# ROZHLEDY

## MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ

ČASOPIS PRO ZÁJEMCE O MATEMATIKU, FYZIKU A INFORMATIKU

ROČNÍK 96 (2021) • ČÍSLO 2

Vydává Jednota českých matematiků a fyziků
tel.: 222 090 708-9, e-mail: jcmf@math.cas.cz
za podpory MFF UK Praha a FJFI ČVUT Praha

Vycházejí 4 čísla v kalendářním roce

Obálku navrhl Bohuslav Šír

Sazbu programem TEX připravil RNDr. Miloslav Závodný

Adresa redakce: MFF UK, V Holešovičkách 2, 182 00 Praha 8 – Troja
e-mail: rozhledy@jcmf.cz

Internetové stránky časopisu: https://rozhledy.jcmf.cz/

Vytiskla Tiskárna Pohlline, Zálesí 1126/88, 142 00 Praha 4

Distribuci pro předplatitele provádí v zastoupení vydavatele
MediaCall, s. r. o.
Vídeňská 546/55, 639 63 Brno
tel.: +420 532 165 165, e-mail: export@mediacall.cz
web: www.zahranicnitisk.com

ISSN 0035-9343 MK ČR E4691



---

## Redakční rada

# Goniometrické nerovnosti

*Pavel Pokorný, VŠCHT Praha*

Ukážeme si zobecnění goniometrických nerovností z článků [1] a [3] na případ s libovolným počtem sčítanců. Naučíme se využívat konkávnost funkce a ukážeme si, jak dokázat nerovnost převedením rozdílu levé a pravé strany na součin. Vedle odvozených a dokázaných vztahů budou pro nás zajímavé i způsoby, jakými tyto výsledky dostáváme.

## 1. Úvod

V článku [1] (viz též [2]) je uveden elementární důkaz čtyř goniometrických nerovností

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \leq \frac{3\sqrt{3}}{2} \tag{1}$$

$$\sin\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\gamma}{2} \leq \frac{3}{2} \tag{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \leq \frac{3}{2} \tag{3}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\beta}{2} + \cos\frac{\gamma}{2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}, \tag{4}$$

které platí pro vnitřní úhly libovolného trojúhelníka, tedy pro všechna kladná reálná čísla $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ splňující vztah $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, měříme-li úhly v radiánech.

V článku [3] jsme zobecnili výraz na levé straně nerovností (1) a (2) na tvar

$$\sin(p\alpha) + \sin(p\beta) + \sin(p\gamma)$$

a podobně výraz na levé straně nerovností (3) a (4) na tvar

$$\cos(p\alpha) + \cos(p\beta) + \cos(p\gamma).$$

Dále jsme provedli numerický experiment, kdy jsme pro různé hodnoty parametru $p$, $0 \leq p \leq 1$, volili velké množství hodnot argumentů $\alpha$, $\beta$

a $\gamma$ splňující podmínku $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ a hledali jsme největší a nejmenší hodnotu součtu sinů a kosinů. Minimum a maximum jsme pak vynesli do grafu v závislosti na parametru $p$ a vyslovili tuto hypotézu:

Je-li

$$p \in \langle 0,1\rangle,\ \alpha \geq 0,\ \beta \geq 0,\ \gamma \geq 0,\ \alpha+\beta+\gamma=\pi,$$

potom platí

$$\sin(p\pi) \leq \sin(p\alpha)+\sin(p\beta)+\sin(p\gamma) \leq 3\sin\frac{p\pi}{3} \tag{5}$$

$$2+\cos(p\pi) \leq \cos(p\alpha)+\cos(p\beta)+\cos(p\gamma) \leq 3\cos\frac{p\pi}{3}. \tag{6}$$

Maxima nastávají pro $\alpha=\beta=\gamma=\frac{\pi}{3}$, minima nastávají, je-li jeden z úhlů roven $\pi$ a ostatní dva úhly jsou nulové.

## 2. Zobecnění

Položme si otázku: Jak se změní maximum a minimum součtu sinů a kosinů, změníme-li počet sčítanců?

Označíme-li $x_1=p\alpha$, $x_2=p\beta$, $x_3=p\gamma$, pak

$$x_1+x_2+x_3=p(\alpha+\beta+\gamma)=p\pi$$

a můžeme levou nerovnost v (5) napsat ve tvaru

$$\sin\sum_{i=1}^{n} x_i \leq \sum_{i=1}^{n}\sin x_i, \tag{7}$$

levou nerovnost v (6) ve tvaru

$$n-1+\cos\sum_{i=1}^{n} x_i \leq \sum_{i=1}^{n}\cos x_i, \tag{8}$$

pravou nerovnost v (5) ve tvaru

$$\sum_{i=1}^{n}\sin x_i \leq n\sin\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \tag{9}$$

a pravou nerovnost v (6) ve tvaru

$$\sum_{i=1}^{n} \cos x_i \leq n \cos \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i. \tag{10}$$

V tomto článku budeme vždy uvažovat

$$x_i \geq 0.$$

Jak ukážeme dále, nerovnosti (7)–(10) platí pro všechna přirozená $n$ za určitých podmínek, které ještě upřesníme.

Pro $n = 1$ se součet zredukuje na jediný člen, platnost vztahů (7)–(10) je zřejmá, nastává totiž rovnost, dokonce pro všechna $x_1 \in \mathbb{R}$.

# 3. Dolní odhady

Uvažujme nejprve $n = 2$ a zkoumejme dolní odhad součtu sinů

$$\sin(x_1 + x_2) \leq \sin x_1 + \sin x_2.$$

Tento vztah odvodíme spolu s podmínkou, za které platí, tím, že rozdíl pravé a levé strany převedeme na součin. Ze součinu bude lépe vidět, kdy je kladný, tedy kdy platí ostrá nerovnost, a kdy prochází nulou, tedy kdy nerovnost přestává platit, tedy jaké jsou hranice oblasti platnosti nerovnosti. Konkrétně dostaneme (podrobnosti jsou uvedeny v dodatku)

$$\sin x_1 + \sin x_2 - \sin(x_1 + x_2) = 4 \sin \frac{x_1}{2} \sin \frac{x_2}{2} \sin \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

Součin je výhodný, protože z něj lze snadno určit, kdy je rovný nule. To nastane v těchto třech případech:

1. je-li $\sin \frac{x_1}{2} = 0$, pak $\frac{x_1}{2} = k\pi$, $x_1 = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$,

2. je-li $\sin \frac{x_2}{2} = 0$, pak $x_2 = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$,

3. je-li $\sin \frac{x_1 + x_2}{2} = 0$, pak $x_1 + x_2 = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

To jsou tři ekvidistantní soustavy přímek v rovině (přímky rovnoběžné s osou $x$, rovnoběžné s osou $y$ a přímky klesající pod úhlem 45°). Tyto přímky rozdělí rovinu na pravoúhlé trojúhelníky. Nás zajímá ten trojúhelník, který je nejblíže počátku v prvním kvadrantu, tedy trojúhelník ohraničený přímkami

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_1 + x_2 = 2\pi.$$

Na hranici tohoto trojúhelníku je rozdíl

$$\sum_{i=1}^{n} \sin x_i - \sin \sum_{i=1}^{n} x_i$$

nulový. Uvnitř je kladný, protože je to součin čísla 4 a tří kladných výrazů. Tedy pro $n = 2$ platí: je-li

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_1 + x_2 \leq 2\pi$$

pak

$$\sin \sum_{i=1}^{n} x_i \leq \sum_{i=1}^{n} \sin x_i.$$

Úplnou indukcí (viz dodatek) snadno dokážeme, že toto platí pro všechna přirozená $n$ za podmínky

$$x_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{n} x_i \leq 2\pi.$$

Pro minimum součtu kosinů můžeme postupovat obdobně. Opět si upravíme rozdíl pravé a levé strany dokazované nerovnosti na součin. Pro $n = 2$ to bude

$$\cos x_1 + \cos x_2 - (1 + \cos(x_1 + x_2)) = 4 \sin \frac{x_1}{2} \sin \frac{x_2}{2} \cos \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

Ten bude nulový opět na přímkách, které rozdělí rovinu na trojúhelníky. Nás zajímá ten nejblíže počátku v prvním kvadrantu, tedy trojúhelník ohraničený přímkami

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_1 + x_2 = \pi.$$

Vidíme, že tento trojúhelník je menší než oblast platnosti dolního odhadu pro součet sinů. A úplnou indukcí pak zobecníme na případ $n$ sčítanců a dostaneme

$$n - 1 + \cos \sum_{i=1}^{n} x_i \leq \sum_{i=1}^{n} \cos x_i$$

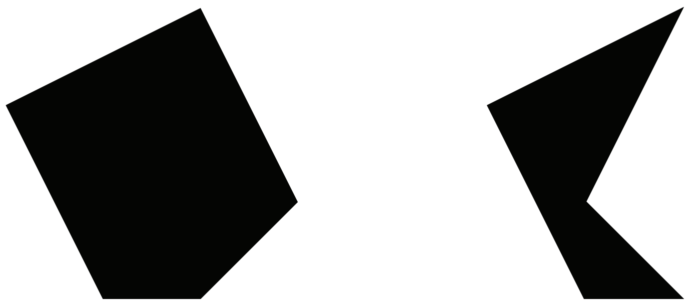
za podmínky

$$x_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{n} x_i \leq \pi.$$

# 4. Horní odhady

## 4.1. Konkávní funkce

Dokázat, že součet sinů příp. kosinů bude maximální, jestliže všechny hodnoty argumentů (z jistého intervalu) budou stejné, lze různými způsoby. Můžeme využít skutečnosti, že funkce sinus je na intervalu $\langle 0, \pi \rangle$ konkávní. Pojďme se tedy podrobněji podívat na vlastnost, která se nazývá konkávní a konvexní. Na obr. 1 vidíme dva mnohoúhelníky. Ten vlevo je konvexní, česky vypouklý nebo vypuklý. Žádný jeho vnitřní úhel není větší než 180°, mnohoúhelník leží celý v jedné polorovině vymezené přímkou určenou libovolnou jeho stranou. Naopak ten vpravo je nekonvexní, česky vydutý. Velice neodborný popis by mohl znít, že je promáčklý dovnitř.



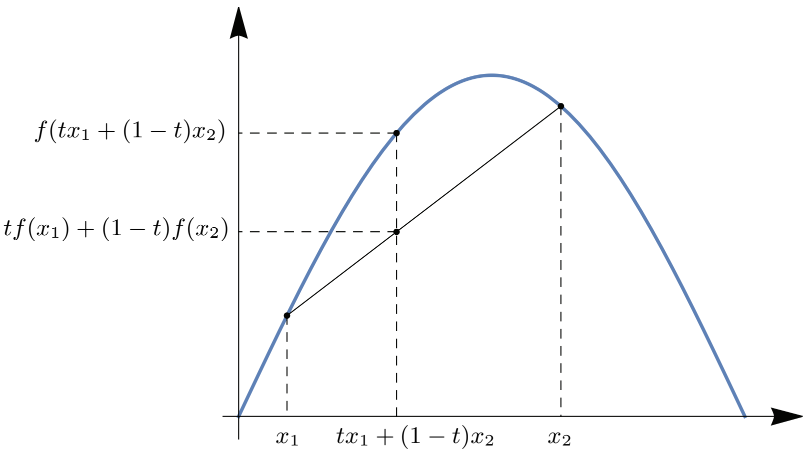
Obr. 1: Mnohoúhelník vlevo je konvexní, mnohoúhelník vpravo je nekonvexní

Pojmy konvexní a naopak konkávní zavádíme i pro grafy funkcí a odtud pro funkce samotné. Samozřejmě záleží na tom, z které strany se na graf funkce díváme. Uvažujeme část roviny nad grafem funkce. Tak např. graf funkce $y = x^2$, tedy parabolu ve tvaru jamky nazýváme konvexní, protože část roviny nad grafem není promáčklá dovnitř. Naopak graf funkce $y = -x^2$, tedy parabolu ve tvaru kopečku nazýváme konkávní.

Jako užitečnou představu uvažujme stopu motocyklisty po zasněženém parkovišti. Když má řidítka stočená doprava, bude zatáčet doprava. Tuto vlastnost křivky nazveme konkávní. Zde mlčky předpokládáme, že stopa motocyklisty je graf funkce, který kreslíme zleva doprava. Když jsou řidítka stočená doleva, bude naopak zatáčet doleva a tuto vlastnost nazveme konvexní.

Body, kde křivka přechází z konvexní do konkávní nebo naopak, nazýváme inflexní body. Toto slovo je složené z předpony in, která zde znamená opak, nepřítomnost, a ze slova flexe, které zde znamená ohyb. Tedy slovo inflexe bychom mohli volně přeložit jako bod, kde není ohyb. To nastane, pokud bude náš motocyklista otáčet řidítky zleva doprava (nebo obráceně). Pak v jednom okamžiku bude mít řidítka rovně a na jeho stopě vznikne inflexní bod.

Pro definici pojmu konkávní použijeme obr. 2. Zde vidíme graf funkce $f(x) = \sin(x)$ na intervalu $\langle 0, \pi\rangle$. Všimněte si, že když zvolíme libovolná dvě čísla $x_1 < x_2$ v tomto intervalu a spojíme body $(x_1, f(x_1))$ a $(x_2, f(x_2))$ úsečkou, tak body grafu $(x, f(x))$ leží nad touto úsečkou (pro argumenty $x_1 < x < x_2$).




Obr. 2: Graf konkávní funkce vypadá jako čepička (anglicky cap like). Spojíme-li dva body na grafu úsečkou, pak graf leží nad touto úsečkou.

Jak to lze zapsat? Číslo $x$ mezi čísly $x_1 < x_2$ lze zapsat

$$x = tx_1 + (1-t)x_2, \quad t \in \langle 0, 1\rangle.$$

Zde číslo $t$ je parametr, který určuje, jestli bude $x$ blíže $x_1$ (pro $t$ blízké jedné) nebo blíže $x_2$ (pro $t$ blízké nule). Je to vážený průměr hodnot $x_1$ a $x_2$, kde vahami jsou koeficienty $t$ a $1-t$. Bod na grafu má souřadnice

$$(x, f(x)) = (tx_1 + (1-t)x_2, f(tx_1 + (1-t)x_2)).$$

A bod na úsečce spojující body $(x_1, f(x_1))$ a $(x_2, f(x_2))$ má souřadnice

$$(tx_1 + (1-t)x_2, tf(x_1) + (1-t)f(x_2)).$$

Slovy bychom tedy mohli konkávní funkci popsat tak, že funkční hodnota průměru je větší než průměr funkčních hodnot.

To platí pro dva argumenty. Označíme-li $t_1 = t$, $t_2 = 1-t$, můžeme psát

$$t_1 f(x_1) + t_2 f(x_2) \le f(t_1 x_1 + t_2 x_2).$$

Úplnou indukcí lze dokázat, že odtud pro $n$ argumentů za podmínky

$$\sum_{i=1}^{n} t_i = 1, \quad t_i \ge 0$$

plyne vztah

$$\sum_{i=1}^{n} t_i f(x_i) \le f\left(\sum_{i=1}^{n} t_i x_i\right).$$

To je známá Jensenova nerovnost, viz. např. [4].

Volíme-li $t_i = \frac{1}{n}$, dostaneme pro $f(x) = \sin(x)$

$$0 \le x_i \le \pi \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \sin x_i \le n \sin \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i, \tag{11}$$

tedy vztah podobný vztahu (9), zde ovšem již s konkrétními postačujícími podmínkami. Tyto podmínky ještě rozšíříme. Zde požadujeme $0 \le x_i \le \pi$, protože na tomto intervalu je funkce sinus konkávní. To je jednak vidět z grafu. Vrátíme-li se k našemu přirovnání k motocyklistovi, tato část grafu funkce sinus je pravotočivá. Také to lze zdůvodnit tak, že body grafu leží nad sečnou, protože směrnice tečny je klesající, protože druhá derivace je záporná.

A pro $f(x) = \cos(x)$ dostaneme

$$0 \leq x_i \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \cos x_i \leq n \cos \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i, \tag{12}$$

vztah podobný vztahu (10), zde ovšem opět s postačujícími podmínkami. Mohli bychom požadovat obecnější podmínku

$$-\frac{\pi}{2} \leq x_i \leq \frac{\pi}{2},$$

protože na tomto intervalu je funkce kosinus konkávní a to je dostatečná podmínka pro použití Jensenovy nerovnosti. V dalším textu i tuto podmínku rozšíříme směrem do kladných hodnot.

Někdy pracujeme s konvexními a konkávními útvary, i když používáme jiné označení. Např. ve fotografii se vyskytuje optická vada objektivu, nazývaná soudkové zkreslení (anglicky barrel distorsion), kdy jsou původně rovné hrany obdélníku vybouleny ven. Opakem je poduškové zkreslení (anglicky pincushion distorsion), kdy jsou hrany obdélníku prohnuté dovnitř a vznikne nekonvexní množina.

## 4.2. Převod rozdílu na součin pro maximum sinů

Podobně jako pro dolní odhad i zde, pro horní odhad součtu sinů s výhodou použijeme převod rozdílu pravé a levé strany na součin. Pro $n = 2$ chceme dokázat nerovnost

$$\sin x_1 + \sin x_2 \leq 2 \sin \frac{x_1 + x_2}{2}$$

a odvodit podmínky, za kterých platí. Převedeme rozdíl pravé a levé strany na součin

$$2 \sin \frac{x_1 + x_2}{2} - (\sin x_1 + \sin x_2) = 4 \sin \frac{x_1 + x_2}{2} \sin^2 \frac{x_1 - x_2}{4},$$

abychom zjistili, kdy je kladný a kdy prochází nulou. Tento výraz bude nulový v těchto dvou případech.

1. Pro

$$\sin \frac{x_1 + x_2}{2} = 0.$$

V tomto případě

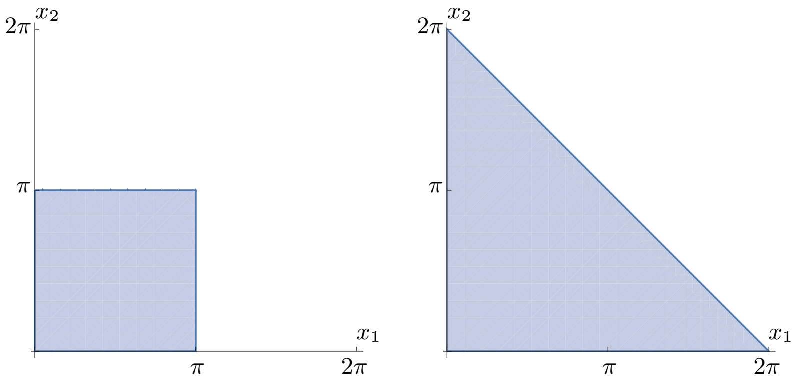
$$x_1 + x_2 = 2k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}.$$

To je soustava ekvidistantních klesajících přímek v rovině $x_1$-$x_2$. Tyto přímky rozdělují rovinu do pásů, ve kterých je rozdíl pravé a levé strany střídavě kladný (nerovnost platí) a záporný (nerovnost neplatí). Nás zajímá oblast platnosti v prvním kvadrantu nejblíže počátku. Spolu s podmínkami $0 \leq x_1$ a $0 \leq x_2$ nás zajímá nejvíce přímka $x_1 + x_2 = 2\pi$, protože tyto přímky ohraničují trojúhelník, na kterém platí studovaná nerovnost.

2. Součin bude dále nulový pro

$$\sin^2 \frac{x_1 - x_2}{4} = 0.$$

Tedy pro $x_1 - x_2 = 4k\pi$. To je opět soustava ekvidistantních přímek tentokráte rostoucích. Pro nás bude nejzajímavější přímka $x_1 = x_2$. Na této přímce je součin nulový, tedy bude nulový i rozdíl pravé a levé strany studované nerovnosti. Tedy pro $x_1 = x_2$ nerovnost platí, nastává rovnost, dokonce pro všechna $x_1 \in \mathbb{R}$. Protože je zde ale sinus ve druhé mocnině, nebude nikdy záporný a nenaruší platnost nerovnice, tedy neovlivní hranici platnosti vztahu.




Obr. 3: Vlevo: oblast platnosti horního odhadu součtu sinů odvozená z Jensenovy nerovnosti využitím konkávnosti funkce sinus na intervalu $\langle 0; \pi\rangle$. Vpravo: oblast platnosti odvozená převodem rozdílu pravé a levé strany na součin je větší.

## 4.3. Převod rozdílu na součin pro maximum kosinů

Podobně jako pro maximum sinů, i pro maximum kosinů nejprve pro $n = 2$ dokážeme nerovnost

$$\cos x_1 + \cos x_2 \leq 2\cos\frac{x_1 + x_2}{2}$$

tak, že rozdíl pravé a levé strany převedeme na součin

$$2\cos\frac{x_1 + x_2}{2} - \cos x_1 - \cos x_2 = 4\cos\frac{x_1 + x_2}{2}\sin^2\frac{x_1 - x_2}{4}.$$

Postupem obdobným případu pro siny dostaneme, že na přímce $x_1 = x_2$ nerovnost platí, protože platí rovnost, dokonce pro všechna $x_1 \in \mathbb{R}$. A přímka

$$x_1 + x_2 = \pi$$

ohraničuje spolu s osami trojúhelník v prvním kvadrantu, kde platí nerovnost. Tento trojúhelník je opět větší než oblast platnosti ve tvaru čtverce o straně $\frac{\pi}{2}$, kterou jsme dostali použitím Jensenovy nerovnosti z konkávnosti funkce kosinus.

## 4.4. Průměrování pro více sčítanců

Když se nám nepodaří pro $n = 3$ převést rozdíl pravé a levé strany na součin, jako se nám to podařilo pro $n = 2$, ani použít úplnou indukci, jako se nám to podařilo pro dolní odhad, můžeme přesto použít výsledek odvozený pro $n = 2$ a odvodit závěry i pro $n = 3$ a vyšší hodnoty metodou, kterou bychom mohli nepřesně nazvat průměrování.

Víme, že platí

$$x_1 + x_2 \leq 2\pi \Rightarrow \sin x_1 + \sin x_2 \leq 2\sin\frac{x_1 + x_2}{2}. \tag{13}$$

Dále platí (za stálého předpokladu $x_i \geq 0$): jestliže

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 2\pi,$$

pak rozhodně také platí

$$x_1 + x_2 \leq 2\pi, \quad x_2 + x_3 \leq 2\pi, \quad x_3 + x_1 \leq 2\pi.$$

Tedy můžeme v součtu

$$\sin x_1 + \sin x_2 + \sin x_3$$

vybrat vždy dva ze tří sčítanců a použít na ně odhad (13) a dostaneme

$$\begin{aligned}
\sin x_1 + \sin x_2 + \sin x_3 \;&\leq\; 2\sin\frac{x_1+x_2}{2} + \sin x_3\\
\sin x_1 + \sin x_2 + \sin x_3 \;&\leq\; 2\sin\frac{x_2+x_3}{2} + \sin x_1\\
\sin x_1 + \sin x_2 + \sin x_3 \;&\leq\; 2\sin\frac{x_3+x_1}{2} + \sin x_2.
\end{aligned}$$

Nyní tyto tři nerovnice sečteme, vydělíme třemi, odečteme průměr sinů, vydělíme zlomkem $\frac{2}{3}$ a dostaneme

$$\sin x_1 + \sin x_2 + \sin x_3 \leq \sin\frac{x_1+x_2}{2} + \sin\frac{x_2+x_3}{2} + \sin\frac{x_3+x_1}{2}.$$

Po opětovném použití tohoto kroku dostaneme

$$\begin{aligned}
&\sin x_1 + \sin x_2 + \sin x_3 \leq\\
&\qquad \leq \sin\frac{2x_1+x_2+x_3}{4} + \sin\frac{x_1+2x_2+x_3}{4} + \sin\frac{x_1+x_2+2x_3}{4}.
\end{aligned}$$

Při opakování tohoto kroku se argumenty sinů blíží aritmetickému průměru

$$\frac{x_1+x_2+x_3}{3}$$

a vztah přechází na

$$\sin x_1 + \sin x_2 + \sin x_3 \leq 3\sin\frac{x_1+x_2+x_3}{3},$$

zde zatím za podmínky $x_1 + x_2 + x_3 \leq 2\pi$. Tuto metodu můžeme použít i pro více sčítanců, tak dostaneme

$$\sum_{i=1}^{n} \sin x_i \leq n \sin\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i,$$

zatím za podmínky

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \leq 2\pi.$$

Podrobnějším rozborem lze ukázat, že náš horní odhad pro součet sinů platí pro

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \le \left(1 + \frac{n}{2}\right)\pi.$$

Pro funkce kosinus lze tento postup použít přesně stejným způsobem za podmínky

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \le \pi.$$

A opět, podrobnějším rozborem lze ukázat, že náš horní odhad pro součet kosinů platí pro

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \le x_n^*,$$

kde $x_1^* = \infty$, $x_2^* = \pi$ a pro vyšší $n$ je $x_n^*$ dáno průsečíkem grafu dolního a horního odhadu součtu kosinů, tedy nejmenší kladné řešení rovnice

$$n - 1 + \cos x_n^* = n \cos \frac{x_n^*}{n}.$$

Např. pro $n = 3$ z rovnice

$$2 + \cos x_3^* = 3 \cos \frac{x_3^*}{3}$$

dostaneme

$$x_3^* = 3 \arccos \frac{\sqrt{3} - 1}{2} \doteq 3{,}58819.$$

## 4.5. Pantograf

Někdy je vhodné neuvažovat funkce sinus a kosinus samostatně, ale jako dvě složky jednoho dvousložkového vektoru

$$\boldsymbol{v} = (\cos\alpha, \sin\alpha)$$

nebo dokonce jako reálnou a imaginární část komplexního čísla

$$z = \cos\alpha + i \sin\alpha,$$

kde $i$ je imaginární jednotka splňující $i^2 = -1$. Tomu ještě nahrává skutečnost, že platí

$$z = \cos\alpha + i \sin\alpha = \mathrm{e}^{i\alpha}.$$

A dvousložkové vektory se dobře zakreslují v rovině.

Uvažujme tedy pro $n = 2$ naše horní odhady

$$\sin x_1 + \sin x_2 \le 2 \sin \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$\cos x_1 + \cos x_2 \le 2 \cos \frac{x_1 + x_2}{2}$$

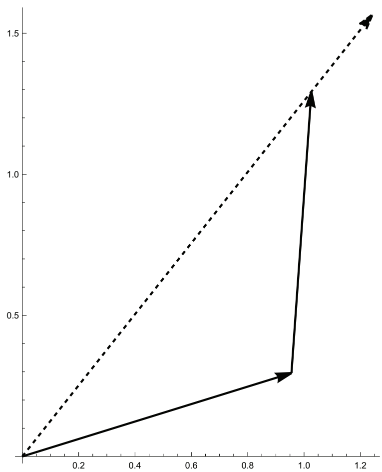
a utvořme vektory

$$\boldsymbol{v}_1 = (\cos x_1, \sin x_1)$$

$$\boldsymbol{v}_2 = (\cos x_2, \sin x_2)$$

$$\boldsymbol{v} = \left(2 \cos \frac{x_1 + x_2}{2}, 2 \sin \frac{x_1 + x_2}{2}\right).$$

Pak levé strany těchto dvou nerovností tvoří složky vektoru $\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$, zatímco pravé strany tvoří složky vektoru $\boldsymbol{v}$. Obr. 4 připomínající pantograf ukazuje, že pokud dva vektory míří různým směrem, pak jejich součet nedosáhne tak daleko jako vektor mířící směrem určeným aritmetickým průměrem těchto dvou úhlů. To je zajímavá grafická interpretace studovaných nerovností.




Obr. 4: Dvojnásobek vektoru (vykreslen čárkovaně) mířícího do směru určeného průměrem dvou úhlů dosáhne dále než součet vektorů s těmito dvěma úhly

# 5. Dodatky

### Převod rozdílu pravé a levé strany na součin

Odvodíme vztah

$$\sin x_1 + \sin x_2 - \sin(x_1 + x_2) = 4 \sin \frac{x_1}{2} \sin \frac{x_2}{2} \sin \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

Použitím vztahů

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta,$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha,$$

$$1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

dostaneme

$$\sin x_1 + \sin x_2 - \sin(x_1 + x_2) =$$

$$= \sin x_1 + \sin x_2 - \sin x_1 \cos x_2 - \cos x_1 \sin x_2 =$$

$$= \sin x_1 (1 - \cos x_2) + \sin x_2 (1 - \cos x_1) =$$

$$= \sin x_1 2 \sin^2 \frac{x_2}{2} + \sin x_2 2 \sin^2 \frac{x_1}{2} =$$

$$= 2 \sin \frac{x_1}{2} \cos \frac{x_1}{2} 2 \sin^2 \frac{x_2}{2} + 2 \sin \frac{x_2}{2} \cos \frac{x_2}{2} 2 \sin^2 \frac{x_1}{2} =$$

$$= 4 \sin \frac{x_1}{2} \sin \frac{x_2}{2} (\cos \frac{x_1}{2} \sin \frac{x_2}{2} + \cos \frac{x_2}{2} \sin \frac{x_1}{2}) =$$

$$= 4 \sin \frac{x_1}{2} \sin \frac{x_2}{2} \sin \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

### Úplná indukce

Úplnou indukcí dokážeme, že za podmínky

$$x_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{n} x_i \leq 2\pi$$

platí

$$\sin \sum_{i=1}^{n} x_i \leq \sum_{i=1}^{n} \sin x_i. \tag{14}$$

V hlavním textu jsme dokázali, že nerovnost (14) platí pro $n = 1$ a pro $n = 2$.

Dokážeme, že za předpokladu platnosti nerovnosti pro nějaké $n$ tento odhad platí také pro $n + 1$. Pak bude platit pro všechna přirozená $n$. Přitom ještě použijeme platnost pro $n = 2$, což už máme dokázáno. Chceme tedy dokázat, že platí také

$$\sin \sum_{i=1}^{n+1} x_i \leq \sum_{i=1}^{n+1} \sin x_i.$$

Můžeme tedy psát

$$
\begin{aligned}
L = \sin \sum_{i=1}^{n+1} x_i &= \qquad \text{(roztrhneme sumu na dvě části)}\\
= \sin \left( \sum_{i=1}^{n} x_i + x_{n+1} \right) &\leq \qquad \text{(použijeme předpoklad pro 2)}\\
\leq \sin \sum_{i=1}^{n} x_i + \sin x_{n+1} &\leq \qquad \text{(použijeme předpoklad pro } n)\\
\leq \sum_{i=1}^{n} \sin x_i + \sin x_{n+1} &= \qquad \text{(spojíme sumu)}\\
= \sum_{i=1}^{n+1} \sin x_i &= P.
\end{aligned}
$$

Tím je důkaz proveden.

Literatura

[1] Smýkalová, R.: Čtyři trigonometrické nerovnosti. *Rozhledy matematicko--fyzikální*, roč. 83 (2008), č. 1, s. 1–7.

[2] Smýkalová, R.: *Goniometrické funkce v elementární matematice*. CERM, Brno, 2016.

[3] Pokorný, P.: Od numerického experimentu ke goniometrickým nerovnostem. *Rozhledy matematicko-fyzikální*, roč. 84 (2009), č. 4, s. 19–23.

[4] Wikipedie: Jensenova nerovnost.
`https://cs.wikipedia.org/wiki/Jensenova_nerovnost`

# Matematická hra: Kurýr

*Jakub Řada, Matematický ústav UK, Praha*

Existuje mnoho matematických her, konkrétní příklady můžeme najít v [1, 2]. V tomto časopise byla například nedávno představena hra *marienbad* [5]. Významným autorem těchto her je například Sid Sackson [4]. Klasickou matematickou úlohou v matematickém oboru teorie her je najít výherní strategii hry [3]. V tomto článku také jednu takovou hru představujeme včetně popisu jednotlivých pravidel a výherní strategie. Inspirací pro ni byl novinový článek z USA ([6, 7]) rozebírající novou metodu doručování zásilek.

## Úvod do hry

Hra se odehrává v americkém městě. Vzhledem k tomu, jak města vznikala, tak ulice tvoří v principu čtvercovou síť. Tamní dopravní předpisy umožňují vozidlům na křižovatce odbočit vpravo i na červenou, pokud neohrozí a neomezí žádné rovně jedoucí vozidlo. Tyto okolnosti zapříčinily, že auta kurýrů odbočovala zásadně a pouze vpravo. Ukázalo se, že kurýři ušetří čas a vede to k menší ekologické zátěži, neboť nespotřebují tolik paliva. Další nespornou výhodou byl pokles nehod kurýrních aut, protože odbočení vlevo je považováno za jeden z nejnebezpečnějších manévrů ve městě. Na základě těchto principů vznikla základní myšlenka hry včetně pravidel.

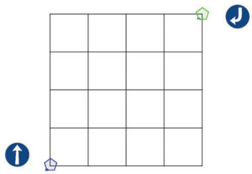
## Pravidla hry

V jednom nejmenovaném americkém městě soupeří kurýrní služby o vládu nad městem. Jejich cílem je odbavit více ulic než konkurenční společnost. Jelikož chtějí být co nejrychlejší, poučili se z jiných měst a dodávky na křižovatkách jezdí buď rovně, případně odbočují vpravo. Vyhrává ta společnost, která odbaví více ulic než její konkurence.

1. Hra je určena pro 2 nebo 4 hráče.
2. Hraje se na čtvercové síti (2×2, 3×3, 4×4, 5×5, . . . ).
3. Každý hráč začíná ze svého pohledu v levém dolním rohu hrací desky.

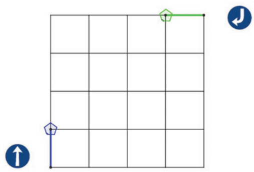
4. Každý hráč si podle svého uvážení v každém tahu vybere jednu kartičku směru pohybu tak, aby ji soupeři neviděli.

5. Poté, co budou mít všichni hráči vybranou kartičku pohybu, současně je odkryjí.



Obr. 1: Začátek hry s vybraným prvním pohybem

6. Pokud je to možné, hráči současně obarví hranu ve směru pohybu. Nemůže-li hráč tah provést (obarvit hranu, viz sekce Pohyb), hra pro něj končí. Vyhrává poslední hráč ve hře.



Obr. 2: Situace po prvním pohybu

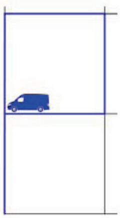
7. Body 4–6 opakujeme stále dokola, dokud nezůstane poslední hráč ve hře, či nenastane remíza.

## Pohyb

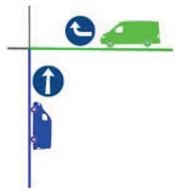
Dodávka každého hráče projede vybranou ulicí, kterou obslouží zásilkami. Na konci každé ulice se řidič dodávky vždy rozhoduje, jestli zahne doprava, nebo bude pokračovat rovně do další ulice (vyjma okraje herní desky).

- Žádná ulice nesmí být obsloužena vícekrát.
- Pokud z křižovatky, na které se řidič rozhoduje, není možné pokračovat rovně ani odbočit vpravo, hra pro hráče končí.

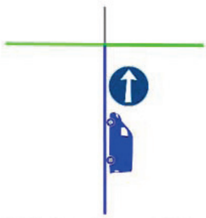
- Pokud chtějí řidiči dvou dopravních společností vjet současně do jedné ulice, má přednost vozidlo jedoucí rovně. Druhé odbočující vozidlo tedy nemá kam vjet (ulici obsluhuje již konkurence), hra pro něj končí.
- Vjedou-li dvě dopravní společnosti proti sobě do jedné ulice, srazí se, tím pro ně hra končí.



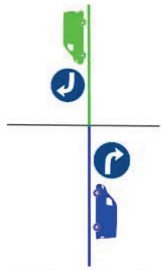
(a) Modrý nemá již jak hrát



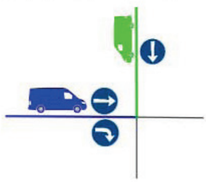
(b) Modrý i zelený mají jenom jednu možnost pohybu. Modrý však vyhrává a ulice je jeho, neboť jede rovně. Pro zeleného zde hra končí



(c) Modrý může na této křižovatce pokračovat pouze rovně



(d) Oba hráči mohou pouze odbočit vpravo



(e) Zelený hráč může pokračovat pouze rovně. Modrý hráč může odbočit vpravo, nebo jet rovně. Avšak pro modrého hráče je výhodnější jet rovně, neboť odbočení by pro něj znamenalo prohru.

Obr. 3: Ilustrace pravidel

### Konec hry

- Vypadává hráč, který nemá jak hrát.
- Pokud všichni zbylí hráči ve hře nemají jak hrát, nastává remíza.
- Vyhrává poslední hráč ve hře.

### Rozbor jednotlivých pravidel

**Pravidlo 1:** *„Hra je určena pro 2 nebo 4 hráče."*
Nanejvýše pro 4, neboť hrací deska nemá více rohů. Ve třech hráčích by měl vždy hráč, který nemá hráče po pravici výhodu. Získal by tak dostatek manévrovacího prostoru pro výhru. V jednom hráči by hra postrádala smysl. Pro další rozbor se budu věnovat pouze hře dvou hráčů.

**Pravidlo 2:** *„Hraje se na čtvercové síti (2×2, 3×3, 4×4, 5×5, …)."*
Pro hru volíme čtvercovou síť, aby hra byla rovnocenná pro všechny hráče. Při vymýšlení hry byla na stole i varianta ve více dimenzionálním prostoru. Vždy by bylo povolené jen jedno odbočení ze dvou (například v prostoru: rovně, doprava, nahoru). Maximální počet hráčů by ovlivnila dimenze a tedy počet rohů $n$-dimenzionální kostky.

**Pravidlo 3:** *„Každý hráč začíná ze svého pohledu v levém dolním rohu hrací desky."*
Pokud by existovala varianta hry, kdy mohou hráči začínat libovolně, hráč pokládající figurku později by měl výhodu nad hráčem pokládajícím figurku dříve. Hra musí začínat symetricky, aby nebyl žádný hráč ve výhodě.

**Pravidlo 4–7:** *„Každý hráč si podle svého uvážení v každém tahu vybere jednu kartičku směru pohybu tak, aby ji soupeři neviděli."* a *„Hráči hrají současně."*
Pokud by se hráči v tazích střídali, pak by druhý hráč měl nespornou výhodu. Stačilo by, aby opakoval tahy prvního hráče. První hráč by byl první, který by neměl jak hrát.

**Pravidla pohybu:** *„Žádná ulice nesmí být obsloužena vícekrát."* a *„Pokud z křižovatky, na které se řidič rozhoduje, není možné pokračovat rovně ani odbočit vpravo, hra pro hráče končí."*
Do ulice, která již byla jednou ze společností obsloužena, se nesmí vjet. Stálo by to benzín i drahocenný čas. Navíc by hra bez tohoto pravidla postrádala smysl a neměla by téměř nikdy konec. Z toho důvodu je potřeba každou projetou ulici označit.

**Pravidlo pohybu:** *Pokud chtějí řidiči dvou dopravních společností vjet současně do jedné ulice, má přednost vozidlo jedoucí rovně. Druhé odbočující vozidlo tedy nemá kam jet (ulici obsluhuje již konkurence), pro něj zde jízda končí.*
V první verzi hry toto pravidlo chybělo, auta se srazila a byl konec. Jenže hra se snaží být co nejvíce reálná, proto bylo toto pravidlo podle pravidel silničního zákona přidáno. Hru je možné hrát i bez něj, jenom dochází k častější remíze. Na obr. 4 toto pravidlo několikrát rozhoduje o vítězi.

**Pravidlo pohybu:** *Vjedou-li dvě dopravní společnosti proti sobě do jedné ulice, srazí se, tím pro ně hra končí.*
Toto pravidlo je pro potřeby větší hrací plochy. Dá se vypustit, neboť by po projetí obou vozidel byla ulice obsloužena dvakrát, což je v rozporu s výše zmíněným pravidlem.

### Rozbor výherní strategie v závislosti na velikosti hrací plochy

**Herní pole 2×2**
Žádná strategie pro tuto hru neexistuje. Hra vždy skončí remízou. Na obr. 4.1 jsou znázorněny všechny možné partie.

**Herní pole 3×3**
Pokud by hráč začal hru pohybem doprava, po dvou tazích by pro něj hra skončila. Protihráč hrající první tah rovně by měl výhodu, protože má více možností, jak hrát. Navíc může jít do kličky. To znamená, že první tah musí být rovně (toto pravidlo platí pro libovolně velké hřiště). Pokud protihráčův druhý tah bude opět rovně, získává tím ještě větší operační prostor. Z toho důvodu je nejlepší sled tahů pro hrací desku 3×3 (pokud je volba) rovně, rovně, doprava, doprava, doprava (viz obr. 4.3). S popsaným sledem je nemožné prohrát.

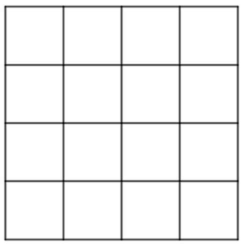
**Herní pole 4×4**
Z pravidla, že auto jedoucí rovně má přednost před autem odbočujícím, vyplývá, že u menších hřišť je nejvýhodnější jet vždy co nejvíce rovně a na poslední chvíli odbočit vpravo (viz. nejlepší sled pro hrací desku 4×4 na obr. 4.5). Nastává otázka, při jak velkém plánu je výhodnější zahrát kličku znázorněnou na obr. 4.6 Pro pole 4×4 to výhodné není.

**Herní pole 5×5**
Pro takto velký hrací plán je již výhodnější provést kličku. Klička však nesmí být moc velká, jinak by soupeř mohl využít přednosti pro rovně projíždějící vozidla (obr. 4.8). I když by se větší klička zvládla uzavřít,

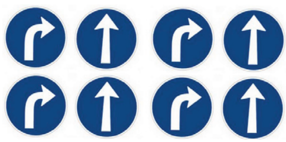
není vyhráno, pokud soupeř zahraje menší kličku, protože pak by soupeř mohl jednoduše zabrat prostor pro vyjetí z kličky (obr. 4.9). Z toho důvodu vzniká předpoklad hrát co nejmenší kličku. Nejlepší sled tahů s úzkou smyčkou je znázorněn na obrázku 4.10. Pokud však soupeř odhalí velikost námi zamýšlené kličky, může nám rychle a jednoduše zabránit z ní vyjet (obr. 4.11). Touto metodou je možné porazit každou úzkou smyčku. Není tedy lepší zahájit partii sledem: rovně, rovně, doprava? Pro rozebrání všech rozumných variant hry s touto širší kličkou (obr. 4.12) dostáváme nejlepší sled (obr. 4.13 a 4.15). Na obr. 4.14 je ještě znázorněna situace hry, kdy oba hráči budou hrát nejlepší sled. Tato situace pak vede k remíze.

**Herní materiál:**

Hrací deska:



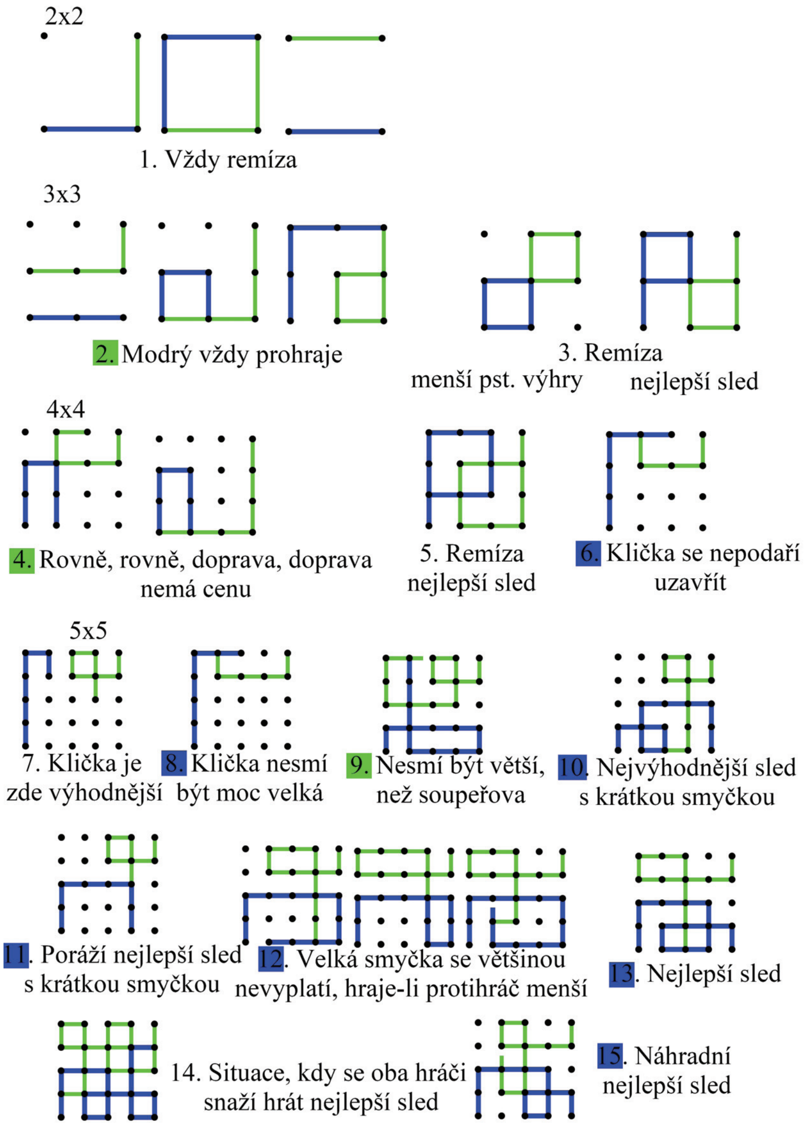
Hrací kameny:



20 barevných proužků v každé ze 4 barev.

**Závěr**

Na hrací desce do velikosti 5×5 je podle rozboru s dobrým soupeřem poměrně těžké vyhrát. Důležité je však neprohrát. S nejlepší sledem pro každou herní plochu je jistá minimálně remíza. Když se podíváme na kurýrní služby, které brázdí naše ulice, také nejsme schopni určit vítěze. Pouze vidíme, když nějaký prohraje (zkrachuje).




Obr. 4: Jednotlivé rozbory

Tento článek vznikl za podpory projektu SVV č. 260580.

Literatura

[1] Burjan, V., Burjanová, Ľ.: *Matematické hry*. Pytagoras, 1991.

[2] Jančařík, A.: *Hry v matematice*. Pedagogická fakulta Univerzity Karlovy, Praha, 2007.

[3] Michalik, J.: A Winning Strategy for Hold That Line. The Mathematical Intelligencer, roč. 42 (2020), č. 4, s. 71–77.

[4] Sackson, S.: *A Gamut of Games*. Dover Publications, 1992.

[5] Tomsa, J.: Nehrajte si se sirkami I. *Rozhledy matematicko-fyzikální*, roč. 92 (2017), č. 1, s. 1–9.

[6] Kurýři UPS neodbočují vlevo: Šetří tím palivo, čas i životní prostředí, *100+1*, https://www.stoplusjednicka.cz/kuryri-ups-neodbocuji-vlevo-setri-tim-palivo-cas-i-zivotni-prostredi.

[7] Reichman, M.: *Zajímavost – odbočování: Nikdy neodbočuj vlevo!*, `https://kiosek.epublishing.cz/1001/5-2017/nikdy-neodbocuj-vlevo`.

# Knots, knots. Who's there?

*Francesco Dolce, Czech Technical University, Prague*

## 1. Introduction and definitions

When Alexander the Great entered the city of Gordion, the oracle told him of the ancient prophecy: whoever would first untie the sacred knot would became the ruler of all Asia. Many people before struggled to unravel the knot, all without success. Alexander stopped to think for a moment. Then he drew his sword and with a single stroke cut the knot in half. Later, the great Macedonian king went on to conquer Asia as far as the Indus and the Oxus, thus fulfilling the prophecy. From a mathematical point of view, Alexander cheated and his solution cannot be considered a valid one. But myth and math do not always go hand in hand.

But what is a knot for a mathematician? Knot theory can be seen as a branch of topology (even though we can study knots with tools from different branches of mathematics). A knot is a closed curve in a 3-dimensional space $\mathbb{R}^3$, like a rope in our usual three-dimensional world that has first been tangled up and whose extremities have then been glued together. The simplest knot is the circle itself, denoted as $\mathbb{S}^1$. Because of its simplicity it is called the *unknot* (see, for instance, the left of Figure 1).

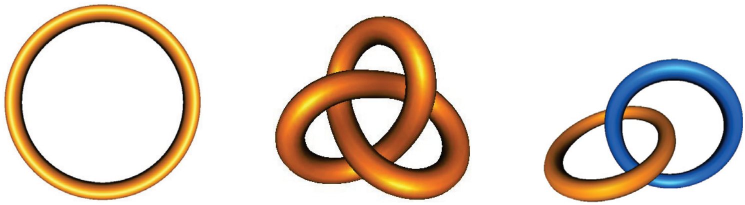


Fig. 1: The unknot (left), the trefoil knot (center) and the Hopf link (right)

Fig. 2: Details of a knot on a wall in Prague

If we want to be more formal, we can use the notion of *homeomorphism*, that is a continuous function (a fuction that sends neighboring points to neighboring points) having a continuous inverse[1]. With such a tool we can easily pass from one closed curve (the twisted rope we discussed before) to another one, and also coming back, avoiding weird and unpleasant situations.

[1] A continuous inverse is needed because there can be different topologies in $\mathbb{R}^3$, i.e., points that are neighboring in one topology do not have to be close in some other topology. For precise definitions of topology and homeomorphism see [6].

**Definition 1.** A *knot* is a subspace $K \subset \mathbb{R}^3$ such that $\varphi(K) = \mathbb{S}^1$ for some homeomorphism $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

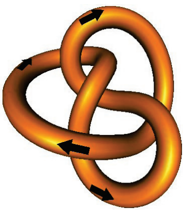
For example, the *trefoil knot* represented on center of Figure 1 is a knot.

When we want to study several knots at the same time, the following definition can come in handy.

**Definition 2.** A *link* $L$ is a union $L = K_1 \cup K_2 \cup \cdots \cup K_m$ of $m$ knots $K_i$, with $m \in \mathbb{N}$ and $1 \leq i \leq m$, such that $K_j \cap K_k = \emptyset$ for every $j \neq k$.

A romantic example of a link is the *Hopf link*, a union of two unknot, represented on the right of Figure 1.

An *oriented knot* (or an oriented component of a link) is just a knot on which we have defined a preferred direction. An example of an oriented knot (the so-called *figure-eight knot*) and of an oriented link are shown in Figure 3.



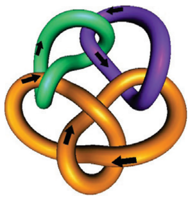


Fig. 3: An oriented knot (left) and an oriented link (right)

## 2. Projections

Since the knots live in a 3-dimensional space, but on a sheet of paper we only can use two of these dimensions, a useful tool to study knots is the projection $\pi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, defined as $\pi(x, y, z) = (x, y)$.

**Definition 3.** Given a knot $K \subset \mathbb{R}^3$, we call the *projection* of $K$ the 2-dimensional closed line $\pi(K) \subset \mathbb{R}^2$.

A point $P \in \pi(K)$ is called a *multiple point* if $\pi^{-1}(P)$ contains at least 2 points. In our projections we suppose that the only multiple points have order exactly 2, that is they correspond to only two points in the original knot (if this is not the case, we can always "move" the knot a little bit in order to obtain a projection with such property). We will

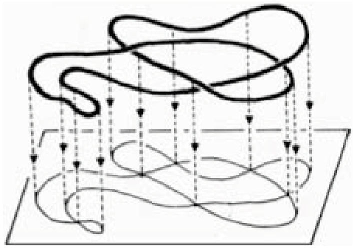


Fig. 4: Projection of a knot

call such a double point *intersection* of the projection. We also denote as *upper branch* and *lower branch* of the intersection $P$ respectively the neighborhood of the point in $\pi^{-1}(P)$ with bigger and with smaller $z$ coordinate. If two intersections are both of an upper branch or both on a lower branch, we say that they are of the same type. To distinguish the two branches, we usually represent the upper branch with a continuous line and the lower branch with a discontinuous line at the intersection, as shown in Figure 5.

Fig. 5: The trefoil knot (left) and one of its projections (right)

## 3. Equivalent knots

One of the main questions in the mathematical theory of knots is to determine whenever two knots are actually "the same knot" but represented in a different way. Intuitively that means that we can pass from the first knot to the second one by a series of small continuous movements, without using a pair of scissors or some glue (preserving the orientation in the case of oriented knots). The following is a formalisation of this notion.

**Definition 4.** Two knots $K_1$ and $K_2$ are *equivalent* if there exists an *ambient isotopy* between the two knots, that is if there exists a continuous map $h\colon \mathbb{R}^3 \times [0,1] \to \mathbb{R}^3$ such that

i) for every $t \in [0,1]$, the map $h_t\colon x \to h(x,t)$ is a homeomorphism (in particular $h_t$ sends the circle to a certain knot);
ii) the map $h_0$ sends the circle to the first knot $K_1$;
iii) the map $h_1$ sends the circle to the second knot $K_2$.

An example of three equivalent knots is given in Figure 6.

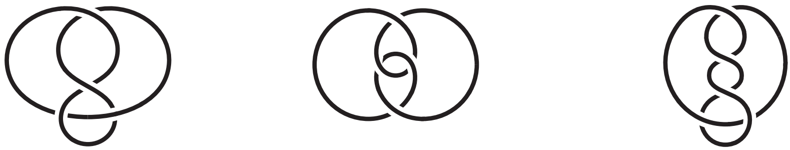


Fig. 6: Three equivalent knots

The problem with Definition 4 is that in order to check the equivalence of two knots we need an infinite number of intermediary homeomorphisms (or an infinite number of "small movements"). Even in the apparently easier case when one of the two knots is the unknot. For instance, the knots in Figure 7, known respectively as the *Goeritz's unknot* and the *Haken's unknot* are, despite their appearance, equivalent to the circle.

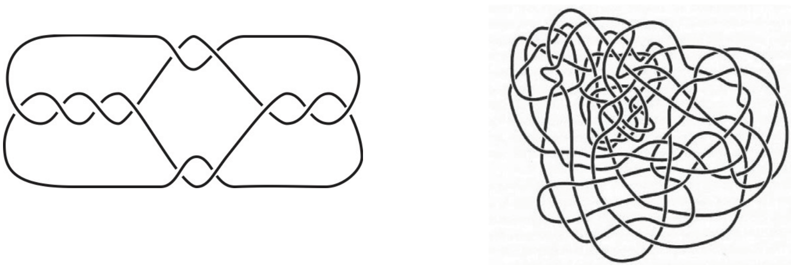


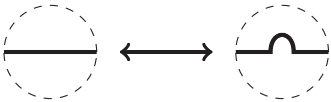
Fig. 7: Goeritz's unknot (left) and Haken's unknot (right)

Wolfgang Haken proposed in 1961 one of the first unknot recognition algorithms. However, such an algorithm has very big complexity, so it cannot be efficiently implemented. Recently Marc Lackenby proposed an algorithm that, given a diagram of a knot with $n$ crossings, determine in quasi-polynomial time (more precisely in $n^{\mathcal{O}(\log n)}$ time), whether this is the unknot or not. It is still unknown if this is the best possible solution or if a more efficient algorithm can be found (you should try!).

## 4. Reidemeister moves

In 1932 Kurt Reidemeister proved that two 2-dimensional closed lines represent the same knot if and only if it is possible to pass from the first one to the second one through a succession of *moves*, or local changes of the following types:

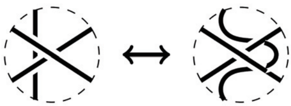
- planar isotopy (or $\Omega_0$) not creating or destroying any intersections;

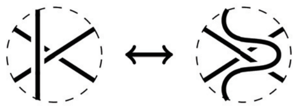


- $\Omega_1$, creating or removing an intersection relative to a loop;

- $\Omega_2$, creating or removing two successive intersections of the same type by moving a strand over another;

- $\Omega_3$, moving two consecutive intersections of the same type over a third intersection.





**Theorem 1** (Reidemeister)**.** *Two knots are equivalent if and only if it is possible to obtain a projection of the second knot from a projection of the first knot by a sequence of Reidemeister moves.*

It is important to note that the previous theorem does not provide any algorithm to establish whether two knots are equivalent to each other. Indeed, we do not know which sequence of Reidemeister moves we need to use to pass from one projection to the other. In general, it is not even guaranteed that the right sequence of moves will simplify the diagram, that is, reduce the number of intersections.

## 5. Mirror image and opposite

How can we use known knots to construct new ones? A possible way is taking a knot and either considering its mirror image or changing its orientation.

**Definition 5.** The *mirror image* of a knot $K$ is the knot obtained starting from a projection of $K$ by simply inverting the upper and lower branches at each intersection.

A knot that is equivalent to its mirror image is called *achiral.* For instance, the trefoil knot is not achiral, while the figure-eight knot is achiral (see Figure 8).

Fig. 8: The figure-eigth knot (left) is achiral, while the trefoil knot (right) is not

**Definition 6.** The *opposite* knot of an oriented knot is the oriented knot obtained just by changing the orientation.

As for the mirror image, some knots are equivalent to their opposite and some are not (see, e.g., Figure 9).

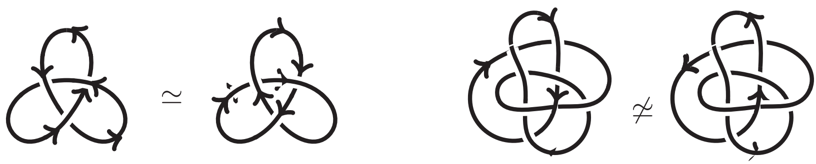


Fig. 9: The trefoil knot (left) is equivalent to its opposite while the knot $8_{17}$ (right) is not

## 6. Knot sum

Another way of obtaining a knot is by *connected sum* of two knots.

**Definition 7.** The *connected sum* of two knots $J$ and $K$ is the knot $J\#K$ obtained by cutting both knots and joining the pairs of ends without creating new intersections.

If the knots are oriented, we should be careful to connect them in such a way that the direction is consistent. An example of sum of two knots is given in Figure 10.

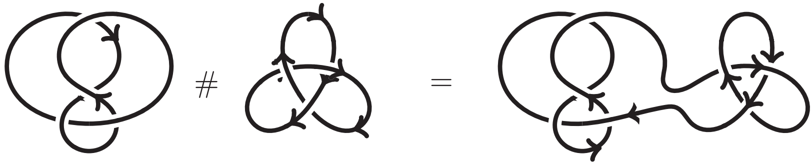



Fig. 10: The connected sum of two knots

It is easy to see that such operation is both commutative and associative. Moreover, the unknot is clearly the neutral element of this operation.

Similarly to integer numbers, we say that a knot is a *prime knot* if it is not possible to obtain it as a sum of two non-trivial knots. A knot that is not prime is called a *composite knot.* As for integers, we also have a fundamental theorem for knots, proved by Herbert Seifert in 1949.

**Theorem 2** (Seifert)**.** *Every knot can be factorized in a unique way as a connected sum of prime knots.*

The study of knot is not only elegant and gives the opportunity to have fun drawing, but has also several applications in different aspects of everyday life (have you ever noticed how complicated it is to untangle your headphone cables?) as well as in science, from molecular biology to quantum physics.

L i t e r a t u r a

[1] Adams, C.: *The Knot Book – An elementary introduction to the mathematical theory of knots.* W. H. Freeman and Company, New York, 1994.

[2] Burde, G., Zieschang, H.: *Knots.* Studies in Mathematics, de Gruyter, Berlin, 1985.

[3] Raymond Lickorysh, W. B.: *An Introduction of Knot Theory.* Graduate Texts in Mathematics (175), Springer, 1997.

[4] Reidemeister, K.: *Knotentheorie.* Eregebnisse der Matematik und ihrer Grenzgebiete, Springer-Verlag, Berlin, 1932.

[5] Scharein, R. G.: *Interactive Topological Drawing.* PhD Thesis, Department of Computer Science, The Univerisity of British Columbia, 1998.

[6] Willard, S.: *General Topology.* Dover Books on Mathematics, Dover Publications, 2012.

**Slovníček: Knots, knots. Who's there?**

to come in handy = přijít vhod
consecutive = po sobě jdoucí, následný
to determine = určit, stanovit
if and only if = tehdy a jen tehdy
integer = celé číslo
intersection = křížení, průsečík
multiple point = vícenásobný bod
to propose = navrhnout
recognition = rozpoznání
stroke = úder
succession = sled
tangled up = zamotaný
trefoil = jetel, trojlístek
trefoil knot = uzel ve tvaru trojlístku
to unravel, to untangle = rozmotat, rozvázat

# Newtonovy pohybové zákony – retrospektiva a současnost (1. část)

## Vžité mylné představy vyvolané literaturou, učebnicemi a tradiční výukou versus pravý obsah

*Martin Černohorský, Jana Musilová, Přírodovědecká fakulta MU, Brno*

**Poznámka redakce.** Ve spolupráci s Československým časopisem pro fyziku přinášíme na stránkách našeho časopisu článek, který se s fyzikálním a historickým nadhledem zabývá základním stavebním kamenem celé fyziky – Newtonovými pohybovými zákony. Na první pohled se může zdát, že článek zabývající se tímto „prastarým tématem“ nemůže čtenáři nic nového přinést. Opak je pravdou. Newtonovy pohybové zákony jsou stále vynikající materiál k zamyšlení a k procvičení logického uvažování.

Obsah obou článků:

*1. část*: 1. Oč půjde? – 2. Newtonovy definice a axiomy – 3. První axiom a jeho devět formulací – 4. První axiom v překladech a interpretacích – 5. Druhý axiom a důsledky – 6. Třetí axiom – zákon interakce

*2. část*: 7. Machova kritika a alternativa Newtonových axiomů – 8. Newtonovy axiomy a školská fyzika

## 1. Oč půjde?

> Zatímco Galilei uvedl princip setrvačnosti jen jako poznámku pod čarou, dikce Newtonova Axiomu neboli zákona pohybu prochází historií s důstojností a nedotknutelností papežského výroku.
>
> *Ernst Mach*

Na první pohled se téma uvedené v názvu může jevit jen jako přehled třistaleté historie Newtonových zákonů. Newtonovy zákony jsou však v duchu Machovy charakteristiky prvního z nich namnoze vnímány i jako celek, ať v překladech či interpretacích celého Newtonova zakladatelského díla novověké přírodovědy *Philosophiae Naturalis Principia*

*Mathematica* (1687, 1713 a 1723, 1726). K nejznámějším z nich patří např. Motte 1729, Cajori 1937, Cohen 1989 do angličtiny, Le Seur a F. Janvier 1739–1742 – rozsáhlé komentáře v latině, markýza du Châtelet (1859) do francouzštiny, Wolfers 1872 do němčiny a další. Četné překlady samotného fundamentálního úvodu Principií – *Axiomata, sive Leges Motus* – dospěly v jednotlivých jazycích k ustáleným zněním, formulačně a interpretačně se jen nepodstatně lišícím v jednotlivostech. Patrně největší zájem vzbudila otázka, proč po peripetiích s početnou řadou formulací principu setrvačnosti a s cestou k výsledné restrikci systému základních zákonů na tři *Axiomata, sive Leges Motus* (Axiomy neboli zákony pohybu) ponechal Newton v této konečné úpravě jako axiom i první zákon, „když je to zvláštní případ zákona druhého“.

Uvedené skutečnosti jsou ovšem natolik obecně známy, že odkazy čtenář nepostrádá a spíše se bude domnívat, že jde o tematiku zajímavou snad jen pro zájemce o historii přírodních věd, opodstatněnou především tím, že jde o nejzávažnější část zakladatelského díla moderní přírodovědy. Leckterému čtenáři se může jevit zbytečné, ne-li dokonce nesmyslné, zkoumat Newtonovy zákony ještě takřka po třech stovkách let od vydání Newtonových *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica* [1][1)] (dále „Principia“), když je přece vše tak jasné. Tři zákony, nazývané „zákon setrvačnosti“, „zákon síly“ a „zákon akce a reakce“, jsou přece obsaženy jak v mnoha překladech Principií, tak v nesčetných učebnicích fyziky všeho druhu a všech úrovní a jejich formulace jsou stručné a tak jednoduché, že na nich přece nemůže být nic k zpochybnění. Je tomu však jinak: v takové představě tkví právě pověstný „kámen úrazu“ (nejen) školské fyziky.

Ve snaze o přesnost překladu a interpretace originálního znění Newtonových zákonů a komentářů k nim je třeba vedle smyslu pro správnost a čistotu interpretace věhlasného díla spatřovat i to, že na této přesnosti závisí skutečné pochopení pilířů mechaniky, které jedině umožňuje jejich správnou aplikaci v modelových i praktických situacích a rozvoj fyzikálního myšlení nejen budoucích fyziků, ale studentů obecně.

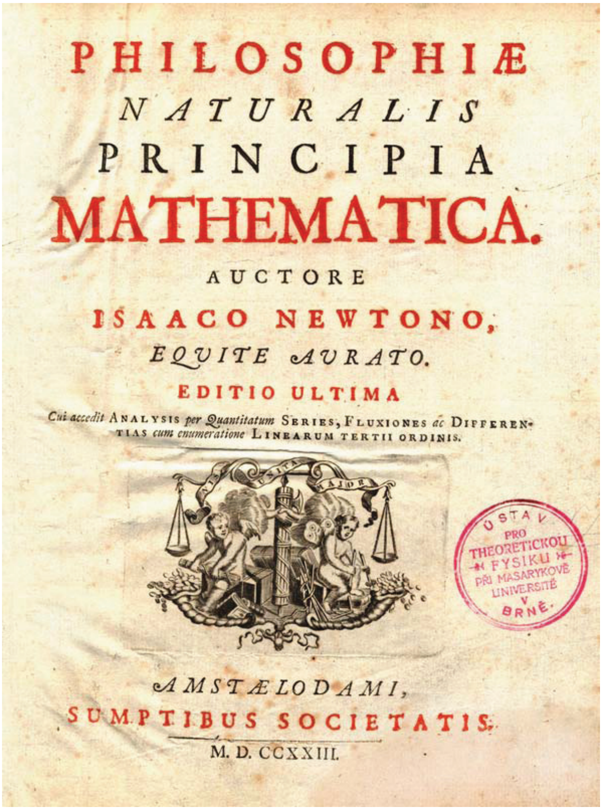
Pokud jde o tři Newtonovy zákony samotné, zaměříme se při jejich interpretaci na následující skutečnosti vyplývající z originálního Newtonova znění.

---

[1)] Z tohoto vydání Principií, jehož exemplář je součástí knihovního fondu Přírodovědecké fakulty Masarykovy univerzity (obr. 1), jsou převzata originální (latinská) znění Newtonových definic, axiomů, důsledků a komentářů prezentovaná v tomto příspěvku. V Principiích jsou uváděna vesměs na prvních stranách (str. 1 až 20).

***První zákon.*** *Každé těleso setrvává ve svém stavu klidu nebo rovnoměrného direkčního pohybu, není-li působícími silami nuceno svůj stav měnit.*

Pojem „direkční pohyb“ je založen na užití slovního spojení „motus in directum“, k jehož začlenění do předposlední a poslední formulace prvního zákona se Newton nakonec rozhodl. Správný obsah prvního zákona neumožňuje považovat ho za zvláštní případ druhého zákona, jak bývá často interpretován. Newton proto označil Lex I ve své době správně jako axiom, zatímco když nyní z druhého a třetího zákona umíme odvodit obě impulsové věty, jejichž zvláštními případy jsou principy setrvačnosti translačního a rotačního pohybu, by musel první zákon z axiomů vynechat.




Obr. 1

**Druhý zákon.** *Změna hybnosti je úměrná působící hybné síle a děje se podél přímky, v níž ona síla zapůsobí.*

Ernst Mach operoval se silou jako s primárním pojmem, jehož význam je obecně jasný, s tím, že jako vektorová veličina je síla na těleso působící rovna součinu jeho hmotnosti a jeho zrychlení. Machova autorita vedla k tomu, že tento výklad se vžil jako definice síly ($\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$) a je tak také obecně užíván. Machova definice je však vadná, neboť síla není charakteristikou jen uvažovaného objektu. Správný postup vedoucí k vybudování pojmu síla spočívá v zavedení síly na základě experimentu pro každou jednotlivou interakci s následným zobecněním, vedoucím k pojmu síla jako vektorové kvantitativní charakteristice interakce, obecně závislé na parametrech trojího druhu: parametrech objektu, o jehož chování uvažujeme, parametrech okolí, s nímž objekt interaguje, a konfiguračních parametrech soustavy objekt-okolí. Druhý zákon je pak pohybovým zákonem umožňujícím na základě znalosti interakcí zkoumaného tělesa s okolními objekty v principu určit závislost jeho pohybu na čase.

**Třetí zákon.** *Akci je reakce vždy protisměrná a je stejně velká jako ona: neboli působení dvou těles na sebe navzájem jsou vždy stejně velká a směřují na opačné strany.*

Tento zákon sám Newton formuluje pomocí pojmů akce a reakce, ovšem s tím, že v jeho (správném) pojetí představují dvojici sil vzájemného působení mezi interagujícími objekty, nikoli realizaci rozhodnutí subjektu nadaného schopností vlastního rozhodování (akce), a touto akcí vyvolaný proces (reakce).

Výše uvedené charakteristiky, týkající se správné interpretace Newtonových zákonů, vyžadují podrobnější výklad doplněný Newtonovými komentáři. Je jistě udivující, že žádný z citovaných překladů Newtonova díla se nevypořádal s jeho pohybovými zákony zcela správně. Zejména markantní je to v případě prvního zákona, kdy si překladatelé nepřipustili skutečnost, že zákon zahrnuje také rotační pohyb. Lze pochopit, že to uniklo překladatelům a vykladačům, kteří se soustředili bez potřebného hlubokého zamyšlení jen na přesný doslovný převod znění zákonů samotných do zvoleného jazyka, aniž si všímali vysvětlujících komentářů s příklady (mj. [3]–[5]). Stručnost formulací označených Newtonem přímo jako zákony (Leges) či axiomy (Axiomata) mohla totiž být při takovém přístupu poněkud zavádějící. Překladům se však věnovali i renomovaní fyzikové a pedagogové, kteří přeložili celá Principia včetně vysvětlujících komentářů a příkladů, které dokonce komentovali, a přesto nevyšli za hranici obvyklých mylných či přinejmenším neúplných interpretací (např. [6]). V článku si podrobněji všimneme všech nám doposud známých překladů od doby vydání Principií až po současnost. Uvedeme původní znění axiomů a souvisejících definic, komentářů a příkladů spolu s naším překladem a předložíme jejich správnou interpretaci. Nakonec si všimneme některých základních učebnicových dezinterpretací a nejčastějších studentských chyb vyplývajících z nesprávného pojetí Newtonových zákonů. Text by tak měl napomoci tomu, aby učitel kteréhokoli školského stupně v něm našel – s uplatněním patřičné selektivity – vše, co pro výuku tématu potřebuje, aniž by musel sahat po další literatuře.

## 2. Newtonovy definice a axiomy[2)]

V této kapitole pouze uvedeme originální znění a náš překlad několika Newtonových definic a jeho tří axiomů, dále pak přípravné pojmy zjednodušující výklad Newtonových formulací.

### Newtonovy definice

Axiomům samotným předchází v Principiích osm definic (Definitio I až VIII), z nichž jsou pro náš výklad podstatné tři:

**Definitio II**

*Quantitas Motus est mensura eiusdem orta ex Velocitate et Quantitate Materiæ conjuctim.*
Velikost pohybu je míra daná součinem rychlosti a velikosti hmoty.

**Definitio III**

*Materiæ vis insita est potentia resistendi, qua corpus unum-quodque, quatum in se est, perseverat in statu suo vel quiescendi vel movendi uniformiter in directum.*
Inherentní síla[3)] hmoty je schopnost odporu, jíž každé těleso, pokud je jen na něm, setrvává ve svém stavu klidu nebo rovnoměrného direkčního pohybu.

---

[2)] Tvrzení běžně nazývaná *Newtonovy (pohybové) zákony* tvoří ve skutečnosti soustavu axiomů klasické newtonovské mechaniky a splňují požadavky nezávislosti, bezespornosti a úplnosti. Sám Newton je v Principiích nazývá *Axiomata sive Leges motus*, jejich konkrétní znění však nadepisuje *Lex I, II, III.*

[3)] Pojem „materiae vis insita“, překládaný jako „inherentní síla hmoty“, může být také nahrazen jednoslovným „setrvačnost“ jako vlastnost chování hmoty.

**Definitio IV**

*Vis impressa est actio in corpus exercita, ad mutandum eius statum vel quiscendi vel movendi uniformiter in directum.*
Působící síla je akce zaměřená na těleso, aby změnilo svůj stav klidu nebo rovnoměrného direkčního pohybu.

Slovo „motus“ užívá Newton ve dvojím významu: jednak pro pohyb jako takový, jednak pro hybnost jako fyzikální veličinu (ve formulaci druhého axiomu níže). V definici II ji nazývá přesněji „velikost pohybu“ (quantitas motus).

Pro úplnost dodáváme, že definice I stanoví „velikost hmoty“, tedy hmotnost, jako součin hustoty a objemu, definice V až VIII se týkají dostředivého zrychlení a dostředivé síly. Tyto definice se v našem příspěvku přímo neuplatňují, proto je zde neuvádíme.

Newton dále pracuje s pojmy absolutní prostor, jakožto výlučná vztažná soustava, vzhledem k níž se vztahují formulace axiomů, a absolutní čas. Uvádí je v Principiích spolu s dalšími pojmy pod nadpisem Scholium. Uvedeme jeho úplné definice týkající se absolutního času a prostoru, v nichž je ona jedinečnost patrná:

*Tempus Absolutum, verum, & mathematicum, in se & natura sua absque relatione ad externum quodivis, aequabiliter fluit, alioque nomine dicitur Duratio.*
Absolutní, skutečný a matematický čas sám o sobě je svou povahou bez vztahu k čemukoli vnějšímu, plyne rovnoměrně a jiným slovem se nazývá trvání.

*Spatium Absolutum natura sua absque relatione ad externum quodivis, semper manet similare & mobile.*
Absolutní prostor je svou povahou bez vztahu k čemukoli vnějšímu a vždy zůstává stejný a nehybný.

Newton se také poměrně podrobně zabývá pojmy relativní čas a relativní prostor, jež ilustruje příklady, a fakticky tak dává základ úvahám o pohybech v různých vztažných soustavách. Pokud však o pohybech hovoří v axiomech, má na mysli pohyby vzhledem k absolutnímu prostoru, jež nazývá *absolutní pohyby*. Dokládají to obsáhlé úvahy ve zmíněném Scholiu, z nichž je vhodné citovat alespoň toto:[4)]

---

[4)] Namísto pojmu „vtištěné síly“ je v našem překladu použito slovní spojení „působící síly“, resp. „zapůsobící síly“, které sice není doslovným překladem Newtonova termínu „vires impressæ“, je však podle našeho názoru vhodnější.

*Causæ, quibus motus veri & relativi distinguuntur ab invicem, sunt vires in corpora impressæ ad motum generandum. Motus verus nec generatur nec mutatur; nisi per vires in ipsum corpus motum impressas: at motus relativus generari & mutari protest absque viribus impressis in hoc corpus. Sufficit enim ut imprimantur in alia folum corpora ad quæ fit relatio, ut iis cedentibus mutetur relatio lila in qua hujus quies vel motus relativus consistit.*
Příčinami, jimiž se od sebe navzájem liší skutečné (absolutní) a relativní pohyby těles, jsou síly působící na tato tělesa, jež je uvádějí do pohybu. Skutečný pohyb vzniká a mění se pouze prostřednictvím sil působících na pohybující se těleso, avšak relativní pohyb může být vyvolán a změněn, aniž na toto těleso působí síly. Stačí totiž, jestliže působí pouze na jiná tělesa, k nimž se ono těleso vztahuje, aby se jejich pohybem změnil ten vztah, na kterém se zakládá klid, nebo pohyb onoho tělesa.

Scholium, po němž bezprostředně následuje kapitola Axiomata sive leges motus (Axiomy neboli zákony pohybu), Newton uzavírá slovy: *V následujícím výkladu podrobněji vyložíme, jak určit skutečné pohyby z jejich příčin, účinků a zdánlivých rozdílů, a naopak, jak z pohybů, ať již skutečných, nebo zdánlivých, určit jejich příčiny a účinky. Neboť toto pojednání jsem napsal právě za tímto účelem.*

### Direkční pohyby

V definici IV se v našem překladu objevuje pojem „direkční pohyb“. Dle našeho mínění je to nejkratší a nejvýstižnější převedení Newtonova termínu „motus in directum“ do češtiny, které zároveň respektuje fyzikální obsah Newtonovy terminologie, na níž se jeho formulace prvního zákona ustálila až v osmé a deváté verzi. (Podrobněji o jednotlivých verzích v kapitole 3.)

Direkční pohyby nyní definujeme v souladu s přesným smyslem Newtonova „motus in directum“ (neboli „pohyb v daném směru“, „pohyb stále ve stejném směru“), jak je prokazatelné z jeho komentářů k prvnímu axiomu. Jedná se o nejjednodušší translační a nejjednodušší rotační pohyby:

- translační pohyb po přímce (přímočarý pohyb hmotného bodu, resp. středu hmotnosti tělesa),
- rotační pohyb kolem pevné osy,
- superpozice translačního a rotačního pohybu, kdy osa rotace nemění svou orientaci v prostoru a pohybuje se přímočaře.

Z hlediska Newtonova chápání absolutního prostoru jako jedinečné vztažné soustavy jsou druhý a třetí případ terminologicky odlišeny. Při popisu pohybu v inerciálních vztažných soustavách jsou tyto případy ekvivalentní. (Direkční pohyb může být samozřejmě jak rovnoměrný, tak nerovnoměrný.)

**Newtonovy axiomy**

Věnujme se tedy již třem Newtonovým axiomům obsaženým v Principiích. V tomto odstavci uvedeme originální (latinské) znění jejich definitivních verzí a naše překlady.

**Lex I**

*Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi unifomiter in directum, nisi quatenus a viribus impressis cogitur statum illum mutare.*
Každé těleso setrvává ve svém stavu klidu nebo rovnoměrného direkčního pohybu, pokud není působícími silami nuceno onen stav změnit.

**Lex II**

*Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impressæ & sieri secundum lineam rectam qua vis illa imprimitur.*
Změna hybnosti je úměrná působící hybné síle a děje se podél přímky, v níž ona síla působí.

**Lex III**

*Actioni centrariam semper & equalem esse reactionem: sive corporum duorum actiones in se mutuo semper esse equales in partes contrarias dirigi.*
Akci je reakce vždy protisměrná a je stejně velká jako ona: neboli působení dvou těles na sebe navzájem jsou vždy stejně velká a směřují na opačné strany.

## 3. První axiom a jeho devět formulací

K definitivní, deváté formulaci prvního axiomu se Newton propracovával v období 1664–1684. Pro ilustraci důkazu skutečnosti, že první axiom představuje princip setrvačnosti pro všechny direkční pohyby, jak jsme je zavedli v předchozí kapitole, uvádíme originální znění všech formulací (z nichž některé z prvních formuloval Newton anglicky, ostatní latinsky) spolu s našimi překlady. Z přehledu je zřejmý vývoj od principu setrvačnosti rovnoměrného přímočarého pohybu k principu setrvačnosti všech direkčních pohybů. Jednotlivé formulace označujeme stejně, jako jsou označovány v [7] a [8], tučně vyznačujeme formulačně důležitá místa. Odpovídající části textů v Newtonových rukopisných dílech byly podrobně rozebrány v [9], kde se zájemce může seznámit s důsledně vedenou argumentací dokazující zmíněný obecnější význam prvního axiomu (viz také [10]–[16]).

### 1) MS. II, Ax. 1, 2

*If a quantity once moves it will never rest unless hindered by some external cause and a quantity will always move on* ***in the same straight line*** *(not changing the celerity or determination of its motion) unless some external cause divert it.*

Jestliže se kvantita jednou pohybuje, nikdy se nezastaví, ledaže by byla zbrzděna nějakou vnější příčinou, a kvantita se bude stále pohybovat **po téže přímce** (neměníc rychlost a směr svého pohybu), ledaže by ji nějaká vnější příčina odklonila.

### 2) MS. II, Ax. 100

*A body once moved will always keep* ***the same celerity, quantity and determination*** *of its motion.*

Těleso uvedené do pohybu bude stále udržovat **stejnou rychlost, velikost a směr pohybu**.

### 3) MS. VI, § 4

*Et multo magis quod corporis sine impedimentis moti velocitas non dici potest uniformis, neque* ***linea recta*** *in qua motus perficitur.*

Nelze říci, že rychlost tělesa pohybujícího se bez odporu je stejnoměrná, a ani to, že pohyb probíhá v přímce.[5)]

### 4) MS. VIII, Hyp. 1

*Bodies move uniformly* ***in straight lines*** *unless so far as they are retarded by the resistance of the medium or disturbed by some other force.*

Tělesa se pohybují rovnoměrně **po přímkách**, pokud nejsou zpomalována odporem prostředí nebo rušivě ovlivňována nějakou jinou silou.

---

[5)] Tato formulace nevyjadřuje první axiom přímo, ale v jistém smyslu „komplementárně“. Týká se právě rotačního pohybu tělesa – zdůrazňuje skutečnost, že v situaci, kdy je těleso oproštěno od vnějších vlivů, ještě nemusí být jeho pohyb přímočarý a rychlosti všech jeho částí stejné.

### 5) MS. IXa, Hyp. 2

*Corpus omne sola vi insita uniformiter* ***secundum rectam lineam*** *in infinitum progredi nisi aliquid extrinsecus impediat.*

Každé těleso se pouhou inherentní silou pohybuje vpřed rovnoměrně **po přímce** do nekonečna, nezabrání-li tomu něco zvenčí.

### 6) MS. IXc, Lex 1

*Sola vi insita corpus uniformiter* ***in linea recta*** *semper pergere si nil impediat.*

Pouhou inherentní silou postupuje těleso rovnoměrně **po přímce** stále vpřed, jestliže tomu nic nebrání.

### 7) MS. Xa, Lex 1

*Vi insita corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter* ***in linea recta*** *nisi quatenus viribus impressis cogitur statum illum mutare.* ***Motus autemuniformis hic est duplex****, progressivus secundum lineam rectam quam corpus centro suo aequabiliter lato describet et circularis circa axem suum quemivis qui vel quiescit vel motu uniformi latus semper manet positionibus suis pripribus parellus.*

Inherentní silou setrvává každé těleso ve svém stavu klidu nebo rovnoměrného pohybu **po přímce**, pokud není působícími silami přinuceno onen stav měnit. **Tento rovnoměrný pohyb je však dvojí**, postupný po přímce, kterou těleso opisuje svým rovnoměrně se pohybujícím středem, a otáčivý kolem osy, která je buď v klidu, nebo pohybujíc se rovnoměrně zůstává stále rovnoběžná se svými předchozími polohami.

### 8) MS. XI, Lex 1

*Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter* ***in directum****, nisi quatenus illud a viribus impressis cogitur statum suum mutare.*

Každé těleso, které je ve stavu klidu nebo ve stavu rovnoměrného **direkčního pohybu**, setrvává ve svém stavu, pokud není působícími silami přinuceno jej změnit.

**9) Principia, Lex I, 1687, 1713**

*Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter* ***in directum****, nisi quatenus a viribus impressis cogitur statum illum mutare.*

*Projectilia perseverant in motibus suis, nisi quatenus a resistentia æris retardantur, et vi gravitatis impelluntur deorsum. Trochus, cujus partes cohaerendo perpetuo retrahunt sese a motibus rectilineis, non cessat rotari, nisi quatenus ab ære retardatur. Majora autem Planetarum et Cometarum corpora motus suos et progressivos et circulares in spatiis minus resistentibus factos conservant diutius.*

Každé těleso setrvává ve svém stavu klidu nebo rovnoměrného **direkčního pohybu**, pokud není působícími silami nuceno onen stav měnit.

Projektily setrvávají ve svých pohybech až na zpomalování odporem prostředí a pokles k zemi účinkem gravitační síly. Kolo, jehož části strhávají jedna druhou z přímočarých pohybů následkem trvalé vzájemné vazby, neochabuje v otáčení, dokud je prostředí nezpomalí. Větší pak tělesa planet a komet zachovávají své pohyby jak posuvné tak otáčivé, probíhající v prostorách kladoucích menší odpor, déle.

V [9] bylo podrobným rozborem prokázáno, že Newton měl ve svém prvním axiomu nakonec skutečně na mysli setrvačnost všech direkčních pohybů. V tomto příspěvku nebudeme důkaz rekapitulovat. Samotný vývoj formulací prvního axiomu o tom totiž jasně svědčí: Jednovětné formulace 1) až 6) se explicitně omezují na přímočarý pohyb, v anglických verzích „straight line“, nebo „straightforward“, v latinských „linea recta“. Naproti tomu v předposlední a v poslední, definitivní verzi (která již je pod názvem Lex I ve vydáních Principií z let 1687 a 1713), je toto slovní spojení nahrazeno promyšleným termínem „in directum“, připouštějícím potřebný širší význam. Tento význam předjímá jediná dvouvětá verze prvního axiomu, a to 7) MS. Xa, Lex 1. Druhá věta svědčí o tom, že měl Newton na mysli všechny (rovnoměrné) direkční pohyby. Její význam ilustrují právě tři výše uvedené příklady, jimiž doplnil poslední verzi prvního axiomu. Skutečnost, že zdánlivě nelogicky hovoří o „dvojím pohybu po přímce“ (in linea recta) dokládá pouze to, že v dané době neměl ujasněnu terminologii. Termín „uniformiter in directum“, v němž jsou obsaženy rovnoměrné direkční pohyby obecně, nalezl a použil až v posledních dvou formulacích (podrobněji o tom viz [9]). Konkrétní příklad, jímž je doprovozena poslední, devátá formulace, rovněž nepřipouští pochybnost, že první axiom zahrnuje i rovnoměrnou rotaci.

## 4. První axiom v překladech a interpretacích

Newtonova Principia se dočkala řady překladů v širokém časovém období od jejich posledního originálního (latinského) vydání [2] až po dnešek. Podíleli se na nich renomovaní fyzikové a filosofové, včetně českých (viz [3]–[6], [8], [17]–[33], [35]). Zůstali však jen u přímočarého pohybu, s částečnou výjimkou [34], kde autor možnost rovnoměrné rotace v prvním zákonu připouští. Změně terminologie na „motus in directum" a druhé větě verze 7) MS. Xa, Lex 1 však buď nevěnovali pozornost, nebo si těchto odlišností všimli, ale dospěli k závěru, že termín „in directum" je synonymem termínu „in linea recta" (konkrétně [6]). Většina následujících překladů byla sice uvedena již v [9], pro pohodlí čtenáře je však rekapitulujeme v chronologických přehledech a s doplněním převodu do češtiny.

### A. Motte (1729) [3]

Law I. Every body continues in its state of rest, or of uniform motion *in a right line*, unless it is compelled to change that state by forces impressed upon it.

Zákon I. Každé těleso setrvává ve svém stavu klidu nebo rovnoměrného pohybu *po přímce*, dokud není nuceno změnit tento stav silami, které na ně působí.

### Marquise du Châtelet (1759) [4]

Première loi. – Tout corps persévère dans l'état de repos ou de mouvement uniforme *en ligne droite* dans lequel il se trouve, a moins que quelque force n'agisse sur lui et ne le contraigne a changer d'état.

První zákon. – Každé těleso setrvává ve stavu klidu nebo rovnoměrného pohybu *po přímce*, na které se nachází, dokud na ně nepůsobí nějaká síla a nedonutí je stav změnit.

### J. Ph. Wolfers (1872) [5]

1. Gesetz. Jeder Körper beharrt in seinem Zustande der Ruhe oder der gleichförmigen *geradlinigen* Bewegung, wenn er nicht durch einwirkende Kräfte gezwungen wird, seinen Zustand zu ändern.

1. zákon. Každé těleso setrvává ve svém stavu klidu nebo rovnoměrného *přímočarého* pohybu, dokud není působícími silami donuceno svůj stav změnit.

**W. Thomson, P. G. Tait (1879) [17]**

Every body continues in its state of rest or of uniform motion *in a straight line*, except in so far as it may be compelled by force to change that state.

Každé těleso setrvává ve svém stavu klidu nebo rovnoměrného pohybu *po přímce*, ledaže je silou nuceno onen stav změnit.

**O. D. Chvolson (1897) [18]**

Всякое тело сохраняет состояние покоя или равномерново *прямолинейново* движения, пока действие сил не заставит его изменить своего состяния (движения).

Každé těleso zachovává stav klidu nebo rovnoměrného *přímočarého* pohybu, dokud působení sil je nedonutí svůj stav změnit.

**A. N. Krylov (1915) [19]**

Every body continues to preserve its state of rest or uniform motion *in a right line*, until it is and so far it is not compelled to change that state by forces impressed upon it (emphasis added).

Každé těleso setrvává ve svém stavu klidu nebo rovnoměrného pohybu *po přímce*, dokud není působícími silami nuceno tento stav změnit.

**F.-M. Biarnais (1985) [20]**

Loi I. Tout corps persévère en son état de repos ou de mouvement *rectiligne* uniforme, sauf si des forces „imprimées" le contraignent d'en changer.

Zákon I. Každé těleso setrvává ve svém stavu klidu nebo *přímočarého* rovnoměrného pohybu, ledaže je „vtištěné" síly donutí jej změnit.

**S. Hawking (1985) [20][6)]**

Newton substitua sa premiére loi: „Tout corps demeure à l'état de repos, ou poursuit un mouvement *rectiligne* uniforme, à moins qu'il ne soit soumis à une force extérieure."

[6)] V předmluvě k [20]. Pozn. MČ.

Newton nahradil svůj první zákon: Každé těleso zůstává ve stavu klidu nebo koná *přímočarý* rovnoměrný pohyb, ledaže je podrobeno vnější síle.

**C. L. Tascón (1998) [21]**

Toda praticula material persevera en su estado de reposo o de movimiento uniforme *en linea recta*, salvo que se vea forzada a cambiar ese estado por acción de una forza impresa.

Každá hmotná částice setrvává ve svém stavu klidu nebo rovnoměrného pohybu *po přímce*, pokud není nucena změnit tento stav působením síly.

**I. B. Cohen (1999) [6]**

Every body perseveres in its state of being at rest or of moving uniformly *straight forward*, except insofar as it is compelled to change its state by forces impressed.

Každé těleso setrvává ve svém stavu klidu nebo v rovnoměrném pohybu *přímo vpřed*, kromě případu, kdy je nuceno změnit svůj stav působením sil.

**Č. Strouhal, B. Kučera (1910) [23]**

Každé těleso setrvává ve svém stavu klidu nebo pohybu rovnoměrného *přímočarého*, leč by vnějšími silami bylo nuceno stav svůj měniti.

**V. Novák (1919) [24]**

Každé těleso setrvává ve svém stavu klidu nebo pohybu rovnoměrného, *přímočarého*, leč by vnějšími silami bylo nuceno stav svůj změniti.

**B. Kučera (1921) [25]**

Každé těleso setrvává ve svém stavu klidu nebo *přímočarého* rovnoměrného pohybu, není-li nuceno vtisknutými silami stav svůj změniti.

**F. Záviška (1933) [26]**

Každé těleso setrvává ve svém stavu klidu nebo rovnoměrného pohybu *v přímé čáře*, leč by bylo vnějšími silami nuceno stav svůj změniti.

**F. Nachtikal (1946) [27]**

Každé těleso setrvává ve stavu klidu nebo rovnoměrného *přímočarého* pohybu, pokud vnějšími silami není nuceno stav onen měniti.

**J. B. Slavík (1962) [28]**

Každé těleso setrvává ve stavu klidu nebo rovnoměrného *přímočarého* pohybu, není-li působením jiných těles (působením vnějších sil) nuceno tento stav měnit.

**Z. Horák, F. Krupka (1966) [29]**

Každé těleso setrvává v stavu klidu nebo rovnoměrného *přímočarého* pohybu, není-li vnějšími silami nuceno tento stav měnit.

**A. Hlavička a kol. (1971) [30]**

Každé těleso setrvává v klidu nebo v pohybu rovnoměrném *přímočarém*, pokud není nuceno působením vnějších (vtištěných) sil tento stav měnit.

**A. Havránek (1972) [31]**

Těleso setrvává v klidu nebo v rovnoměrném *přímočarém* pohybu, dokud není nuceno vnějšími silami[7)] tento stav měnit.

**B. Havelka (1974) [32]**

Každá částice setrvává ve stavu klidu nebo rovnoměrného *přímočarého* pohybu, je-li ponechána sama sobě, tj. nepůsobí-li na ni vnější síla. Platí tedy $\boldsymbol{a} = \mathbf{0}$, když $\boldsymbol{F} = \mathbf{0}$. Klid a rovnoměrný přímočarý pohyb jsou rovnocenné přirozené stavy částice (tělesa).

**V. Hajko, D. Szabó (1974) [33]**

Teleso je v pokoji alebo koná rovnomerný *priamočarý* pohyb, kým naň nepôsobí nejaká sila.

**J. Kvasnica a kol. (1988) [34]**

Každé těleso setrvává ve stavu klidu nebo rovnoměrného *přímočarého* pohybu, dokud není vnějšími silami nuceno tento stav změnit.

Autoři [34] dále pokračují: Pokud jde o výše uvedenou formulaci zákona setrvačnosti, je zarážející, že se nezmiňuje o rotačním pohybu těles, takže je obecně použitelná jen na pohyb hmotného bodu. Na základě rozboru různých vydání překladů Newtonových Principií dospěli někteří badatelé k přesvědčení, že správný český překlad by měl znít:[8)]

[7)] Někdy zde bývá uváděno „působením jiného tělesa“. Pozn. JM

[8)] Autor byl pravděpodobně obeznámen s některou z prací [10]–[12]. Pozn. JM

*Každé těleso, které se nachází ve stavu klidu nebo rovnoměrného pohybu v daném směru, setrvává ve svém stavu, ledaže je silami přinuceno jej změnit.*

Ten totiž vystihuje v nejstručnější podobě skutečnost, kterou Newton podrobně uvádí v komentářích k tomuto zákonu, že si při uvedeném pohybu těleso zachovává jak velikost, tak směr rychlosti translačního pohybu, tak velikost i směr rychlosti otáčení (úhlové rychlosti $\omega$).

### J. Franek (2020) [35]

Každé těleso setrvává ve svém stavu klidu anebo *rovnoměrného přímého pohybu*, dokud ho vtištěné síly nedonutí změnit jeho stav.

V nejnovějším díle [35], zabývajícím se interpretací Newtonových zákonů, překladatel nijak neinterpretuje pojem „rovnoměrný přímý pohyb“, jenž použil pro latinské „motus uniformiter in directum“. Vedle samotného překladu prvního axiomu uvádí sice i vlastní překlad Newtonova komentáře k jeho poslední formulaci prvního axiomu (viz Principia, Lex I, 1687, 1713), nemá pravděpodobně na mysli „direkční pohyb“ ve smyslu naší definice, i když právě Newtonův příklad poskytuje zcela dostatečnou argumentaci ve prospěch názoru, že o direkční pohyby v prvním axiomu jde. Rovněž J. Novotný, jeden z autorů a editorů publikace [35], se vyjadřuje k zahrnutí rotace do prvního axiomu skepticky s odvoláním na Cohenovu na první pohled mylnou a ne zcela jasnou interpretaci (viz [6]), podle níž

*„. . . má (Newton) pouze na mysli, že při otáčení tělesa kolem osy je složka síly do směru pohybu nulová, a rychlost rotace se proto nemění.“*

Novotný uzavírá:

*„Zdá se proto, že požadavek přesnějšího překládání Newtonova textu je oprávněný. Jiná otázka je, zda s tím musíme spojovat nutnost změny tradiční axiomatiky oproti dosavadnímu chápání.“*

Tento závěr je nepochybně překvapivý, a to proto, že „tradice dosavadního chápání“ Newtonovy axiomatiky nevznikla ničím jiným než vytrvalým opakováním z hlediska pravého obsahu nepřesných překladů s následnými mylnými interpretacemi prvního axiomu.

Cohenova interpretace prvního axiomu v jeho překladu Principií (viz [6]) je podrobně rozebrána v [9]. Zde zmiňme pouze skutečnost, že Cohen jako jediný z citovaných překladatelů Principií zaznamenal a komentoval Newtonův posun formulace od „in linea recta“ k „in directum“. Interpretačně však zůstal u rovnoměrného přímočarého pohybu. Konkrétně píše:

*Kdekoli to bylo možné, pokusili jsme se postupovat podle Newtonovy vlastní volby termínu. Například na řadě míst, jako v prvním zákoně, Newton píše o pohybu „uniformiter in directum“, což uvádíme jako „rovnoměrně přímo vpřed“, kde „přímo“ znamená „v přímé nebo rovné čáře“. Vyhnuli jsme se použití slov „přímá čára“, která Newton sám vědomě opustil, když předtím psal „in linea recta“ v traktátu De Motu v předběžné verzi prvního zákona. Samozřejmě, pohyb „rovnoměrně přímo vpřed“ musí být nutně rovnoměrný přímočarý.*

Na rozdíl od řady jiných překladatelů a interpretací Cohen uznával první zákon jako nezávislý axiom (tj. není zvláštním případem druhého), argumentoval však nesprávnou domněnkou, že v prvním zákonu měl Newton na mysli sílu působící „impulsně“ (jednorázově), zatímco v druhém sílu „působící spojitě“.

## 5. Druhý axiom a důsledky

Druhý axiom, který pro pohodlí čtenáře spolu s překladem zrekapitulujeme, doprovází Newton stejně jako u axiomu prvního důležitým komentářem.

**Lex II**

*Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impressae & sieri secundum lineam rectam qua vis illa imprimitur.*
Změna hybnosti je úměrná působící hybné síle a děje se podél přímky, v níž ona síla působí.

*Si vis aliqua motum quemvis generet; dupla duplum, tripla triplum generabit sive simul & semel, sive gradatim & successive impressa fuerit. Et hic motus (quoniam in aendem semper plagam cim vi generatrice determinatur) si corpus antea movebatur, motui ejus vel conspiranti additur, vel contrario subducitur, vel obliquo oblique adjicitur & cum eo secundum utriusque determinationem componitur.*
Jestliže nějaká síla vyvolává určitou změnu hybnosti, síla dvojnásobná vyvolává změnu dvojnásobnou, síla trojnásobná změnu trojnásobnou, ať již zapůsobí naráz, anebo působí krok za krokem. A tato změna hybnosti (protože má stejný směr jako síla, která ji vyvolává), jestliže se těleso předtím pohybovalo, se k jeho hybnosti buď souhlasného směru přičte, nebo se od protisměrně orientované odečte, anebo se ke kose orientované hybnosti kose připojí a složí se s ní.

K druhému axiomu se úzce vztahuje šest tzv. Corollarií, majících charakter důsledků, rovněž s vysvětlujícími komentáři. První z nich uvedeme i s komentářem, neboť představuje podrobnější výklad k zacházení se silami působícími na těleso (i když je již dostatečně zřejmý z příkladu dokumentujícího druhý zákon). V dnešním pojetí je obvykle nazýván principem superpozice sil. Další tři Corollaria uvedeme pouze v originálním znění a v překladu do češtiny. Corollaria 5 a 6 se přímo nevztahují k naší diskusi, proto je neuvádíme.

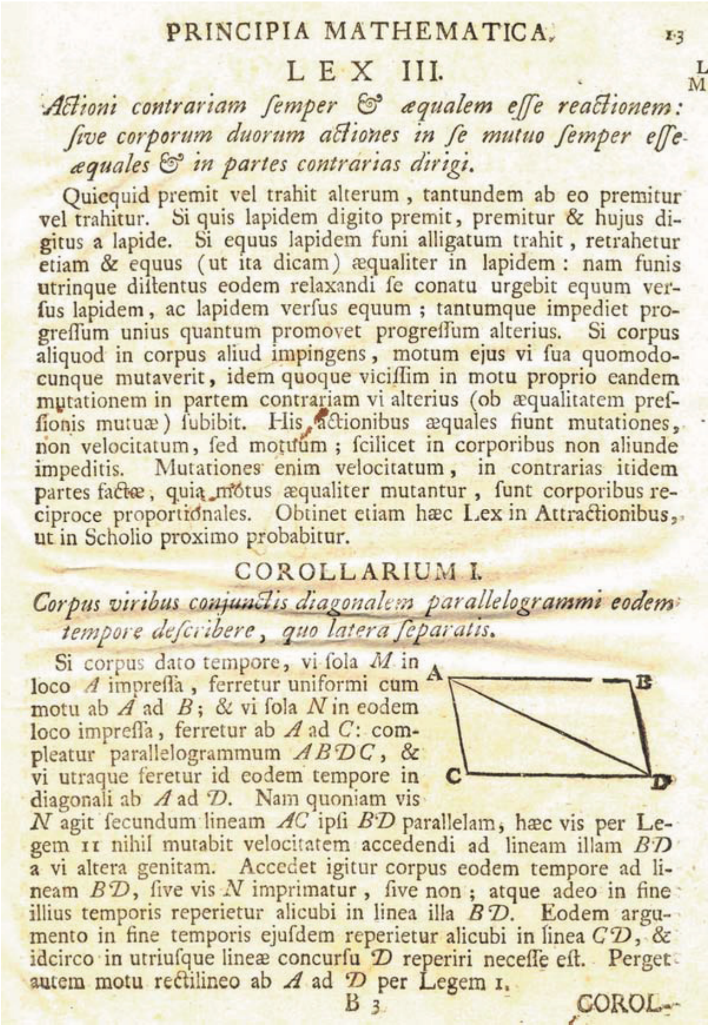
**Corollarium I**

*Corpus viribus conjunctis diagonalem parallelogrammi eodem tempore describe, quo latera separatis.*

Těleso opíše při působení sloučených sil úhlopříčku rovnoběžníku za tutéž dobu, za kterou opíše strany při působení jednotlivých sil.

*Si corpus dato tempore, vi sola M in loco A impressa, ferretur uniformi cum motu ab A ad B; & vi sola N in eodem loco impressa ferretur ab A ad C; compleatur parallelogrammum ABDC, & vi utraque feretur id eodem tempore in diagonali ab A ad D. Nam quoniam vis N agit secundum lineam rectam AC ipsi BD parallelam, haec vis per Legem II nihil mutabit velocitatem accedendi ad lineam illam BD a vi alteram genitam. Accedet igitur corpus eodem tempore da lineam BD, sive vis N imprimatur, sive non; atque adeo in fine: illius temporis reperietur alicubi in linea illa BD. Eodem argumento in fine temporis ejusdem reperietur alicubi in linea CD, & idcirco in utrinsque lineae concursu D reperiri necesse est. Perget autem motu rectilineo ab AB ad AD per Legem 1.*

Jestliže se těleso v dané době přesune rovnoměrným pohybem vlivem zapůsobení jen síly $M$ v místě $A$ z $A$ do $B$ a zapůsobením jen síly $N$ v témž místě z $A$ do $C$, přesune se při zapůsobení obou sil za tutéž dobu po úhlopříčce doplněného rovnoběžníku $ABDC$ z $A$ do $D$. Protože totiž síla $N$ zapůsobí v čáře $AC$ rovnoběžné s $BD$, nezmění vzhledem k Zákonu II nijak rychlost postupu k oné čáře $BD$ vzniklou díky druhé síle. Těleso tedy dospěje k čáře $BD$ za stejnou dobu, ať síla $N$ působí, nebo ne, či lépe řečeno na konci oné doby se objeví někde na oné čáře $BD$. S týmž odůvodněním se objeví na konci téže doby někde na čáře $CD$, a proto se musí objevit v průsečíku $D$ obou čar. Postupuje ovšem přímočarým pohybem z $A$ do $D$ podle Zákona I. (Vlastní Newtonův nákres viz obr. 2.)



PRINCIPIA MATHEMATICA. 13

LEX III.

*Actioni contrariam semper & æqualem esse reactionem: sive corporum duorum actiones in se mutuo semper esse æquales & in partes contrarias dirigi.*

Quicquid premit vel trahit alterum, tantundem ab eo premitur vel trahitur. Si quis lapidem digito premit, premitur & hujus digitus a lapide. Si equus lapidem funi alligatum trahit, retrahetur etiam & equus (ut ita dicam) æqualiter in lapidem: nam funis utrinque distentus eodem relaxandi se conatu urgebit equum versus lapidem, ac lapidem versus equum; tantumque impediet progressum unius quantum promovet progressum alterius. Si corpus aliquod in corpus aliud impingens, motum ejus vi sua quomodocunque mutaverit, idem quoque vicissim in motu proprio eandem mutationem in partem contrariam vi alterius (ob æqualitatem pressionis mutuæ) subibit. His actionibus æquales fiunt mutationes, non velocitatum, sed motuum; scilicet in corporibus non aliunde impeditis. Mutationes enim velocitatum, in contrarias itidem partes factæ, quia motus æqualiter mutantur, sunt corporibus reciproce proportionales. Obtinet etiam hæc Lex in Attractionibus, ut in Scholio proximo probabitur.

COROLLARIUM I.

*Corpus viribus conjunctis diagonalem parallelogrammi eodem tempore describere, quo latera separatis.*

Si corpus dato tempore, vi sola *M* in loco *A* impressa, ferretur uniformi cum motu ab *A* ad *B*; & vi sola *N* in eodem loco impressa, ferretur ab *A* ad *C*: compleatur parallelogrammum *ABDC*, & vi utraque feretur id eodem tempore in diagonali ab *A* ad *D*. Nam quoniam vis *N* agit secundum lineam *AC* ipsi *BD* parallelam, hæc vis per Legem II nihil mutabit velocitatem accedendi ad lineam illam *BD* a vi altera genitam. Accedet igitur corpus eodem tempore ad lineam *BD*, sive vis *N* imprimatur, sive non; atque adeo in fine illius temporis reperietur alicubi in linea illa *BD*. Eodem argumento in fine temporis ejusdem reperietur alicubi in linea *CD*, & idcirco in utriusque lineæ concursu *D* reperiri necesse est. Perget autem motu rectilineo ab *A* ad *D* per Legem I.

B 3 COROL-

Obr. 2

## Corollarium II

*Et hinc patet compositio vis directtæ AD ex viribus quibusvis obliquis AB & BD, & vicissim resolutio vis cujusvis directæ AD in obliquas quascunque AB & BD. Qutæ quidem compositio & resolutio abunde confirmatur ex Mechanica.*

Odtud je zřejmý způsob složení přímé síly $AD$ z jakýchkoli různoběžných sil $AB$ a $BD$, a naopak rozklad jakékoli přímé síly $AD$ do libovolných různoběžných sil $AB$ a $BD$. Takovéto složení a rozklad jsou hojně potvrzeny v mechanice.

**Corollarium III**

*Quantitas motus qu? colligitur capiendo summam motuum factorum ad eandem partem, & differentiam factorum ad contrarias, non mutatur ab actione corporum inter se.*

Působení těles na sebe navzájem nemění hybnost celku, kterou stanovíme tak, že sečteme hybnosti na jednu a touž stranu a odečteme hybnosti do opačných stran.

**Corollarium IV**

*Commune gravitatis Centrum, corporum duorum vel plurium, ab actionibus corporum inter se non mutat statum suum vel motus vel quietis; & propterea corporum omnium in se mutuo agentium (exclusis actionibus & impedimentis externis) commune Centrum gravitatis vel quiescit vel movetur uniformiter in directum.*

Společné těžiště dvou nebo více těles nezmění svůj stav pohybu nebo klidu v důsledku působení těles na sebe navzájem, a proto společné těžiště všech těles, jež na sebe vzájemně působí, je při vyloučení vnějších působení a překážek buď v klidu, anebo se pohybuje rovnoměrně přímočaře.

Zaměřme se na výklad prvního Corollaria. Newtonova formulace a jeho komentář nejsou při prvním čtení a bez hlubšího zamyšlení příliš jasné, a to vzhledem k tehdejší absenci potřebné matematiky. Ve spojení s komentářem k samotnému druhému axiomu je situace již srozumitelnější. Newton v něm slovně (a poměrně srozumitelně) zavádí pravidlo pro skládání rychlostí, resp. hybností. První Corollarium sám o sobě srozumitelný není a ke komentáři je třeba připojit vysvětlení. Vyjádření: „…těleso se v dané době přesune rovnoměrným pohybem vlivem zapůsobení jen síly $\boldsymbol{M}$ v místě $A$ z $A$ do $B$…“ znamená, že síla $\boldsymbol{M}$ působila ve směru úsečky $AB$ na těleso (hmotný bod) tak, že z nulové rychlosti získalo v bodě $A$ určitou rychlost $\Delta \boldsymbol{v}_M$, se kterou se pak, již bez působení sil, pohybovalo rovnoměrně z bodu $A$ do bodu $B$. Vzdálenost $AC$ urazilo za dobu $\Delta t$. Kdyby na těleso působila síla $\boldsymbol{N}$ ve směru úsečky $AC$ tak, že by tělesu v bodě $A$ udělila rychlost $\Delta \boldsymbol{v}_N$, se kterou by se pak pohybovalo bez působení sil rovnoměrně, urazilo by za dobu $\Delta t$ vzdálenost

$AC$. Kdyby na těleso s nulovou počáteční rychlostí zapůsobily obě síly, získalo by (z nulové rychlosti) výslednou rychlost $\Delta\boldsymbol{v}$. Touto rychlostí by pak bez působení sil dospělo za (stále stejnou) dobu $\Delta t$ do bodu $D$, který je koncovým bodem úhlopříčky rovnoběžníku $ABDC$. V souladu s druhým zákonem je ovšem

$$m\frac{\Delta\boldsymbol{v}_M}{\Delta t} \sim \boldsymbol{M} \quad \text{a} \quad m\frac{\Delta\boldsymbol{v}_N}{\Delta t} \sim \boldsymbol{N}.$$

Působí-li tedy na těleso obě síly současně, mají na výsledný pohyb stejný vliv jako jediná síla vzniklá jejich složením podle stejného pravidla, jako se skládají změny hybnosti, resp. rychlosti (vztažené na jednotku času) získané působením jednotlivých sil. Corollarium II je jen zobecněním Corollaria I.

Pozoruhodné jsou ovšem Corollaria III a IV, které jsou skutečně důsledky, a to důsledky aplikace druhého a třetího axiomu na translační pohyb soustavy těles. Představují totiž první impulsovou větu (Corollarium III) a její speciální případ pro pohyb středu hmotnosti tělesa (Newtonem nazývaného těžiště) při absenci vnějších sil (Corollarium IV). K druhé impulsové větě Newton vinou nedostatku potřebné matematiky již nedospěl. (Pokud by se tak stalo, jistě by s ohledem na skutečnost, že axiomy formuloval vůči absolutnímu prostoru, první axiom vypustil.)

Se smyslem druhého axiomu jasně osvětleným doprovodným komentářem kontrastuje interpretace Ernsta Macha, který nesprávně považuje druhý axiom za definici síly (viz kapitolu 7 v druhé části článku).

## 6. Třetí axiom – zákon interakce

V třetím axiomu užívá Newton terminologii, která bez podrobnějšího vysvětlení může vyvolávat či (kritičtěji řečeno) vyvolává mylné interpretace. Zřejmě proto doplnil Newton i tento axiom poměrně obsáhlým vysvětlujícím komentářem. Pro pohodlnější čtení opět zrekapitulujeme originální znění i náš překlad.

*Actioni contrariam semper & æqualem esse reactionem: sive corporum duorum actiones in se mutuo semper esse æquales & in partes contrarias dirigi.*

Akci je reakce vždy protisměrná a je stejně velká jako ona: neboli působení dvou těles na sebe navzájem jsou vždy stejně velká a směřují na opačné strany.

*Quicquid premit vel trahit alternum, tantundem ab eo premitur vel trahitur. Si quis lapidem digito premit, premitur & hujus digitus a lapide. Si equus lapidem funi alligatum trahit, retrahetur etiam & equus (ut ita dicam) æqualiter in lapidem: nam unis utrinque distentus eodem relaxandi se conatu urgebit equum versus lapidem, ac lapidem versus equum; tantumque impediet progressum unius quantum promovet progressum alterius. Si corpus aliquod in corpus aliud impingens, motum ejus vi sua quomodocunque mutaverit, idem quoque vicissim in motu proprio eandem mutationem in partem contrariam vi alterius (ob æqualitatem pressionis mutuæ) subibit. His actionibus æquales siunt mutationes, non velocitatum sed motuum; scilicet in corporibus non aliunde impeditis. Mutationes enim velocitatum, in contrarias itidem partes factæ, quia motus æqualiter mutantur, sunt corporibus reciproce proportionales. Obtinet etiam hæc Lex in Attractionibus, ut in Scholio proximo probabitur.*

Cokoli tlačí nebo táhne něco druhého, je právě tolik tlačeno nebo taženo jím. Tlačí-li kdo prstem na kámen, je tlačen i jeho prst kamenem. Táhne-li kůň kámen přivázaný na lano, rovněž i kůň je tažen zpět (abych tak řekl) stejnou měrou ke kameni; neboť lano napnuté na jedné i druhé straně ve snaze zbavit se tam napětí bude přitahovat koně ke kameni a také kámen ke koni; a tak mnoho zadržuje postup vpřed jednoho, jak mnoho napomáhá k postupu vpřed druhého. Jestliže nějaké těleso narážející na jiné těleso jeho pohyb svou silou jakkoli změní, dozná zase i ono samo u vlastního pohybu dík síle druhého touž změnu v opačném směru (pro rovnost obojího vzájemného tlaku). Těmito akcemi dochází ke stejným změnám, nikoli rychlostí, ale hybností, ovšem jen u těles neovlivněných odjinud. Změny rychlostí, nastalé rovněž v opačných směrech, protože hybnosti se mění stejně, jsou nepřímo úměrné hmotnostem. Tento zákon platí i u přitažlivosti, jak bude dokázáno v nejbližším Scholiu.

Jakkoli v samotném axiomu používá Newton poněkud zavádějící dvojici termínů „akce a reakce", vyvolávající představu časové následnosti a také příčinnosti, je v jeho komentáři a příkladech patrná snaha o vysvětlení, že se o nic takového nejedná. Příklad s koněm sice zpočátku zcela přesvědčivý není (kůň jako živá bytost „se rozhodne" táhnout za provaz, na němž je uvázán kámen – „akce"), podrobnější výklad „neboť lano napnuté na jedné i druhé straně ve snaze zbavit se tam napětí bude přitahovat koně ke kameni a také kámen ke koni" tuto představu přece jen narušuje a vede interpretaci správným směrem. Z komentáře a příkladů jsou zřejmé další informace, které bychom bez velmi pečlivého přemýšlení v samotném znění axiomu nehledali nebo nenašli: Úvaha o opačných změnách rychlosti úměrných hmotnostem potvrzuje (vedle Definitio II) fakt, že slovo „motus“ používal Newton nejen jako termín vyjadřující pohyb kvalitativně, což by ve zmíněné úvaze nemělo smysl, ale rozuměl jím také hybnost. V poslední větě dává Newton na srozuměnou, že axiom se netýká jen vzájemného působení, při němž jsou tělesa v přímém kontaktu (typicky tlakové síly), ale i působení na dálku, v daném případě přitažlivá gravitační interakce. Ať tak či tak, terminologie „zákon akce a reakce“, která ve fyzice doslova zapustila hluboké kořeny (je snadno zapamatovatelná a „nakažlivá“) není z hlediska správného pochopení třetího axiomu příliš vhodná. Podstatu třetího axiomu vystihují jedině správně slovní spojení typu „interakce těles“, „vzájemné působení těles“, „interakční síly“ apod. Jinými slovy – třetí axiom není „zákon akce a reakce“, ale „zákon interakce“.

## Literatura

[1] Newton, I.: *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica.* Amsterdam, 1723.

[2] Newton, I.: *Philosophiæ naturalis principia mathematica: perpetuis commentariis illustrata communi studio Thomæ Le Seur et Francisci Jacquier.* Editio nova. Glaguæ, Vol. I, II, III – 1822. Editio prima: Romæ, Vol. I – 1739; Vol. II – 1740; Vol. III – 1742.

[3] Newton, I.: *Sir Isaac Newton's Mathematical Principles of Natural Philosophy and his System of the World.* Tr. Andew Motte, revised Florian Cajori, University of California Press, Berkeley, 1934.

[4] Newton, I.: *Les Principes Mathématiques de la Philosophie Naturelle.* Traduction de la Marquise du Châtelet augmentée des commentaires de Clairaut, édition Blanchart, Paris, 1966, (fac-simile d'une édition de 1759).

[5] Newton, I.: *Sir Isaac Newton's Mathematische Principien der Naturlehre. Mit Bemerkungen und Erläuterungen herausgegeben von Prof. Dr. J. Ph. Wolfers.* Verlag von Robert Oppenheim, Berlin, 1872.

[6] Newton, I.: *The Principia. Mathematical Principles of Natural Philosophy. A new translation by I. Bernard Cohen and Anne Whitman assisted by Julia Budenz. Preceeded by A guide to Newton's Principia by I. Bernard Cohen.* University of California Press, Berkeley–Los Angeles–London, 1999.

[7] Newton, I.: *De Motu Corporum Liber Primus*, 1684, De motu corporum in mediis regulariter cedentibus. MS Add. 3965.5. Zdroj: Cambridge University Library, Cambridge, UK.

[8] Herivel, J.: *The Background to Newton's Principia: A Study of Newton's Dynamical Researches in the Years 1664–84*. Oxford University Press, Oxford, 1965.

[9] Černohorský, M.: Translačně-rotační první axiom 1687 (1726) ve světle Newtonových rukopisů. *Čs. čas. fyz.*, roč. 62 (2012), č. 5-6, s. 331–340.

[10] Černohorský, M.: Newtonova formulace prvního pohybového zákona. *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*, roč. 20 (1975), s. 344–349.

[11] Černohorský, M.: Nová formulace Newtonova prvního pohybového zákona. *Folia facultatis scientiarum naturalium Universitatis Purkynianæ Brunensis*, roč. 18 (1977), Physica 23, opus 1, s. 5–36.

[12] Černohorský, M.: Problém interpretace Newtonovy formulace prvního pohybového zákona. *Folia facultatis scientiarum naturalium Universitatis Purkynianæ Brunensis*, roč. 20 (1979), Physica 28, opus 3, s. 5–32.

[13] Černohorský, M.: Devět Newtonových formulací prvního pohybového zákona. In: Černohorský, M. (red.): *Pocta Newtonovi.* Sborník. Pracovní materiály seminářů Jednoty čs. matematiků a fyziků. Odborná skupina Pedagogická fyzika Fyzikální vědecké sekce JČSMF, Brno, 1986, s. 36–55, 2. rozšířené vydání, Brno, 1986, s. 70–86.

[14] Černohorský, M.: The rotation in Newton's wording of his first law of motion. In: Kamiński, W. A. (red.): *Proceedings of the Lublin Tercentary Celebration Isaac Newton's Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica.* 15–17 October 1987, Lublin, Poland, World Scientific, Singapore–New Jersey–Hong Kong, 1988, s. 28–46.

[15] Černohorský, M.: Mach's criticism on Newton's axiomatization and the Rotation in Lex I. In: Prosser, V., Folta, J. (eds.): *Ernst Mach and the Development of Physics.* Conference papers, Karolinum, Praha, 1991, s. 267–270.

[16] Černohorský, M.: Newtonova translačně-rotační formulace prvního zákona pohybu. In: Dub, P., Musilová, J. (eds.): *Ernst Mach – Fyzika – Filosofie – vzdělávání.* Muni Press, Masarykova univerzita, Brno, 2010, s. 248–254.

[17] Thomson, W., Tait, P. G.: *Treatise on Natural Philosophy.* Vol. I. Part I. New Edition, Cambridge University Press, Cambridge, 1879.

[18] Chvolson, O. D.: *Kurs fiziki I.* Izd. 5, Gosudarstvennoe Izdatelstvo, Berlin, 1923.

[19] Krylov, A. N.: *První ruský překlad Principií z latiny*, 1915. (zde citace v angličtině).

[20] Newton, I.: *De Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica. Les Principes Mathématiques de la Philosophie Naturelle. Préface de Stephen Hawking.* Traduction nouvelle par Marie-Françoise Biarnais. Christian, Bourgoi, 1985. (S. Hawking: Newton substitua sa premiere loi: „Tout corps demeure a l'état de repos, ou poursuit un mouvement rectiligne uniforme, a moins qu'il ne soit soumis a une force extérieure.")

[21] Tascón, C. L.: *Mécanica Newtoniana.* Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Bogota, Colombia, 1998.

[22] Rouse Ball, W. W.: *An Essay on Newton's "Principia".* Macmillan and Co., London, 1893, reprint with an introd. by I. B. Cohen, Johnson Reprint Corp., New York–London, 1972.

[23] Strouhal, Č., Kučera, B.: *Mechanika.* 2. vyd., Jednota českých mathematiků, Praha, 1910, (1. vyd. 1900 nebo spíše 1901 – Předmluva datována 9. 9. 1900, předmluva k 2. vyd. datována v září 1909).

[24] Novák, V.: *Fyzika I.* JČMF, Praha, 1919.

[25] Kučera, B.: *Základy mechaniky tuhých těles.* JČMF, Praha, 1921.

[26] Záviška, F.: *Mechanika.* Jednota čs. matematiků a fyziků, Praha, 1933.

[27] Nachtikal, F.: *Technická fyzika.* 3. vyd., JČMF, Praha, 1946.

[28] Slavík a kol., J. B.: *Základy fysiky.* ČSAV, Praha, 1962.

[29] Horák, Z., Krupka, F.: *Fyzika. Příručka pro fakulty strojního inženýrství.* SNTL/SVTL, Praha, 1966.

[30] Hlavička, A. a kol.: *Fyzika pro pedagogické fakulty.* 1971.

[31] Havránek, A.: *Mechanika I. Hmotný bod a tuhé těleso.* Praha, 1972.

[32] Havelka, B.: *Základní kurs fyziky 1.* Praha, 1974.

[33] Hajko, D., V.Szabó: *Všeobecná fyzika 1.* UPJŠ, Košice, 1974.

[34] Kvasnica a kol., J.: *Mechanika.* Academia, Praha, 1988.

[35] Franek, J., Špelda, D., Novotný, J., Svobodová, J., Durnová, H.: *Isaac Newton: Matematické principy přírodní filosofie.* Fontes scientiæ 1., Togga, Praha–Brno, 2020.

# Jak provokovat, když dostanete úlohu o pádu železné a dřevěné koule I

*Leoš Dvořák, MFF UK, Praha*

Dostala se mi do rukou úloha zhruba tohoto znění:
*Ze stejné výšky pustíme železnou a dřevěnou kouli. Která dopadne na zem dřív?*

Na první pohled to možná zní jako ne moc zajímavá školní úloha. Po praktické stránce se nás skutečně asi příliš nedotkne, tedy pokud nám jedna z těch koulí nepadá přímo na nohu. Ale zkusme se na ni podívat jako na problém, při jehož diskusi a řešení můžeme trochu provokovat.

## Možné odpovědi

Jak by šlo odpovědět na výše uvedenou úlohu?

a) Zeptáme-li se laika, nejspíš odpoví, že železná koule dopadne dřív. To si ostatně mysleli už staří Řekové; soudili, že těžší tělesa padají rychleji. Odpovídá to i zkušenosti z běžného života: kámen padá rychleji než třeba zmuchlaný papírový kapesník.
b) Poučenější člověk vzpomene, jak se ve škole učil, že tělesa padají s tíhovým zrychlením, a to je pro všechna tělesa stejné. To znamená, že železná a dřevěná koule by měly dopadnout současně.
c) Ještě poučenější člověk ovšem konstatuje, že roli hraje i odpor vzduchu. A ten bude více zpomalovat kouli lehčí (méně hmotnou) než kouli těžší. Na zem tedy přece jen dřív dopadne železná koule.
d) Provokatér a šťoura se zašklebí, prohlásí něco typu „přijde na to…“ a začne vymýšlet, jak by všechno mohlo být jinak a zda by případně nemohla dřevěná koule dopadnout dřív. Takové úvahy mohou být zajímavé a můžeme se při nich i leccos přiučit.

Pojďme se proto vžít do role „provokatérů“ a „šťourů“ a hledat argumenty, co by mohlo být jinak. Budeme přitom vycházet ze známé fyziky. Vyloučíme tedy třeba antigravitaci nebo možnost, že by nějakým magickým zásahem obě koule získaly křídla a odletěly bůhvíkam. Sice bychom si tím mohli pěstovat fantazii, ale vůči fyzikálnímu problému by to byla provokace trochu laciná.

**Co může ovlivnit výsledek**

Co by mohlo nastat, aby neplatila výše uvedená odpověď b) nebo přesnější c)? K tomu je vhodné zamyslet se, co vše může čas dopadu koulí ovlivnit. Možností je řada, zkusíme vymyslet i trochu netradiční.[1)]

1) Hloubka pod oběma tělesy (tj. dráha, kterou tělesa urazí).

Na první pohled se zdá, že ze zadání úlohy jasně plyne, že obě koule urazí při pádu na zem stejnou vzdálenost. Ale kdyby železná koule padala do studny či jámy a dřevěná koule na zem vedle ní, zřejmě by dřevěná dopadla dřív. (Alespoň pokud by rozdíl drah obou těles nebyl příliš malý. Dřevěná koule puštěná z výšky jednoho metru nad zemí, by jistě dopadla dřív než železná, padající do jámy hluboké dva metry.) Abychom se této možnosti vyhnuli, musíme upřesnit, že obě koule při pádu urazí stejnou vzdálenost.

2) Kdy tělesa vypouštíme.

Další možnost, jak obelstít zadání, je odpověď: *Dřív dopadne koule, kterou jsme dřív pustili. Když dřív pustíme dřevěnou, dopadne dřív dřevěná.* Můžete samozřejmě volat, že to je podfuk, že v zadání úlohy se myslí, že obě koule pustíme současně. Ale uvedeno to tam není. Takže jsme se poučili, že v zadání je potřeba uvést, že koule pouštíme současně nebo že nám jde o porovnání dob pádu.

3) Kde tělesa padají I.

Další argument (který se opět může jevit trochu „podpásový"): *Když dřevěnou kouli pustíme na Zemi a železnou na Měsíci, tak dřevěná dopadne dřív.* Aha, takže zadání musíme ještě zpřesnit a napsat, že obě koule pouštíme na stejném nebeském tělese, pro konkrétnost na Zemi.

4) Kde tělesa padají II.

Zpřesněním dle předchozího bodu jsme si ale ještě úplně nepomohli. Koule totiž můžeme pouštět na různých místech – a *pokud železnou pouštíme na rovníku a dřevěnou na pólu, dopadne dříve dřevěná.*[2)] Na pólu a na rovníku je totiž různé tíhové zrychlení. Rozdíl je způsoben rotací

[1)] „Netradiční" je hezký termín, který lze použít i v seriózním časopise, kde by nepřipustili slovo „ujeté" ☺.

[2)] Kritický čtenář by mohl namítnout, že za určitých okolností (při pádu z velké výšky) by mohl převážit vliv odporu vzduchu a dřív by přece jen dopadla koule železná. To je rozumný argument, můžeme se tomu věnovat, až budeme mít podrobnější informace, jak odpor vzduchu ovlivňuje pád těles. Za pár stránek se k tomu dostaneme.

Země a také jejím zploštěním; činí asi 0,052 $\mathrm{m \cdot s^{-2}}$, relativní rozdíl je tedy asi 0,5 %. Takže další zpřesnění: obě tělesa necháme padat blízko sebe.

Nestačí ovšem nechat je padat na stejné rovnoběžce. Tíhové zrychlení totiž závisí i na nadmořské výšce: jednak se vzdáleností od středu Země klesá jako $1/r^2$, ale na horách se zase projeví, že je pod námi víc hmoty. Uvádí se, že s každým metrem nadmořské výšky se tíhové zrychlení zmenšuje o asi 2 $\mathrm{\mu m \cdot s^{-2}}$, viz [1] v částech "Free air correction" a "Slab correction". V daném prameni najdete i vzorce ukazující, jak se tíhové zrychlení mění se zeměpisnou šířkou.

5) Okolní prostředí.

S našimi provokacemi jsme ovšem zdaleka neskončili. Například: *Když obě tělesa pustíme ve vodě, železná koule padne ke dnu, ale dřevěná koule vyplave k hladině.*[3) ] *Kdyby tělesa nebyla ve vodě, ale ve rtuti, tak navíc vyplave i to železné.* Vidíme, že v našem problému musíme uvažovat i vztlakovou sílu. A v zadání je potřeba specifikovat prostředí, v němž se nacházejí.[4)] Když půjde o vzduch (což zřejmě autoři úlohy měli na mysli), bude vliv vztlakové síly malý – ale kdyby jedna koule nebyla ze dřeva, ale z polystyrenu, nebo šlo o nafouknutý balón, mohl by být vliv vztlakové síly výrazný. (Kdyby šlo o balón plněný třeba vodíkem, tak by také místo pádu mohl stoupat.)

6) Vnitřek těles.

V souvislosti s předchozím bodem by nás také mohlo napadnout, jestli železná koule je celá ze železa. *Co kdyby byla dutá?* Pak by mohla mít mnohem menší hmotnost než dřevěná koule a díky odporu vzduchu by dopadla později. Ale tohle už zní trochu jako schválnost, budeme tedy uvažovat obě koule plné a speciálně takové, že budou mít v celém objemu konstantní hustotu.

7) Další vnější vlivy.

Pád těles by mohly ovlivnit i další vnější vlivy. Úplná schválnost by jistě byla, kdybychom železnou kouli zavěsili na padák a dřevěnou ne-

---

[3)] Když někdo bude chtít provokovat zase nás, poznamená, že bude-li dřevěná koule z ebenu, padne ke dnu také, protože hustota ebenového dřeva je 1 150 $\mathrm{kg/m^3}$ ☺. (Ovšem my můžeme opáčit, že údaj o hustotě není jednoznačný, různé zdroje udávají hustoty od 800 do 1 300 $\mathrm{kg/m^3}$.)

[4)] A možná raději dodat, že obě tělesa jsou v témže prostředí. Porovnávat dřevěnou kouli padající ve vzduchu a vedle ní železnou kouli stoupající ve rtuti, to už by bylo opravdu trochu moc.

chali padat bez něj. Podobným úskokem by bylo, kdybychom železnou kouli nechali padat v silném stoupavém proudu vzduchu, třeba ze silného větráku, a dřevěnou v klidném vzduchu nebo v klesavém proudu vzduchu. Tyhle možnosti zde uvažovat nebudeme – obě tělesa budou padat v klidném vzduchu, nebudeme je na nic přivazovat, působit na ně třeba elektrickým polem, pád železné koule nebudeme brzdit magnetem apod.

8) Rotace (?)

Co kdyby padající koule rotovala?[5] Pak by na její pohyb měl vliv tzv. Magnusův jev, který se projevuje například u fotbalového míče, když je kopnut „s falší“. Magnusova síla působí kolmo na rychlost pohybu (viz např. článek [2], kde jsou uvedeny i odkazy na další prameny). Naši padající kouli by tedy hlavně odklonila do strany. Je pravda, že když by se pak koule nepohybovala přesně vertikálním směrem, Magnusova síla by měla i jistou svislou složku – zde ale dál tuto možnost nebudeme uvažovat; budeme prostě předpokládat, že jde o pád koule, která nerotuje.

### Co ještě může ovlivnit výsledek – a pár jednoduchých výpočtů

Mohlo by se zdát, že už jsme vyčerpali všechny faktory, které mohou pád koulí ovlivnit. Ale přece jen jsme na něco zapomněli:

9) Velikost těles.

Zadání úlohy možná mlčky předpokládá něco jako „obě koule jsou, až na materiál, stejné“. Ale co to znamená stejné? Kdyby to znamenalo stejnou hmotnost, byla by dřevěná koule větší. Pokud by byla ze smrkového dřeva, jehož hustota je $\rho_\mathrm{d} = 455\,\mathrm{kg/m^3}$ (viz např. [3]) a měla by poloměr $R_\mathrm{d}$, pak její hmotnost by byla $m = \frac{4}{3}\pi R_\mathrm{d}^3 \rho_\mathrm{d}$. Hmotnost železné koule o poloměru $R_\mathrm{Fe}$ je $m = \frac{4}{3}\pi R_\mathrm{Fe}^3 \rho_\mathrm{Fe}$, kde $\rho_\mathrm{Fe} = 7\,870\,\mathrm{kg/m^3}$ je hustota železa. Jsou-li hmotnosti obou koulí stejné, lehce odtud spočteme, že $R_\mathrm{d}/R_\mathrm{Fe} = \sqrt[3]{\rho_\mathrm{Fe}/\rho_\mathrm{d}} \doteq 2{,}59$.

Pokud bychom stejně vysoko nad zem umístili středy obou koulí (to by bylo spravedlivé, nemyslíte?), pak by byla dřevěná koule ve výhodě, protože by jí stačilo urazit menší dráhu.[6] Jasně to uvidíme třeba v případě, kdyby na „startu“ byly středy koulí ve výšce metr nad zemí a kdyby ty „kuličky“ byly trochu větší. Například kdyby poloměr dřevěné

---

[5] Děkuji Petrovi Kácovskému, že mě upozornil na tuto možnost. (Inu, všechny možné provokativní nápady člověk nevymyslí sám; tady je vidět, jak inspirativní jsou diskuse s kolegy.)

[6] To už jsme řešili výše v bodě 1), ale teď pro zvýhodnění dřevěné koule nemusíme pod železnou kopat žádnou jámu.

koule byl 99 cm; železná by pak měla poloměr asi 38 cm.[7] Dřevěné kouli by stačilo spadnout jen o centimetr, ze vztahu $s = \frac{1}{2}gt^2$ můžeme určit, že jí to bude trvat jen asi 45 milisekund. Železná by 62 cm urazila za dobu asi osmkrát delší.

Takže spravedlivější bude, když na počátku budou stejně vysoko nad zemí spodní okraje obou těles. Ale tím zase trochu znevýhodníme dřevěnou kouli: její střed je na začátku o něco výše, tam je nepatrně menší tíhové zrychlení. Sice to oproti ostatním faktorům bude hrát zanedbatelnou roli, ale přece jen…

Možná proto bude nejlepší uvažovat situaci, kdy železná i dřevěná koule mají stejnou velikost. Železná koule oproti smrkové bude sice více než 17krát těžší, ale s tím už nic nenaděláme.

Jak by tedy nakonec mohla znít upřesněná úloha? Nebyla by úplně nejkratší:

*Železnou a dřevěnou kouli, obě stejně velké a obě plné (rozumí se plné daného materiálu, předpokládáme, že je homogenní), pustíme ve stejný okamžik a necháme padat. Pokus probíhá na Zemi. Tělesa padají z míst dostatečně blízko sebe, takže v obou místech bude stejné tíhové zrychlení. V okamžiku puštění jsou jejich spodní okraje stejně vysoko nad zemí. Počáteční rychlosti obou těles vzhledem k zemi jsou rovny nule.*[8] *Tělesa padají v klidném vzduchu. Nerotují, nejsou k ničemu připoutána a nepůsobí na ně žádné jiné vlivy než tíhová síla a okolní vzduch. Při pádu jsou tak daleko od sebe, že pohyb vzduchu vyvolaný pohybem jednoho tělesa neovlivňuje pohyb druhého. (Alternativně můžeme nejprve nechat padat jedno těleso, poté po uklidnění vzduchu druhé těleso a v obou případech měřit dobu pádu.) Dopadne na zem dříve železná koule, dřevěná koule, nebo dopadnou obě současně?*

Ufff, to je ale dlouhé zadání úlohy! Vidíme, že precizovat zadání není nic snadného.[9] Proto se při formulaci úloh obvykle používá řada nevyslovených předpokladů – a našimi výše uvedenými „provokacemi“ jistě nechceme dosáhnout toho, aby se v zadání vždy vše podrobně vypisovalo

[7] Se zvedáním takto velkých „kuliček“ bychom ovšem v praxi měli trochu problém; hmotnost každé z nich by totiž byla přes 1 800 kg.

[8] Provokaci toho typu, že bychom do jednoho tělesa při jeho puštění trochu šťouchli směrem k zemi, jsme výše ani neuvažovali, ale radši to ve zpřesněném zadání explicite vyloučíme.

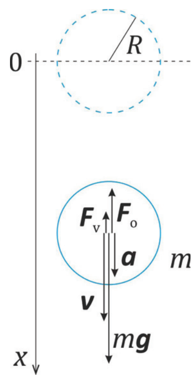
[9] A to jsme ještě nezdůraznili, že úlohu máme řešit v klasické newtonovské fyzice, a ne v obecné teorii relativity ☺.

a text každé úlohy tak zabral půl stránky. Ale je dobré uvědomovat si, co vše je ve skutečnosti potřeba v úloze uvažovat.

## S jakým zrychlením koule padá?

Zadání úlohy máme „vyladěné“, precizované. Ale jak je to s jejím řešením? Dopadne dřevěná koule opravdu dřív? A o kolik? Teď už jen s provokativními úvahami nevystačíme, musí dojít na podrobnější výpočty. Začneme tím, že spočteme zrychlení padající koule. K tomu musíme kvantitativně určit působící síly.

Koule padá svisle dolů. Tímto směrem na ni působí tíhová síla $m\boldsymbol{g}$, kde $m$ je hmotnost koule. Proti směru pohybu působí jednak vztlaková síla $\boldsymbol{F}_\mathrm{v}$ a jednak síla odporu vzduchu $\boldsymbol{F}_\mathrm{o}$, viz obr. 1.




Obr. 1: K pádu koule v odporujícím prostředí

Poloměr koule je $R$, její objem je tedy $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ a hmotnost $m = \rho_\mathrm{k} V = \rho_\mathrm{k}\frac{4}{3}\pi R^3$, kde $\rho_\mathrm{k}$ je hustota materiálu koule.

Velikost vztlakové síly působící na kouli ve vzduchu hustoty $\rho_\mathrm{v}$ plyne z Archimedova zákona:

$$F_\mathrm{v} = \rho_\mathrm{v} V g. \tag{1}$$

V učebnicích mechaniky nebo v řadě internetových zdrojů, např. [4], zjistíme, že odporová síla při pohybu ve vzduchu je úměrná druhé mocnině rychlosti $v$. (Toto platí, pokud nejde o hodně malé rychlosti.) Její velikost je dána Newtonovým vzorcem

$$F_\mathrm{o} = \frac{1}{2} C \rho_\mathrm{v} S v^2, \tag{2}$$

kde $S$ je obsah průřezu koule, tedy $S = \pi R^2$, a $C$ koeficient, který závisí na tvaru tělesa. Pro kouli je v širokém rozmezí rychlostí roven 0,47. (Pro nízké rychlosti vzrůstá, v určitém rozmezí vyšších rychlostí naopak klesá, k těmto detailům se ještě dostaneme dále.)

Zrychlení koule $\boldsymbol{a}$ určíme pomocí druhého Newtonova zákona:

$$m\boldsymbol{a} = m\boldsymbol{g} + \boldsymbol{F}_{\mathrm{v}} + \boldsymbol{F}_{\mathrm{o}}. \tag{3}$$

Zrychlení má nenulovou složku jen do směru osy $x$ (tu jsme orientovali směrem dolů, viz obr. 1), $\boldsymbol{a} = (a_x, 0, 0)$. Stejně je tomu i pro všechny síly. Druhý Newtonův zákon (3) tedy stačí zapsat jen pro $x$-ovou složku:

$$ma_x = mg - F_{\mathrm{v}} - F_{\mathrm{o}}. \tag{4}$$

Po dosazení (1) a (2) dostáváme

$$ma_x = mg - \rho_{\mathrm{v}} V g - \frac{1}{2} C \rho_{\mathrm{v}} S v^2, \tag{5}$$

a po vydělení $m$ a dalších úpravách

$$a_x = g - \rho_{\mathrm{v}} \frac{V}{m} g - \frac{1}{2} C \frac{\rho_{\mathrm{v}}}{m} S v^2 = g - \frac{\rho_{\mathrm{v}}}{\rho_{\mathrm{k}}} g - \frac{1}{2} C \frac{\rho_{\mathrm{v}}}{\rho_{\mathrm{k}}} \frac{S}{V} v^2.$$

Zde jsme využili vztah mezi hmotností a objemem. Když ještě objem $V$ a průřez $S$ vyjádříme pomocí poloměru koule, získáme

$$a_x = g\left(1 - \frac{\rho_{\mathrm{v}}}{\rho_{\mathrm{k}}}\right) - \frac{1}{2} C \frac{\rho_{\mathrm{v}}}{\rho_{\mathrm{k}}} \frac{\pi R^2}{\frac{4}{3}\pi R^3} v^2 = g\left(1 - \frac{\rho_{\mathrm{v}}}{\rho_{\mathrm{k}}}\right) - \frac{3}{8} C \frac{\rho_{\mathrm{v}}}{\rho_{\mathrm{k}}} \frac{v^2}{R}. \tag{6}$$

Výsledek bude trochu přehlednější, když ho upravíme na tvar

$$a_x = g\left(1 - \frac{\rho_{\mathrm{v}}}{\rho_{\mathrm{k}}}\left(1 + \frac{3}{8} C \frac{v^2}{g} \frac{1}{R}\right)\right). \tag{7}$$

Spočítat z tohoto vztahu, jak přesně koule padá, je trochu náročnější úloha, na úrovni úvodní vysokoškolské fyziky. Začněme něčím jednodušším: aproximacemi popisujícími pohyb po začátku pádu, nebo naopak v situaci, kdy pád trvá už dlouho. Podobné aproximace pro extrémní případy bývají ve fyzice užitečné i pro řešení složitých problémů. Pojďme se podívat, co nám dají v naší úloze.

### Aproximace pro hodně malé rychlosti, těsně po začátku pádu

Těsně po začátku pádu je rychlost tělesa velmi malá, takže člen $\frac{3}{8}C\frac{v^2}{g}\frac{1}{R}$ v závorce v (7) můžeme zanedbat. Ze (7) pak dostaneme

$$a_x = g\left(1 - \frac{\rho_\mathrm{v}}{\rho_\mathrm{k}}\right) = \mathrm{konst.}$$

Koule tedy padá s konstantním zrychlením, označme jej třeba $g'$:

$$g' = g\left(1 - \frac{\rho_\mathrm{v}}{\rho_\mathrm{k}}\right). \tag{8}$$

Hustota vzduchu je asi 1,2 kg/m$^3$ (při teplotě 20°C, viz [5] a další zdroje), hustotu železa a jednoho typu dřeva jsme uvedli výše. Poměr $\rho_\mathrm{v}/\rho_\mathrm{k}$ je malý, od asi $1{,}5 \cdot 10^{-4}$ pro železnou kouli do cca $2{,}6 \cdot 10^{-3}$ pro dřevěnou. Zrychlení $g'$ se tedy liší od $g$ jen nepatrně, výrazněji by se lišilo, jen kdybychom nechali padat třeba polystyrenovou nebo dutou kouli, třeba nafouknutý míč. Vidíme, že pro železné nebo dřevěné koule padající ve vzduchu je vliv vztlaku prakticky zanedbatelný.

Jak dlouho po začátku pádu je naše aproximace použitelná? Člen odpovídající odporu vzduchu musí být malý oproti 1 (viz (7)), tj.

$$\frac{3}{8}C\frac{v^2}{g}\frac{1}{R} \ll 1.$$

Odtud pro rychlost dostaneme

$$v \ll \sqrt{\frac{8}{3C}gR} \doteq 2{,}4\sqrt{gR}.$$

Zde jsme již dosadili za $C$ hodnotu 0,47 pro kouli. Jak uvidíme později, při malých rychlostech je hodnota $C$ vyšší, takže ve skutečnosti pro naši aproximaci musí být rychlost o něco nižší. Zvolme tedy konstantu v našem odhadu nižší a odhadněme, že aproximace bude platit pro $v \lesssim \sqrt{gR}$. Pro kuličku o průměru 1 cm to dá přibližně $v \lesssim 0{,}2\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$, pro kouli o průměru 10 cm asi $v \lesssim 0{,}7\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$. To odpovídá dobám pádu 20 a 70 milisekund; těleso za tu dobu spadne o pouhé 2 mm, resp. o 2,5 cm. Můžeme tedy uzavřít, že po pádu z výšky několika centimetrů (čili v časech přes asi desetinu sekundy po začátku pádu) už musíme s odporem vzduchu počítat.

**Aproximace pro vyšší rychlosti a delší časy**

Pro další výpočty bude vhodné upravit vztah (6) pro zrychlení s využitím (8) na tvar

$$a_x = g' - \frac{3}{8}C\frac{\rho_\mathrm{v}}{\rho_\mathrm{k}}\frac{v^2}{R} = g'\left(1 - \frac{3}{8}C\frac{\rho_\mathrm{v}}{\rho_\mathrm{k}}\frac{v^2}{g'}\frac{1}{R}\right).$$

Ten nám umožní nestarat se už dále o vztlakovou sílu, její vliv je už zahrnut v $g'$. Označíme-li

$$K = \frac{3}{8}C\frac{\rho_\mathrm{v}}{\rho_\mathrm{k}}\frac{1}{g'R}, \tag{9}$$

je zrychlení

$$a_x = g'\left(1 - Kv^2\right). \tag{10}$$

Poměr $\rho_\mathrm{v}/\rho_\mathrm{k}$, jak už bylo řečeno, je malý, takže malý je i koeficient $K$ (pokud nejde o opravdu malou kuličku, třeba s poloměrem 0,1 mm nebo menším). Do určitých rychlostí bude tedy malý i celý člen $Kv^2$. I když odpor vzduchu převýší velikost vztlakové síly, může být jeho vliv na zrychlení zanedbatelný, a tělesa mohou padat téměř se zrychlením $g'$, tedy prakticky s tíhovým zrychlením $g$.

Bude tomu tak, pokud $Kv^2 \ll 1$, čili $v \ll 1/\sqrt{K}$. Přibližné hodnoty této rychlosti uvedené v tabulce 1 ukazují, že odpor vzduchu se příliš neprojeví do rychlosti jednotek až nízkých desítek metrů za sekundu. (Aby odpor vzduchu nesnížil zrychlení o více než jednu desetinu, může rychlost dosáhnout hodnot uvedených v tabulce dělených $\sqrt{10}$.) To odpovídá době pádu několik desetin sekundy až několik sekund.

Tabulka 1: K rychlostem pádu železné a dřevěné koule (počítáno pro $g = 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}$, výsledky jsou zaokrouhleny na celé m/s)

| materiál koule | $1/\sqrt{K}$ pro průměr koule | |
|---|---|---|
| | 1 cm | 10 cm |
| železo | 43 m/s | 135 m/s |
| dřevo | 10 m/s | 32 m/s |

Odhad, kdy má odpor vzduchu malý vliv, můžeme udělat ještě jedním způsobem. Při pádu se zrychlením $g'$ těleso za čas $t$ od počátku pádu spadne o $h = \frac{1}{2}g't^2$ a dosáhne rychlost $v = g't$. Odtud plyne $v^2/g' = 2h$. Po dosazení do (9) dostaneme

$$Kv^2 = \frac{\rho_\mathrm{v}}{\rho_\mathrm{k}}\frac{3}{4}C\frac{h}{R}.$$

Má-li tento výraz být mnohem menší než 1, musí být

$$\frac{h}{R} \ll \frac{\rho_\mathrm{k}}{\rho_\mathrm{v}}\frac{4}{3C},$$

řekněme

$$\frac{h}{R} \leq 0{,}1\frac{\rho_\mathrm{k}}{\rho_\mathrm{v}}\frac{4}{3C} \doteq 0{,}28\frac{\rho_\mathrm{k}}{\rho_\mathrm{v}}.$$

Pro železnou kouli dá poměr na pravé straně hodnotu asi $1{,}8 \cdot 10^3$, pro dřevěnou kouli asi $1{,}1 \cdot 10^2$. Pro železnou kuličku o průměru 1 cm dostáváme asi $h \leq 9$ m, pro dřevěnou kuličku $h \leq 0{,}55$ m. Pro koule o průměru 10 cm to bude desetkrát více. Snadno se můžeme přesvědčit, že tyto výšky pádu odpovídají rychlostem a časům uvedeným výše.

## Aproximace pro hodně dlouhý pád

Po dostatečně dlouhé době pádu vzroste rychlost natolik, že se síla odporu prostředí (plus vztlaková síla) prakticky vyrovná tíhové síle.[10] Zrychlení je pak rovno nule a těleso padá konstantní rychlostí. Této rychlosti se někdy říká *mezní rychlost*. (Mezní rychlostí se po většinu času pohybuje parašutista s otevřeným padákem.) Ze vztahu (10) je zřejmé, že toto nastává, když $Kv^2 = 1$, čili mezní rychlost je

$$v_\mathrm{m} = \frac{1}{\sqrt{K}}. \tag{11}$$

Vidíme, že mezní rychlosti už máme spočtené, máme je v tabulce 1 výše.

[10] Pozorný čtenář se může zeptat, proč „prakticky“. Jak uvidíme v pokračování tohoto článku, přesné teoretické řešení problému vypadá tak, že rychlost se přibližuje mezní rychlosti, ale v konečném čase jí nikdy nedosáhne. Takže odporová síla je vlastně vždy o něco nižší než tíhová. Ovšem pokud se budou lišit už třeba jen o miliardtinu newtonu (a samotné síly jsou řádu mN nebo N), je asi rozumné říci, že se prakticky vyrovnají.

**Závěr: Co dosud nevíme, aneb pokračování příště**

Naše provokování rozhodně nebylo samoúčelné; o pádu koule v odporujícím prostředí jsme se při něm leccos dozvěděli. Něco v aproximacích pro malé a velké časy, něco i obecně: vztah (10) dává zrychlení po celou dobu pádu!

Nevíme ovšem vlastně to nejzajímavější: jak se rychlost a poloha padajícího tělesa mění „mezi hodně malými a hodně velkými časy". Nevíme tedy například, za jak dlouho těleso dosáhne mezní rychlosti (resp. přiblíží se jí řekněme na deset procent nebo jedno procento). A také nevíme, o kolik při pádu ve vzduchu železná koule předhoní dřevěnou.

To je věcí, které nevíme! Což ovšem vůbec není na škodu, protože nás to motivuje prozkoumat problém hlouběji. Netřeba asi zdůrazňovat, že takhle vlastně funguje fyzika a veškerá věda. To nejzajímavější, to, co nás pohání dál, jsou nezodpovězené otázky.

Vidíme, že bude potřeba spočítat pohyb poctivě od začátku do konce. Příslušný výpočet nás opět může naučit leccos nového, ale do tohoto článku se už nevejde. Proto chtě nechtě zakončíme hláškou jako ze seriálů:

– to be continued –

Literatura

[1] Wikipedia: *Gravity of Earth.* [online.]
Dostupné z: `https://en.wikipedia.org/wiki/Gravity_of_Earth`

[2] Konečný, P.: *Magnusův jev.* In: Koudelková, V., Kácovský, P. (eds.): *Veletrh nápadů učitelů fyziky*, roč. 25, sborník z konference. MatfyzPress, Praha, 2020, s. 175–184.
Dostupné z: `https://vnuf.cz/2020/sbornik_VNUF_2020.pdf`

[3] *Naše stromy: Objemová hmotnost dřeva.* [online.]
Dostupné z: `http://www.nasestromy.cz/objemova-hmotnost-dreva/`

[4] Wikipedia: *Drag (physics).* [online.]
Dostupné z: `https://en.wikipedia.org/wiki/Drag_(physics)`

[5] Mikulčák, J., Charvát, J.: *Matematické, fyzikální a chemické tabulky a vzorce pro střední školy.* Prometheus, Praha, 2006.

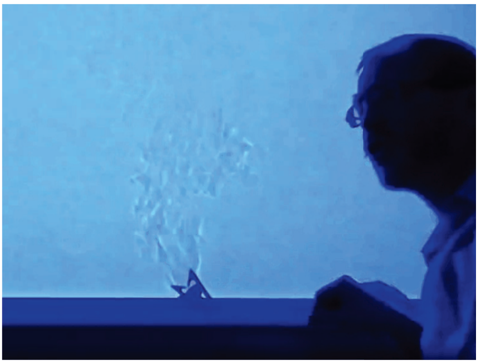
# Zajímavá fyzika II

*Tomáš Tyc, Přírodovědecká fakulta, Masarykova univerzita v Brně*

V minulém čísle jsme vám přinesli ukázku dvou fyzikálních experimentálních témat – *Tlak kolem nás* a *Fyzika v kuchyni.* V tomto čísle se podíváme na další zajímavé téma, kterým je *Šíření světla.* Připomeňme, že tato témata jsou vyučována na Přírodovědecké fakultě Masarykovy univerzity v Brně v rámci předmětu Zajímavá fyzika. Vyučujícími jsou prof. Tomáš Tyc a dr. Jiří Bartoš.

Záznam přednášky byl pořízen v průběhu distanční výuky na podzim 2020.

**Šíření světla:** Jak se šíří světlo z jednoho místa do druhého? Obvykle přímočaře, ale jsou i jiné možnosti. Například při přechodu z jednoho optického prostředí do druhého, v němž je rychlost světla jiná, dochází k lomu, tedy k náhlé změně směru paprsku. Pokud se vlastnosti prostředí mění spojitě, paprsek se (možná překvapivě) ohýbá. To má za následek třeba tetelení vzduchu nad ohněm nebo mihotání hvězd na obloze. V přednášce si velmi názorně vysvětlíme, proč a jak se světlo láme a ohýbá (předvedeme si to i pomocí skupiny studentů držících se tyče, kteří reprezentují světelnou vlnoplochu) a vše si doplníme řadou pěkných experimentů včetně fascinujícího pohledu na ohnutý paprsek v akváriu.



Odkaz: `https://is.muni.cz/el/sci/podzim2020/F1520/um/zajfyz-03-20oct2020-sireni_svetla.mp4`

# ☛ Objednávky časopisu ☚

Od roku 2020 vyřizuje objednávky časopisu
Rozhledy matematicko-fyzikální
společnost

**MediaCall, s. r. o.**
**Vídeňská 546/55**
**639 63 Brno**
**tel: +420 532 165 165**
**e-mail: export@mediacall.cz**

Objednávky lze realizovat i přes web:

**www.zahranicnitisk.com**

Tato informace se netýká členů JČMF. Pro ně vyřizuje objednávky předplatného sekretariát JČMF a předplatné je hrazeno spolu s členskými příspěvky.

Elektronická verze čísla 2/2021 je ke stažení na adrese:
https://rozhledy.jcmf.cz/wp-content/uploads/RMF-96-2.pdf
heslo: ko4kopes

ROZHLEDY
matematicko-fyzikální
Ročník 96 (2021), číslo 2

## OBSAH



**Pokyny pro autory**

Příspěvky dodávejte na adresu redakce v elektronické podobě. Nejlépe napsané ve formátu LaTeX, přijatelný je i formát PlainTeX, je akceptovatelný i text připravený editorem Word či podobným.

Pokud jde o obrázky, je žádoucí, aby byly připraveny v reprodukovatelné podobě. Každý obrázek nechť je v samostatném souboru, nejlépe ve formátu eps nebo pdf. Přípustná je též bitmapa v dostatečném rozlišení.

Ke každému zasílanému příspěvku (ne u soutěží, zpráv a recenzí) přiložte krátkou anotaci v českém jazyce. Dále je žádoucí, aby u každého příspěvku byla uvedena literatura, na kterou je v textu odkazováno.