ROZHLEDY

MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ

ČASOPIS PRO ZÁJEMCE O MATEMATIKU, FYZIKU A INFORMATIKU

ROČNÍK 96 (2021) • ČÍSLO 4

Vydává Jednota českých matematiků a fyziků
tel.: 222 090 708-9, e-mail: jcmf@math.cas.cz
za podpory MFF UK Praha a FJFI ČVUT Praha

Vycházejí 4 čísla v kalendářním roce

Obálku navrhl Bohuslav Šír

Sazbu programem TEX připravil RNDr. Miloslav Závodný

Adresa redakce: MFF UK, V Holešovičkách 2, 182 00 Praha 8 – Troja
e-mail: rozhledy@jcmf.cz

Internetové stránky časopisu: https://rozhledy.jcmf.cz/

Vytiskla Tiskárna Pohlline, Zálesí 1126/88, 142 00 Praha 4

Distribuci pro předplatitele provádí v zastoupení vydavatele
MediaCall, s. r. o.
Vídeňská 546/55, 639 63 Brno
tel.: +420 532 165 165, e-mail: export@mediacall.cz
web: www.zahranicnitisk.com

ISSN 0035-9343 MK ČR E4691

Obsah a obvod obdélníků

Vlastimil Dlab, Bzí u Železného Brodu

Cílem tohoto článku je nabídnout základním a středním školám jednoduše formulovanou otázku, jejíž řešení a rozbor by mohl přispět k výuce matematiky. Budeme zkoumat vztah mezi obvodem a obsahem obdélníku. Proč? Chceme se věnovat otázce, kterou Liping Ma, profesorka university Berkeley (původem Číňanka), nadhodila ve své proslulé knize *Knowing and Teaching Elementary Mathematics* [2] určené učitelům matematiky a věnovala jí celou čtvrtou kapitolu. Její kniha byla přeložena Jiřím Rákosníkem do češtiny s názvem *Znát a učit elementární matematiku* [3]. Každá škola by měla mít tuto knihu ve své knihovně. Zevrubná recenze Jindřicha Bečváře v Pokrocích matematiky, fyziky a astronomie [1] zdůrazňuje nejen obsah, ale též historickou důležitost této publikace.

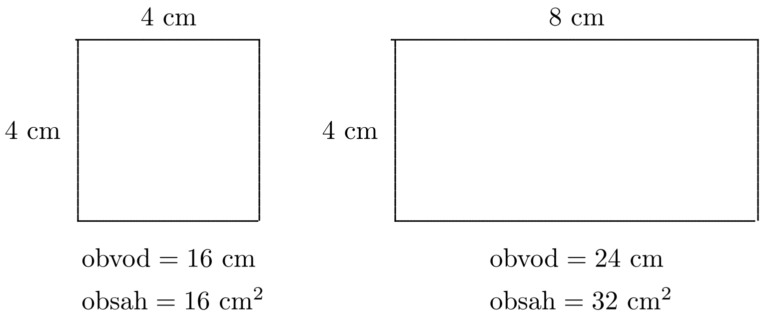
Článek rozdělíme podle náročnosti na dvě části.

1. část

Liping Ma ve své knize ([2], [3]) popisuje následující školní příhodu. Žákyně přijde do hodiny matematiky celá rozzářená, oznamuje, že objevila výsledek, který nebyl v hodině matematiky probírán. Vysvětluje, že nalezla následující tvrzení:

$$\textit{Jestliže obvod obdélníku vzroste, vzroste též jeho obsah.} \tag{1}$$

Své tvrzení podpořila následujícím obrázkem (viz [3], str. 102):



Liping Ma se ve své knize ptá 23 amerických učitelů a 72 čínských učitelů:

Jak byste té žákyni odpověděli?

Reakcím učitelů věnuje celou kapitolu, více než 20 stránek! Někteří uvěřili bez jakéhokoliv zaváhání, že tvrzení je správné. Jiní požadovali čas, aby mohli nahlédnout do učebnic. Shrňme zde velice stručně, k jakému výsledku profesorka Ma dospěla: Pouze jedna americká učitelka (z 23 zúčastněných) podala správnou odpověď a vysvětlení:

Tvrzení je neplatné!

Poznamenejme ještě, že ze 72 zúčastněných čínských učitelů tento správný výsledek odvodilo 50. Tuto statistiku poukazující na nedostatečnou kvalifikaci řady učitelů zde nebudeme diskutovat. Uvědomme si jenom (a to je jeden z cílů profesorky Ma), jak negativní dopad má dnešní stav výuky matematiky na žáky – a jak posléze vede k obavám, až strachu z tohoto předmětu.

Studiu vztahu mezi obvodem a obsahem obdélníku předešleme poznámku, že velikost obvodu a obsahu daného obdélníku budeme vždy popisovat ve stejných (zvolených) jednotkách, ať už jsou to centimetry, metry či kilometry (tedy cm a cm^2, m a m^2 či km a km^2) a nebudeme je zmiňovat. Připomeňme, že naše formulace zahrnují i případ degenerovaných obdélníků, tj. případ, kdy délka jedné strany obdélníku je nulová.

Vztah mezi obvodem a obsahem obdélníku podáme odpovědí na tuto velmi přirozenou otázku:

Existuje obdélník, který má libovolně velký obvod
a zároveň libovolně malý obsah? (2)

Kladná odpověď ukazuje zcela rázným způsobem, že tvrzení (1) neplatí. Podložme tvrzení z otázky (2) několika příklady.

Uvažujme obdélníky, jejichž strany jsou uvedeny v prvních pěti řádcích následující tabulky. Již zde vidíme, že tvrzení (1) je neplatné (k tomu stačí porovnat libovolné dva z těchto řádků) a že hodnoty příslušných obvodů a obsahů naznačují kladnou odpověď na otázku (2).

Délky stran obdélníku **x** a **y**	Obvod $\mathcal{P}$	Obsah $\mathcal{S}$
4 a 4	16	16
8 a 1	18	8
16 a $\frac{1}{4}$	32,5	4
32 a $\frac{1}{16}$	64,125	2
64 a $\frac{1}{64}$	128,03125	1
......	......	......
$\frac{N}{2}$ a $\frac{2\varepsilon}{N}$	$N + \frac{4\varepsilon}{N} > N$	ε
......	......	......
$\frac{N+\sqrt{N^2-16\varepsilon}}{4}$ a $\frac{N-\sqrt{N^2-16\varepsilon}}{4}$	N	ε

Řádek, který v tabulce následuje, kladnou odpověď na otázku (2) potvrzuje. Zde můžeme za N zvolit libovolně velké číslo a za ε libovolně malé číslo. Strany obdélníku, který má obvod rovný (přesně) N a obsah rovný (přesně) ε jsou udány v posledním řádku.

Tento řádek popisuje obdélník o stranách x a y, $x \geq y \geq 0$, které jsou řešením soustavy dvou rovnic

$$2(x + y) = N \quad \text{a} \quad xy = \varepsilon.$$

Jelikož $xy = \frac{1}{4}\left[(x + y)^2 - (x - y)^2\right]$, x a y jsou řešením soustavy

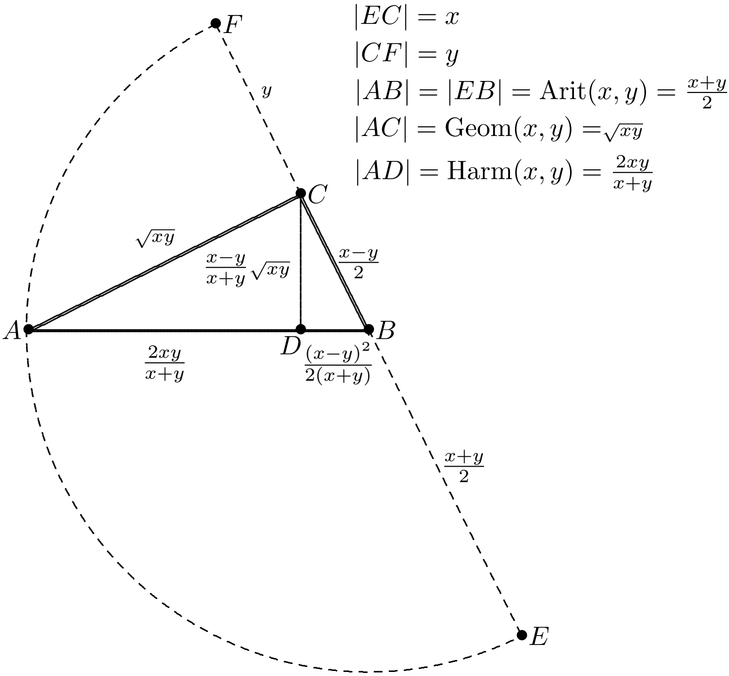
$$x + y = \frac{N}{2} \quad \text{a} \quad x - y = \frac{\sqrt{N^2 - 16\varepsilon}}{2}.$$

Řešení bezprostředně ukazují, že obsah $\mathcal{S}$ $(= \varepsilon)$ a obvod $\mathcal{P}$ $(= N)$ každého obdélníku splňuje vztah

$$\mathcal{S} \leq \left(\frac{\mathcal{P}}{4}\right)^2.$$

Rovnost $\mathcal{S} = \left(\frac{\mathcal{P}}{4}\right)^2$ nastává v případě, že obdélník je čtvercem.

Poznámka. Připomeňme si zde, že obsah obdélníku se rovná čtverci geometrického průměru $\mathrm{Geom}(x, y) = \sqrt{xy}$ jeho stran, tj. geometrický průměr stran obdélníku udává stranu čtverce o stejném obsahu. Obvod obdélníku se rovná čtyřnásobku aritmetického průměru $\mathrm{Arit}(x,y) = \frac{x+y}{2}$ jeho stran. Harmonický průměr stran obdélníku $\mathrm{Harm}(x,y) = \frac{2xy}{x+y}$ udává čtyřnásobek podílu jeho obsahu a obvodu a je tedy rovný nejvýše čtvrtině obvodu. Vztahy mezi těmito veličinami geometricky ilustruje obr. 1.



Obr. 1: Aritmetický, geometrický a harmonický průměr

Podobným způsobem, jakým jsme popsali vztah mezi obsahem a obvodem obdélníku, můžeme též vyjádřit vztah mezi obsahem a úhlopříčkou obdélníku. Odpověď na otázku

Jestliže úhlopříčka obdélníku vzroste, vzroste též jeho obsah?

je záporná. Platí obecnější tvrzení:

Existuje obdélník, který má libovolně dlouhou úhlopříčku
a zároveň libovolně malý obsah.

K důkazu nám opět může posloužit jednoduchá tabulka, která vyjadřuje vztahy těchto veličin pro několik obdélníků. V posledním řádku tabulky jsou N a ε libovolná kladná čísla (tedy i libovolně velké N a libovolně malé ε).

Délky stran obdélníku x a y	úhlopříčka u	Obsah $\mathcal{S}$
4 a 3	5	12
8 a 1	$8 < u < 9$	8
16 a $\frac{1}{4}$	$16 < u < 17$	4
32 a $\frac{1}{16}$	$32 < u < 33$	2
64 a $\frac{1}{64}$	$64 < u < 65$	1
......	......	......
$N > 1$ a $\frac{\varepsilon}{N}$	$u > N$	ε

Uveďme též následující výrazy pro strany obdélníku, jestliže známe délku úhlopříčky u a obsah $\mathcal{S}$ obdélníku:

$$x = \frac{\sqrt{u^2 + 2\mathcal{S}} + \sqrt{u^2 - 2\mathcal{S}}}{2} \quad \text{a} \quad y = \frac{\sqrt{u^2 + 2\mathcal{S}} - \sqrt{u^2 - 2\mathcal{S}}}{2}.$$

Přesvědčte se, že ekvivalentní výrazy pro strany obdélníku jsou

$$x = \sqrt{\frac{u^2 + \sqrt{u^4 - 4\mathcal{S}^2}}{2}} \quad \text{a} \quad y = \sqrt{\frac{u^2 - \sqrt{u^4 - 4\mathcal{S}^2}}{2}}.$$

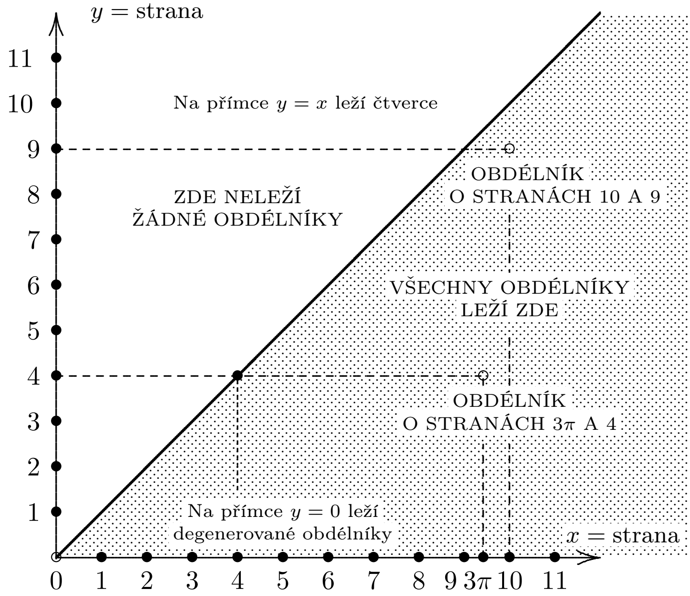
Úhlopříčka u a obsah $\mathcal{S}$ obdélníku splňují tedy vždy vztah $\mathcal{S} \leq \frac{u^2}{2}$. Rovnost $\mathcal{S} = \frac{u^2}{2}$ nastává právě tehdy, když obdélník je čtvercem.

Cvičení. Předešlé úvahy můžeme aplikovat na pravoúhlé trojúhelníky. Formulujte příslušná tvrzení.

2. část

V této druhé části doplníme popis vztahů mezi stranou x, úhlopříčkou u, obsahem $\mathcal{S}$ a obvodem $\mathcal{P}$ obdélníku a znázorníme tyto vztahy geometricky v rovině s kartézskou soustavou souřadnic.

Základním jednoznačným popisem obdélníku je udání jeho stran x a y s podmínkou $x \geq y \geq 0$. Poznamenejme, že rovnost $x = y$ značí, že obdélník je čtvercem, zatímco rovnost $y = 0$ popisuje degenerovaný obdélník, tj. „zdvojenou“ stranu x (obvod je tedy v tomto případě $2x$). Geometricky popíšeme tuto situaci obrázkem 2. Množina všech obdélníků je v jednoznačném [1)] vztahu s body roviny, které leží ve vyšrafované oblasti, včetně hraničních polopřímek (tak, jak je to v obrázku popsáno).



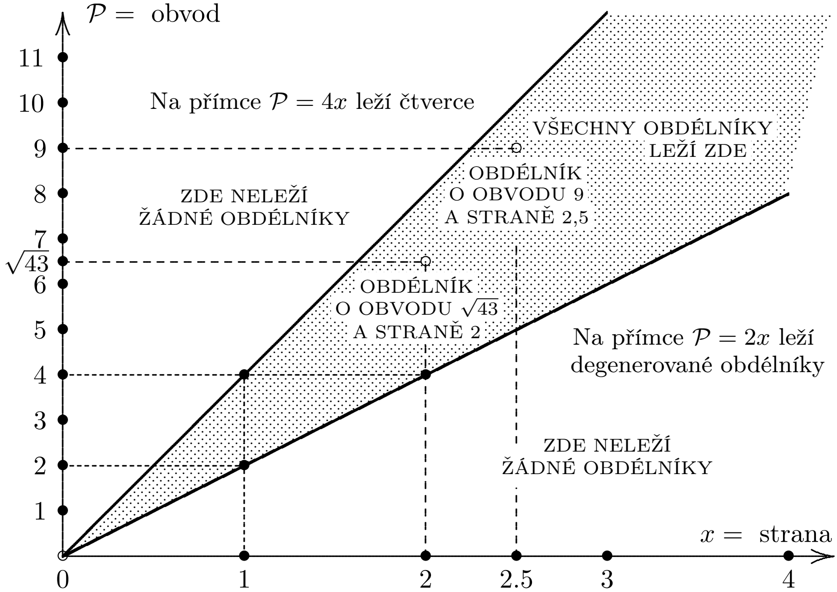
Obr. 2: Obdélníky určené stranami x a y

Vztah mezi stranou a obvodem obdélníku je též jednoduchý, lineární. Každému obdélníku o (delší) straně x a obvodu $\mathcal{P}$ odpovídá druhá strana

$$y = \frac{\mathcal{P} - 2x}{2},$$

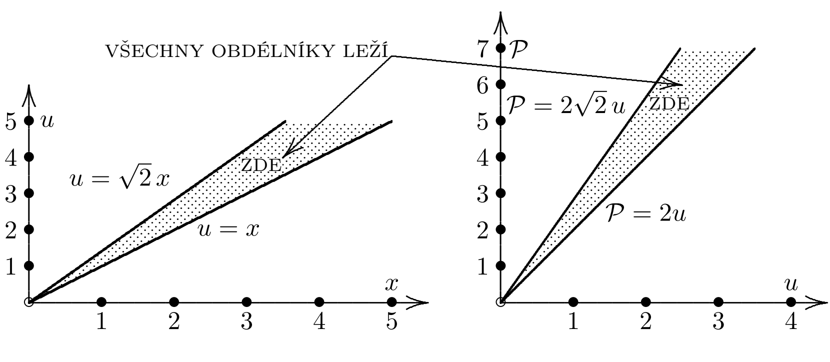
a tedy $\mathcal{P} \geq 2x$. Jelikož $y \leq x$, platí $\mathcal{P} \leq 4x$. Dvojice $(x, \mathcal{P})$, které odpovídají obdélníkům o straně x a obvodu $\mathcal{P}$ můžeme zobrazit v rovině s pravoúhlými souřadnicemi x a $\mathcal{P}$: jsou to všechny body prvního kvadrantu, které leží na polopřímkách $\mathcal{P} = 2x$, $\mathcal{P} = 4x$ a mezi nimi, jak ukazuje obrázek 3. Oblast obdélníků je opět vyšrafovaná. Poznamenejme, že jednotky jsou zvoleny na souřadných osách x a $\mathcal{P}$ různě.

[1)] Právě kvůli této jednoznačnosti předpokládáme, že $x \geq y$.



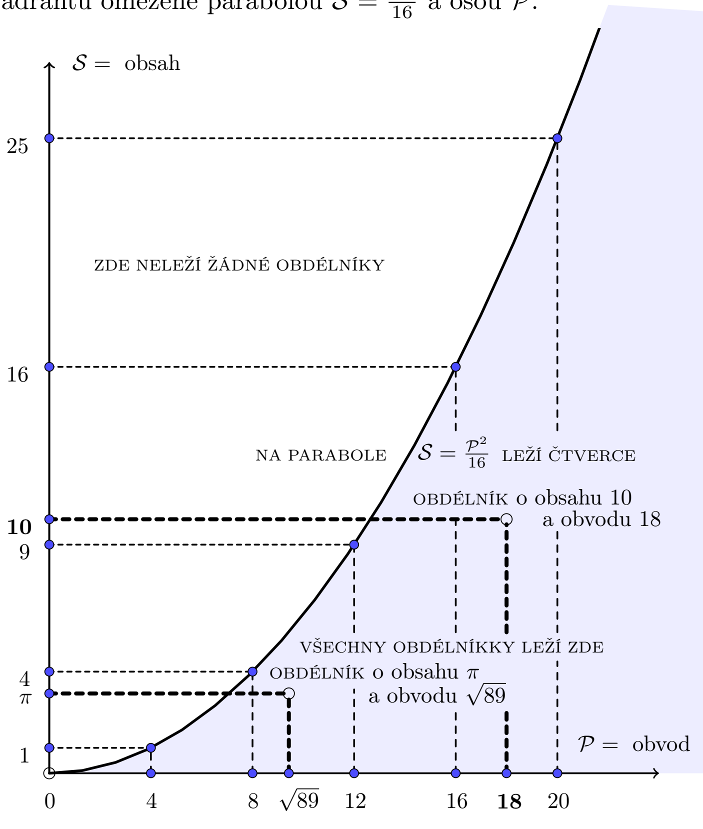
Obr. 3: Obdélníky $(x, \mathcal{P})$ určené stranou a obvodem

Cvičení. Podobně můžeme vyobrazit všechny obdélníky určené stranou x a úhlopříčkou u nebo úhlopříčkou u a obvodem $\mathcal{P}$. Odvoďte příslušná omezení a vysvětlete obr. 4, který tato omezení ilustruje.



Obr. 4: Obdélníky (x, u) a $(u, \mathcal{P})$

Závěrem uveďme geometrické znázornění vztahu mezi obvodem a obsahem obdélníku, odvozeném v první části tohoto článku. Obr. 5 popisuje celou situaci graficky: Všechny obdélníky jsou jednoznačně znázorněny body $(\mathcal{P}, \mathcal{S})$ (vyjadřujícími obvod a obsah) ležícími v oblasti prvního kvadrantu omezené parabolou $\mathcal{S} = \frac{\mathcal{P}^2}{16}$ a osou $\mathcal{P}$.



Obr. 5: Obdélníky určené svým obvodem a obsahem

Literatura

[1] Bečvář, J.: Recenze knihy Znát a učit elementární matematiku. *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*, roč. 66 (2021), č. 2, s. 142–146.

[2] Ma, L.: *Knowing and Teaching Elementary Mathematics*. Lawrence Erlbum Associates, Mahwah, New Jersey, 1999.

[3] Ma, L.: *Znát a učit elementární matematiku*. Edice Galileo, roč. sv. 77, Academia, Praha, 2021 (český překlad J. Rákosník).

Poznámka o dělitelnosti čísel

Vlastimil Dlab, Bzí u Železného Brodu

Možná vás už někdo „překvapil“ tvrzením, že

číslo $(p-1)(p+1) = p^2 - 1$, kde p je prvočíslo větší než 3,

je dělitelno 24. (viz např. [1] nebo [2]).

Jednoduchá tabulka

p	p^2	$p^2 - 1$
5	25	$24 = 24 \times 1$
7	49	$48 = 24 \times 2$
11	121	$120 = 24 \times 5$
13	169	$168 = 24 \times 7$
17	289	$288 = 24 \times 12$
...	...	...
277	76729	$76728 = 24 \times 3197$
...	...	...

nás ujistí a napoví nám, že tvrzení má souvislost s tím, že každé prvočíslo $p > 2$ má tvar

$$p = 6k - 1, \text{ anebo } p = 6k + 1, \text{ pro vhodné číslo } k.$$

Tato vlastnost je bezprostředním důsledkem toho, že každé prvočíslo $p > 2$ je číslo liché, tedy tvaru $p = 2k+1$, a proto obě čísla $p-1$ a $p+1$ jsou sudá a jedno z nich musí být dokonce násobkem 4. Jelikož v posloupnosti $p-1$, p, $p+1$ musí být též jedno číslo dělitelné 3 (a prvočíslo p to být nemůže), součin $(p-1)(p+1)$ je násobkem čísla 24.

Podobná úvaha může být nyní rozšířena pro každé prvočíslo $p > 5$ na součin

$$a_p = (p-2)(p-1)(p+1)(p+2) = (p^2-1)(p^2-4).$$

V posloupnosti $p-2$, $p-1$, p, $p+1$, $p+2$ je jedno z čísel dělitelno 5 a dvě jsou dělitelná 3. Tedy a_p je pro každé $p > 5$ dělitelno 360.

Dokázali jsme tak první dvě tvrzení této věty:

Věta 1. *Nechť p je prvočíslo.*

(i) Je-li $p > 3$, je $p^2 - 1$ celočíselným násobkem $24 = 4 \cdot 3! = 4!$.

(ii) Je-li $p > 5$, je $a_p = (p^2-1)(p^2-4)$ celočíselným násobkem čísla $360 = 3 \cdot 5!$.

(iii) Je-li $p > 7$, je $b_p = (p^2-1)(p^2-4)(p^2-9)$ celočíselným násobkem $40320 = 8 \cdot 7! = 8!$.

(iv) Je-li $p > 7$, je $c_p = (p^2-1)(p^2-4)(p^2-9)(p^2-16)$ celočíselným násobkem $1814400 = 5 \cdot 9!$.

Důkaz tvrzení (i)–(iv) a tvrzení týkajících se podobných výrazů je založen na známém faktu, který je zřejmým důsledkem toho, že kombinační číslo

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!}$$

je celé číslo. Pro každé celé kladné číslo n součin k po sobě jdoucích čísel

$$n(n+1)(n+2)\dots(n+k-1) \text{ je dělitelný číslem } k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k. \quad (*)$$

Dokažme nyní tvrzení (iii) a (iv) věty 1.

(iii) Tvrzení $(*)$, které aplikujeme pro $n = p-3$ a $k = 7$, doplníme poznatkem, že jeden z činitelů součinu

$$p b_p = (p-3)(p-2)(p-1)p(p+1)(p+2)(p+3)$$

je násobkem čísla 8, a že tedy b_p je násobkem čísla 128. Připomeňme, že čísla p a 40320 jsou nesoudělná, tudíž 40320 dělí b_p.

(iv) Zde aplikujeme tvrzení $(*)$ pro $n = p-4$ a $k = 9$ a zjistíme, že dva činitelé součinu

$$p c_p = (p-4)(p-3)(p-2)(p-1)p(p+1)(p+2)(p+3)(p+4)$$

jsou násobky čísla 5 a že tedy c_p je násobkem čísla 25. Opět zdůrazněme, že čísla p a 1814400 jsou nesoudělná, tudíž 1814400 dělí c_p.

Článek zakončeme několika úkoly:

Cvičení. Zdůvodněte, že

(1) $(p^2-1)(p^2-9)$ je celočíselným násobkem 1920 pro každé prvočíslo $p > 5$.

(2) $(p^2-1)(p^2-25)$ je celočíselným násobkem 1152 pro každé prvočíslo $p > 5$.

(3) $(p^2-1)(p^2-9)(p^2-25)$ je celočíselným násobkem 322560 pro každé prvočíslo $p > 7$.

(4) $(p^2-1)(p^2-25)(p^2-49)$ je celočíselným násobkem 414720 pro každé prvočíslo $p > 7$.

Zdůrazněme ještě roli, jakou hrají v našich úvahách malá prvočísla pro součiny blízkých činitelů. Můžeme je totiž snadno identifikovat jako dělitele daných součinů:

$$24 = 2^3 \cdot 3, \quad 360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5, \quad 40320 = 2^7 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7,$$
$$1814400 = 2^7 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7, \quad 1920 = 2^7 \cdot 3 \cdot 5, \quad 1152 = 2^7 \cdot 3^2,$$
$$322560 = 2^{10} \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7, \quad 414720 = 2^{10} \cdot 3^4 \cdot 5.$$

Všimněme si též, že uvedení společní dělitelé příslušných součinů jsou co do velikosti optimální. O tom se v jednotlivých případech snadno přesvědčíme vhodnou volbou malých prvočísel. Tak např. v případě věty 1(ii) $a_{11} = 14040 = 360 \cdot 3 \cdot 13$ a $a_{13} = 27720 = 360 \cdot 7 \cdot 11$. Je tedy 360 optimální. Podobně v případě cvičení (1) je součin pro $p = 13$ roven $1920 \cdot 2 \cdot 7$ a pro $p = 23$ je roven $1920 \cdot 11 \cdot 13$. Je tedy 1 920 optimální. Přesvědčte se, že v případě cvičení (3) stačí pro důkaz optimality 322 560 zvolit $p = 11$ a $p = 23$.

Nakonec poznamenejme, že výsledky této poznámky jsou zobecněny v článku [3] touto větou:

Věta 2. *Nechť p je prvočíslo splňující $p > 2n+1$. Potom je součin*

$$(p^2-1)(p^2-4)(p^2-9)\dots(p^2-n^2)$$

dělitelný číslem $2 \cdot (n+1) \cdot (2n+1)! = [2(n+1)]!$, je-li n liché, a číslem $(n+1) \cdot (2n+1)! = \frac{1}{2} \cdot [2(n+1)]!$, je-li n sudé.

Literatura

[1] https://www.youtube.com/watch?v=ZMkIiFs35HQ

[2] https://math.stackexchange.com/questions/855/for-any-prime-p-3-why-is-p2-1-always-divisible-by-24

[3] Dlab, V., Pospíchal, T.: Divisibility of certain products. *College Math. Journal.*

Nekonečna

Martin Dvořák, IST Austria, Klosterneuburg
Jonáš Havelka, MFF UK, Praha

Článek vychází ze studijního textu M&M [1]. Korespondenční seminář M&M se věnuje převážně matematice, fyzice a informatice.

V rámci korespondenčního semináře M&M navrhujeme různá témata, nad kterými můžou účastníci (převážně středoškoláci) bádat, a k nim zveřejňujeme studijní texty a doprovodné úlohy. Nejlepší řešitelé bývají dvakrát ročně zváni na soustředění.

Hilbertův hotel

Představme si, že spravujeme hotel[1)], kde je nekonečně mnoho jednolůžkových pokojů. COVID-19 ustupuje, takže nám konečně bylo umožněno otevřít, což způsobilo obrovský zájem, tudíž máme všechny pokoje obsazené. Abychom se v hotelu vyznali, očíslovali jsme pokoje čísly $\{1, 2, 3, \dots\}$ tak, že každé číslo je využito právě jednou a každý pokoj má právě jedno číslo. Tedy máme tolik pokojů, kolik je přirozených čísel. Tento počet (tedy naše nekonečno) označme[2)] jako $\aleph_0$.

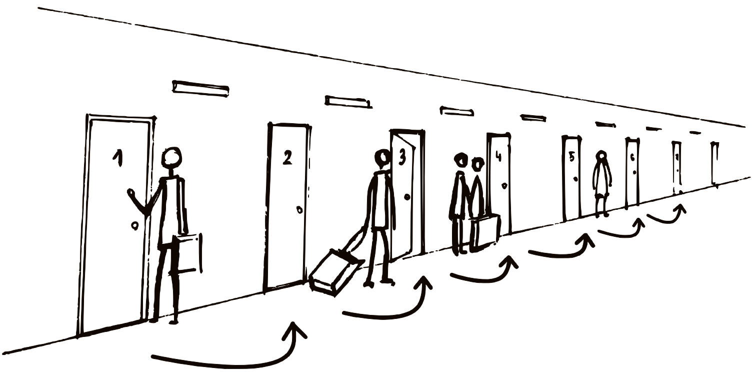
Najednou nám na vchodové dveře zaklepe nový host. Nejprve ho chceme odmítnout, vždyť přece máme všechny pokoje obsazené, ale pak

[1)] S tímto myšlenkovým experimentem přišel v přednášce „O nekonečnu“ roku 1924 německý matematik David Hilbert, jemuž v matematice vděčíme za mnoho poznatků. Viz: https://en.wikipedia.org/wiki/Hilbert's_paradox_of_the_Grand_Hotel

[2)] Symbol ∞ se obecně pro nekonečný počet nepoužívá, protože jak uvidíme dále, není nekonečno jako nekonečno. Symbol $\aleph$ (alef, první písmeno hebrejské abecedy) jsme nevybrali náhodně, o tom tu však nechceme vyprávět. Zvídavé jen odkážeme na: https://en.wikipedia.org/wiki/Aleph_number se nám ho zželí. Někam ho ubytovat přece musíme. Tak třeba do pokoje 1. Tam už však host bydlí. Nedá se nic dělat, musíme původního obyvatele pokoje 1 přesunout jinam. Třeba do pokoje 2. Původního hosta z pokoje 2 můžeme přestěhovat do 3 a tak dále. A hle, opravdu se nám povedlo ubytovat nového hosta do našeho plného hotelu, sice jsme u toho museli každého hosta přestěhovat z pokoje i do pokoje $i+1$, ale na to si zkrátka hosté musí zvyknout. Můžeme si všimnout, že jsme tím ukázali, že $\aleph_0 + 1 = \aleph_0$, jelikož nyní máme $(\aleph_0 + 1)$ hostů v $\aleph_0$ pokojích.

Navíc, pokud nám na dveře zaklepe libovolný přirozený počet n hostů, můžeme matematickou indukcí[3)] každého odbavit stejně jako jednotlivce (což už umíme z minulého odstavce), tedy:

$$\aleph_0 + n = (\aleph_0 + 1) + (n-1) = \aleph_0 + (n-1) = (\aleph_0 + 1) + (n-2) = \\ = \aleph_0 + (n-2) = (\aleph_0 + 1) + (n-3) = \ \dots\ = \aleph_0 + (n-n) = \aleph_0$$



Obr. 1: První stěhování (uvolnění prvního pokoje)

Nový host napsal na náš hotel tak dobrou recenzi, že se jedna cestovní kancelář rozhodla k nám vypravit autobus. A jelikož ta cestovní kancelář byla podobná našemu hotelu, byl to nekonečný autobus – měl $\aleph_0$ sedadel očíslovaných $\{1, 2, 3, \dots\}$. Kdybychom se tedy pokusili ubytovat do našeho plného hotelu nové hosty po jednom jako výše, nikdy bychom neubytovali celý tento autobus. Stěhování by totiž nebralo konce a hosté nemají nekonečně mnoho trpělivosti. Musíme na to jít chytřeji a na nekončící stěhování si dát pozor.

Jeden z hezkých způsobů je, že necháme každého starého hosta z pokoje i přestěhovat se na pokoj $2i$. Tím se nám uvolnily pokoje $\{1, 3, 5, \dots\}$.

3) `https://matematika.cz/matematicka-indukce`

Tedy nového hosta ze sedadla i přesuneme do pokoje $2i-1$. Jinými slovy, staré hosty přestěhujeme do sudých pokojů a nové do lichých. Tím jsme ubytovali všechny nové hosty a nevyhodili žádného starého. Tedy jsme ukázali, že $\aleph_0 + \aleph_0 =$ počet starých plus počet nových hostů $= \aleph_0 =$ počet pokojů. Matematickou indukcí lze dokázat, že pro každé přirozené číslo n platí rovnost $n \cdot \aleph_0 = \aleph_0$.

Ze stejného důvodu je všech celých čísel (množina $\mathbb{Z}$) stejně mnoho jako všech přirozených čísel (množina $\mathbb{N}$).

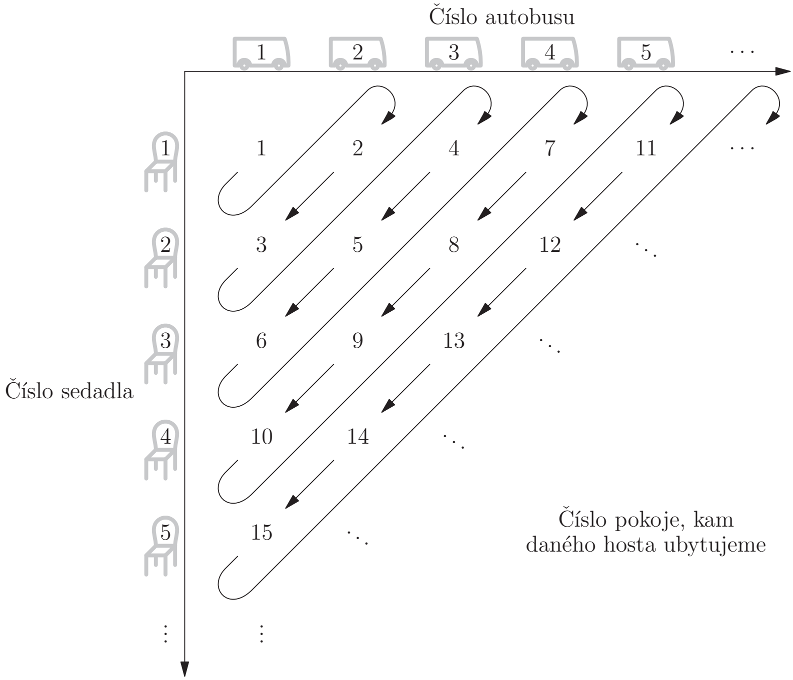
Nekonečno na druhou

Cestovní kancelář si náš hotel oblíbila, a tak k nám vyslala $\aleph_0$ autobusů, každý s $\aleph_0$ lidmi. Nejprve se zhrozíme, že tolik lidí přece nemůžeme nikdy ubytovat. Vždyť to je nekonečno nekonečen! Pak si ale řekneme, že všechny dřívější hosty se nám ubytovat podařilo, tak proč by to nešlo i s těmito.

Odteď dále budeme ignorovat, že už máme plno, a budeme nové hosty ubytovávat „nanovo“ do pokojů $\{1, 2, 3, \ldots\}$, čímž se pro nás nic podstatného už nezmění. Formálně řečeno, hledáme prosté zobrazení z množiny všech hostů do množiny pokojů, neboli prostou funkci typu $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Abychom zvládli obsloužit všechny hosty, musíme si pořádně rozmyslet, v jakém pořadí je budeme ubytovávat.

Pokud bychom ale začali prvním autobusem a ubytovali lidi z jeho sedadel $\{1, 2, 3, \ldots\}$, nikdy by se nedostalo na lidi z ostatních autobusů, protože v prvním autobusu pořád bude někdo, koho je třeba ubytovat. Proto budeme rozšiřovat počet autobusů, ze kterých ubytováváme lidi. Kdybychom ale chtěli například nejprve ubytovat všechny, kdo sedí na sedadle číslo 1 ve všech autobusech, pro změnu bychom nikdy neubytovali lidi z ostatních sedadel. Problém lze vyřešit například následujícím systémem ubytování hostů.

Jako první ubytujeme hosta z prvního sedadla prvního autobusu. Do druhého pokoje ubytujeme hosta z prvního sedadla druhého autobusu. Do dalšího pokoje ale nepůjde host ze třetího autobusu, nýbrž opět z prvního, konkrétně z druhého sedadla. Až pak ubytujeme hosta z prvního sedadla třetího autobusu, po něm hosta z druhého sedadla druhého autobusu, potom hosta z třetího sedadla prvního autobusu. Následuje host z prvního sedadla čtvrtého autobusu a tak dále. Začátek této posloupnosti můžeme „zakódovat“ jako $(1,1)$, $(1,2)$, $(2,1)$, $(1,3)$, $(2,2)$, $(3,1)$, $(1,4)$, $(2,3)$. Graficky znázorněné to můžete vidět na obr. 2.



Obr. 2: Ubytování $\aleph_0$ autobusů o $\aleph_0$ cestujících

Můžeme si všimnout, že v každé antidiagonále, kterou číslujeme (hosté na stejné antidiagonále mají stejný součet čísla sedadla a čísla autobusu), je konečně mnoho lidí (v první 1 host, ve druhé 2 hosté, ve třetí 3 hosté, atd.), tedy na každou antidiagonálu se dostane, ale zároveň každý host je v nějaké antidiagonále, takže se opravdu dostane na všechny. To znamená, že jsme právě dokázali rovnost $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$.

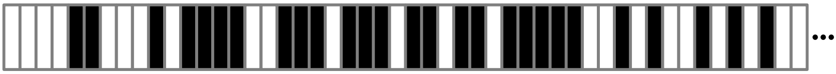
Od tohoto výsledku už není daleko k tomu, abychom došli k závěru, že všech racionálních čísel (množina $\mathbb{Q}$) je stejně mnoho jako všech přirozených čísel (množina $\mathbb{N}$).

Dále lze matematickou indukcí rozšířit náš poznatek na $\aleph_0^n = \aleph_0$ pro libovolné přirozené číslo n.

Dva na nekonečno

Po takovém úspěchu se nám ozvala další cestovní kancelář, že by u nás chtěla ubytovat svůj autobus hostů. Avšak nemá sedadla očíslovaná čísly;

má je označena všemi nekonečnými čárovými kódy (tedy nekonečnými posloupnostmi černých a bílých úseků), jako třeba ten na obr. 3.

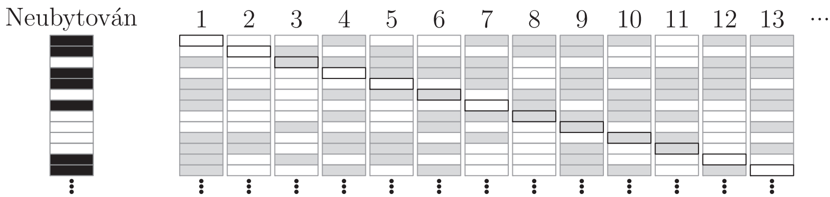


Obr. 3: Čárový kód

Musíme vás však zklamat, takový autobus neubytujeme. Jak to ale dokázat? Důkazy, že něco nejde, bývají v matice většinou mnohem obtížnější než důkazy, že něco jde. Nebo nemusí být ani komplikované, ale často vyžadují nějaký hezký netriviální nápad. Tohle je jeden z nich.

Představme si, pro spor, že by se nám hosty z takového autobusu povedlo ubytovat. Následně vytvořme čárový kód tak, že první úsek tohoto kódu bude jiný než první úsek čárového kódu hosta v prvním pokoji (tj. bude černý, pokud první čárový kód začíná bíle, jinak bude bílý). Druhý úsek tohoto kódu bude jiný než druhý úsek čárového kódu hosta v druhém pokoji. Třetí bude jiný než třetí úsek třetího...

Tak jsme vytvořili čárový kód (nazývaný „negace hlavní diagonály"), který jistě přísluší nějakému hostovi. Ten host však nemůže být ubytován v prvním pokoji, protože se neshodují v prvním úseku. Nemůže být ani v druhém, protože tam se neshodují v druhém úseku... Tudíž tento host není ubytován v našem hotelu. Jako bonus (není třeba k našemu důkazu) si můžete rozmyslet, že toto není ani zdaleka jediný host, na kterého se nedostalo.



Obr. 4: Cantorova diagonální metoda

Tímto postupem (který se nazývá Cantorova diagonální metoda) jsme dokázali, že v autobuse takové cestovní kanceláře není stejný počet lidí, jako pokojů u nás v hotelu. Ale očividně jich je také nekonečno.

Toto „jiné“ nekonečno je zvykem (za jistých předpokladů[4], které zde nebudeme více rozvádět) označovat symbolem $\aleph_1$. V příslušném jazyce můžeme napsat $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$; viz čárové kódy, které mají na každém políčku (indexovaném přirozenými čísly — těch je $\aleph_0$) jednu ze 2 možných barev {bílá, černá}.

Pokud bychom měli zavedený pojem mohutnosti, mohli bychom snadno ukázat, že $\aleph_1 > \aleph_0$. Rozmyslete si, že přiřadit naopak ke každému pokoji unikátní čárový kód (tj. prosté zobrazení opačným směrem) je triviální.

Mohutnost $\aleph_1$ má například potenční množina přirozených čísel, která se značí $\mathcal{P}(\mathbb{N}) = \{M \mid M \subseteq \mathbb{N}\}$, tj. množina všech podmnožin přirozených čísel; stejně tak má mohutnost $\aleph_1$ i množina reálných čísel $\mathbb{R}$. Vidíte analogii mezi $\mathbb{R}$, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ a množinou všech nekonečných čárových kódů?

Všimněte si nakonec, že reálných čísel (množina $\mathbb{R}$) je ostře více než racionálních čísel (množina $\mathbb{Q}$).

Závěr

Existuje mnoho druhů nekonečna (eh, vlastně těch nekonečen existuje nekonečně mnoho) a spousta zajímavostí o nich.

Pokud vás toto téma zaujalo, podívejte se do našeho časopisu [2] na pokračování a různé úlohy o nekonečnech. Když nějakou úlohu vyřešíte a odešlete, my vám ji zpět pošleme okomentovanou. Také nám můžete poslat příspěvek o čemkoliv, co s tématem souvisí; a když se nám bude líbit, tak ho otiskneme v budoucím čísle časopisu M&M.

Literatura

[1] `https://mam.mff.cuni.cz/media/cislo/pdf/28/28-1.pdf`

[2] `https://mam.mff.cuni.cz/media/cislo/pdf/28/28-2.pdf`

[4] Tím předpokladem je, že považujeme hypotézu kontinua za pravdivou. O ní se více informací dozvíte na:
`https://cs.wikipedia.org/wiki/Hypot%C3%A9za_kontinua`.

Souběh narozenin

Pavel Pokorný, VŠCHT Praha

„Jé, ty máš narozeniny stejný den v roce jako já? To je ale vzácná náhoda!“

Je to opravdu vzácná náhoda? Mezi dvěma osobami je pravděpodobnost souběhu narozenin ve stejném dni v roce opravdu malá, jen 1/365, tedy přibližně 0,3 %. A mezi více osobami? Jaká je např. pravděpodobnost, že mezi 22 fotbalisty na hřišti dojde k alespoň jednomu souběhu narozenin? A k souběhu alespoň trojích narozenin v jednom dni v roce?

1. Souběh dvojích narozenin

Budeme uvažovat nepřestupný rok, tedy rok, který má 365 dní. Budeme předpokládat, že každý den v roce je na narozeniny stejně pravděpodobný a že mezi uvažovanými osobami nejsou žádné vazby, např. že se nejedná o dvojčata. Tedy že výskyty narozenin různých osob jsou nezávislé jevy. Zajímáme se jen o dny v roce, zatímco rok nás nezajímá.

1.1. Dvě osoby

Uvažujme nejdříve pouze 2 osoby. Každá z nich může mít narozeniny libovolný den v roce se stejnou pravděpodobností. To je celkem

$$c = 365^2$$

možných případů. Aby nedošlo k souběhu narozenin, může mít první osoba narozeniny kterýkoliv z 365 dnů v roce, ale druhá osoba může mít narozeniny pouze jeden ze zbývajících 364 dnů v roce. Takže celkový počet možností, kdy nedojde k souběhu, protože každý den má narozeniny nejvýše jeden člověk, je

$$c_1 = 365 \cdot 364.$$

Tedy pravděpodobnost nesouběhu bude

$$n = \frac{c_1}{c} = \frac{365 \cdot 364}{365^2}.$$

Tento zlomek by šlo krátit, ale my ho ponecháme v tomto tvaru, protože to bude výhodné později.

A pravděpodobnost souběhu je

$$1 - n = \frac{1}{365},$$

jak jsme uvedli v úvodu.

1.2. Tři osoby

Pro 3 osoby máme celkem

$$c = 365^3$$

možností, protože každá ze tří osob může mít narozeniny libovolný den v roce. Aby nedošlo k žádnému souběhu narozenin, může mít první osoba narozeniny libovolný den v roce, tedy v 365 případech. Druhá osoba již musí mít narozeniny pouze libovolný den ve zbývajících 364 dnech a třetí osoba ve zbývajících 363 dnech. Tedy celkový počet možností bez souběhu, kdy má každý den narozeniny nejvýše jeden člověk, je

$$c_1 = 365 \cdot 364 \cdot 363.$$

Tedy pravděpodobnost nesouběhu bude

$$n = \frac{c_1}{c} = \frac{365 \cdot 364 \cdot 363}{365^3}.$$

1.2.1. Značení

Připravíme si užitečný způsob zápisu takovýchto součinů. Podobně jako součet čísel lze zapsat pomocí velkého řeckého Sigma, např.

$$a_1 + a_2 + a_3 = \sum_{i=1}^{3} a_i,$$

tak pro součin používáme velké řecké Pi, např.

$$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 = \prod_{i=1}^{3} a_i.$$

S tímto značením tedy můžeme psát

$$c_1 = 365 \cdot 364 \cdot 363 = \prod_{i=363}^{365} i.$$

Pro značení i pro výpočty je užitečné zavést operaci faktoriál. Značí se vykřičníkem za číslem a faktoriál přirozeného čísla je součin všech přirozených čísel od jedné do daného čísla, tedy např. $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$, obecně

$$k! = \prod_{i=1}^{k} i.$$

Protože

$$k! = \frac{(k+1)!}{k+1},$$

je přirozené dodefinovat $0! = 1$. S použitím faktoriálu můžeme psát

$$c_1 = 365 \cdot 364 \cdot 363 = \frac{365!}{362!}.$$

1.3. Obecný počet osob

Abychom naše výsledky mohli použít i pro řešení jiných úloh, než je souběh narozenin v roce, zobecníme zadání a zavedeme toto značení: h počet osob (hráčů) a d počet dnů. Pak bude celkový počet možných případů

$$c(h, d) = d^h.$$

Počet možností, kdy nedochází k souběhu narozenin, tedy kdy má každý den narozeniny nejvýše jedna osoba, bude (za předpokladu $h \leq d$) součin h čísel

$$c_1(h, d) = d(d-1)\ldots(d-h+1) = \frac{d!}{(d-h)!}.$$

Pravděpodobnost nesouběhu bude

$$n(h, d) = \frac{c_1(h, d)}{c(h, d)}$$

a pravděpodobnost souběhu alespoň dvojích narozenin bude

$$s_2(h, d) = 1 - n(h, d).$$

Pro $h = 2$ hráče a pro $d = 365$ dnů dostáváme pravděpodobnost souběhu alespoň dvojích narozenin

$$s_2(2{,}365) \doteq 0{,}00274,$$

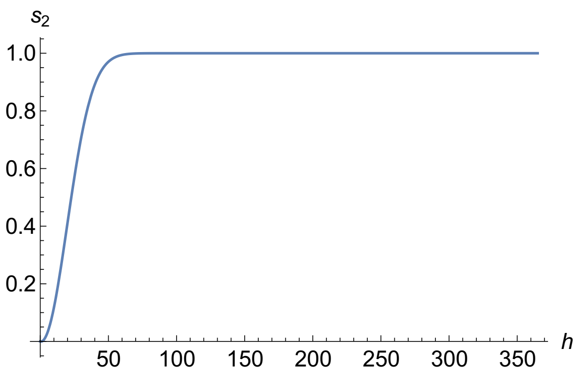
tedy méně než 0,3 %, takže souběh narozenin v páru je výjimečný. Pro $h = 22$ hráčů je pravděpodobnost souběhu

$$s_2(22, 365) \doteq 0{,}476,$$

tedy přibližně 48 %, takže souběh narozenin mezi 22 hráči na fotbalovém hřišti je běžná záležitost. A to ani nepočítáme rozhodčí a trenéry.

No a kdybychom zahrnuli i diváky, tak pokud bude celkový počet osob větší než počet dnů v roce, obecně pokud $h > d$, tak je souběh jistý. Toto samozřejmé tvrzení se nazývá Dirichletův princip, někdy označované také jako zásuvkový princip nebo holubníkový princip. Jedna jeho podoba zní: Když máme stůl s d zásuvkami a v nich uloženo h tužek, tak pokud máme více tužek než zásuvek, tedy pokud $h > d$, tak budou v alespoň jedné zásuvce alespoň dvě tužky.

Závislost pravděpodobnosti souběhu narozenin na počtu hráčů ukazuje obr. 1. Pro malý počet hráčů je pravděpodobnost téměř nulová, pro velký počet hráčů je rovna jedné, tedy souběh je jistý.



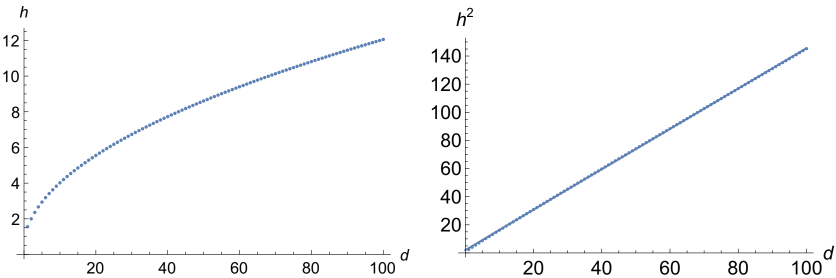
Obr. 1: Závislost pravděpodobnosti, že dojde k souběhu narozenin mezi h hráči na počtu hráčů pro $d = 365$ dnů. Např. pro $h = 57$ je $s_2 = 0.9901$.

Položme si otázku: Pro které h tato závislost překročí jednu polovinu v závislosti na počtu dnů d? Tedy řešíme rovnici

$$s_2(h, d) = \frac{1}{2}.$$

Pokud neexistuje celočíselné řešení této rovnice, můžeme se ptát, pro které nejmenší přirozené h je $s_2(h,d) \geq \frac{1}{2}$. K otázce neceločíselnosti h se ještě vrátíme.

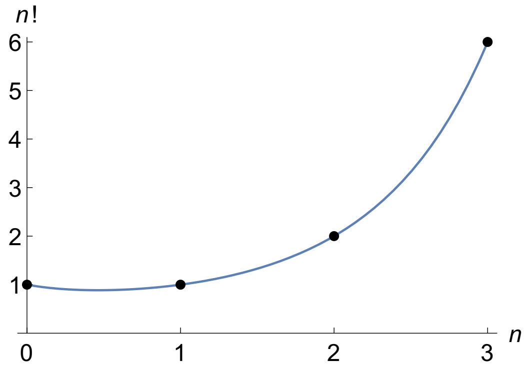
Odpověď na tuto otázku lze hledat dvojím způsobem. Můžeme zvolit numerický experiment. Pro různé hodnoty d např. mezi 1 a 100 můžeme postupně zvyšovat h, počítat s_2 a zaznamenat si takovou hodnotu h, při které s_2 překročí $\frac{1}{2}$. Obr. 2 vlevo ukazuje závislost h na d za podmínky $s_2(h,d) = \frac{1}{2}$. Graf připomíná odmocninu. V pravé části tohoto obrázku vidíme stejná data, ale na svislé ose je vynesena hodnota h^2. Body se srovnaly podél přímky. Když těmito body proložíme přímku (např. metodou nejmenších čtverců) a vykreslíme ji také do grafu, vidíme, že body leží velice blízko této přímky. Závěr je, že je-li počet hráčů přibližně odmocnina z počtu dnů, tak je pravděpodobnost souběhu přibližně jedna polovina, tedy běžný jev.



Obr. 2: Vlevo: závislost počtu hráčů h na počtu dnů d, aby byla pravděpodobnost souběhu narozenin jedna polovina. Tato závislost připomíná graf funkce odmocnina. Vpravo: stejná data jako na obrázku v levé části, ale na svislé ose je vynesena veličina h^2. Body leží podél přímky, což ukazuje, že závislost h na d je přibližně odmocninová.

Pozorný čtenář si všimne, že h na obr. 2 nabývá i neceločíselných hodnot. To je dáno tím, že obr. 2 jsme vytvořili pomocí matematického software *Mathematica* tak, že jsme pro jednotlivé hodnoty d řešili rovnici $s_2(h,d) = \frac{1}{2}$ a tento software používá zobecnění faktoriálu i pro neceločíselné argumenty. Pro zvídavého čtenáře: Toto zobecnění se (až na posunutí o jedničku) nazývá Gama funkce, viz obr. 3.

Druhý způsob, jak dojít k tomuto závěru, je nahradit faktoriály v rovnici $s_2(h,d) = \frac{1}{2}$ pomocí Stirlingovy formule. Potom za předpokladu, že d je velké, bychom dospěli opět k závěru, že h je přibližně rovno odmocnině z d.



Obr. 3: Faktoriál $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$ pro přirozená n lze dodefinovat pro nulu hodnotou $0! = 1$ a také pro kladná neceločíselná n pomocí gamma funkce $n! = \Gamma(n+1)$

1.3.1. Použití v kryptografii

Zatím jsme naše výpočty podávali jako matematické řešení úlohy o pravděpodobnosti souběhu narozenin fotbalových hráčů, tedy bez praktického použití. Tyto úvahy mají však použití mimo jiné v kryptografii. To je část matematiky, která se zabývá metodami bezpečného přenosu zpráv a digitálním podpisem dokumentu. Pro tyto účely se používají mimo jiné také hešovací funkce (anglicky hash function) [1]. Vstupem pro takovou funkci je posloupnost znaků libovolné konečné délky a výstupem je celé číslo mezi 0 a jistou maximální hodnotou. Hešovací funkce se navrhují tak, aby bylo snadné spočítat výsledek ze vstupních dat, ale aby bylo velice obtížné nalézt vzor ze znalosti funkční hodnoty, to znamená vstup dávající daný výsledek. Nebo nalézt jiný vzor, který dá stejnou funkční hodnotu. Je-li počet možných vstupů větší než počet výstupních hodnot, pak taková funkce nemůže být prostá a je jisté, že existují různé vstupní hodnoty, které dají stejný výsledek. Tedy že dochází k souběhu. A zde se nabízí srovnání s naší úlohou o souběhu narozenin. Funkce, kterou uvažujeme, přiřazuje každému člověku den narozenin (z d možných). My poté vybíráme ze všech lidí h hráčů.

Volme nyní náhodně h vstupních hodnot hešovací funkce, která má d možných funkčních hodnot. Pokud jich zvolíme dostatek, konkrétně je-li $h > \sqrt{d}$, je velice pravděpodobné, že najdeme dva různé vstupy, které dají stejný výsledek. Je-li dokonce $h > d$, je souběh jistý.

Proto je důležité navrhovat hešovací funkce tak, aby počet možných výsledků byl veliký. Např. kryptoměna bitcoin používá hešovací funkci SHA-256, která má funkční hodnoty dlouhé 256 bitů, tedy nabývají jedné z 2^{256} hodnot. V našem značení $d = 2^{256}$. Abychom s velkou pravděpodobností našli souběh, tedy dva různé argumenty, které dají stejný výsledek, měli bychom vyzkoušet

$$h = \sqrt{d} = \sqrt{2^{256}} = 2^{128} \doteq 10^{38}$$

vstupních hodnot. Jak by to asi dlouho trvalo? Dnešní počítače pracují s hodinovým kmitočtem v řádu GHz, tedy za jednu sekundu provedou přibližně 10^9 operací. I kdybychom zapojili 10 miliard procesorů najednou (to je trochu více, než je současný počet obyvatel naší planety), tak jsme schopni provést 10^{19} operací za vteřinu. Takže provést 10^{38} operací by nám trvalo $10^{38}/10^{19} = 10^{19}$ s. To je déle, než je odhadované stáří vesmíru, což je přibližně 14 miliard let $= 14 \cdot 10^9 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600 \doteq 10^{17}$ s. Tedy, u této hešovací funkce nehrozí, že by někdo pouhým zkoušením našel dva různé vzory, které dají stejný výsledek.

2. Souběh trojích narozenin

A jaká je pravděpodobnost, že tři hráči budou mít narozeniny ve stejný den v roce? Očekáváme, že to bude řidší jev než souběh dvojích narozenin. Podívejme se nejprve na krajní případy. Bude-li počet hráčů $h < 3$, pak k souběhu tří narozenin nikdy nedojde. Bude-li naopak $h > 2d$, pak souběh trojích narozenin je jistý. A jak to bude mezi těmito dvěma krajními případy? Počet případů, kdy dochází k souběhu alespoň trojích narozenin v jednom dni, dostaneme tak, že od celkového počtu c případů odečteme počet c_1 případů, kdy nedochází k souběhu, a počet c_2, kdy dochází k souběhu dvou (ale ne více) narozenin.

Ukážeme si dvě možné cesty k řešení: útok hrubou silou a diferenční rovnici.

2.1. Útok hrubou silou

Útok hrubou silou (anglicky brute force attack) znamená způsob řešení, kdy si napíšeme všechny možné případy a pak spočítáme, kolik z nich splňuje danou podmínku. To je možné jen pro malé hodnoty, které dají malý počet případů. Tužkou na papíře lze zvládnout desítky, nejvýše stovky případů, na počítači lze pracovat s miliony případů. Ani to ale často nestačí. Uvažme naši úlohu, která pro $h = 22$ hráčů a $d = 365$ dní má celkový počet možných případů $c(h, d) = d^h = 365^{22} \doteq 2 \cdot 10^{56}$. Zpracovat tak velký počet případů nelze stihnout za dobu menší než je stáří našeho vesmíru. Další vážné omezení této metody je kapacita paměti pro uchování informací o všech případech. To lze často obejít tím, že každý jednotlivý případ průběžně vytvoříme, zpracujeme a vymažeme z paměti. Ilustrujme si metodu hrubou silou tedy pro malé hodnoty parametrů, např. pro počet hráčů $h \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ a pro počet dnů $d \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Následující tabulka uvádí celkový počet možných případů $c(h, d) = d^h$.

h \ d	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5
2	1	4	9	16	25
3	1	8	27	$\boxed{64}$	125
4	1	16	81	256	625
5	1	32	243	1024	3125

Pro ilustraci zvolme např. $h = 3$ hráče a $d = 4$ dny. Pak celkový počet případů je $c(3, 4) = 4^3 = 64$. Tato hodnota je v tabulce zdůrazněna rámečkem. Těchto 64 případů lze rozdělit do tří skupin.

V první skupině jsou případy, kde nenastává souběh. Těchto případů je $c_1(3, 4) = \frac{4\,!}{(4-3)\,!} = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$. Tyto případy bez souběhu ukazuje následující tabulka. Buňky jsou seřazeny vzestupně, číslo vpravo má nejmenší váhu (podobně jako řadíme přirozená čísla).

1 2 3	1 2 4	1 3 2	1 3 4	1 4 2	1 4 3
2 1 3	2 1 4	2 3 1	2 3 4	2 4 1	2 4 3
3 1 2	3 1 4	3 2 1	3 2 4	3 4 1	3 4 2
4 1 2	4 1 3	4 2 1	4 2 3	4 3 1	4 3 2

Např. políčko $\boxed{2\ 1\ 3}$ na druhém řádku vlevo znamená případ, kdy první hráč má narozeniny druhý den, druhý hráč má narozeniny první den, třetí hráč má narozeniny třetí den a čtvrtý den už nemá z našich třech hráčů narozeniny žádný.

Ve druhé skupině jsou případy, kdy nastává souběh dvou (ale ne více) narozenin. Tyto případy ukazuje následující tabulka.

1 1 2	1 1 3	1 1 4	1 2 1	1 2 2	1 3 1	1 3 3	1 4 1	1 4 4
2 1 1	2 1 2	2 2 1	2 2 3	2 2 4	2 3 2	2 3 3	2 4 2	2 4 4
3 1 1	3 1 3	3 2 2	3 2 3	3 3 1	3 3 2	3 3 4	3 4 3	3 4 4
4 1 1	4 1 4	4 2 2	4 2 4	4 3 3	4 3 4	4 4 1	4 4 2	4 4 3

Např. políčko $\boxed{2\ 1\ 1}$ na druhém řádku vlevo znamená případ, kdy první hráč má narozeniny druhý den, zatímco druhý i třetí hráč mají souběžně narozeniny první den. Třetí a čtvrtý den už nemá narozeniny nikdo. Označme symbolem $c_2(h,d)$ počet případů, kdy dochází k souběhu dvou (ale ne více) narozenin. Tato tabulka má 36 políček, takže jsme hrubou silou zjistili, že $c_2(3,4) = 36$.

A ve třetí skupině budou případy, kdy nastává souběh tří (ale ne více) narozenin. Jejich počet označme $c_3(h,d)$. Tyto případy ukazuje následující tabulka.

1 1 1	2 2 2	3 3 3	4 4 4

Tato tabulka má 4 políčka, takže jsme hrubou silou zjistili, že $c_3(3,4) = 4$. Při třech hráčích nenastává souběh více než tří narozenin, takže náš výčet je úplný. Pro kontrolu sečteme

$$c_1(3,4) + c_2(3,4) + c_3(3,4) = 24 + 36 + 4 = 64,$$

což je přesně celkový počet případů

$$c = d^h = 4^3 = 64.$$

Podobným způsobem lze najít počet $c_2(h,d)$ případů se souběhem dvou (ale ne více) narozenin i pro jiné hodnoty h a d. Několik vybraných výsledků ukazuje následující tabulka.

h \ d	1	2	3	4	5
1	0	0	0	0	0
2	1	2	3	4	5
3	0	6	18	$\boxed{36}$	60
4	0	6	54	180	420
5	0	0	90	600	2100

Hodnota $c_2(3,4) = 36$, o které jsme již psali, je zdůrazněna rámečkem. Dvě hodnoty jsou v kroužku. To jsou hodnoty, které budeme později potřebovat pro rekurentní výpočet hodnoty v rámečku.

Pro výpočet můžeme s výhodou použít počítačový algebraický systém *Mathematica* a tyto příkazy

```
h=3;
d=4;
pripady=Tuples[Range[d],h];
maxsoubeh[x_]:=Tally[x][[All,2]]//Max;
soubehy = Map[maxsoubeh,pripady];
pocty = Tally[soubehy]

{{3, 4}, {2, 36}, {1, 24}}
```

Příkazem `Tuples` si připravíme všechny h-tice čísel od 1 do d, tedy všechny možné případy. Pak si připravíme funkci `maxsoubeh`, která pro každý případ najde, kolikrát se vyskytují nejčastější narozeniny. Zde jsme použili příkaz `Tally`, který ze vstupní posloupnosti najde, kolikrát se jednotlivé prvky v posloupnosti vyskytují, a vytvoří dvojice [prvek, počet jeho výskytů]. Dvojkou jsme vybrali pouze druhou položku dvojice, tedy počet výskytů. A příkazem `Max` dostaneme nejvyšší počet výskytů. Funkci `maxsoubeh` pustíme na každý případ a nakonec si zjistíme, kolikrát se jednotlivé typy souběhů vyskytují. Výsledek nám říká, že trojitý souběh nastává 4 krát, dvojitý souběh 36 krát a případů bez souběhu je 24. Ve shodě s výše uvedenými výsledky.

Tímto způsobem, tedy hrubou silou, nelze nalézt $c_2(22, 365)$. Ukažme si tedy jiný způsob pomocí diferenční rovnice.

2.2. Diferenční rovnice

Odvodíme si vztah, který nám dovolí spočítat hodnotu $c_2(h, d)$ pomocí hodnot c_2 pro menší argumenty. Takový vztah se nazývá diferenční rovnice.

Příkladem jednoduché diferenční rovnice je

$$a_{n+1} = 2a_n.$$

Řešením je posloupnost, zde a_n, které se říká rekurentně zadaná posloupnost.

Samozřejmě, že bychom raději měli vztah, který by nám dovoloval spočítat hodnotu $c_2(h,d)$ jen ze znalosti h a d, ale když se nám takový vztah nepodaří najít, musíme se smířit alespoň s rekurentním vztahem.

Takže, kolik je možností, kdy nastane souběh dvou (ale ne více) narozenin? První hráč může mít narozeniny libovolný den. To je d možností. Pak:

- buď má v tento den narozeniny ještě některý ze zbylých $h-1$ hráčů a ostatní dny se vyskytují už buď bez souběhu (těch je $c_1(h-2,d-1)$) nebo nejvýše s dvojitým souběhem (těch je $c_2(h-2,d-1)$),
- anebo se tento den již neopakuje, pak musí narozeniny ostatních hráčů vykazovat právě dvojitý souběh (těch je $c_2(h-1,d-1)$).

To dává rekurentní vztah

$$c_2(h,d) = d((h-1)(c_1(h-2,d-1) + c_2(h-2,d-1)) + c_2(h-1,d-1)).$$

Např. pro $h = 3$, $d = 4$ dostaneme

$$c_2(3,4) = 4(2(c_1(1,3) + c_2(1,3)) + c_2(2,3)) = 4(2(3+0)+3) = 36$$

v souladu s údaji v tabulce. Vidíme, že pro výpočet určité hodnoty $c_2(h,d)$ potřebujeme dvě hodnoty z této tabulky, a to hodnotu $c_2(h-1,d-1)$ (soused vlevo nahoře) a hodnotu $c_2(h-2,d-1)$ nad touto hodnotou. Tedy pro výpočet určité hodnoty $c_2(h,d)$ např. $c_2(22,365)$ potřebujeme znát hodnoty na prvních dvou řádcích tabulky, tedy $c_2(1,\cdot)$ a $c_2(2,\cdot)$, a hodnoty v levém sloupci, tedy $c_2(\cdot,1)$. Tyto hodnoty snadno dostaneme následující úvahou. Pro jednoho hráče, když je $h = 1$, souběh dvojích narozenin nemůže nastat. Proto $c_2(1,d) = 0$ pro všechny hodnoty d. Pro dva hráče může nastat souběh dvojích narozenin tolikrát, kolik je dní, tedy $c_2(2,d) = d$ pro všechny hodnoty d. A pokud uvažujeme pouze jeden den, tedy $d = 1$, tak pro 3 a více hráčů nemůže nastat souběh pouze dvojích narozenin, ale právě h narozenin, tedy pro $h \geq 3$ je $c_2(h,1) = 0$. Těmto podmínkách se říká okrajové podmínky.

Pro výpočet můžeme opět s výhodou použít počítačový algebraický systém *Mathematica*. Okrajové podmínky i diferenční rovnici můžeme zadat následujícími příkazy

```
c[h_,d_]:=d^h;
c1[h_,d_]:=d!/(d-h)!;
c2[2,1]:=1;
```

```
c2[1,d_]:=0;
c2[2,d_]:=d;
c2[h_,1]:=0;
c2[h_,d_]:=d*((h-1)*(c1[h-2,d-1]+c2[h-2,d-1])+c2[h-1,d-1]);
s2[h_,d_]:=(c[h,d]-c1[h,d])/c[h,d];
s3[h_,d_]:=(c[h,d]-c1[h,d]-c2[h,d])/c[h,d];
```

A pak se můžeme přesvědčit, jestli dostaneme stejný výsledek, jako jsme dostali hrubou silou

```
In[10]:= c2[3,4]
Out[10]= 36
```

Ano, to je stejný výsledek. A můžeme se přesvědčit, jaká je pravděpodobnost souběhu alespoň dvojích narozenin mezi 22 hráči

```
In[11]:= s2[22,365]//N
Out[11]= 0.475695
```

Funkci `N` jsme použili, abychom dostali přibližnou numerickou hodnotu, jinak bychom dostali zlomek, kde čitatel i jmenovatel jsou velká přirozená čísla.

A nakonec můžeme snadno spočítat pravděpodobnost souběhu alespoň trojích narozenin mezi 22 hráči

```
In[12]:= s3[22,365]//N
Out[12]= 0.0110777
```

Tedy přibližně jedno procento, což je výrazně méně než pravděpodobnost souběhu dvojích narozenin, jak jsme očekávali.

Poděkování. Za inspiraci k těmto úvahám děkuji svému příteli Luboši Rulíškovi.

Literatura

[1] Balková, Ľ., Legerský, J.: Hašovací funkce a kombinatorika na slovech. *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*, roč. 58 (2013), č. 4, s. 274–284.

[2] Birthday problem. https://en.wikipedia.org/wiki/Birthday_problem

Liping Ma: Znát a učit elementární matematiku. Jak učitelé v Číně a ve Spojených státech rozumí základní matematice

Zdeněk Halas, MFF, Univerzita Karlova, Praha

V roce 1999 poprvé vyšla kniha *Knowing and Teaching Elementary Mathematics* (*Znát a učit elementární matematiku. Jak učitelé v Číně a ve Spojených státech rozumí základní matematice*, český překlad J. Rákosník, Edice Galileo, sv. 77, Academia, Praha, 2021) založená na dizertační práci, kterou na Stanfordově univerzitě úspěšně obhájila vynikající čínská učitelka matematiky a badatelka v oblasti didaktiky matematiky Liping Ma. Kniha vzbudila značnou pozornost již před svým vydáním, oslovila totiž nejen ty, kteří se zabývají vyučováním matematice, ale oceňovali ji i matematikové samotní. Dočkala se několika vydání, překladů do různých jazyků i studií, které měly zhodnotit její vliv; jedna z nich je připojena na konci českého vydání. Analýzy a podrobnější recenze vyšly u nás např. v Pokrocích matematiky, fyziky a astronomie (číslo 66/2 z roku 2021 a číslo 53/4 z roku 2008).

Liping Ma byla jako středoškolská studentka poslána v době čínské Kulturní revoluce do horské vesnice na převýchovu. Po několika měsících byla požádána, aby vyučovala ve vesnické škole. Postupně se stala ředitelkou školy, za svou práci byla oceňována. Vystudovala Východočínskou vysokou školu pedagogickou a rozhodla se pokračovat ve studiu i v odborné práci ve Spojených státech: studovala a pracovala na Michiganské státní univerzitě, kde se také podílela na vývoji a analýze národního přehledu matematických znalostí učitelů základních škol. Znalosti amerických učitelů i jejich přístup k matematice ji překvapil, a tak se rozhodla věnovat se srovnání čínských a amerických učitelů ve své dizertační práci, kterou obhájila na Stanfordově univerzitě.

Čínským a americkým učitelům předložila ve svém výzkumu čtyři úlohy, na nichž pozorovala přístup a znalosti učitelů z obou skupin:

1. Pojetí výkladu pro druhý ročník základní školy: odčítání, např. 52–25, 91–79.
2. Práce s chybami žáků: co dělat, když žáci při písemném násobení víceciferných čísel neposouvají částečné součiny.

3. Jak byste vypočítali $1\frac{3}{4} : \frac{1}{2}$? Uveďte slovní úlohu či model, který by tuto úlohu dobře ilustroval.
4. Samostatná matematická práce: jak byste pracovali s žákyní, která učinila „objev“, že se zvětšujícím se obvodem obdélníku se zvětšuje i jeho obsah.

Výsledky porovnání byly jednoznačné: čínští učitelé ve všech úlohách prokazovali podstatně hlubší porozumění matematické podstatě, které se pozitivně odráželo v kvalitě jejich vyučování. Při svých výkladech prokázali nejen lepší znalost jednotlivých postupů (tzv. procedurální porozumění), ale také uměli podat řádné matematické zdůvodnění a vedli žáky k hlubšímu porozumění těmto postupům (tj. kladli důraz na tzv. konceptuální porozumění). Navíc často uměli předložit různé postupy a podat různá vysvětlení. Byli si dobře vědomi návaznosti jednotlivých témat.

Výklady amerických učitelů nebyly tak hluboké, podrobné, nevedly dostatečně žáky k samostatnému uvažování nad matematickými problémy. Kvalitní řešení a zdůvodnění podávalo u jednotlivých úloh kolem 80 % čínských učitelů, avšak jen necelá čtvrtina učitelů amerických. Bylo tomu tak navzdory tomu, že američtí učitelé dosáhli formálně mnohem vyššího vzdělání (alespoň bakalářský titul) oproti učitelům čínským, kteří za sebou měli jen asi 12 let školní docházky (9 let na ekvivalentu naší základní školy a další dva či tři roky na učitelském ústavu).

V celé knize se hovoří o srovnávání čínských a amerických učitelů; nejde však pouze o porovnání dvou skupin, ani porovnání národů. Liping Ma se soustředí na podstatu problému: na odlišné přístupy, jejich příčiny a důsledky. Zejména důsledky jsou podstatné: mnohem lépe vzdělaní žáci v Číně, jak pravidelně ukazuje mezinárodní srovnávání jejich matematických schopností. Proto se podrobně věnuje otázce, proč čínští učitelé dosahují podstatně lepších výsledků než učitelé američtí. Jeden z nejvýraznějších prvků, který k tomu přispívá, je to, že čínští učitelé na sobě neustále pracují; po dosažení formálního vzdělání a nástupu do zaměstnání jejich růst v matematice nekončí, spíše začíná: studují společně s ostatními učiteli osnovy, učebnice, řeší sbírky pokročilých úloh, nad jejich řešením společně diskutují, sdělují si své zkušenosti. Nepodceňují elementární matematiku, ale přistupují k ní s pokorou a s upřímnou snahou o její dokonalé porozumění a o skutečně kvalitní výuku založenou nikoli na pouhém předložení postupů, ale o jejich odvození, zdůvodnění; velmi často pak vedou žáky k objevování jednotlivých zákonitostí.


GALILEO
Liping Ma
ZNÁT A UČIT ELEMENTÁRNÍ MATEMATIKU
Jak učitelé v Číně
a ve Spojených státech rozumí
základní matematice
academia

Prakticky celý text lze také chápat tak, že obrací pozornost zpět k tzv. obsahu, tj. samotné vyučované látce. Činí tak v souvislostech, nezapomíná tak na učitele a žáka. Mnozí matematici i didaktici matematiky oceňují, že jsou všechny tyto tři složky (látka, učitel, žák) dobře vyvážené.

Kniha tak není jen porovnáním dvou skupin učitelů z různých států, ale dává náměty ke zlepšení. Navíc srozumitelně ukazuje příklady dobře prováděné klasické výuky oproti klasické výuce nekvalitní, která žáky k hlubšímu porozumění nevede. Tento pozitivní přístup považuji za hodnotný, neboť v běžných debatách (zejména ve veřejném prostoru) jsme spíše svědky zbytečně polarizujících se debat ohledně vyučování matematice, a to na úkor odborného přístupu.

Kniha se velmi dobře čte, již od první stránky je zajímavá, podnětná, dobře srozumitelná i nematematikům. Ke čtivosti přispívá i kvalitní překlad, který pořídil Jiří Rákosník z Matematického ústavu Akademie věd. Díky své matematické erudici, odpovědnému přístupu, zájmu o vyučování i konzultacím s českými didaktiky je jeho překlad čtivý a po odborné stránce na výborné úrovni.

Vydání této knihy v češtině považuji za přínosný počin. Věřím, že z ní tak budou moci snáze čerpat nejen učitelé, ale i studenti učitelství. Jednotlivé problémy v ní obsažené a jejich analýzy přesahují hranice elementární matematiky a jsou tak podnětné i pro učitele na středních a vysokých školách. Myslím tedy, že kniha *Znát a učit elementární matematiku* může dobře prospět každému učiteli matematiky.

Literatura

[1] Bečvář, J.: Recenze knihy Znát a učit elementární matematiku. *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*, roč. 66 (2021), č. 2, s. 142–146.

[2] Ma, L.: *Knowing and Teaching Elementary Mathematics.* Lawrence Erlbum Associates, Mahwah, New Jersey, 1999.

[3] Ma, L.: *Znát a učit elementární matematiku.* Edice Galileo, sv. 77, Academia, Praha, 2021 (český překlad J. Rákosník).

Jak provokovat, když dostanete úlohu o pádu železné a dřevěné koule III

Leoš Dvořák, MFF UK, Praha

V prvních dvou článcích této série ([1] a [2]) jsme řešili, jak je to s dobou pádu železné a dřevěné koule. V prvním z uvedených článků jsme trochu víc provokovali a „šťourali“, v druhém jsme poctivě počítali, jak vzduch pád těchto těles ovlivní. Pojďme se opět vrátit trochu k provokování, a to v případě, který se zdá naprosto jasný: když tělesa padají ve vakuu. V tom případě, jak víme, v daném gravitačním poli všechna tělesa padají se stejným zrychlením. Takže ze stejné výšky musí na zem dopadnout za stejnou dobu. Tak kde je tady prostor pro nějakou provokaci? Pojďme se podívat. Takže:

Vzhůru do vakua!

Nechme stranou možnost, že dřevěná koule by mohla být navlhlá a odpařovala by se z ní voda, přesněji vzato by se vyvařovala do vakua. A kdyby to bylo nesymetricky, třeba by i tento drobný „raketový efekt“ mohl pád koule ovlivnit. (Vida, jak by se také dalo provokovat.) Uvažujme dvě homogenní koule stejného poloměru, z nichž se nic neuvolňuje, jen bude mít každá jinou hmotnost. Na začátku dáme první kouli do určité výšky h, necháme padat (s nulovou počáteční rychlostí) a změříme dobu pádu. Vše se děje ve vakuu. Pak provedeme přesně totéž s druhou koulí. Dopadnou za stejnou dobu?

Inu, zcela přesně vzato nedopadnou. Proč?

Pojďme se na celou situaci podívat „zvenku“, z inerciálního systému S, ve kterém je Země na počátku v klidu. Neuvažujeme přitom žádné další vlivy působící na Zemi, tedy další kosmická tělesa nebo to, že někdo třeba v Austrálii pouští na zem různé krychle… Prostě si celý problém idealizujeme: Máme jednu velkou tuhou sféricky symetrickou kouli, tj. Zemi, a z výšky h od jejího povrchu na ni pustíme menší kouli. Abychom situaci ještě víc zjednodušili, nebudeme uvažovat rotaci Země nebo budeme pokus dělat na severním či jižním pólu.

V systému S ovšem nejen padá naše železná nebo dřevěná koule k Zemi (se zrychlením $g \doteq 10\ \mathrm{m/s^2}$), ale také Země směrem ke kouli.

Obě se totiž přitahují stejně velkou silou. Je tedy

$$m_{\mathrm{k}} a_{\mathrm{k}} = M_{\mathrm{z}} a_{\mathrm{z}},$$

kde M_{z} je hmotnost Země (asi $6 \cdot 10^{24}$ kg) a a_{z} její zrychlení. Podobně značíme veličiny koule, přitom zrychlení koule $a_{\mathrm{k}} = g$. Zrychlení Země je tedy

$$a_{\mathrm{z}} = \frac{m_{\mathrm{k}}}{M_{\mathrm{z}}} g, \tag{1}$$

čili mnohem menší než zrychlení koule – ale je nenulové. A závisí na hmotnosti koule. Čili pro železnou kouli je větší než pro dřevěnou. Vzdálenosti, které Země a koule při pádu urazí, jsou také v poměru $m_{\mathrm{k}}/M_{\mathrm{z}}$. Kdybychom kouli o hmotnosti 6 kg pouštěli z výšky 1 metr, urazila by Země do dopadu vstříc kouli jen 10^{-24} m. To není moc, jen zhruba miliardtina průměru atomového jádra vodíku. Dřevěná koule je méně hmotná, Země k ní tedy padá s menším zrychlením – čili dřevěná opravdu dopadne na povrch Země o chviličku později. Ovšem rozdíly, jak vidíme, jsou velmi nepatrné.

Aby byl efekt výraznější, museli bychom naši železnou kouli mít větší. Nebuďme troškaři a uvažujme kouli o poloměru asi 6 kilometrů, tedy skoro tisícinu poloměru Země. Pak už by zrychlení Země bylo miliardtinou zrychlení koule.[1)] A kdybychom naši kouli zvedli o deset metrů, při pádu koule by se Země posunula o deset nanometrů. To už je délka, kterou si lze představit, rozměry řádu nanometrů mají dnes struktury v polovodičových čipech. A pád Země o deset nanometrů by znamenal, že doba vzájemného pádu koule a Země (než by se dotkly) by byla kratší o necelou nanosekundu oproti případu, kdyby padala koule o zanedbatelné hmotnosti. A nanosekunda, to se také dá změřit; procesory v našich smartphonech „tikají“ rychleji než je tato doba.

„Šedá každá teorie…“ aneb problematika pokusu s pádem velké koule v praxi

Teorie ve skutečnosti není šedá, konec konců jsme se s ní v předchozích článcích „vyřádili“ docela barvitě. Ale realita je vždy ještě slo-

1) Přesně by to platilo, kdyby koule byla právě tisíckrát menší než Země a hustoty koule a Země by byly stejné. (Což nejsou, hustota Země je asi o 30 % menší.) Nám zde ale jde o řádové odhady velikosti různých efektů, například o to, zda se Země pohne o pikometry či ještě méně, nanometry, mikrometry, milimetry nebo víc. Proto v našem odhadu rozdíl třicet procent není podstatný.

žitější. Takže technicky bychom s výše popsaným pokusem měli řadu problémů.[2)]

Pomiňme teď „drobnost“ typu, že Země má atmosféru a daný pokus má být ve vakuu. Takže bychom museli mít budovu o výšce, šířce a délce alespoň 12 kilometrů a vyčerpat z ní vzduch.[3)] V ní už pokus pohodlně provedeme.

No, pohodlně. Nejdřív tu kouli musíme o deset metrů zvednout.

• Problém 1: Máme dost energie?

Kolik je ke zvednutí koule potřeba energie? Při zvedání o tak malý kousek můžeme gravitační pole Země považovat za homogenní a pro změnu potenciální energie koule použít známý výraz $E_\mathrm{p} = mgh$. Je $h = 10$ m, $g \doteq 10$ m/s^2,[4)] jen ta hmotnost koule je trochu velká, pro kouli ze železa asi $7 \cdot 10^{15}$ kg. Potřebná energie je tedy asi $7 \cdot 10^{17}$ J. Máme ji k dispozici?

Vzato celosvětově, máme. Celosvětová spotřeba energie v roce 2019 byla asi 173 tisíc terawatthodin, tento údaj najdeme například na [3] nebo též na Wikipedii. Přepočet na jouly dá $173\,000 \cdot 10^{12}\ \mathrm{W} \cdot 3\,600\ \mathrm{s} \doteq$ $\doteq 6{,}2 \cdot 10^{20}$ J. Pokud budeme nedůvěřiví, můžeme si tento údaj ověřit ještě nějakým nezávislým zdrojem, například [4]. Tam se uvádí celosvětová produkce energie v roce 2019 necelých 15 tisíc Mtoe. Jak se můžeme poučit na [5], Mtoe je megatuna ropného ekvivalentu, tedy množství energie, které se uvolní spálením miliónu tun ropy. Dozvíme se tam také, že

$$1\ \mathrm{Mtoe} = 4{,}186\,8 \cdot 10^{16}\ \mathrm{J}.$$

15 tisíc Mtoe dá po tomto přepočtu opravdu asi $6{,}2 \cdot 10^{20}$ J. Pro náš pokus je potřeba asi tisícina tohoto množství. Takže když přesvědčíme celý svět, aby na nějakých deset hodin přestal spotřebovávat energii, máme jí dost.

• Problém 2: Máme dost železa?

Trochu větší problém bude s potřebným množstvím železa. Na webu si můžeme dohledat, viz např. [6] nebo [7], že světová produkce oceli

---

[2)] Občas se říká, že „nic není problém, všechno je výzva“. Takže bychom měli řadu výzev… ☺ Jak uvidíme, tak nemalých.

[3)] Jestli by to šlo vůbec udělat a budova by mohla odolat tlaku vzduchu (zřejmě ne), to teď nebudeme řešit. Také byste si mohli představit, že máme někde jinde kouli o rozměrech a hmotnosti Země, ale ve vakuu, a pokus provádíme na ní.

[4)] Pro odhad nám stačí takto přibližná hodnota.

v roce 2019 byla necelých 1 870 milionů tun. To vypadá impozantně, ale je to $1{,}87 \cdot 10^{12}$ kg. Našich $7 \cdot 10^{15}$ kg se při stejné produkci dočkáme za více než 3 700 let. Bude to tedy chtít trpělivost… [5]

• Problém 3: Pevnost materiálu.

Tím ovšem problémy nekončí. Jestlipak takhle velká železná koule vůbec vydrží vlastní tíhu? I kdybychom si problém zjednodušili a uvažovali jen železný resp. ocelový válec vysoký 12 km, řekněme o ploše podstavy 1 m^2, bude mít objem $1{,}2 \cdot 10^4$ m^3, a tedy hmotnost asi $9{,}4 \cdot 10^7$ kg. Na materiál u jeho spodní podstavy tedy bude působit síla přes $9 \cdot 10^8$ N, čili tlak přes 900 MPa. Vydrží to materiál, nezačne se hroutit?

Abychom to zjistili, potřebujeme najít hodnotu pevnosti železa v tlaku. Ta se obecně hledá hůře než pevnost v tahu, ale když zadáme do Googlu „compressive strength“, můžeme najít například stránku [9], kde je hodnota pro železo uvedena. Ale ouha, je jen 220 MPa. To znamená, že železo tlak 900 MPa nevydrží. Museli bychom vzít nějaké pevnější typy oceli. To by pomohlo. Když na stránkách [9] dáme vyhledat termín „compressive strength steel“, dostaneme se třeba k článku, jehož název začíná „O1 Tool Steel“, a tam je mezi mechanickými vlastnostmi uvedena pevnost až 2 200 MPa.

Otázkou ovšem je, jestli by naši kouli udržela podložka, třeba skála, na niž bychom kouli položili. Podle [10] je mez pevnosti žuly v tlaku jen 130 MPa;[6] koule by se tedy propadla do podloží.

Proč se dostatečně velká koule určitě musí propadnout, případně se sama zhroutí svou vahou? Odpověď lze najít v článku V. Weisskopfa [11], v němž jednoduše zdůvodňuje, proč na Zemi nemáme hory vyšší než zhruba 10 km. Když hora (nebo naše koule) trochu poklesne, klesne její potenciální energie. A uvolněná energie stačí na plastickou deformaci materiálu v základně hory (nebo pod koulí).

Rozeberme si to na příkladu našeho dvanáct kilometrů vysokého železného sloupu s podstavou 1 m^2. Uvažujme vrstvu železa vysokou třeba 1 cm na spodku sloupu. Její objem je 0,01 m^3 a hmotnost asi 79 kg.

---

[5] A také výřečnost, přesvědčit svět, že po skoro 4 tisíce let mu spotřebujeme všechno železo. A také hooodně tučné konto. A možná ani to nebude stačit, protože celosvětové zásoby železa (z dosud nevytěžené železné rudy) se odhadují na 85 miliard tun, viz např. [8]. To by na naši kouli zdaleka nestačilo. Ale řekněme, že nějakým způsobem půjde získávat další železo ze zemské kůry, podle [8] ho má být v zemské kůře 4,65 %.

[6] V příslušné tabulce na dané webové stránce jsou i mnohem větší čísla, ale ta jsou v jednotkách „psi“, což je „pound per square inch“ tedy libra na čtvereční palec. Přepočítávat takovéto jednotky musí být radost, zlatá soustava SI!

Energii potřebnou pro plastickou deformaci můžeme (podle [11]) odhadnout z měrného skupenského tepla tání, to je pro železo podle [12] rovno 250 kJ/kg.[7] Na plastickou deformaci 79 kg tedy bude potřeba energie $E = 79 \cdot 250\ \mathrm{kJ} \doteq 2 \cdot 10^7\ \mathrm{J}$. Aby se tato energie získala poklesem sloupu o $\Delta h = 1$ cm, musí být $mg\Delta h \doteq E$. Odtud $m = E/(g\Delta h) \doteq 2 \cdot 10^8$ kg. To je o něco víc než dvojnásobek hmotnosti našeho dvanáctikilometrového sloupu. Takže můžeme odhadnout, že zhruba třicetikilometrový či vyšší sloup už by vlastní tíhu neudržel.

Vidíme ovšem, že na planetě s nižším tíhovým zrychlením by tíhu vydržely sloupy vyšší. Ostatně, podobně je tomu i s horami: na Marsu, kde je tíhové zrychlení jen 3,7 m/s^2, je hora výrazně vyšší než pozemský Mount Everest: Olympus Mons má výšku přes 20 km. (Oba údaje viz např. [13].)

Poznamenejme, že problém, jak velká koule by dokázala vzdorovat gravitaci, by byl samozřejmě složitější než náš zjednodušený model se sloupem. Koule je výrazně hmotnější, takže kdyby se o zem opírala jen částí svého spodního povrchu, byl by tlak na podloží vyšší než v případě sloupu. Navíc by „střední část“ koule musela nést i okrajové vrstvy, takže by se zřejmě musela uvažovat i mez pevnosti ve smyku... Celé by to asi byl zajímavý, ale složitý problém z oblasti fyziky známé jako mechanika kontinua.

• Problém 4: Drtivý dopad...

Jestliže byl problém už v tom, aby se velká koule nepropadla materiálem, na němž leží, tím spíše bude problém, co se stane, když na povrch Země dopadne, byť jen z výšky deseti metrů. Jak jsme uvedli výše, má hmotnost asi $7 \cdot 10^{15}$ kg, takže ve výšce 10 m má energii asi $7 \cdot 10^{17}$ J. (Toto číslo vlastně už známe, byla to práce na zvednutí koule.) A tato energie se při dopadu uvolní...

Nebudeme zde domýšlet ani dohledávat, co by se při takovém dopadu stalo. Stojí však za to, porovnat tuto energii například s energií výbuchu atomové bomby. Většinou se energie výbuchů uvádí v tunách TNT; u atomových bomb pak v kilotunách nebo megatunách TNT. Podle [14] i dalších zdrojů je 1 tuna TNT rovna 4,184 GJ. Jde o energii, která se uvolní při výbuchu jedné tuny trinitrotoluenu. (Toto je konvenčně stanovený přepočet, reálně může být energie výbuchu poněkud vyšší či nižší,

[7] Jiné zdroje uvádějí poněkud vyšší hodnotu, ale ne dramaticky vyšší, pro náš odhad uvedená hodnota postačí.

viz [14].) V zásadě v těchto jednotkách můžeme vyjadřovat libovolně velké či malé energie. Jako kuriozitu lze uvést, že [14] prezentuje i údaj, že jedna kilokalorie (kcal) se rovná 10^{-12} megatun TNT. Výživové hodnoty potravin ovšem asi nezačneme vyjadřovat v bilióntinách megatun TNT… ☺[8)]

Našich $7 \cdot 10^{17}$ J uvolněných při dopadu velké železné koule odpovídá asi 167 megatunám TNT. To je více než desetitisíckrát víc, než byla energie atomového výbuchu v Hirošimě, víc než trojnásobek energie největší vodíkové bomby, která kdy explodovala (Car-bomba měla při testu energii asi 50 Mt TNT), a téměř tolik, jako byl výbuch sopky Krakatoa v roce 1883 (200 Mt TNT; všechny uvedené údaje dle [14]). Takže dopad by to byl opravdu drtivý.

• Problém 5: Stačíme utéct zpod padající koule?

Vzhledem k tomu, jak destruktivní účinky by dopad zjevně měl, je náš poslední problém vlastně ryze teoretický: Kdyby koule padala na pevnou podložku a kdyby se do ní vůbec nezabořila a sama se nezdeformovala, stihli bychom utéct, kdybychom si těsně před začátkem pádu zálibně prohlíželi místo pod jejím středem?

Záporná odpověď je asi celkem jasná, ale přece jen: Kdyby se koule opravdu vůbec nezabořila a země pod ní byla absolutně rovná, jak daleko bychom museli utéct, aby nás koule nepřimáčkla?

Pokud chceme mít k dispozici výšku h, dejme tomu alespoň 30 cm, je zřejmé, že musí platit (viz obr. 1)

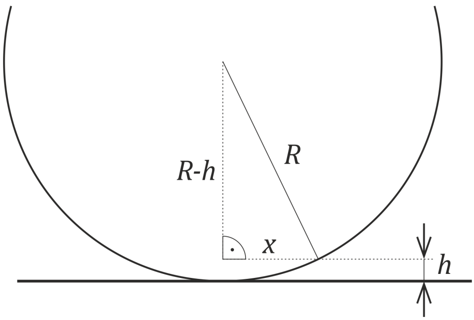
$$x^2 + (R - h)^2 = R^2.$$

Odtud

$$x^2 = 2Rh - h^2 \doteq 2Rh, \qquad (2)$$

protože $h \ll R$. Pro $R = 6\,000$ m a $h = 0{,}3$ m vyjde $x = 60$ m. Za asi 1,4 s, které trvá pád koule z výšky deseti metrů, bychom tuto vzdálenost rozhodně neuběhli.

8) Moment, bilióntina megatuny je vlastně jeden gram. Takže není divu, že se pohybujeme v jednotkách kJ. Řádově stejné energie získáme při spalování paliv, v obou případech jde o chemické reakce. (Ke hmotnosti ovšem musíme připočítat i hmotnost kyslíku, který se při reakci spotřebuje.) A podobné hodnoty najdeme opravdu i v nutričních tabulkách potravin, viz např. [15]. Do hmotnosti potravin bychom ovšem opět museli započítat hmotnost kyslíku, který se příslušných reakcí v organizmu účastní; jinak nás překvapí, že nutriční hodnota třeba másla (28,3 kJ/g) je výrazně vyšší, než 4,184 kJ uvolněných při explozi 1 g TNT. Ale to už by bylo téma na jiný článek…



Obr. 1: K určení místa pod koulí dotýkající se vodorovné podložky

• Problém 6: Ono by to bylo ještě složitější…

V reálném pokusu by se nepochybně uplatnil minimálně jeden další vliv, který jsme zatím neuvažovali. Dosud jsme si představovali, že když kouli pustíme, začne padat naráz jako celek. Ve skutečnosti, kdybychom ji měli nějak podepřenou a podpěru naráz odstranili (neřešme teď, jak), nezačnou současně padat spodní i horní části koule. Horní části koule jsou totiž podpírány těmi spodními, díky tomu, že v materiálu koule je mechanické napětí. (Prostě, materiál koule je stlačen, díky tomu je v něm síla podpírající horní vrstvy koule.) A toto mechanické napětí nezmizí okamžitě, jakmile dole uvolníme podpěru.

Jednoduše řečeno, když dole uvolníme podpěru, materiál v horních vrstvách se o tom „dozví", až za chvíli, až k němu „doputuje informace", že se něco mění. Tedy že se mění stlačení materiálu. A tahle informace se v materiálu šíří rychlostí zvuku. Ta je v oceli (jak můžeme zjistit např. v oblíbených tabulkách [12]) necelých 6 km/s. A jéje – takže k vrstvám na vrchu koule by tato informace dorazila až za 2 s. Ale to je doba delší, než je samotná doba pádu z 10 m, ta je jen asi 1,4 s. Tohle z naší jednoduché představy o pádu koule jako jednoho tuhého celku nenechává kámen na kameni.[9)]

Reálně by po uvolnění podpěry na spodní část koule působila síla stlačeného materiálu z horních vrstev směrem dolů, takže by se spodní vrstvy pohybovaly k Zemi s větším zrychlením než g. Podobná situace, ale v opačném smyslu nastává, když pustíme nataženou pružinu, kterou jsme drželi za horní konec. Dobře je to vidět na pružině typu „slinky" – krásně a přehledně to popisuje příspěvek doc. Bochníčka [16].

[9)] Představa tedy dopadá podobně jako země, na níž by koule dopadla… ☺

Reálnější by byl pokus v menším měřítku: pojďme pády provést na asteroidu

Řady popsaných problémů bychom se zbavili, kdybychom pokus provedli v menším měřítku. Menší by přitom neměla být jen padající koule, ale i nebeské těleso, které ji přitahuje. Zkusme uvažovat asteroid o poloměru 600 m[10)] a kouli o poloměru 60 m. Zvedneme ji (spodním okrajem) 10 m nad povrch asteroidu a pustíme.

Gravitační zrychlení na povrchu koule o poloměru R a hmotnosti M je

$$a = G\frac{M}{R^2} = G\frac{\frac{4}{3}\pi R^3\rho}{R^2} = \frac{4\pi}{3}G\rho R, \tag{3}$$

kde G je gravitační konstanta Newtonova gravitačního zákona a ρ je průměrná hustota koule. Pokud by asteroid měl průměrnou hustotu stejnou jako Země, vidíme, že gravitační zrychlení by na jeho povrchu bylo tolikrát menší než g, kolikrát je asteroid menší než Země. V případě asteroidu s průměrem 600 m je na něm tedy gravitační zrychlení asi desetitisíckrát menší, než g,[11)] tedy asi 10^{-3} m/s^2.

Železná koule o poloměru 60 m bude mít hmotnost asi $7 \cdot 10^9$ kg, tedy 7 miliónů tun. To je hodně, ale méně než půl procenta roční světové produkce oceli, takže žádný problém.[12)]

7 miliónů tun může stále připadat hodně na zvedání, ale na asteroidu je menší gravitační zrychlení, bylo by to, jako zvedat na Zemi 700 tun. Energie potřebná na zvednutí o 10 m by byla $7 \cdot 10^7$ J, to je necelých 20 kWh. Což je oproti ostatním nákladům skoro nic. Samozřejmě, trochu problém by byl dostat na asteroid těch 7 miliónů tun železa, asi by bylo vhodné těžit železo někde přímo v pásu asteroidů.[13)]

[10)] Asteroidy těchto velikostí mívají nepravidelný tvar. Ale řekněme, že jste objevili nějaký prakticky kulového tvaru, nebo jste si vhodný asteroid upravili do tvaru koule…

[11)] Při našich přibližných výpočtech zde nebudeme rozlišovat, zda má Země poloměr 6 tisíc km nebo 6 378 km; ostatně, chcete-li, najděte si asteroid s poloměrem 637,8 m. ☺

[12)] Pomineme problém ceny; řekněme, že váš pokus sponzoruje štědrý miliardář. Nebudeme zde uvádět odkazy, ale lze dohledat, že podle cen z roku 2019 by 7 miliónů tun surového železa stálo asi 2,5 miliardy dolarů. To by štědrý miliardář mohl skousnout. (A třeba byste dostali množstevní slevu, tedy pokud by naopak zvýšený zájem o železo nevyhnal cenu nahoru…).

[13)] O dopravu na asteroid a další technické náležitosti zkuste říct třeba Elonu Muskovi. Asi ho budete muset trochu přemlouvat, ale zřejmě to bude jednodušší, než přemluvit celý svět, aby se víc jak tři tisíce let obešel bez přísunu železa…

Pevnost materiálu také nebude problém, stodvacetimetrový ocelový sloup dokážeme postavit i na Zemi. Kdyby měl, jak jsme uvažovali výše, průřez 1 m^2, měl by hmotnost necelých tisíc tun a tedy (při gravitačním zrychlení 10^{-3} m/s^2) působil na základnu silou asi 1 000 N. Čili tlak na základnu by byl asi 1 kPa, tedy stokrát méně, než je atmosférický tlak na Zemi.

Energie uvolněná při pádu by byla stejná, jako energie potřebná na zvednutí koule, takže necelých 20 kWh. To by moc drtivý dopad nebyl.

Uhnout zpod padající koule by šlo bez problémů. Ze vztahu $s = \frac{1}{2}at^2$ pro zrychlení $a = 10^{-3}$ m/s^2 a $s = 10$ m vypočteme, že pád by trval asi 140 s. Přemístit se o 60 metrů stranou by šlo pomalou chůzí.[14)]

Jaký vliv by měla skutečnost, že koule není absolutně tuhá, to by bylo potřeba propočítat důkladněji. Informace, že jsme pod koulí odstranili podpěru, by se do horní části koule dostala rychlostí zvuku za 20 ms. To je proti době pádu velmi málo, ale koule by se zřejmě mohla rozkmitat a to by mohlo mít vliv na to, kdy se její základna při pádu přesně dotkne povrchu asteroidu. Ale to už zde opravdu rozebírat nebudeme.[15)]

Jak by to bylo s dobou pádu koulí z různého materiálu na asteroidu

Kdyby byl asteroid ze železa, byl by tisíckrát hmotnější než naše železná koule. (To okamžitě plyne z jednoduché úvahy: je desetkrát větší, takže má tisíckrát větší objem.) Čili když koule k asteroidu spadne o 10 m, asteroid se směrem ke kouli pohne o 1 cm. Stejně velká dřevěná koule[16)] by asteroid přitahovala výrazně méně a hnula by s ním o méně než milimetr. Takže železná koule by opravdu dopadla pozorovatelně dříve než dřevěná.

O kolik dříve, to už spočteme lehce. Rychlost dopadu koule z výšky $h = 10$ m je $v = \sqrt{2ah}$, což po dosazení dává asi 0,14 m/s. Doba, za níž se touto rychlostí urazí 1 cm, je asi 70 milisekund. Zhruba takový časový

[14)] Je ovšem otázkou, jak by šlo při tak malém gravitačním zrychlení chodit. Spíš by to chtělo odrazit se do strany a nad povrchem asteroidu se pohybovat způsobem typu „šikmý vrh". Ale nezapomeňte se pak něčeho chytit, abyste neodletěli do kosmu, úniková rychlost z našeho asteroidu by byla jen okolo jednoho metru za sekundu.

[15)] Máte-li zájem, vystudujte fyziku na některé VŠ, zaměřte se ve studiu na mechaniku kontinua, a tento problém vyřešte. (Autorovi článku není známo, že by někde v literatuře byl zrovna tento problém řešen. Ono, kdo by se takovými „provokacemi", jako se tu bavíme my, zabýval, že. ☺ Ale třeba by se nějaké články, které by řešily související problematiku, našly.)

[16)] Pomineme otázku, kde v pásu asteroidů získat přes 900 tisíc kubíků dřeva.

rozdíl by tedy byl v časech dopadu železné a nějaké velmi málo hmotné koule. Přesnější rozdíl mezi časy dopadu železné koule a dřevěné koule s určitou hustotou, případně ještě v závislosti na hustotě asteroidu, si už, jak se říká, jistě dopočte laskavý čtenář sám…

Závěr

To jsme si dobře zaprovokovali, že?[17)] Samozřejmě, byla to do velké míry hra. A taky to v těch třech článcích naší série byla trochu „cesta tam a zase zpátky". Od možných provokativních námitek vůči zadání úlohy resp. hledání cestiček, jak by šlo „správné učebnicové" řešení obejít, jsme se dostali k seriózním výpočtům vlivu odporu prostředí na pád těles. A pak jsme se zase vrátili k trochu provokujícím a snad až příliš rozevlátým úvahám o vlivu padajících koulí na těleso, na něž padají.[18)]

Vždy jsme ovšem vycházeli ze známé a ověřené fyziky – a leccos jsme se přitom naučili. O pádu těles, vlivu odporu prostředí, a mimochodem třeba i o tom, proč nejsou na Zemi hory vysoké třicet kilometrů. Ale také o tom, že je potřeba věci precizovat a hledat, které i malé faktory mohou nebo nemohou ovlivnit výsledky pokusů. Tohle je samozřejmě důležité i ve fyzice samotné, tedy ve fyzikálním výzkumu. Když před více než půlstoletím testovali Dicke, Krotkov a Roll v Princetonu platnost principu ekvivalence,[19)] ověřovali výpočtem i to, zda jejich experiment nenaruší skutečnost, že v blízkém lesíku padne každé ráno rosa (viz [17], poznamenejme, že nenarušila).

Ve fyzice se ostatně setkáme i s dalšími věcmi, s nimiž jsme se potkali při naší „cestě tam a zase zpátky": přibližné odhady, konkrétní hodnoty veličin, s nimiž pracujeme, a nechybí ani smysl pro humor. Například ve zmíněném článku [17] R. Dicke pro ilustraci citlivosti jejich měření uvádí, že rozdíl zrychlení, který mohli detekovat, by za rok zrychlil těleso z klidu na velkolepou rychlost („magnificent velocity") $2 \cdot 10^{-4}$ cm/s, tedy 7 milimetrů za hodinu. (Samozřejmě také uvedl hodnotu citlivosti, 10^{-11}. Tak malý relativní rozdíl ve zrychleních těles mohl jejich pokus

---

[17)] Zde parafrázujeme výrok loupežníka Lotranda ze známého filmu: „Dobře jsme si zaloupili…".

[18)] Omluva všem, komu se dané úvahy zdály až příliš absurdní. Ale tento článek vás opravdu nevyzývá, abyste skupovali veškerou světovou produkci železa či připravovali expedici na asteroid.

[19)] Tedy, jednoduše řečeno, tvrzení, že všechna tělesa padají se stejným zrychlením. Jde jeden ze základních principů, na nichž stojí Einsteinova obecná teorie relativity – a konec konců to souvisí s naším problémem pádu koulí z různých materiálů.

změřit. Dodejme, že dnes je princip ekvivalence ověřen pomocí měření na satelitu již s přesností 10^{-14}, viz [18].)

Ufff, to se nám tato série článků natáhla. Kdo jste vydrželi až sem, díky a palec nahoru! A přitom jsme téma pádu těles a věci související zcela jistě nevyčerpali. Určitě by nám mohlo sloužit jako odrazový můstek k dalším drobným „provokacím", hrátkám s fyzikou i k poučení. Ovšem proč se omezovat jen na pád těles? Je spousta dalších témat, otázek a problémů, které nám mohou sloužit jako východisko k cestám a poutím fyzikou. Ať se vám po těch cestách dobře šlape a ať z toho máte radost.

Když na nich budete i trochu provokovat, tak to bude v pořádku – ale prosím ne nejapně, se snahou někoho shodit. Raději přátelsky a se znalostí věci. Pak nám vzájemné diskuse, byť někdy třeba bouřlivější, mohou pomoci k lepšímu pochopení a poznání. Tak šťastnou cestu, a třeba někdy na těch cestách a v těch diskusích na shledanou.

Literatura

[1] Dvořák, L.: Jak provokovat, když dostanete úlohu o pádu železné a dřevěné koule I. *Rozhledy matematicko-fyzikální*, roč. 96 (2021), č. 2, s. 57–67.

[2] Dvořák, L.: Jak provokovat, když dostanete úlohu o pádu železné a dřevěné koule II. *Rozhledy matematicko-fyzikální*, roč. 96 (2021), č. 3, s. 59–68.

[3] Ritchie, H., Roser, M.: Energy production and consumption. *Our World in Data*, (2020). Dostupné online: `https://ourworldindata.org/energy-production-consumption`

[4] *Global Energy Statistical Yearbook 2000*, Enerdata. Dostupné online: `https://yearbook.enerdata.net/total-energy/world-energy-production.html`

[5] *Energy Education: Tonne of oil equivalent.* Dostupné online: `https://energyeducation.ca/encyclopedia/Tonne_of_oil_equivalent`

[6] *Globální produkce surové oceli za rok 2019 se oproti roku 2018 zvýšila o 3,4 %.* Ocelářská unie. Dostupné online: `https://www.ocelarskaunie.cz/globalni-produkce-surove-oceli-za-rok-2019-se-oproti-roku-2018-zvysila-o-34/`

[7] *List of countries by steel production.* Wikipedia. Dostupné online: `https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_countries_by_steel_production`

[8] *Ložiska nerostů – rudy.* Dostupné online: `http://geologie.vsb.cz/loziska/loziska/loziska_rud.html`

[9] *An Introduction to Iron. AZO materials.* Dostupné online: `https://www.azom.com/properties.aspx?ArticleID=619`

[10] Compression and tension strength of some common materials. *The Engineering Toolbox – Resources, Tools and Basic Information for Engineering and Design of Technical Applications.* Dostupné online: `https://www.engineeringtoolbox.com/compression-tension-strength-d_1352.html`

[11] Weisskopf, V. F.: Search for simplicity: Mountains, waterwaves, and leaky ceilings. *American Journal of Physics*, roč. 54 (1986), č. 2, s. 110–111.

[12] Mikulčák, J., Charvát, J.: *Matematické, fyzikální a chemické tabulky a vzorce pro střední školy.* Prometheus, Praha, 2006.

[13] *Mars (planeta).* Wikipedia.
Dostupné online: `https://cs.wikipedia.org/wiki/Mars_(planeta)`

[14] *TNT equivalent.* Wikipedia.
Dostupné online: `https://en.wikipedia.org/wiki/TNT_equivalent`

[15] *Tabulky nutričních hodnot.* nzip.cz. Dostupné online:
`https://www.nzip.cz/clanek/612-tabulky-nutricnich-hodnot`

[16] Bochníček, Z.: *Padající pružina.* In: Koudelková, V., Kácovský, V. (eds.): Veletrh nápadů učitelů fyziky 25, sborník z konference, MarfyzPress, Praha, 2020, s. 26–34. Dostupné online: `https://vnuf.cz/2020/sbornik_VNUF_2020.pdf`

[17] Roll, P. G., Krotkov, R., Dicke, R. H.: The equivalence of inertial and passive gravitational mass. *Annals of Physics*, roč. 26 (1964), s. 442–517.

[18] Rini, M.: Space tests of the equivalence principle. *Physics*, roč. 10 (2017), December 4, s. 133–133. Dostupné online: `https://physics.aps.org/articles/v10/s133`

Augustin Jean Fresnel (1788–1827)

František Jáchim, Základní škola Dukelská, Strakonice

Po Newtonových objevech z druhé poloviny 17. století se optika stala středem zájmu fyziků, neboť řadu jevů se nedařilo uspokojivě vysvětlit Newtonovým mechanickým modelem světla jako proudu částic. Zatímco v Anglii provedl několik základních pokusů podporujících domněnku o vlnové podstatě světla Thomas Young (1773–1829), ve Francii se téměř stejnému tématu věnoval Augustin Jean Fresnel, který ovšem zpočátku neměl o práci svého anglického kolegy nejmenší tušení.

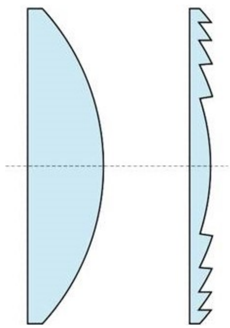
Augustin Jean Fresnel (obr. 1) patřící do galerie slavných francouzských fyziků se narodil 10. 5. 1788 v městečku Broglie v Normandii. Nejprve absolvoval lyceum *École centrale v Caen* a v 17 letech byl přijat na pařížskou polytechniku. Tam patřil k nejlepším studentům a stejně tak si počínal na současně studované *École nationale des ponts et chaussées* (Škola mostů a cest). Během studií přišel do styku s řadou vynikajících vědců tvořících zlaté období francouzské matematiky a fyziky. Byl zaujat pokusy Etienna Stephena Maluse (1775–1812), Françoise Dominiqua Araga (1786–1853), s nímž později úzce spolupracoval, i pracemi matematika Adrien-Marieho Legendra (1752–1833). Motivován těmito lidmi i současnými nerozřešenými otázkami fyziky podstatně přispěl k rozvoji optiky. Jeho přínos fyzice byl zhodnocen v roce 1818 cenou *Académie des Sciences.* O pět let později se stal řádným členem Francouzské akademie věd a v roce 1825 londýnské *Royal Society.* A. J. Fresnel zemřel 14. června 1827 ve Ville-d'Avray u Paříže.

Obr. 1: Augustin Jean Fresnel (1788–1827)

Fresnelova cesta k objevům nebyla tak přímočará, jak by se z výše uvedeného výčtu kontaktů a cen zdálo. Protože byl royalista, těžko mohl být veřejně a vědecky činný v napoleonské Francii. Na straně royalistů stál i v době, kdy na půdu Francie vstoupil Napoleon po návratu z Elby netušíc, že je to jen na 100 dní. Napoleonské války silně omezily styky mezi Francií a Anglií, a to i v oblasti vědecké. Teprve v roce 1816 pronikly některé výsledky Fresnelových prací na anglickou půdu při návštěvě Araga s Gay-Lussacem (1778–1850) u Thomase Younga (1773–1829). Naopak francouzští vědci byli překvapeni stejnými výsledky Youngovy práce na poli vlnové optiky. Jak Young uvádí ve svých *Přednáškách* z roku 1807, již tehdy se zabýval interferencí světla, tedy jevem vlnovým, ačkoli stále ještě dominovala Newtonova představa o částicové povaze světla. Počátek Fresnelovy cesty ke zkoumání světla ale začal ryze technickými činnostmi.

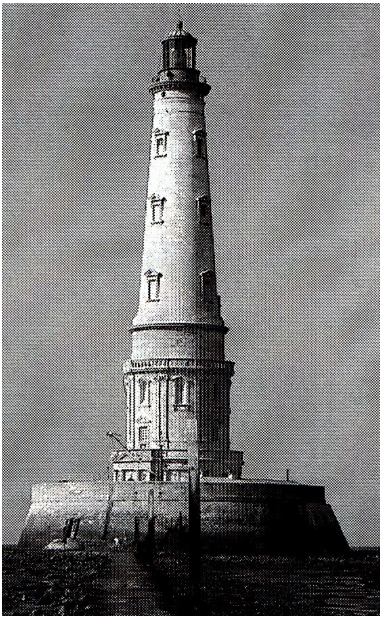
Majáky

Roku 1814, v době, kdy Fresnel končil své působení u Správy veřejných cest, poslal dopis F. D. Aragovi s překvapivou žádostí, o jejímž motivu nevíme, aby mu sdělil všechny novinky o optice, zejména o polarizaci. Arago pozval Fresnela do Paříže a obstaral mu místo v Komisi pro majáky. Zde Fresnel navrhl výrazné změny v konstrukci majákových svítidel, která začal osazovat čočkou, která i při velké optické mohutnosti byla neobyčejně tenká. Její vynález byl opřen o poměrně jednoduchou myšlenku: Plně si uvědomil, že k lomu světla dochází pouze na rozhraní prostředí a že vnitřek čočky je jaksi zbytečný, pro požadované optické zobrazení postačí pouze zachovat segmenty s lámavou plochou (obr. 2).



Obr. 2: Čočky se stejnou optickou mohutností. Vlevo normální konvexní čočka, vpravo Fresnelova čočka

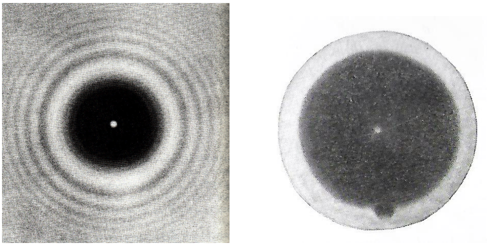
Poprvé byly osazeny v roce 1823 na maják Cordouan při ústí Girondy (obr. 3) a rychle nalezly uplatnění v řadě dalších majáků. Dnes jsou Fresnelovými čočkami osazována železniční návěstidla, nalezneme je i v optické soustavě školních zpětných projektorů a v koncentrátorech slunečního záření v solárních tavicích pecích.



Obr. 3: Maják Fare de Cordouan při ústí francouzské řeky Gironde, první maják, jehož světla byla osazena Fresnelovými čočkami

Pokračovatel Thomase Younga

Mezi členy francouzské Akademie věd převládali zastánci Newtonovy korpuskulární teorie světla i v době, kdy už byly známé práce Christiaana Huygense (1629–1695) i Thomase Younga signalizující, že ryze částicový popis světla je nedostatečný pro řadu dalších jevů. Ke stěžejním Youngovým pokusům patří sledování ohybu světelných paprsků za tenkým vláknem nebo při průchodu štěrbinou. Ke cti slavných akademiků preferujících Newtonův popis před rodící se vlnovou teorii lze přičíst skutečnost, že v roce 1819 vypsali cenu na jednoznačné pojednání o difrakci světla. Práci napsal s využitím vlnových představ právě A. J. Fresnel – a cenu získal. Nezanikly však všechny pochybnosti. Jedním z pochybujících byl Siméon Denis Poisson (1781–1840), a právě on pomohl Fresnelovi jeho teorii potvrdit. Oč šlo? O malou hru světla a stínu: Jak bude vypadat stín za malou osvětlenou kuličkou. Pokud by byla Fresnelova vlnová teorie správná, do stínu za kuličkou by musely proniknout světelné vlny jdoucí kolem okraje kuličky, interferovat a v samém středu kruhového stínu vytvořit – překvapivě – plně osvětlenou skvrnu. Tak to Poisson vypočítal z Fresnelova matematického popisu jevu. Fresnel tentokrát už spolupracující s Aragem provedl příslušný pokus, jímž získal na stínítku očekávaný obraz (obr. 4). Pokus s kuličkou doplňoval dřívější pokusy, jimiž byla difrakce demonstrována, a nedal se vysvětlit jinak než vlnovými vlastnostmi světla.



Obr. 4: Fresnelova–Aragova–Poissonova stopa ve středu difrakčního obrazce

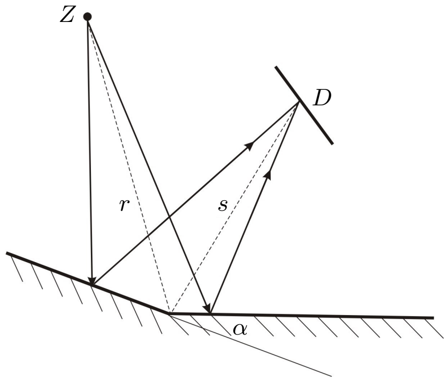
Kromě difrakce se Fresnel zabýval i interferencí světelných paprsků. Tyto pokusy už měl za sebou Young, Fresnel o nich nevěděl, a tak jeho experimenty mají půvab originality. K pozorování interference světla Fresnel provedl dva dále popsané pokusy.

Dva koherentní paprsky, které interferovaly na stínítku, získal pomocí dvou zrcadel, přičemž jedno z nich bylo nepatrně odchýleno od roviny druhého zrcadla (obr. 5). Koherentní paprsky poskytoval jediný zdroj Z. Kromě pozorování interferenčních kroužků na stínítku D Fresnel za předpokladu velmi malého úhlu α nalezl vztah pro určení vlnové délky světla:

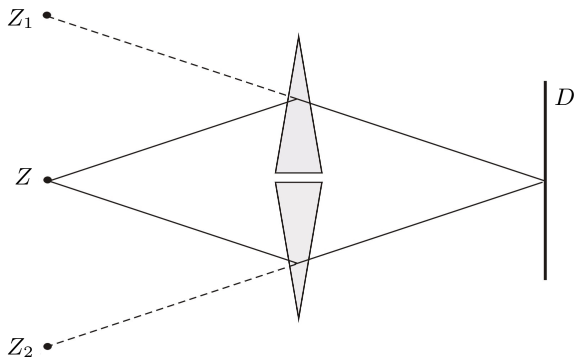
$$\lambda = \frac{2\alpha r}{r + s}.$$

Pokus dokázal ještě zjednodušit uspořádáním podle obr. 6. Pomocí dvou prizmatických hranolů s malými lámavými úhly opět docílil na stínítku interferenci koherentních paprsků ze zdroje Z, zdánlivě vycházejících ze dvou zdrojů Z_1 a Z_2.

Když se dověděl o Youngových pokusech a pozorováních, nebyl zklamán. Navázal s Angličanem písemný styk a jeho pokusy ocenil. Šel však dále – pouhý kvalitativní popis Youngův doplnil teoretickým popisem prostřednictvím příslušného matematického aparátu.



Obr. 5: Pokus vedoucí k interferenci koherentních paprsků – Fresnelova zrcadla



Obr. 6: Pokus vedoucí k interferenci koherentních paprsků pomocí prismatických hranolů

Polarizace

Hlavní oblastí vědeckého zájmu se Fresnelovi stala polarizace. K dispozici měl pouze základní poznatky o dvojlomu světla v krystalu, získané asi před 150 lety při nahodilém pozorování, na něž nebylo dosud nijak navázáno. Na objasnění tohoto pozoruhodného jevu proto roku 1808 Francouzská akademie vypsala cenu. Ta k problému nejprve přilákala E. S. Maluse (1775–1812) zkoumajícího chod světla islandským vápencem, který přitom objevil polarizaci odrazem a spolu s J. B. Biotem (1774–1862) polarizaci lomem. Fresnel plně podpořil dosud opatrné úvahy o tom, že světlo je vlnění příčné, vyslovené již Youngem i Aragem, a z tohoto pohledu odvodil vztahy pro velikosti amplitud lomených i odražených paprsků, jestliže dopadající světelné vlny jsou polarizovány (v rovině dopadu a v rovině kolmé na rovinu dopadu). Pro podíly velikostí amplitud odraženého a dopadajícího světla (index 1 – polarizace v kolmé rovině, index 2 – polarizace v rovině dopadu) nalezl vztahy

$$A_1 = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)}, \qquad A_2 = \frac{\operatorname{tg}(\alpha - \beta)}{\operatorname{tg}(\alpha + \beta)}, \tag{1}$$

v nichž α a β jsou po řadě velikosti úhlů dopadu a lomu. Tyto vztahy zde uvádíme bez dalších podrobností.[1)] Jde nám zejména o to, abychom mohli čtenáři ukázat, jaký význam mají pro vysvětlení běžné situace, kterou nepochybně zná: Pohlédneme-li téměř kolmo na hladinu vody nebo na skleněnou desku z čirého skla, uvidíme svoji tvář. Sice slaběji než v zrcadle, ale přece. Už samotná existence odrazu je tak trochu podivná, vždyť zde máme dvě téměř dokonale průhledná prostředí – vodu a sklo. K objasnění spatření svého (slabšího) obrazu na vodní hladině užijeme právě Fresnelovy vztahy[2)] (1).

Pro velmi malý úhel dopadu – což je úhel „našeho pohledu" – jsou hodnoty goniometrických funkcí sinus a tangens prakticky rovny a dokonce je můžeme považovat za rovné argumentům. Oba vztahy (1) pak přecházejí na jednoduchý poměr $\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}$. Protože pro malé úhly platí

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{\alpha}{\beta} = n,$$

kde n je index lomu[3)], dostáváme úpravou pro amplitudu lomeného i odraženého paprsku

$$A = \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} = \frac{n\beta - \beta}{n\beta + \beta} = \frac{n - 1}{n + 1}.$$

Protože intenzita vlnění je úměrná druhé mocnině amplitudy, pro zjištění, kolik světla se odrazí, užijeme vztah:

$$A^2 = \frac{(n-1)^2}{(n+1)^2}. \tag{2}$$

Jestliže budeme uvažovat rozhraní vzduch-voda, tedy např. kolmý pohled na hladinu vody, při indexu lomu vody $n = 1{,}33$ dostáváme po

[1)] Zvídavého čtenáře zde odkazujeme na výklad v [3, str. 444–446].

[2)] Takto se v učebnicích nazývají.

[3)] Zde čtenář nepochybně vnímá Snellův zákon lomu.

dosazení $A^2 \approx 0{,}02$, tzn., že odraženého světla jsou asi 2 %. Dosadíme-li do výrazu (2) poměrně velký index lomu diamantu $n = 2{,}42$, dostáváme hodnotu výrazu (2) rovnou 0,17. Diamant odrazí asi 17 % světla, přibližně osmkrát více než voda nebo sklo.[4)]

Základní pokusy s polarizovaným světlem prováděl Fresnel spolu s Aragem. Na rozdíl od Younga získali dvě koherentní, avšak různě polarizované světelné vlny tak, že světlo nechali procházet destičkou z dvojlomné látky (selenit – odrůda sádrovce $CaSO_4 \cdot 2H_2O$) a sledovali, jak spolu interferují dvě polarizované světelné vlny (polarizované lineárně ve vzájemně kolmých rovinách) a světelná vlna polarizovaná s nepolarizovanou. Dokázali, že světelné vlny polarizované ve vzájemně kolmých rovinách neinterferují. Z toho učinili závěr, že světlo je příčné vlnění.

Fresnelovo zkoumání polarizace přineslo obecnější výsledek než pouhý popis jevu. Pokud byla s jistou opatrností přijímána i vlnová povaha světla, mělo se za to, že světlo je mechanické vlnění podélné. Za tohoto předpokladu se ovšem nedařilo vysvětlit takový jev, jakým je polarizace. Fresnel zavedl předpoklad, že světlo je vlnění příčné, a z této premisy nalezl příslušnou teorii včetně matematického popisu, která byla plně v souladu s provedenými pokusy. Je považován také za objevitele kruhové a eliptické polarizace. Patrně vrcholem potvrzení vlnové povahy světla bylo roku 1850 Foucaultovo měření rychlosti světla v prostředích opticky hustších, než je vzduch.

Fresnelovo dílo je obdivuhodné, uvážíme-li, že trvale neuspokojivý zdravotní stav mu vymezil pouze 39 let života. Zemřel 14. června 1827 v městečku Ville-d'Avray nedaleko Paříže. V roce 2022 si připomeneme 195 let od jeho úmrtí.

Literatura

[1] Štoll, I.: *Dějiny fyziky.* Prometheus, Praha, 2009.

[2] Kraus, I.: *Fyzika v kulturních dějinách Evropy (díl Romantici a klasikové).* ČVUT, Praha, 2009.

[3] Feynman, R. P., Leighton, R. B., Sands, M.: *Feynmanovy přednášky z fyziky (díl 1.).* Fragment, Praha, 2013.

[4] Lipson, H.: *The Great Experiments in Physics.* Oliver & Boyd, Edinburgh, 1972.

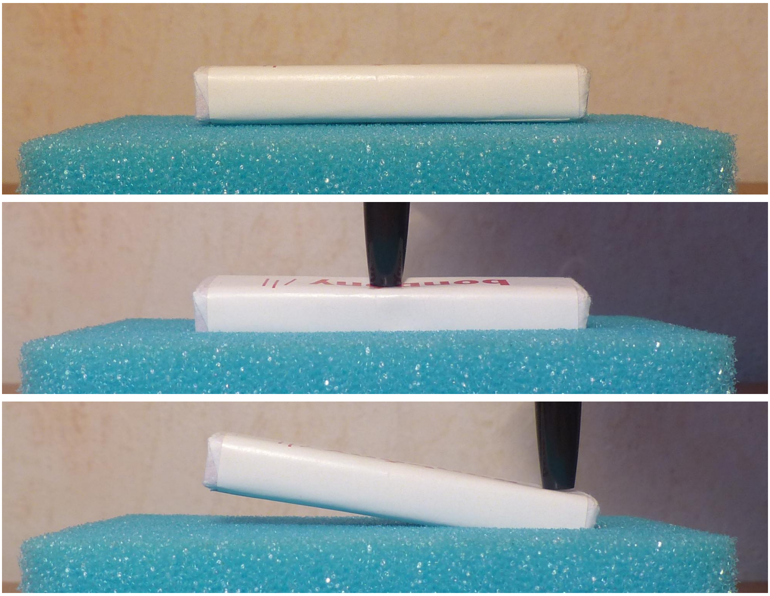
[5] Friš, S. E., Timoreva, A. V.: *Kurz fyziky III.* NČ SAV, Praha, 1954.

[4)] Připojme zde rychlosti světla v různých prostředích: např. ve vakuu 300 000 km/s, ve vodě 225 000 km/s, v diamantu 124 000 km/s.

Kdy mačkáním zvedáme

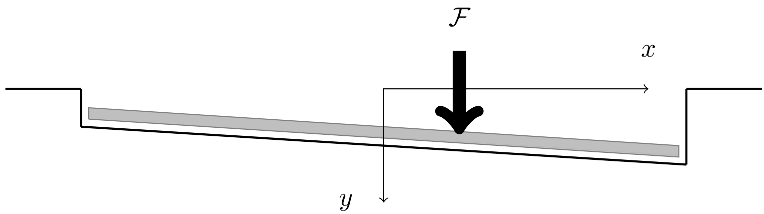
Pavel Pokorný, VŠCHT Praha

Když položíme na vodorovný povrch měkkého pružného tělesa (např. z polyuretanu) tuhé, ne příliš těžké těleso tvaru kvádru, tak se mírně zaboří do podložky, viz obr. 1 nahoře. Je-li těleso dostatečně lehké, můžeme toto zaboření zanedbat.



Obr. 1: Horní obrázek: lehký pevný předmět položený na měkký pružný materiál. Prostřední obrázek: účinek vnější síly působící uprostřed. Dolní obrázek: síla působící blízko okraje zvedne opačný okraj předmětu.

Pokud na předmět zatlačíme vnější silou, která je výrazně větší než tíha kvádru, uprostřed mezi okraji, tak se těleso zaboří hlouběji do měkké pružné podložky, viz obr. 1 uprostřed. Pokud ale zatlačíme blízko okraje, tak přestože tlačíme dolů, opačný konec tělesa se naopak zvedne nad úroveň povrchu podložky. Zabývejme se otázkou, jak daleko od středu musíme zatlačit, aby se opačný okraj zvedl.



Obr. 2: Schematický náčrtek tuhého kvádru (zde zobrazen šedým obdélníkem), který je tlačen do měkké podložky vnější silou $\mathcal{F}$ působící mimo střed (zde zobrazena tlustou šipkou). Malá mezera mezi kvádrem a podložkou je na obrázku pro zvýšení přehlednosti. Ve skutečnosti bude těleso v dotyku s podložkou.

Uvažujme tedy lehký tuhý kvádr, jehož půdorysem je obdélník o délce $L = 2$ (toho lze docílit vhodnou volbou jednotky délky) a šířce w (která není pro řešení podstatná) položený na měkké pružné podložce. Předpokládejme, že pro malé svislé síly je deformace y přímo úměrná tlaku p s konstantou úměrnosti k (jejíž hodnota není podstatná):

$$p = ky.$$

To platí pouze pro nezáporná y, tedy pro místa, která jsou zabořena do měkké podložky. Je-li část kvádru nad povrchem, pak měkká podložka na tuto část nepůsobí (pokud není kvádr k podložce přilepen lepidlem). Pro přesnější popis bychom tedy měli hloubku zaboření y násobit hodnotou 1 pro nezáporná y a hodnotou 0 pro záporná y. Naším cílem je ale nalézt podmínku, kdy se opačný konec kvádru začne zvedat nad podložku, záporné hodnoty deformace nemusíme tedy uvažovat.

Síla $\mathrm{d}F$, kterou podložka působí na těleso na ploše o obsahu

$$\mathrm{d}S = w\,\mathrm{d}x,$$

pak je

$$\mathrm{d}F = p\,\mathrm{d}S = kyw\,\mathrm{d}x.$$

Přesněji řečeno, zde veličinou p označujeme podíl svislé síly a obsahu elementu půdorysu, ne styčné plochy, která je mírně skloněna. Také neuvažujeme statickou třecí sílu, o které předpokládáme, že pouze zajistí, aby nám těleso neklouzalo do strany. Bilancujeme pouze svislé síly. Také zanedbáváme efekty na okrajích, kde bude deformace složitější.

Je-li tuhé těleso vlivem působení vnější svislé síly $\mathcal{F}$ a síly od podložky F skloněno, můžeme výchylku ve svislém směru vyjádřit jako:

$$y = ax + b,$$

kde a a b jsou konstanty, viz obr 2. Pak celková síla F od podložky je součtem všech příspěvků $\mathrm{d}F$, který spočteme integrálem:

$$F = \int_{-1}^{1} kyw \,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} k(ax + b)w \,\mathrm{d}x = 2kbw.$$

Zde i dále pro jednoduchost integrujeme od -1 do 1, přestože polovina půdorysu kvádru skloněného o úhel α je dlouhá pouze $\cos\alpha$. My předpokládáme, že úhel α je malý.

Spočtěme si ještě moment M sil od podložky vůči bodu $x = 0$. Ten je dán součtem všech příspěvků:

$$\mathrm{d}M = x \,\mathrm{d}F = xkyw \,\mathrm{d}x.$$

Tento součet opět spočteme pomocí určitého integrálu:

$$M = \int_{-1}^{1} xkyw \,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} xk(ax + b)w \,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}kaw.$$

Při výpočtu těchto integrálů lze s výhodou využít toho, že integrál liché funkce přes souměrný interval je roven nule.

Působí-li vnější síla $\mathcal{F}$ ve vzdálenosti r od středu tělesa, je její moment

$$\mathcal{M} = r\mathcal{F}.$$

Kdy bude těleso v rovnováze? Aby se těleso neposunovalo, musí se součet sil rovnat nule. A aby se těleso neotáčelo, musí se součet momentů sil rovnat nule. Tedy síla od podložky F se musí rovnat vnější svislé síle $\mathcal{F}$:

$$\mathcal{F} = 2kbw$$

a moment M sil od podložky se musí rovnat momentu $\mathcal{M}$ vnější síly:

$$r\mathcal{F} = \frac{2}{3}kaw.$$

Odsud lze vyjádřit

$$b = \frac{\mathcal{F}}{2kw}$$

a

$$a = \frac{r\,\mathcal{F}}{\frac{2}{3}kw}.$$

Nás zajímá, kdy se levý okraj tělesa zvedne. Jeho polohu snadno určíme ze vztahu $y = ax + b$, tedy:

$$y(-1) = b - a = \frac{\mathcal{F}}{2kw} - \frac{r\mathcal{F}}{\frac{2}{3}kw} = \frac{\mathcal{F}}{2kw}(1 - 3r).$$

Podobně pro pravý okraj tělesa dostaneme:

$$y(1) = b + a = \frac{\mathcal{F}}{2kw}(1 + 3r).$$

Pro $r = 0$, tedy když vnější síla $\mathcal{F}$ působí uprostřed mezi okraji tělesa, je:

$$y(-1) = y(1) = \frac{\mathcal{F}}{2kw} > 0,$$

tedy (vzhledem k tomu, že souřadnice y značí hloubku promáčknutí do měkké podložky) oba okraje dolní stěny tělesa jsou zabořeny do podložky, viz obr. 1 uprostřed.

Pro malé kladné r, tedy když vnější síla působí mírně mimo střed, hloubka $y(-1)$ klesá s r. A při překročení hodnoty $r = \frac{1}{3}$ bude hodnota $y(-1)$ záporná, tedy levý okraj bude nad povrchem měkké podložky. Pro délku předmětu $L = 2$ znamená kritická hodnota $r = \frac{1}{3}$ relativní vzdálenost od středu $\frac{1}{6}$.

Závěr

Na povrchu tuhého tělesa jsou tři stejně velké oblasti, každá o relativní šířce jedna třetina. Když tlačíme v bodě v prostřední oblasti, bude celá spodní stěna tělesa zatlačena do měkké podložky. Když naopak tlačíme v bodě v krajní oblasti, tak se vzdálený spodní okraj tělesa vynoří nad povrch měkké podložky. To je v dobrém souladu s pozorováním, které si snadno čtenář může provést sám.

Staň se na den vědkyní 2022

Jaroslava Óbertová, FJFI ČVUT v Praze
Jaroslav Bielčík, FJFI ČVUT v Praze

Akcia *Staň se na den vědkyní* vznikla v súvislosti s oslavou Medzinárodného dňa žien a dievčat vo vede vyhláseného Valným zhromaždením Organizácie spojených národov v roku 2015. Tento deň každoročne pripadá na 11. februára. Jeho cieľom je pripomenúť, že veda nie je určená výhradne mužskej populácii, ale je taktiež otvorená ženám, ktoré je nutné povzbudiť a podporiť, a umožniť im prístup k technickému vzdelaniu a účasti na vedeckých aktivitách.

To, že ženy nepatria do vedy, je ešte stále jedným z mylných názorov i v súčasnej spoločnosti. Bohužiaľ, takéto alebo podobné vyjadrenia môžu často viesť k tomu, že strácame potenciálne šikovné adeptky, ktoré by dokázali značne prispieť do výskumu a stimulovať jeho ďalší vývoj. Podľa MŠMT je na technických odboroch, napríklad na ČVUT, podiel dievčat len niečo vyše 30 % aj napriek tomu, že celkové zastúpenie na vysokých školách sa blíži 60 percentám.

Preto je dôležité ukázať, že ženy vo vede hrajú dôležitú úlohu, a že nie je „nenormálne“, keď dievča inklinuje k vedeckým odborom ako je matematika a fyzika. Túto správu môžme komunikovať verejnosti aj prostredníctvom akcie Staň se na den vědkyní.

Zozačiatku bola akcia zameraná na časticovú fyziku a organizovaná v spolupráci s programom International Masterclasses pod záštitou CERNu. V roku 2019 sme ponuku tematických okruhov rozšírili o matematiku a kvantové technológie, a v roku 2020 sa pridala aj jadrová chémia. Na základe veľkého záujmu a pozitívnych ohlasov k rôznorodosti programu sme sa v tomto ročníku rozhodli ďalej expandovať, a spojili sme sa s Fakultou elektrotechnickou ČVUT, ktorá bude ponúkať cvičenia na témy robotiky, fotovoltaiky alebo programovania.

Doobeda máme pre účastníčky akcie pripravené tri prednášky. Začneme časticovou fyzikou s doktorkou *Katarínou Křížkovou Gajdošovou*, ktorá nám povie o najhorúcejšom mieste vo vesmíre. Vystrieda ju Ing. *Iveta Terezie Hošnová* so zameraním sa na tému jadrovej chémie a priblíži nám fotodynamickú terapiu. Prednášky zavŕši Ing. *Jindřiška Deckerová*, ktorá nám ukáže ako pomocou umelej inteligencie rozchodiť robota.

Po každej prednáške bude prestávka, kde majú študentky okrem iného čas na otázky a diskusiu s prednášajúcimi. Po prednáškach bude nasledovať panelová diskusia na tému Ako sa robí veda, ktorá sa minulý rok, keď sme ju zaviedli po prvý krát, tešila veľmi pozitívnej odozve. Panelisti budú naše vedkyne na rôznych stupňoch v ich kariére, od študentiek po profesorky, čo nám poskytne výborný základ k rozhovoru.

Po obede sa účastníčky rozdelia do učební a laboratórií podľa cvičení, na ktoré sa vopred prihlásili. V rámci časticovej fyziky si študenti budú môcť vyskúšať prácu s reálnymi dátami z Veľkého hadrónového urýchľovača (LHC) v CERNe, a prostredníctvom videokonferencie sa spojiť s vedcami z tejto organizácie, ktorým odprezentujú získané výsledky. Druhá skupinka sa bude venovať stavbe hmlovej komory, pomocou ktorej budú môcť detekovať častice, ktoré k nám letia z vesmíru. Ďalšia skupinka sa bude venovať matematike, ktorá sa skrýva za hrou Dobble, a dokonca si vyrobí vlastnú. V rámci kvantových technológií ponúkame možnosť vyskúšať si programovanie na kvantovom počítači IBM-Q, alebo zmerať charakteristické vlastnosti laseru a skúsiť, ako na jeho žiarenie reaguje najtvrdšie tkanivo v ľudskom tele, zub. Na cvičení z radiačnej chémie sa študentky oboznámia s rôznymi metódami používanými v praxi. Kto ešte neprogramoval, má možnosť naučiť sa základné princípy na cvičení z programovania v prostredí Scratch a vytvoriť si tak vlastnú multiplayer hru. V náväznosti na jednu z prednášok bude možné na cvičení zameranom na robotiku naprogramovať a ovládať vlastného robota. Posledné cvičenie bude na tému fotovoltaiky v energetike, ktorá má dôležité miesto v aktuálnej tematike obnoviteľných zdrojov, a účastníčky si budú môcť vyrobiť vlastné solárne lampičky.

Akciu zakončíme spoločenskou večerou v reštaurácii Nebozízek s krásnym výhľadom na Prahu, čo je veľkou novinkou tohto ročníku. Večere sa okrem samotných účastníčok a organizátorov zúčastnia aj naše vedkyne. Veríme, že je to dôležitá súčasť akcie kde budeme mať ideálnu príležitosť sa so študentkami bližšie spoznať pri neformálnych debatách nielen o vede.

Dúfame, že aj tento rok sa budeme môcť tešiť z veľkého záujmu o Staň se na den vědkyní, a že si predovšetkým účastníčky odnesú veľa nových poznatkov a pozitívnych zážitkov.

Podrobnejšie informácie k akcii sú uvedené na webe: `https://vedkyne.fjfi.cvut.cz`.

ROZHLEDY matematicko-fyzikální
obsah 96. ročníku

MATEMATIKA strana/číslo

FYZIKA

FYZIKA strana/číslo

ZPRÁVY

☛ Objednávky časopisu ☚

Od roku 2020 vyřizuje objednávky časopisu
Rozhledy matematicko-fyzikální
společnost

MediaCall, s. r. o.
Vídeňská 546/55
639 63 Brno
tel: +420 532 165 165
e-mail: export@mediacall.cz

Objednávky lze realizovat i přes web:

www.zahranicnitisk.com

Pro členy JČMF vyřizuje objednávky předplatného sekretariát JČMF. Roční předplatné bude od nového ročníku 2022 pro členy JČMF 200 Kč.

Elektronická verze čísla 4/2021 je ke stažení na adrese:
https://rozhledy.jcmf.cz/wp-content/uploads/RMF-96-4.pdf
heslo: k596ala

ROZHLEDY
matematicko-fyzikální
Ročník 96 (2021), číslo 4

OBSAH

Pokyny pro autory

Příspěvky dodávejte na adresu redakce v elektronické podobě. Nejlépe napsané ve formátu LaTeX, přijatelný je i formát PlainTeX, je akceptovatelný i text připravený editorem Word či podobným.

Pokud jde o obrázky, je žádoucí, aby byly připraveny v reprodukovatelné podobě. Každý obrázek nechť je v samostatném souboru, nejlépe ve formátu eps nebo pdf. Přípustná je též bitmapa v dostatečném rozlišení.

Ke každému zasílanému příspěvku (ne u soutěží, zpráv a recenzí) přiložte krátkou anotaci v českém jazyce. Dále je žádoucí, aby u každého příspěvku byla uvedena literatura, na kterou je v textu odkazováno.