúčastníte virtuálních exkurzí a demonstrací měření, na závěr je pak živá diskuze s přednášejícími a fyziky z praxe. Proto do budoucna plánujeme ponechat dvojí podobu této akce – jak v plně prezenční formě, tak pro zájemce v částečně či plně distančním podání. Pokud to letos nevyjde naživo, nezoufejte, DLF běží každý rok v lednu i v červnu. Registrace je možná na stránkách `https://dlf.fjfi.cvut.cz/`.

Zajímavá fyzika

Tomáš Tyc, Přírodovědecká fakulta, Masarykova univerzita v Brně

Zajímavá fyzika [1] je předmět, který na Přírodovědecké fakultě Masarykovy univerzity v Brně [2] vyučují prof. Tomáš Tyc [3] a dr. Jiří Bartoš [4]. Byl zaveden v roce 2000 a jeho cílem je ukázat, že v obyčejném životě se doslova na každém kroku setkáváme s velmi zajímavými věcmi a jevy, které nám může pomoci objasnit právě fyzika. Pro mnohé lidi je fyzika jen snůškou vzorečků a pouček bez vztahu k realitě. V našich přednáškách se snažíme ukázat, že ve skutečnosti je vztah fyziky ke každodenní realitě velmi blízký a že nám fyzika umožňuje lépe pochopit svět bezprostředně kolem nás. Na přednáškách předvádíme spoustu pokusů, snažíme se je srozumitelně vysvětlit a ilustrovat na nich fyzikální principy, kterými se řídí svět kolem nás. V tomto čísle časopisu vám nabízíme dvě témata s odkazy na videa.



Tlak kolem nás: Co je to vlastně tlak? Jaké jsou projevy atmosférického tlaku? Dá se nějak jednoduše zvážit celá zemská atmosféra? V přednášce si na tyto otázky odpovíme a předvedeme si řadu pokusů, včetně názorné ilustrace tlaku vzduchu pomocí přehazování kanystru s vodou či aplikací Bernoulliho a Magnusova efektu.

Odkaz: `https://is.muni.cz/el/sci/podzim2020/F1520/um/zajfyz-01-06oct2020-tlak.mp4`

Fyzika v kuchyni: V této přednášce si ukážeme řadu situací v kuchyni, při nichž se můžeme setkat s fyzikou. Vysvětlíme si, jak fungují kvasnice, proč běhají kapky vody po žhavé plotně, jak funguje termoska či tlakový hrnec, co se děje v mikrovlnné troubě a proč v ní bývá otočný talíř, jak poznáme bez rozbití vařené vajíčko od syrového a proč, co je to osmóza atd. Výklad doprovodíme řadou pěkných pokusů.

Odkaz: `https://is.muni.cz/el/sci/podzim2020/F1520/um/zajfyz-02-13oct2020-fyzika_v_kuchyni.mp4`

Literatura

[1] PřF:F1520 Zajímavá fyzika – Informace o předmětu:
`https://is.muni.cz/predmet/sci/F1520?lang=cs&obdobi=7583`

[2] Přírodovědecká fakulta Masarykovy univerzity:
`https://www.sci.muni.cz/`

[3] prof. Mgr. Tomáš Tyc, Ph.D.:
`https://is.muni.cz/osoba/18319?lang=cs`

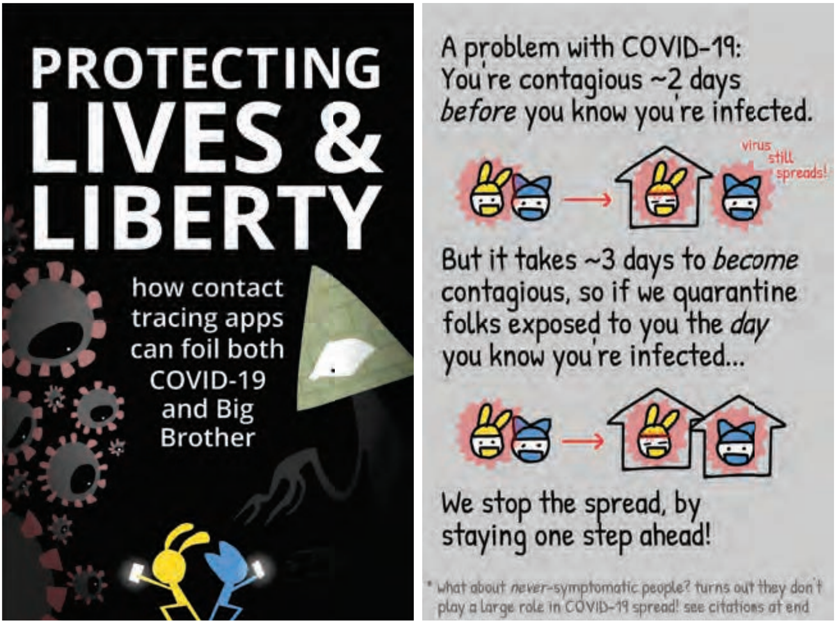
[4] Mgr. Jiří Bartoš, PhD.:
`https://is.muni.cz/osoba/15215?lang=cs`

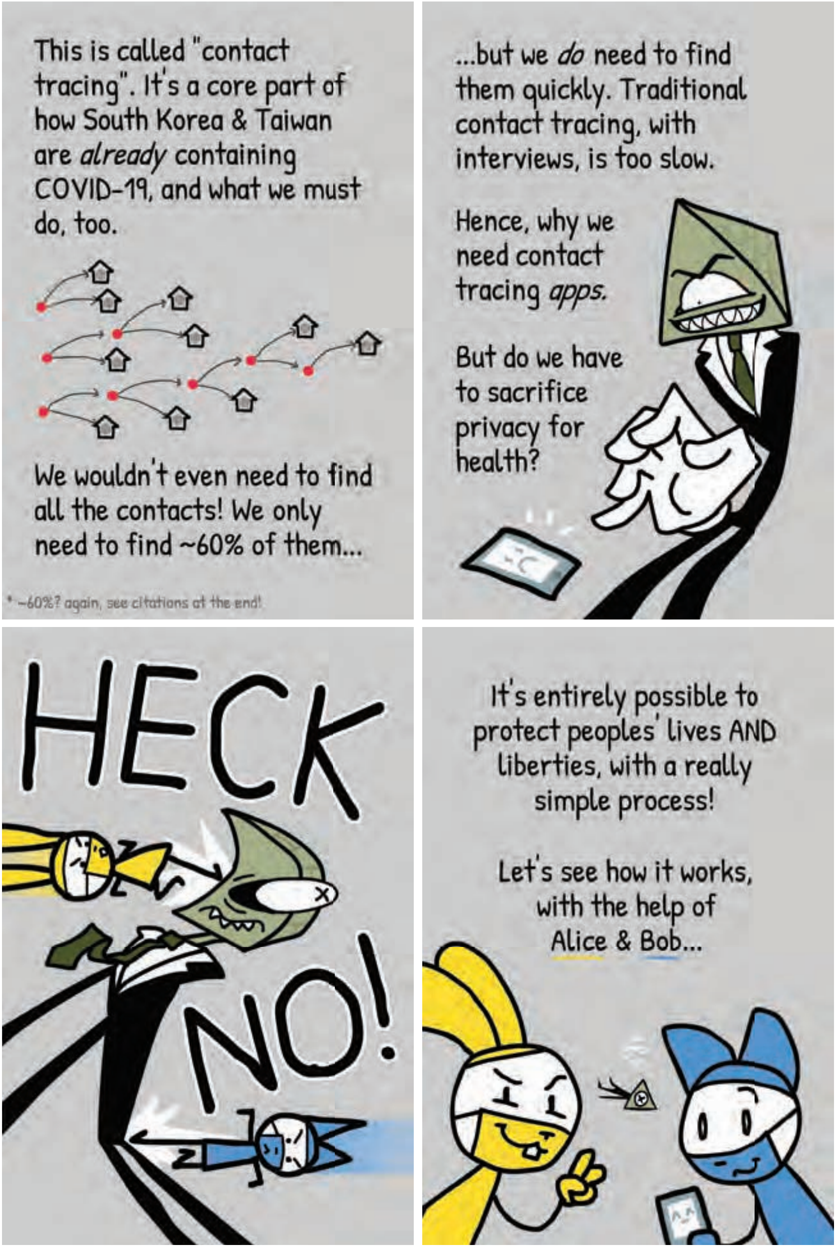
Chráníme zdraví i svobodu – jak mohou aplikace na dohledávání kontaktů zastavit COVID-19 i Velkého bratra

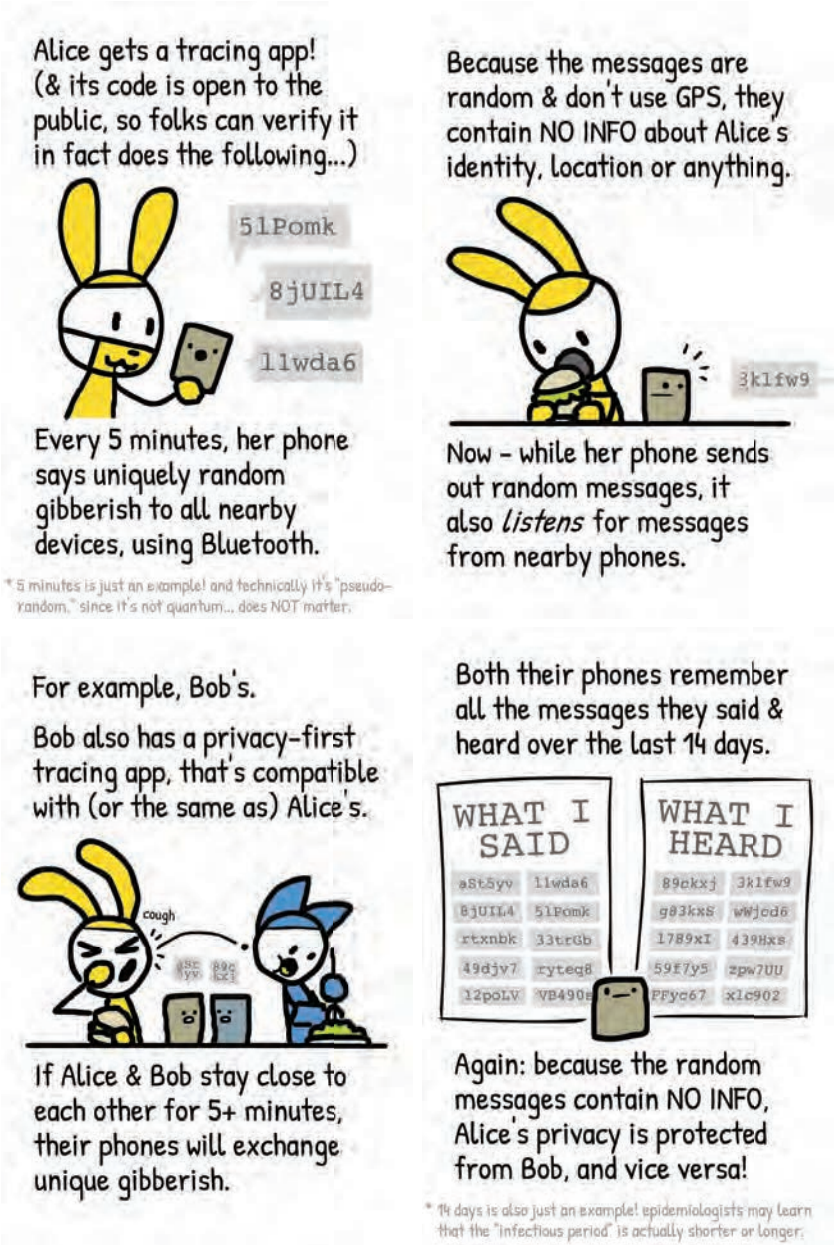
Nicky Case, M. Salanthé (epidemiologie), C. Troncoso (bezpečnost)

Původní komiks je ke stažení na: `https://ncase.me/contact-tracing/`
Český překlad: `https://eduardsubert.com/2020/05/21/chranime-zdravi-i-svobodu/`

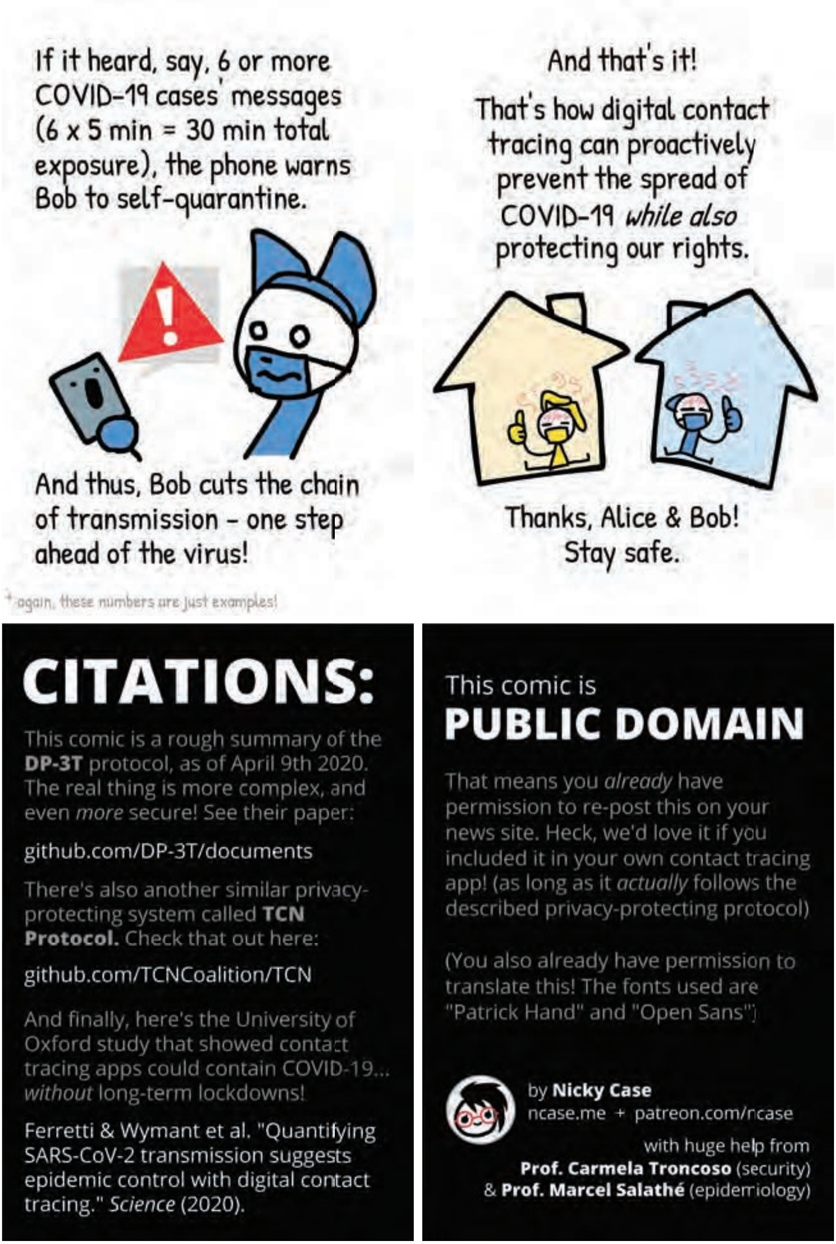
Slovníček: to foil = zmařit, odvrátit; contagious = nakažlivý; spread = šíření; one step ahead = o krok napřed; tracing = sledování, trasování; to sacrifice = obětovat; gibberish = hatmatilka; suffer in vain = marně trpět; revealing = odhalující; exposure = vystavení




This is called "contact tracing". It's a core part of how South Korea & Taiwan are *already* containing COVID-19, and what we must do, too.
We wouldn't even need to find all the contacts! We only need to find ~60% of them...
* ~60%? again, see citations at the end!
...but we *do* need to find them quickly. Traditional contact tracing, with interviews, is too slow.
Hence, why we need contact tracing *apps*.
But do we have to sacrifice privacy for health?
HECK NO!
It's entirely possible to protect peoples' lives AND liberties, with a really simple process!
Let's see how it works, with the help of Alice & Bob...


Alice gets a tracing app!
(& its code is open to the public, so folks can verify it in fact does the following...)
51Pomk
8jUIL4
11wda6
Every 5 minutes, her phone says uniquely random gibberish to all nearby devices, using Bluetooth.
* 5 minutes is just an example! and technically it's "pseudo-random," since it's not quantum... does NOT matter.
Because the messages are random & don't use GPS, they contain NO INFO about Alice's identity, location or anything.
3k1fw9
Now – while her phone sends out random messages, it also *listens* for messages from nearby phones.
For example, Bob's.
Bob also has a privacy-first tracing app, that's compatible with (or the same as) Alice's.
cough
If Alice & Bob stay close to each other for 5+ minutes, their phones will exchange unique gibberish.
Both their phones remember all the messages they said & heard over the last 14 days.
WHAT I SAID
aSt5yv 11wda6
8jUIL4 51Pomk
rtxnbk 33trGb
49djv7 ryteq8
12poLV
WHAT I HEARD
89ckxj 3k1fw9
g83kxS wWjcd6
1789xI 439Hxs
59f7y5 zpw7UU
FFyc67 x1c902
Again: because the random messages contain NO INFO, Alice's privacy is protected from Bob, and vice versa!
* 14 days is also just an example! epidemiologists may learn that the "infectious period" is actually shorter or longer.


The next day, Alice develops a dry cough and fever.
Alice gets tested.
Alice has COVID-19.
It is not a good day for Alice.
But she shan't suffer in vain! Alice uploads her "What I Said" messages to a hospital database, using a one-time passcode given by her doctor. (The code is to prevent spam)
WHAT I SAID
Alice can also *hide* messages from times she wants to keep private, like evenings at home!
The database stores Alice's gibberish:
WHAT COVID-19 CASES SAID
Again: the random messages give the hospital NO INFO on where Alice was, who she was with, what they were doing, or even *how many* people Alice met! It's meaningless to the hospital...
* different countries' hospitals could exchange messages, but because they contain no info, no privacy is lost.
...but not to Bob!
WHAT COVID-19 CASES SAID
WHAT I HEARD
Bob's phone often checks the hospital's list of random messages from COVID-19 cases, and see if it "heard" any of them from nearby phones in the last 14 days.
(The gibberish gives Bob NO OTHER PERSONAL INFO.)
* the real DP-3T protocol is even MORE secure! it uses a "cuckoo filter" so phones know ONLY the covid-19 messages they heard, without revealing ALL covid-19 messages.


If it heard, say, 6 or more COVID-19 cases' messages (6 x 5 min = 30 min total exposure), the phone warns Bob to self-quarantine.
And thus, Bob cuts the chain of transmission – one step ahead of the virus!
* again, these numbers are just examples!
And that's it!
That's how digital contact tracing can proactively prevent the spread of COVID-19 *while also* protecting our rights.
Thanks, Alice & Bob! Stay safe.
CITATIONS:
This comic is a rough summary of the **DP-3T** protocol, as of April 9th 2020. The real thing is more complex, and even *more* secure! See their paper:
github.com/DP-3T/documents
There's also another similar privacy-protecting system called **TCN Protocol.** Check that out here:
github.com/TCNCoalition/TCN
And finally, here's the University of Oxford study that showed contact tracing apps could contain COVID-19... *without* long-term lockdowns!
Ferretti & Wymant et al. "Quantifying SARS-CoV-2 transmission suggests epidemic control with digital contact tracing." *Science* (2020).
This comic is
PUBLIC DOMAIN
That means you *already* have permission to re-post this on your news site. Heck, we'd love it if you included it in your own contact tracing app! (as long as it *actually* follows the described privacy-protecting protocol)
(You also already have permission to translate this! The fonts used are "Patrick Hand" and "Open Sans")
by **Nicky Case**
ncase.me + patreon.com/ncase
with huge help from
Prof. Carmela Troncoso (security)
& **Prof. Marcel Salathé** (epidemiology)

☛ Objednávky časopisu ☚

Od roku 2020 vyřizuje objednávky časopisu
Rozhledy matematicko-fyzikální
společnost

MediaCall, s. r. o.
Vídeňská 546/55
639 63 Brno
tel: +420 532 165 165
e-mail: export@mediacall.cz

Objednávky lze realizovat i přes web:

www.zahranicnitisk.com

Tato informace se netýká členů JČMF. Pro ně vyřizuje objednávky předplatného sekretariát JČMF a předplatné je hrazeno spolu s členskými příspěvky.

Elektronická verze čísla 1/2021 je ke stažení na adrese:
https://rozhledy.jcmf.cz/wp-content/uploads/RMF-96-1.pdf
heslo: Krte4ek

ROZHLEDY
matematicko-fyzikální
Ročník 96 (2021), číslo 1

OBSAH

Pokyny pro autory

Příspěvky dodávejte na adresu redakce v elektronické podobě. Nejlépe napsané ve formátu LaTeX, přijatelný je i formát PlainTeX, je akceptovatelný i text připravený editorem Word či podobným.

Pokud jde o obrázky, je žádoucí, aby byly připraveny v reprodukovatelné podobě. Každý obrázek nechť je v samostatném souboru, nejlépe ve formátu eps nebo pdf. Přípustná je též bitmapa v dostatečném rozlišení.

Ke každému zasílanému příspěvku (ne u soutěží, zpráv a recenzí) přiložte krátkou anotaci v českém jazyce. Dále je žádoucí, aby u každého příspěvku byla uvedena literatura, na kterou je v textu odkazováno.