

ROZ HLEDY

MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ
ČASOPIS PRO ZÁJEMCE O MATEMATIKU, FYZIKU A INFORMATIKU

ROČNÍK 97 (2022) • ČÍSLO 1

Vydává Jednota českých matematiků a fyziků
tel.: 222 090 708-9, e-mail: jcmf@math.cas.cz
za podpory MFF UK Praha a FJFI ČVUT Praha



Vycházejí 4 čísla v kalendářním roce

Obálku navrhl Bohuslav Šír

Sazbu programem \TeX připravil RNDr. Miloslav Závodný

Adresa redakce: MFF UK, V Holešovičkách 2, 182 00 Praha 8–Troja
e-mail: rozhledy@jcmf.cz

Internetové stránky časopisu: <https://rozhledy.jcmf.cz/>

Vytiskla Tiskárna Pohline, Zálesí 1126/88, 142 00 Praha 4

Distribuci pro předplatitele provádí v zastoupení vydavatele
MediaCall, s. r. o.

Vídeňská 546/55, 639 63 Brno

tel.: +420 532 165 165, e-mail: export@mediacall.cz

web: www.zahranicnitisk.com

ISSN 0035-9343

MK ČR E4691

© Jednota českých matematiků a fyziků, Praha 2022

Redakční rada

Vedoucí redaktorka:

RNDr. Marie Snětinová, Ph.D., MFF UK Praha

Redaktorka pro matematiku:

doc. Ing. Ľubomíra Dvořáková, Ph.D., FJFI ČVUT Praha

Redaktor pro fyziku:

doc. RNDr. Mgr. Vojtěch Žák, Ph.D., MFF UK Praha

Členové redakční rady:

prof. RNDr. Vlastimil Dlab, DrSc., F.R.S.C.

doc. RNDr. Zdeněk Drozd, Ph.D., MFF UK Praha

RNDr. Petr Hanuš, FSv ČVUT Praha

doc. RNDr. Jaroslav Hora, CSc., FPE ZČU Plzeň

prof. RNDr. Ivo Kraus, DrSc., FJFI ČVUT Praha

doc. RNDr. Jan Kříž, Ph.D., PřF UHK Hradec Králové

prof. RNDr. Miroslav Lávička, Ph.D., FAV ZČU Plzeň

RNDr. Pavel Pokorný, Ph.D., VŠCHT Praha

RNDr. Miroslav Randa, Ph.D., PdF ZČU Plzeň

doc. RNDr. Jan Šlégr, Ph.D., PřF UHK Hradec Králové

prof. RNDr. Pavel Tlustý, CSc., PedF JU České Budějovice

doc. RNDr. Pavel Töpfer, CSc., MFF UK Praha

prof. Ing. Bohumil Vybíral, CSc., PřF UHK Hradec Králové

RNDr. Vladimír Wagner, CSc., ÚJF AV ČR Řež

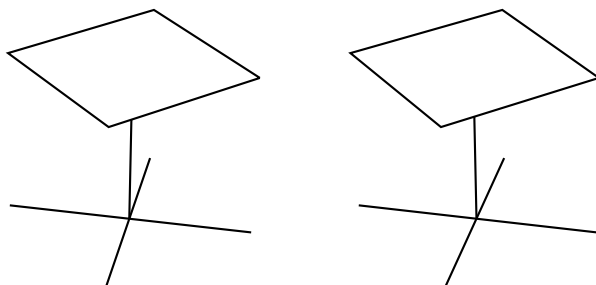
Kreslení stereoskopických obrázků

Jindřich Jelínek

Abstrakt. V tomto článku si ukážeme stereoskopické obrázky, na jejichž sledování není potřeba nic víc než dvě papírové trubičky. Také si ukážeme matematický postup, jak promítnout trojrozměrný objekt do roviny, abychom dokázali podobný stereoskopický obrázek sami vytvořit.

Levé a pravé oko vnímají svět ze dvou pozic. Binokulární (stereoskopické) vidění vzniká tak, že mozek zkombinuje pohledy levého a pravého oka do jednoho. Díky tomu, že obě oči vidí objekty z trochu jiného úhlu, vnímáme hloubku.

Mozek se však dá oklamat. Na obr. 1 vidíte dva obrázky téhož stolku. Pozorným pohledem můžete zjistit, že obrázky nejsou identické, ale mírně se liší (například natočením podstavy). Levý obrázek simuluje pohled levého oka, zatímco pravý obrázek simuluje pohled pravého oka.



Obr. 1: Stereoskopický obrázek stolku. Levým okem se dívejte na levý obrázek a pravým okem na pravý obrázek. Použijte papírové trubičky (rozměry jsou popsány v textu), abyste omezili zorné pole pouze na příslušný obrázek.

Vyrobte si dvě papírové trubičky z papírů A4. Doporučené rozměry trubiček jsou délka 30 cm a průměr 2,0–2,5 cm. Obrázky pozorujte kolmo ze vzdálenosti 60 cm nebo větší, například se ze stoje dívejte na časopis položený na stole. Pravým okem sledujte skrz trubičku pravý obrázek a levým okem sledujte skrz druhou trubičku levý obrázek. Pak musíte své oči donutit, aby se oba obrázky spojily v jeden. Tak vznikne trojrozměrný vjem. Trubičky mají funkci omezení zorného pole. Snažte se, abyste v nich viděli pouze samotný obrázek bez jeho vzdáleného okolí.

Nestejně okolí obou obrázků představuje rušivý vliv, který může bránit splynutí. Můžete se pokusit sledovat obrázky i bez trubiček. Postavte před oči překážku (např. palec), aby pravému oku zakryl výhled na levý obrázek a současně i levému oku na pravý obrázek.

Obzvlášť na poprvé může být vytvoření 3D vjemu obtížné. Pro oči a mozek je totiž sledování stereoskopického obrázku nepřírozená situace. Oči jsou namířeny za papír, kde by se hypoteticky měl nacházet malý stoleček, jenže ve skutečnosti sledují dva obrázky v bližší vzdálenosti. Čočky se tak musejí zaostřit na kratší vzdálenost, než kde se sbíhají jejich zorné osy. To je však v rozporu s celoživotním nastavením očí. Čím větší je nesoulad mezi akomodací (zaostřením čočky) a konvergencí (natočením očí), tím složitější je vytvoření trojrozměrného vjemu. Sledování špatně nakresleného stereoskopického obrázku může vést i k bolestem očí a hlavy. Pojem „špatně nakreslený“ je relativní, oči a mozek jsou velmi flexibilní a každý člověk má svou hranici někde jinde [2]. Pokud při sledování stereoskopických obrázků v tomto textu cítíte diskomfort nebo dokonce bolest, dívejte se pouze krátce, pak zvedněte hlavu a nechte oči relaxovat.

V tomto textu si ukážeme matematický návod, jak převést trojrozměrný objekt na dva obrázky simulující zorná pole levého a pravého oka, aby dohromady vytvořily trojrozměrný vjem podobně jako na obr. 1. V podstatě se jedná o perspektivní promítání známé z deskriptivní geometrie. Na rozdíl od obvyklého přístupu deskriptivní geometrie (např. [1]), kdy se způsoby promítání vysvětlují geometricky, my zvolíme (pro nás vhodnější) popis pomocí vektorů.

Promítnutí 3D objektu na papír

Naším cílem je dvakrát promítnout 3D objekt na 2D plochu, z pohledu levého oka i z pohledu pravého oka. Nemá smysl promítat objekt spojitě. Místo toho vybereme významné body objektu a přeneseme na papír obrazy těchto bodů. Poté okolo nich dokreslíme zbytek objektu. Můžeme využít toho, že v perspektivním promítání je obrazem přímky jiná přímka nebo ve speciálním případě bod.

Schéma přenesení obrazu jednoho takového bodu O na papír je zachyceno na obrázku 2. Bod O má prostorové souřadnice $(\alpha x_O, \alpha y_O, \alpha z_O)$. Konstanta α umožňuje škálovat souřadnice a tím pádem zvětšovat či zmenšovat objekt. Pokud si například přejeme nakreslit stereoskopický obrázek budovy, budovu s pomocí konstanty α zmenšíme. Případně se

po nakreslení obrázků může ukázat, že jsou příliš malé nebo se naopak překrývají. V tom případě změníme hodnotu α a spočítáme nové polohy.

Oči jsou zaostřené na bod S , v němž také zvolíme počátek kartézské soustavy. Bod P je poloha pravého oka, zatímco bod L je poloha levého oka. Střed spojnice očí je označen jako T . Aby se nám později dobře počítalo, zvolíme osu x rovnoběžnou se směrem od bodu S do bodu T a osu y rovnoběžnou se směrem od levého oka k pravému. Osa z je kolmá k rovině papíru.

Velikosti úseček jsou $|TS| = t$ a $|PT| = |LT| = o$. Pro lidské oči volíme $o = 2,5-4,0$ cm. Z bodu O letí světelné paprsky do obou očí. Představme si, že do cesty paprskům vložíme papír rovnoběžný s rovinou yz . Tam, kde jej paprsky protnou, zakreslíme obrazy bodu O pro levé a pravé oko. Střed papíru Q leží na úsečce TS ve vzdálenosti εt od bodu T . Pomocí bodů definujeme vektory

$$\begin{aligned} \vec{TS} &= \vec{s} = (-t, 0, 0), \\ \vec{TQ} &= \vec{q} = \varepsilon \vec{s} = (-\varepsilon t, 0, 0), \quad 0 < \varepsilon < 1, \\ \vec{PO} &= \vec{p} = (\alpha x_O - t, \alpha y_O - o, \alpha z_O), \\ \vec{LO} &= \vec{l} = (\alpha x_O - t, \alpha y_O + o, \alpha z_O), \\ \vec{TP} &= \vec{o}_P = (0, o, 0), \\ \vec{TL} &= \vec{o}_L = (0, -o, 0). \end{aligned} \tag{1}$$

Levý, resp. pravý obraz bodu O jsou na obr. 2 označeny jako O'_L , resp. O'_P . První krok k nalezení obrazů je rozložit vektory \vec{p} a \vec{l} do rovnoběžné a kolmé složky vzhledem k vektoru \vec{s} . Kolmá složka totiž leží v rovině papíru. Odvození provedeme pouze pro pravé oko, postup pro levé oko je analogický. Vektor \vec{p} zapíšeme jako

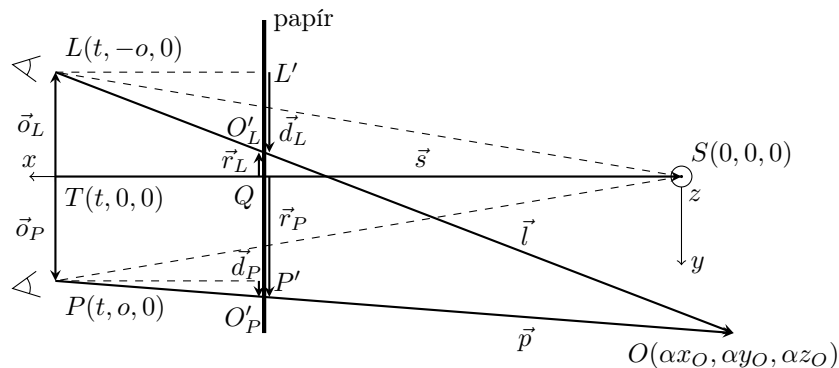
$$\vec{p} = \vec{p}_{\parallel} + \vec{p}_{\perp},$$

kde složka \vec{p}_{\parallel} je rovnoběžná s vektorem \vec{s} , zatímco \vec{p}_{\perp} je na něj kolmá. Z vlastností skalárního součinu¹⁾ vyplývá pro kolmou složku

$$\vec{s} \cdot \vec{p}_{\perp} = 0.$$

¹⁾Skalární součin je speciální operace na dvou vektorech, jejímž výsledkem je číslo, skalár. Mějme dva libovolné vektory \vec{a} a \vec{b} v kartézském trojrozměrném prostoru se složkami $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ a $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$. Skalární součin je definován

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta,$$



Obr. 2: Přenesení bodu O na papír. Levé oko je v bodě L , pravé oko je v bodě P . Společně jsou zaměřeny na bod S . Obě oči pozorují bod O v jiné relativní pozici vůči bodu S .

Jelikož složka \vec{p}_{\parallel} je rovnoběžná s vektorem \vec{s} , musí existovat takové reálné číslo λ , že

$$\vec{p}_{\parallel} = \lambda \vec{s}.$$

Už máme všechny ingredience nachystané, takže

$$\begin{aligned} \vec{p} &= \vec{p}_{\parallel} + \vec{p}_{\perp} = \lambda \vec{s} + \vec{p}_{\perp}, \\ \vec{p} \cdot \vec{s} &= \lambda \vec{s} \cdot \vec{s} + 0, \\ \lambda &= \frac{\vec{p} \cdot \vec{s}}{|\vec{s}|^2}. \end{aligned}$$

Vrátíme se k původnímu vztahu a vyjádříme kolmou složku vektoru \vec{p}

$$\vec{p}_{\perp} = \vec{p} - \lambda \vec{s} = \vec{p} - \frac{\vec{p} \cdot \vec{s}}{|\vec{s}|^2} \vec{s}.$$

Z bodů L i P vedou čárkované rovnoběžky s úsečkou TS . Papír protínají v bodech L' a P' . Vektor $\overrightarrow{PP'}$ je roven vektoru \vec{q} a tím pádem je rovnoběžný s \vec{s} a \vec{p}_{\parallel} . Z bodu P' míří k bodu O'_P vektor \vec{d}_P , jenž je

kde $|\vec{a}|$, resp. $|\vec{b}|$ jsou velikosti vektorů a θ je úhel jimi sevřený. Pokud má jeden z vektorů velikost 1, pak výsledkem skalárního součinu je průmět druhého vektoru do směru jednotkového vektoru. Skalární součin navzájem kolmých vektorů je nulový, neboť platí $\cos(90^\circ) = 0$.

rovnoběžný s \vec{p}_\perp . Musíme zjistit, jak naškálovat vektor \vec{p}_\parallel na \vec{q} . Úplně stejně se bude škálovat i \vec{p}_\perp na \vec{d}_P , což nás zajímá. Vektor \vec{d}_P je totiž poloha obrazu O'_P vzhledem k bodu P' . O vektoru \vec{q} víme

$$\vec{q} = \varepsilon \vec{s} = \varepsilon \left(\frac{1}{\lambda} \vec{p}_\parallel \right) = \frac{\varepsilon}{\lambda} \vec{p}_\parallel.$$

Stejný poměr je i mezi vektory \vec{d}_P a \vec{p}_\perp

$$\vec{d}_P = \frac{\varepsilon}{\lambda} \vec{p}_\perp = \frac{\varepsilon}{\lambda} (\vec{p} - \lambda \vec{s}) = \varepsilon \left(\frac{1}{\lambda} \vec{p} - \vec{s} \right) = \varepsilon \left(\frac{|\vec{s}|^2}{\vec{p} \cdot \vec{s}} \vec{p} - \vec{s} \right).$$

Ještě lepší by však bylo znát polohu O'_P vzhledem ke středu papíru Q . Ta je popsána vektorem \vec{r}_P . K bodu Q totiž vztáhneme i polohu levého obrazu O'_L . Je pohodlné mít všechny obrazy vztahené ke středu papíru, protože až spočítáme souřadnice více bodů, podle jejich souřadnic poznáme ještě před nakreslením, jestli se levý a pravý obrázek nepřekrývají. Poloha bodu O'_P vzhledem ke středu papíru je

$$\vec{r}_P = \vec{d}_P + \vec{o}_P = \varepsilon \left(\frac{|\vec{s}|^2}{\vec{p} \cdot \vec{s}} \vec{p} - \vec{s} \right) + \vec{o}_P \quad (2)$$

a podobně poloha bodu O'_L je

$$\vec{r}_L = \vec{d}_L + \vec{o}_L = \varepsilon \left(\frac{|\vec{s}|^2}{\vec{l} \cdot \vec{s}} \vec{l} - \vec{s} \right) + \vec{o}_L. \quad (3)$$

Vzhledem ke vhodně zvolené souřadnicové soustavě dokážeme vektory \vec{r}_P a \vec{r}_L rozepsat do složek. Složky vektorů známe ze vztahu (1). Pro skalární součiny platí $|\vec{s}|^2 = t^2$ a $\vec{l} \cdot \vec{s} = \vec{p} \cdot \vec{s} = t(t - \alpha x_O)$. Vektory \vec{r}_P a \vec{r}_L jsou

$$\vec{r}_P = \left(0, \varepsilon \frac{t(\alpha y_O - o)}{t - \alpha x_O} + o, \varepsilon \frac{t \alpha z_O}{t - \alpha x_O} \right), \quad (4)$$

$$\vec{r}_L = \left(0, \varepsilon \frac{t(\alpha y_O + o)}{t - \alpha x_O} - o, \varepsilon \frac{t \alpha z_O}{t - \alpha x_O} \right). \quad (5)$$

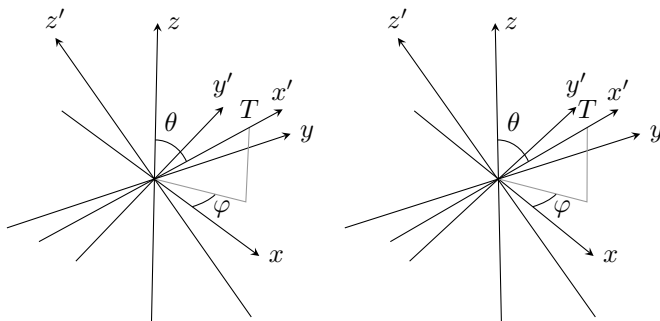
Všimněte si, že x -ové složky vektorů jsou nulové. To je v souladu s očekáváním, neboť oba vektory leží v rovině papíru a ten je rovnoběžný s rovinou yz . Možná vám připadá, že jsme výsledek spíše zkomplikovali, než zjednodušili, ale naopak. Zápis ve složkách je totiž vhodný pro počítač. Celý proces počítání poloh obrazů bodů se dá zautomatizovat. Stačí

napsat program nebo vytvořit excelovou tabulku, kam jen vložíme parametry α , t , o , ε a souřadnice všech bodů (x_O, y_O, z_O) , a program spočítá polohy jejich obrazů za nás.

Pokud se po spočítání poloh obrazů všech bodů stane, že obrázky se překrývají, musíme použít menší α . U překrývajících se obrázků totiž nelze dosáhnout trojrozměrného vjemu. Stejně tak obrázky od sebe nasmějí být dále než rozteč očí pozorovatele (typicky 5–8 cm), což bohužel limituje maximální velikost obrázků na 4–5 cm. V opačném případě by se zorné osy očí musely rozbíhat, což je nepřirozená situace. Naštěstí náš způsob konstrukce obrázků zajišťuje, že obrázky budou vždy blíže než vzdálenost $2o$.

Přepočítání souřadnicové soustavy

Podle výše odvozených vztahů (4) a (5) dokážeme nakreslit obrázek objektu, na nějž se díváme v záporném směru osy x . Jenže co když se chceme podívat z jiného směru? Nechť tedy střed spojnice očí T má v nečárkované soustavě (viz obr. 3) obecné souřadnice (t_x, t_y, t_z) .



Obr. 3: 3D obrázek. Vzájemné postavení nečárkované a nové čárkované soustavy. Vyznačeny jsou úhly φ a θ . Bod T leží na nové ose x' .

Oči jsou opět zaměřeny na střed souřadnicové soustavy. Vzdálenost

$$|TS| = \sqrt{t_x^2 + t_y^2 + t_z^2} = t.$$

Spojnice očí LP je kolmá na úsečku TS a vzdálenost obou očí od bodu T je o . Papír, na který promítáme, se nachází ve vzdálenosti εt od bodu T a je kolmý na úsečku TS . Můžeme definovat stejné body jako v předešlém

případě, polohy očí L a P , polohu bodu O i střed papíru Q ve vzdálenosti εt od bodu T . Pomocí těchto bodů znovu definujeme vektory $\overrightarrow{TS} = \vec{s}$, $\overrightarrow{TQ} = \vec{q}$, $\overrightarrow{PO} = \vec{p}$, $\overrightarrow{LO} = \vec{l}$, $\overrightarrow{TP} = \vec{o}_P$, $\overrightarrow{TL} = \vec{o}_L$. Stále platí vztahy (2) a (3), jenže papír už neleží v žádné význačné rovině, takže obecně všechny složky vektorů \vec{r}_P a \vec{r}_L jsou nenulové a tím pádem nedokážeme vynést obrazy bodů. Musíme pracovat v soustavě, v níž dvě osy jsou rovnoběžné s rovinou papíru a třetí je na ni kolmá. Vztahy (4) a (5) neplatí vůbec. Jak tedy máme postupovat?

Transformujeme nečárkovanou souřadnicovou soustavu na novou čárkovanou, v níž bude osa x' rovnoběžná s vektorem $-\vec{s}$ a osa y' bude rovnoběžná s vektorem \vec{o}_P . V nové soustavě bude papír rovnoběžný s rovinou $y'z'$, a tudíž x' -ové složky vektorů \vec{r}_P a \vec{r}_L budou nulové.

Předpokládejme, že známe souřadnice bodu O ve staré nečárkované soustavě. Naším úkolem je spočítat jeho souřadnice v nové čárkované soustavě. Nejprve přepočítáme polohu bodu T z kartézských souřadnic (t_x, t_y, t_z) do sférických souřadnic (r, φ, θ) . Pro bod T je velikost průvodiče $r = t$ a úhly φ a θ jsou definovány klasicky. Úhel θ se měří mezi osou z a průvodičem a úhel φ se měří mezi osou x a průmětem průvodiče do roviny xy (nakresleno v obr. 3).

Bez odvození si rovnou ukážeme vztah pro výpočet polohy (x'_O, y'_O, z'_O) bodu O v čárkované soustavě

$$\begin{aligned} x'_O &= x_O \sin \theta \cos \varphi + y_O \sin \theta \sin \varphi + z_O \cos \theta, \\ y'_O &= -x_O \sin \varphi + y_O \cos \varphi, \\ z'_O &= -x_O \cos \theta \cos \varphi - y_O \cos \theta \sin \varphi + z_O \sin \theta, \end{aligned} \tag{6}$$

nebo ekvivalentní zápis pomocí matic

$$\begin{pmatrix} x'_O \\ y'_O \\ z'_O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ -\cos \theta \cos \varphi & -\cos \theta \sin \varphi & \sin \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_O \\ y_O \\ z_O \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Tento vztah pro rotaci souřadnicové soustavy není úplně obecný, neboť osa y' zůstala v rovině xy , ale to nepředstavuje pro tuto aplikaci překážku.

Odvození vztahů (6) a (7)

Pro zajímavost si ukážeme stručné odvození vztahů (6) a (7). Pojmenujme jednotkové vektory ve směru os x' , y' , z' po řadě \vec{i}' , \vec{j}' , \vec{k}' .

Vyjádřeno ve staré nečárkované soustavě jsou jejich složky

$$\begin{aligned} \vec{i}' &= (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta), \\ \vec{j}' &= (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0), \\ \vec{k}' &= (-\cos \theta \cos \varphi, -\cos \theta \sin \varphi, \sin \theta). \end{aligned} \quad (8)$$

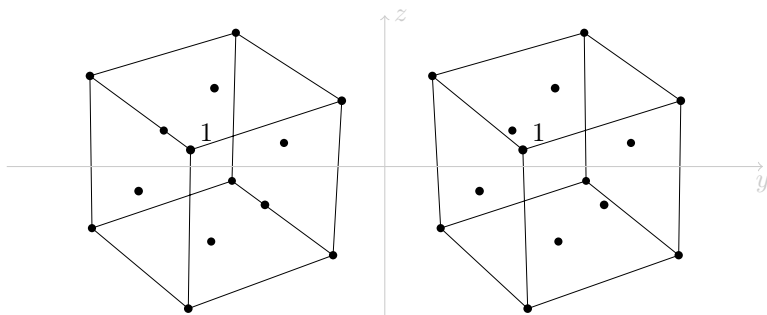
Mějme libovolný vektor \vec{v} . Jeho složky ve směru čárkovaných souřadnicových os se spočítají jako skalární součin s příslušnými jednotkovými vektory. Nechť tedy vektor \vec{v} vyjádřený v nečárkované soustavě je $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$. Jeho složky v čárkované soustavě jsou

$$v_{x'} = \vec{v} \cdot \vec{i}', \quad v_{y'} = \vec{v} \cdot \vec{j}', \quad v_{z'} = \vec{v} \cdot \vec{k}', \quad (9)$$

což platí samozřejmě i pro polohový vektor bodu O , čili $\vec{v} = (x_O, y_O, z_O)$. Dosazením z (8) do (9) dostaneme vztah (6).

Nakreslení 3D obrázku

Poté, co jsme odvodili hromadu matematických vztahů, měli bychom si ukázat i jejich použití v praxi. Proto si nakreslíme konkrétní stereoskopický obrázek – elementární buňku plošně centrované krychlové krystalické mřížky (viz obr. 4). Laicky řečeno, vyneseme na papír body ve vrcholech krychle a ve středech jejích stěn.



Obr. 4: Základní buňka plošně centrované krychlové krystalové mřížky. Takto krystalizuje mnoho kovů. Místo černých puntíků si můžeme představit atomy hliníku, stříbra, zlata nebo třeba mědi.

Jak bylo napsáno výše, je užitečné vytvořit si v počítači excelovou tabulku nebo napsat nějaký program, kam zadáme parametry α , t , o , ε ,

φ, θ svého obrázku a souřadnice bodů objektu. Program spočítá projekce bodů na papír a pokud možno i sám zobrazí stereoskopický obrázek. Pokud se levý a pravý obrázek překrývají, snížením parametru α můžeme objekt pomyslně zmenšit. Stejně tak jestli vypadá stereoskopický obrázek nepřírozně a bolí z jeho sledování oči, pohrajeme si s parametry t, o, ε . Pokud se chceme podívat na objekt z jiného směru, zvolíme úhly φ, θ a pomocí vztahu (6) nebo (7) převedeme staré souřadnice na nové. Počítač přepočítá polohy pro nové parametry okamžitě a nemusíme všechna čísla počítat sami s tužkou a kalkulačkou.

Pro inspiraci, souřadnice bodů na obrázcích v tomto textu byly spočítány v Excelu a ručně přepsány do \LaTeX u. Tam jsme obrázky vykreslili pomocí balíčku `\usepackage{tikz}`. Nepochybně by ale šlo proces kreslení zautomatizovat i více.

Pokud nedáte dopustit na kreslení rukou, je možné vynášet body na zadní stranu milimetrového papíru za pomoci prosvítající mřížky. Tak dosáhnete dostatečné přesnosti umístění bodů.

č.	staré souřadnice (x, y, z)	nové souřadnice (x', y', z')	levý obrázek (y_L, z_L)	pravý obrázek (y_P, z_P)
1	(13; 13; 13)	(6,62; -1,15; 0,68)	(-2,57; 0,22)	(1,83; 0,22)
2	(-13; 13; 13)	(2,94; 5,39; 2,80)	(-0,57; 0,87)	(3,92; 0,87)
3	(13; -13; 13)	(0,96; -5,39; 3,95)	(-3,90; 1,20)	(0,63; 1,20)
4	(-13; -13; 13)	(-2,72; 1,15; 6,07)	(-1,97; 1,77)	(2,64; 1,77)
5	(13; 13; -13)	(2,72; -1,15; -6,07)	(-2,60; -1,88)	(1,89; -1,88)
6	(-13; 13; -13)	(-0,96; 5,39; -3,95)	(-0,68; -1,17)	(3,89; -1,17)
7	(13; -13; -13)	(-2,94; -5,39; -2,80)	(-3,87; 0,82)	(0,74; -0,82)
8	(-13; -13; -13)	(-6,62; 1,15; -0,68)	(-2,02; -0,19)	(2,66; -0,19)
9	(13; 0; 0)	(-1,84; -3,27; -1,06)	(-3,26; -0,33)	(1,25; -0,33)
10	(-13; 0; 0)	(-1,84; 3,27; 1,06)	(-1,33; 0,31)	(3,26; 0,31)
11	(0; 13; 0)	(2,83; 2,12; -1,64)	(-1,59; -0,51)	(2,90; -0,51)
12	(0; -13; 0)	(-2,83; -2,12; 1,64)	(-2,92; 0,48)	(1,69; 0,48)
13	(0; 0; 13)	(1,95; 0,00; 3,38)	(-2,25; 1,04)	(2,25; 1,04)
14	(0; 0; -13)	(-1,95; 0,00; -3,38)	(-2,30; -0,99)	(2,30; -0,99)

Tabulka 1: Zobrazení základní buňky plošně centrované krychlové krystalické mřížky.

Ve druhém sloupci tabulky 1 jsou vypsány souřadnice všech bodů v trojrozměrném prostoru. Body 1–8 jsou vrcholy krychle, zatímco body 9–14 jsou středy stěn. S takto definovanou souřadnicovou soustavou bychom pozorovali krychli kolmo na jednu její stěnu. Zajímavější pohled se nám ale nabízí ze směru $\varphi = 57^\circ$ a $\theta = 60^\circ$. Další parametry použité v obr. 4 jsou $\alpha = 0,30$, $t = 90$ cm, $o = 3,25$ cm, $\varepsilon = 0,30$.

Kreslení stereoskopických obrázků touto metodou je trochu alchymie. Výsledné parametry obr. 4 vznikly po několika pokusech, kdy jsme museli vybalancovat několik jevů. Nejenže se levý a pravý obrázek nesmějí překrývat (proto jsme krychli zmenšili pomocí $\alpha = 0,30$), pro lepší vjem by se neměly překrývat ani žádné z puntíků značících body 1–14. To je při zvolených úhlech φ a θ splněno. Hodnoty parametrů t , o a ε jsme použili stejně²⁾ jako ve všech stereoskopických obrázcích v tomto textu.

Názorně si ukážeme výpočet pro bod 1 (je vyznačený i v obr. 4), postup pro ostatních třináct bodů by byl analogický. Všechny polohy jsou v centimetrech. V původní souřadnicové soustavě má bod polohu $(x, y, z) = (13; 13; 13)$. Jelikož se na obrázek chceme podívat z jiného směru než z kladného směru osy x , musíme podle vztahu (6) přepočítat souřadnice do nové čárkované soustavy, v níž osa x' míří mezi naše oči. Při té příležitosti rovnou zmenšíme objekt koeficientem $\alpha = 0,3$:

$$x' = 0,3 \cdot (13 \sin 60^\circ \cos 57^\circ + 13 \sin 60^\circ \sin 57^\circ + 13 \cos 60^\circ) = 6,62,$$

$$y' = 0,3 \cdot (-13 \sin 57^\circ + 13 \cos 57^\circ) = -1,15,$$

$$z' = 0,3 \cdot (-13 \cos 60^\circ \cos 57^\circ - 13 \cos 60^\circ \sin 57^\circ + 13 \sin 60^\circ) = 0,68.$$

Bod $(13; 13; 13)$ má nově polohu $(6,62; -1,15; 0,68)$. Nové polohy pro všechny body krychle najdeme ve třetím sloupci tabulky 1.

Dosažením nových souřadnic do vztahů (4) a (5) zjistíme projekce bodů na papír. Jelikož už jsme koeficient α aplikovali, nebudeme jej zahrnovat do výpočtu podruhé.

$$y_L = \varepsilon \frac{t(y' + o)}{t - x'} - o = 0,3 \cdot \frac{90 \cdot (-1,15 + 3,25)}{90 - 6,62} - 3,25 = -2,57,$$

$$y_P = \varepsilon \frac{t(y' - o)}{t - x'} + o = 0,3 \cdot \frac{90 \cdot (-1,15 - 3,25)}{90 - 6,62} + 3,25 = 1,83,$$

²⁾Možná vás zarazil rozdíl mezi vzdáleností $q = \varepsilon t = 27$ cm a doporučenou pozorovací vzdáleností z úvodu 60 cm. Při sledování z větší vzdálenosti je snazší donutit obrázky splynout a tak dosáhnout 3D vjemu (obzvlášť při prvním pozorování). Jak bylo napsáno výše, mozek a oči jsou flexibilní.

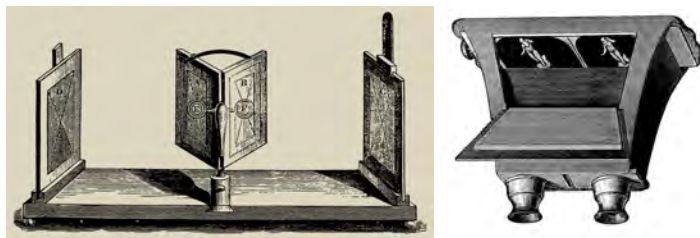
$$z_L = z_P = \varepsilon \frac{tz'}{t - x'} = 0,3 \cdot \frac{90 \cdot 0,68}{90 - 6,62} = 0,22.$$

Nyní tedy na papír můžeme do poloh $(y_L, z_L) = (-2,57; 0,22)$, resp. $(y_P, z_P) = (1,83; 0,22)$ vynést levý, resp. pravý obraz bodu 1. Ve čtvrtém, resp. pátém sloupci tabulky 1 jsou pak uvedeny polohy obrazů všech ostatních bodů krychle. Na obrázku 4 jsou světle šedou barvou vyznačeny souřadnicové osy y a z . Můžete se s pravítkem přesvědčit, že polohy levého i pravého obrazu bodu 1 sedí.

Jistě jste si všimli, že v obrázcích 3 a 4 jsou popisky, které se jeví, jako by byly umístěny vedle popisovaného bodu. Umístit krátký popisek do obrázku není složité. Stačí na obou obrázcích napsat znak ve stejné relativní pozici vůči popisovanému objektu (např. 2,5 mm doprava a 2,5 mm nahoru). Toto je samozřejmě aproximace, která funguje pouze v blízkém okolí a hodí se jen pro krátké popisky.

Další metody sledování 3D obrázků

Existuje nespočet jiných způsobů, jak zobrazovat stereoskopické obrázky nebo 3D videa. Všechny pracují na stejném principu – levému oku se zobrazuje jiný pohled než pravému a mozek musí být přesvědčen, že oči se dívají ne na dva různé obrázky, nýbrž na jeden objekt ze dvou pozic. Možná doma máte přístroj zvaný stereoskop. Stereoskopy využívají optickou soustavu. Nejstarší typ, Wheatstoneův stereoskop (viz obr. 5 vlevo), obsahuje dvě zrcátka odkloněná o 45° ke směru pohledu. V zrcátkách se odráží obrázky určené pro levé a pravé oko. Brewsterův stereoskop (obr. 5 vpravo) využívá spojné čočky, které fungují jako lupy – obrázky zdánlivě zvětší a přenesou do větší vzdálenosti. Díky tomu může mít stereoskop malé rozměry.



Obr. 5: Dva typy stereoskopu, vlevo Wheatstonův stereoskop využívající dvě zrcátka, vpravo Brewsterův stereoskop používající soustavu čoček. (zdroj [3], public domain)

U větších projekcí se nelze vyhnout překrývání obrázků. Pak je nutné aktivně zabránit tomu, aby do oka nedoputoval žádný signál určený druhému oku. 3D kina a domácí 3D televizory používají buď polarizované světlo (obraz je nutné sledovat skrz brýle s polarizačními filtry), nebo rychle za sebou střídavě promítají obrazy pro levé a pravé oko (obraz je nutné sledovat přes speciální brýle, které synchronizovaně s obrazovkou zatmívají levou a pravou čočku). Dostupnější metodou jsou barevné anaglyfy, kde jsou oba obrázky nakresleny různou barvou a člověk je sleduje skrz brýle s barevnými filtry (typicky modrozelený a červený). Filtr před každým okem propustí pouze světlo ze správného obrázku a tak může vzniknout trojrozměrný vjem. K nakreslení anaglyfu můžeme použít úplně stejný matematický postup, s jakým jsme se seznámili v tomto článku.

Shrnutí

V tomto článku jsme si představili matematický postup, jak nakreslit stereoskopický obrázek. Výhodou takto vytvořených obrázků je, že k jejich sledování nepotřebujeme žádné speciální vybavení, ani polarizační brýle, ani brýle s barevnými filtry, ani optickou soustavu čoček. Potřebujeme pouze dvě papírové trubičky (při troše cviku stačí palec postavený před oči, aby zakryl levému oku pravý obrázek a naopak). Nevýhodou je, že obrázky od sebe nesmějí být dál než rozteč očí pozorovatele (5–8 cm). Oba obrázky proto musejí být malé, maximální rozměry jsou 4–5 cm.

Literatura

- [1] https://www.fa.cvut.cz/studium/predmety/deskriptivni-geometrie-i-ii/dg_elskripta/linearni_perspektiva/lp_volba_lp.pdf [2021-01-16]
- [2] Čížek, P. *Prostorové zobrazování*. Plzeň, 2005. Diplomová práce. Západočeská univerzita v Plzni, Fakulta aplikovaných věd, Katedra informatiky a výpočetní techniky. Dostupné na http://iason.zcu.cz/~skala/VID/Data/PetrCizek_DP2005.pdf [2021-01-16]
- [3] <https://en.wikipedia.org/wiki/Stereoscope> [2021-07-26]
- [4] Erker, G. *How To Freeview Stereo (3D) Images* <https://www.angelfire.com/ca/erker/freeview.html> [2021-07-25]

Beznulá čísla

Antonín Jančařík, PedF UK, Tomáš Kepka, MFF UK, Praha

Ivan Volný, Praha

Teorie čísel je oblastí, která nabízí množství velmi zajímavých problémů. Často se zde setkáváme s úlohami, které lze snadno formulovat, ale jejich řešení může být nesmírně obtížné. V tomto článku se zaměříme na jednu z takových úloh. Budeme se zabývat otázkami spojenými s podobou zápisu čísla v soustavě s předem zvoleným základem a svoji pozornost soustředíme na čísla, jejichž zápis neobsahuje číslici nula (beznulá čísla), a na čísla, která se dají zapsat jako součin dvou beznulých čísel (skorobeznulá čísla). Primárně se zaměříme na soustavu s dekadickým základem a čísla ve tvaru 10^n a položíme si otázku, pro která nezáporná celá čísla n lze mocninu 10^n rozložit na součin $10^n = ab$ celých čísel a, b , kde ani číslo a ani číslo b nemá číslici 0 ve svém dekadickém zápisu. Následně ukážeme, jakým způsobem je možné pozorování z dekadické soustavy zobecnit i pro soustavy o jiném základu.

Beznulá a skorobeznulá čísla

Za účelem snazšího vyjadřování budeme říkat, že celé číslo a je beznulé (při základu 10), jestliže v dekadickém zápise čísla a se nevyskytuje číslice 0. Například, $1, 2, \dots, 9, 11, \dots, 19, 21, \dots$ jsou beznulá čísla, zatímco čísla $0, 10, 20, \dots, 101, \dots$ beznulá nejsou.

Budeme říkat, že číslo a je skorobeznulé, je-li součinem dvou (ne nutně různých) beznulých čísel. Zřejmě, 0 není skorobeznulé číslo a číslo a je skorobeznulé tehdy a jen tehdy, je-li takovým i číslo $-a$. V dalším se tudíž omezíme pouze na kladná celá čísla.

Je-li a beznulé číslo, pak $a = 1 \cdot a$ je rozklad na součin dvou beznulých čísel. Tedy každé beznulé číslo je také skorobeznulé.

Je-li p prvočíslo, pak p lze rozložit pouze ve tvaru $p = 1 \cdot p$. Takže prvočíslo p je skorobeznulé právě tehdy, když je beznulé. Nejmenší prvočíslo, které není beznulé je 101. Je dokázáno, že existuje nekonečně mnoho beznulých prvočísel [1].

Několik pozorování

Je $10 = 2 \cdot 5$, $20 = 4 \cdot 5$, $30 = 5 \cdot 6$, $40 = 5 \cdot 8$, $50 = 2 \cdot 25$, $60 = 5 \cdot 12$, $70 = 2 \cdot 35$, $80 = 5 \cdot 16$, $90 = 5 \cdot 18$, $100 = 4 \cdot 25$. Nyní je jasné, že každé

číslo m takové, že $1 \leq m \leq 100$, je skorobeznulé. A je také jasné, že prvočíslo 101 je nejmenším kladným číslem, které není skorobeznulé.

Je $102 = 2 \cdot 51$, 103 je prvočíslo, $104 = 2 \cdot 52$, $105 = 5 \cdot 21$, $106 = 2 \cdot 53$, 107 je prvočíslo, $108 = 2 \cdot 54$, 109 je prvočíslo, $110 = 2 \cdot 55$, $120 = 5 \cdot 24$, $130 = 2 \cdot 65$, $140 = 5 \cdot 28$, $150 = 6 \cdot 25$, $160 = 5 \cdot 32$, $170 = 5 \cdot 34$, $180 = 5 \cdot 36$, $190 = 5 \cdot 38$, $200 = 8 \cdot 25$, $201 = 3 \cdot 67$. Odtud snadno plyne, že každé (složené) číslo m takové, že $102 \leq m \leq 201$ je skorobeznulé. Je však $202 = 1 \cdot 202 = 2 \cdot 101$ a jiných rozkladů číslo 202 nemá. Tedy 202 je nejmenší kladné složené číslo, které není skorobeznulé. Navíc, číslo 202 nelze rozložit na součin jakkoli mnoha beznulých čísel. Protože každé složené číslo m , $1 \leq m \leq 201$ je skorobeznulé, tak prvočísla 101, 103, 109 jsou právě ta čísla m , že $1 \leq m \leq 201$ a m není skorobeznulé.

Snadno spočteme vlastními silami, že 47 je nejmenší prvočíslo s touto vlastností, že jeho druhá mocnina není beznulá. Je $47^2 = 2209$; samozřejmě, 47^2 je skorobeznulé číslo. Dále je $47^3 = 47 \cdot 47 \cdot 47 = 103823$. Tedy 47^3 je součinem tří beznulých čísel, přičemž však 47^3 není skorobeznulé číslo. Pro nejbližší větší prvočíslo, tedy číslo 53, také platí, že jeho druhá mocnina není beznulá, neboť $53^2 = 2809$. Ovšem $53^3 = 148877$, což je beznulé číslo.

Číslo 107 je nejmenší prvočíslo, které není beznulé, avšak jeho druhá mocnina již beznulá je; $107^2 = 11449$. Nejmenší takové složené číslo je 106, $106^2 = 11236$. Jako zajímavý úkaz uveďme následující druhou mocninu: $33333333333333334^2 = 11111111111111115555555555555556$, což je beznulé číslo, které je druhou mocninou beznulého čísla.

Mocniny dvou a pěti

Není vůbec náročné si vyrobit tabulku mocnin 2^n prvočísla 2, a to třeba pro $0 \leq n \leq 100$. Prohlídkou této tabulky zjistíme, že pro tyto exponenty je mocnina 2^n beznulá právě jen pro $n = 0, 1, \dots, 9, 13, 14, 15, 16, 18, 19, 24, 25, 27, 28, 31, \dots, 37, 39, 49, 51, 67, 72, 76, 77, 81, 86$. Dohromady je to $36 = 6^2$ exponentů.

Panuje přesvědčení [2], že 86 je největší exponent n takový, že mocnina 2^n je beznulá. Tato domněnka byla potvrzena pro $n \leq 2,5 \cdot 10^9$.

Asi by dalo dost práce zjistit přímým výpočtem, že pro $0 \leq n \leq 100$ jsou mocniny 5^n beznulé pouze pro $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 17, 18, 30, 33, 58$. Dohromady to je $16 = 2^4$ exponentů. Opět existuje domněnka, že 58 je největší exponent. Domněnka byla ověřena pro všechna $n \leq 10^{10}$.

Rozklad mocnin deseti

Dokažme si, že pro $n \geq 0$ je mocnina 10^n skorobeznulá právě tehdy, když jsou beznulé obě mocniny 2^n a 5^n .

Nejdříve tu snadnou část. Je $10^n = 2^n \cdot 5^n$. Jsou-li tedy mocniny 2^n a 5^n beznulé, pak mocnina 10^n je skorobeznulá.

A nyní tu těžší část. Necht' 10^n je skorobeznulé číslo. Chceme dokázat, že mocniny 2^n a 5^n jsou beznulé. Víme, že $10^n = ab$, kde a, b jsou (kladná) beznulá čísla. To jest, $2^n \cdot 5^n = ab$, z čehož plyne $a = 2^r \cdot 5^s$ a $b = 2^u \cdot 5^v$, $0 \leq r, s, u, v$; $r + u = n = s + v$.

Bylo-li by $r \geq 1$ a současně $s \geq 1$, pak by 2^r bylo sudé a (dekadický) zápis mocniny 5^n by končil číslicí 5. A tak součin $2^r \cdot 5^s$ by končil číslicí 0, neboť $2^{r-1} \cdot 2 \cdot 5^{s-1} \cdot 5 = 10 \cdot 2^{r-1} \cdot 5^{s-1}$. To je však spor s tím, že číslo a je beznulé. Je tedy $0 \in \{r, s\}$.

Ze symetrie a z $r + u = n = s + v$ pak již plyne, že $0 \in \{u, v\}$ a tudíž $\{a, b\} = \{2^n, 5^n\}$.

Mocniny deseti

Na základě předchozích pozorování získáváme, že pro $0 \leq n \leq 100$ jsou mocniny 10^n skorobeznulé právě a výhradně jen pro 11 exponentů (z toho 10 kladných), konkrétně pro $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 18, 33$. Platila-li by výše uvedená domněnka o mocninách dvou, pak by to byly již všechny hledané exponenty. Připomeňme však, že domněnka je prověřena pro $n \leq 2,5 \cdot 10^9$.

Nejvyšší známou skorobeznulou mocninou 10 je mocnina

$$10^{33} = 8589934592 \cdot 116415321826934814453125$$

10^{33} je pěkné skorobeznulé číslo (i když má ve svém zápise 33 nul).

Dále víme, že $2^{34} = 2 \cdot 8589934592 = 17179869184$, čili i číslo $2 \cdot 10^{33}$ je skorobeznulé.

Nejmenší (nezáporný) exponent n takový, že mocnina 10^n není skorobeznulá, je $n = 8$. A to proto, že $5^8 = 390625$ není beznulé číslo. Další pak je $n = 10$, neboť $2^{10} = 1024$.

Zobecnění pro soustavy o jiném základu

Pojmy „beznulosti“ a „skorobeznulosti“ jsou závislé na použitém základě q pro poziční zápis celých čísel. Předchozí pozorování byla činěna pro obvyklý případ $q = 10$. Můžeme ovšem uvažovat i jiné základy $q \geq 2$

a budeme získávat q -beznulá a q -skorobeznulá čísla. Opět je zajímavé hledat exponenty $n \geq 0$ takové, že mocnina q^n je q -skorobeznulá.

Je-li $q = p^k$, kde p je prvočíslo a $k \geq 0$, pak není těžké si povšimnout, že mocnina q^n je q -skorobeznulá pouze pro $n = 0, 1$ v případě, že $k \geq 2$, a pouze pro $n = 0$ v případě, že $k = 1$ (tj. $q = p$ je prvočíslo).

Nechť q není mocninou žádného prvočísla, $6 \leq q$. Lze potom psát $q = r \cdot s$, kde $2 \leq r < s < q$ a čísla r, s jsou nesoudělná (stačí uvážit prvočíselný rozklad čísla q). (Pokud čísla r, s jsou prvočísla, můžeme použít stejné úvahy, jako u rozkladu čísla 10 v desítkové soustavě. Zde ale připouštíme i možnost, že čísla r, s jsou čísla složená.) Bylo-li by $r^2 \geq q$, pak by platilo $s^2 > q$ a $q^2 = r^2 \cdot s^2 > q^2$, což není možné. Nahlížíme, že $r^2 < q < s^2$.

Samozřejmě, $q^0 = 1$ je q -beznulé. Avšak i r, s jsou nenulové číslice (pro základ q), a tak i $q^1 = q$ je q -skorobeznulé číslo. Dále, r^2 je nenulová číslice, $q < s^2 < q^2$, $s^2 = aq + b$, $1 \leq a < q$, $0 \leq b < q$. Tedy $s^2 = (ab)_q$ (poziční zápis při základu q). Kdyby bylo $b = 0$, tak by $s^2 = aq = ars$, tedy $s = ar$ a tedy $r = 1$, neboť čísla r, s jsou nesoudělná. To je však spor s tím, že $r \geq 2$. Tedy $b \geq 1$ a číslo s^2 je q -beznulé. Jelikož máme $q^2 = r^2 \cdot s^2$, tak q^2 je q -skorobeznulé číslo.

A teď se blíže podíváme na mocninu q^3 . Jelikož je $r < s$, tak je $q^2 > r^3$ a $r^3 = aq + b$, $0 \leq a < q$, $1 \leq b < q$, $r^3 = (ab)_q$. Dále je $q^3 > s^3$, $s^3 = cq^2 + dq + e$, $0 \leq c < q$, $0 \leq d < q$, $1 \leq e < q$, $s^3 = (cde)_q$.

Je-li $d \neq 0$, pak obě čísla r^3 a s^3 jsou q -beznulá a mocnina q^3 je tudíž q -skorobeznulá. Předpokládejme tedy, že $d = 0$. Je potom

$$q^3 = r^3 \cdot s^3 = acq^3 + bcq^2 + aeq + be > acq^3.$$

Takže $ac = 0$, čili $a = 0$ nebo $c = 0$. Kdyby bylo $c = 0$, tak $s^3 = e < q$, $q^3 = r^3 s^3 < s^6 = e^2 < q^2$, $q < 1$, což neplatí. Takže $c \neq 0$ a $a = 0$, $q^3 = bcq^2 + be$, $bc = q^2(q - bc)$, což je spor s tím, že $1 \leq bc < q^2$. Přesvědčili jsme se, že i mocnina q^3 je q -skorobeznulá.

A na řadu přichází mocnina q^4 . Jelikož je $r < s$, tak je $r^4 < q^2$, $r^4 = aq + b$, $0 \leq a < q$, $1 \leq b < q$, $r^4 = (ab)_q$. Dále je $s^4 < q^4$,

$$s^4 = cq^3 + dq^2 + eq + f,$$

$0 \leq c, d, e < q$, $1 \leq f < q$, $s^4 = (cdef)_q$. Číslo r^4 je q -beznulé. Je-li navíc $d \neq 0 \neq e$, pak i s^4 je q -beznulé a mocnina q^4 je q -skorobeznulá. Je-li $e = 0$, pak $s^4 = cq^3 + dq^2 + f$, s^2 dělí f , $s^2 < q$, $s^4 < q^2$, $s^4 = f$

a $q^4 = r^4 \cdot s^4$ je q -skorobeznulé číslo. Zbývá případ $e \neq 0 = d$. Je $s^4 = cq^3 + eq + f$,

$$\begin{aligned} q^4 &= r^4 \cdot s^4 = (aq + b)(cq^3 + eq + f) = \\ &= acq^4 + bcq^3 + aeq^2 + (af + be)q + bf. \end{aligned}$$

Je $bf \geq 1$, takže $ac = 0$. Pro $c = 0$ bychom dostali $s^4 < q^2$ a potom také $q^4 = r^4 \cdot s^4 < q^2 \cdot q^2 = q^4$, spor. Takže je $a = 0 \neq c$. Tedy $r^4 = b$,

$$\begin{aligned} s^4 &= cq^3 + eq + f = cr^3s^3 + ers + f, \\ q^4 &= r^4cq^3 + r^4eq + r^4f. \end{aligned}$$

Dále je jasné, že $f = sg$, $1 \leq g < r$. Po zkrácení dostáváme rovnost

$$s^3 = cr^3s^2 + er + g,$$

pro kladná celá čísla, kde víme, že $2 \leq r < s$, $1 \leq c < rs$, $1 \leq e < rs$ a $1 \leq g < r$. Ihned vidíme, že s^2 dělí $er + g$, $er + g = hs^2$, $1 \leq h$. Odtud plyne $er^3 + gr^2 = hr^2s^2$. Ovšem, my víme, že $r^4 = b < q = rs$, čili $r^3 < s$. Pak ale

$$\begin{aligned} rs^2 + r^3 &> es + gr^2 > er^3 + gr^2 = hr^2s^2, \\ 2s^2 &> s^2 + r^2 > hrs^2 \geq 2hs^2 \geq 2s^2, \end{aligned}$$

což je opět spor. Poněkud pracně jsme se přesvědčili o tom, že i mocnina q^4 je q -skorobeznulá.

Spočítali jsme si, že pro složené (kladné) číslo q , které není mocninou prvočísla (je pak $q = 6, 10, 12, 14, 15, 18, 20, \dots$) jsou všechny mocniny q^0, q^1, q^2, q^3 a q^4 q -skorobeznulé.

A už je tu závěr. Nemusíme propadnout zoufalství. Volme případ $q = 6$ ($r = 2, s = 3$). Tedy q nejmenší možné. Je $3^0 = 1 = (1)_q$, $3^1 = 3 = (3)_q$, $3^2 = 9 = (13)_q$, $3^3 = 27 = (43)_q$, $3^4 = 81 = (213)_q$ a $3^5 = 243 = (1043)_q$. Mocnina $6^5 = q^5 = (100000)_q$ není q -skorobeznulá. Vyšše uvedené úvahy proto není možné zobecnit pro vyšší než čtvrtou mocninu.

Závěr

Problémy spojené s beznulými a skorobeznulými čísly leží na pomezí mezi teorií čísel a rekreační matematikou. Toto spojení nabízí celou řadu otevřených problémů, z nichž některé jsou řešitelné i nástroji běžné školní

matematiky a nabízí velký prostor pro experimentování a objevování. Zároveň umožňují zobecnění výsledků a přechod z dekadické soustavy do soustav o jiném základu, což je v současné době ve školské matematice opomíjené téma.

Autoři tohoto článku jsou přesvědčeni, že úlohy podobného typu demonstrují krásu matematiky a prostřednictvím jednoduchých aritmetických výpočtů mohou vzbudit a prohloubit u žáků, studentů i široké veřejnosti zájem o tuto vědu.

Literatura

- [1] Maynard, J.: Primes with restricted digits. *Inventiones mathematicae*, 217 (2019), s. 127–218. <https://doi.org/10.1007/s00222-019-00865-6>.
- [2] Khovanova, T.: *86 Conjecture*. <https://blog.tanyakhovanova.com/2011/02/86-conjecture/>

Připomeňme si podobnost trojúhelníků

Vlastimil Dlab, Bzí u Železného Brodu

V elementární rovinné geometrii je zaveden pojem podobnosti trojúhelníků. Je zaveden, mnohdy nedocenen a nevyužit. Užívání nabílovaných vzorců v situaci, kdy jádro problému může být vysvětleno užitím podobnosti trojúhelníků, je nejenom zbytečné, ale často i zavádějící (viz [1]).

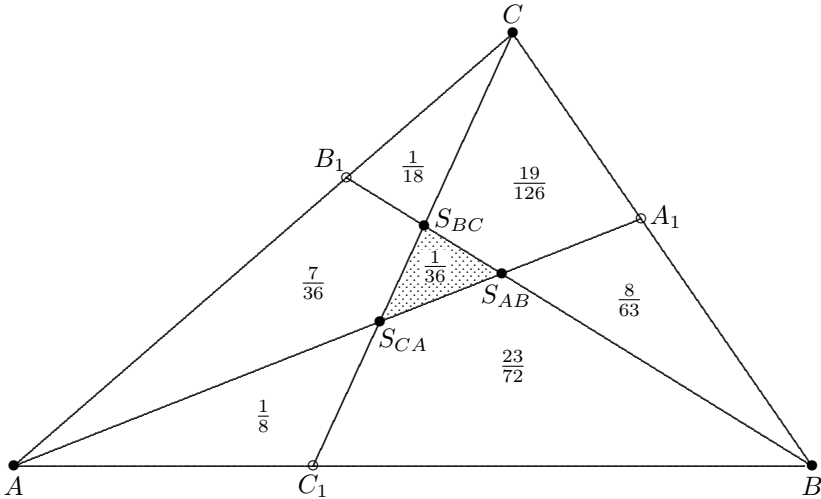
V této krátké poznámce, která může posloužit ve školní výuce, zdůrazníme důležitost pojmu podobnosti trojúhelníků, jenž lze geometricky vyjádřit velmi jednoduše:

Dva trojúhelníky jsou podobné právě tehdy, když mají stejné úhly.

Podobnost trojúhelníků je v článku využita k vysvětlení některých vlastností, které jsou společné všem trojúhelníkům. Soustředíme se na jednoduchou otázku, která patří do souboru problémů řešených v [2] užitím barycentrických souřadnic, jenž kulminoval větami Cèvy, Menelausa a Routha. Zde podáme zcela elementární důkaz „Hlavního tvrzení“, z něhož Cèvova věta a Routhova věta vyplynou jako důsledky.

Je zábavné sledovat, jakou pozornost věnuje literatura některým speciálním případům těchto vět. Feynmanův fenomén (viz např. [5]) je toho nesporným důkazem. Feynmanův trojúhelník je objasněn na str. 179 článku [1] (viz též [6]).

Cílem tohoto článku je popsat, odvodnit a zobecnit následující obrázek:



Obr. 1: Obsahy jednotlivých částí trojúhelníku ABC

Zde jsou strany trojúhelníka rozděleny pomocí bodů A_1 , B_1 a C_1 v poměrech

$$\frac{|A_1B|}{|A_1C|} = \frac{4}{3}, \quad \frac{|B_1C|}{|B_1A|} = \frac{1}{2}, \quad \frac{|C_1A|}{|C_1B|} = \frac{3}{5}.$$

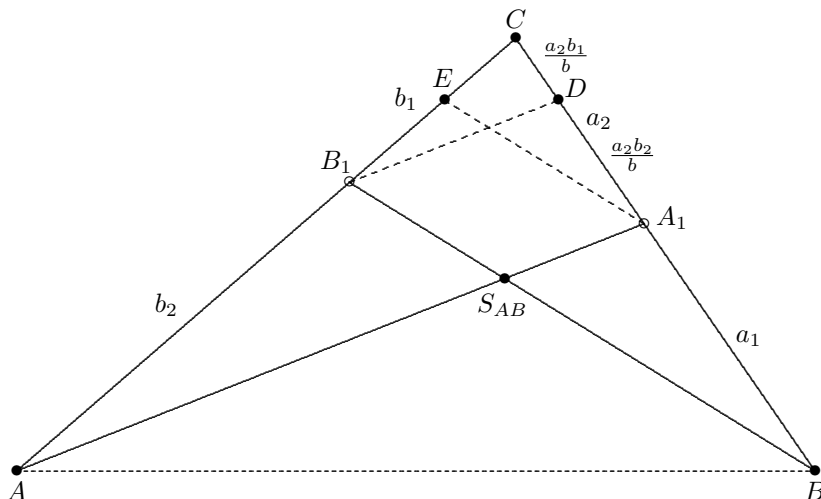
Potom jsou poměry obsahů jednotlivých částí trojúhelníku ABC k obsahu celého trojúhelníku vyjádřeny příslušnými zlomky. Vzniklý trojúhelník $S_{AB}S_{BC}S_{CA}$ má obsah rovný $\frac{1}{36}$ obsahu trojúhelníku ABC .

V obecném zadání jsou strany $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$ trojúhelníku ABC rozděleny body A_1 , B_1 a C_1 na úsečky, jejichž délky označme $a_1 = |A_1B|$, $a_2 = |A_1C|$, $b_1 = |B_1C|$, $b_2 = |B_1A|$, $c_1 = |C_1A|$ a $c_2 = |C_1B|$; tedy $a = a_1 + a_2$, $b = b_1 + b_2$, $c = c_1 + c_2$.

Cestou k popisu a vysvětlení hodnot na obr. 1 je toto tvrzení.

Tvrzení. Strana BC je bodem A_1 rozdělena v poměru $\frac{|A_1B|}{|A_1C|} = \frac{a_1}{a_2}$ a strana CA bodem B_1 v poměru $\frac{|B_1C|}{|B_1A|} = \frac{b_1}{b_2}$. Potom

$$\frac{|S_{ABA_1}|}{|S_{ABA}|} = \frac{a_1 b_1}{a b_2} \quad \text{a} \quad \frac{|S_{ABB_1}|}{|S_{ABB}|} = \frac{a_2 b_2}{a_1 b}. \quad (1)$$



Obr. 2: Poměry úseček $\frac{|S_{ABA_1}|}{|S_{ABA}|}$ a $\frac{|S_{ABB_1}|}{|S_{ABB}|}$

V důkazu rovností (1) využijeme podobnosti trojúhelníků: $\triangle B_1DC \sim \triangle AA_1C$ a $\triangle BA_1S_{AB} \sim \triangle BDB_1$. Zde je úsečka DB_1 rovnoběžná s úsečkou A_1A . Tedy

$$\frac{|A_1A|}{|DB_1|} = \frac{b}{b_1} \quad \text{a} \quad \frac{|S_{ABA_1}|}{|DB_1|} = \frac{a_1}{a_1 + \frac{a_2 b_2}{b}} = \frac{a_1 b}{a_1 b + a_2 b_2}.$$

Odtud

$$\frac{|S_{ABA_1}|}{|AA_1|} = \frac{a_1 b_1}{a_1 b + a_2 b_2} = \frac{a_1 b_1}{a_1 b_1 + a b_2}.$$

Proto

$$\frac{|S_{ABA_1}|}{|S_{ABA}|} = \frac{a_1 b_1}{a b_2}.$$

Zcela stejným způsobem (užitím podobnosti trojúhelníků A_1EC a BB_1C a dále AB_1S_{AB} a AEA_1 , kde spojnice EA_1 je rovnoběžná s úsečkou B_1B)

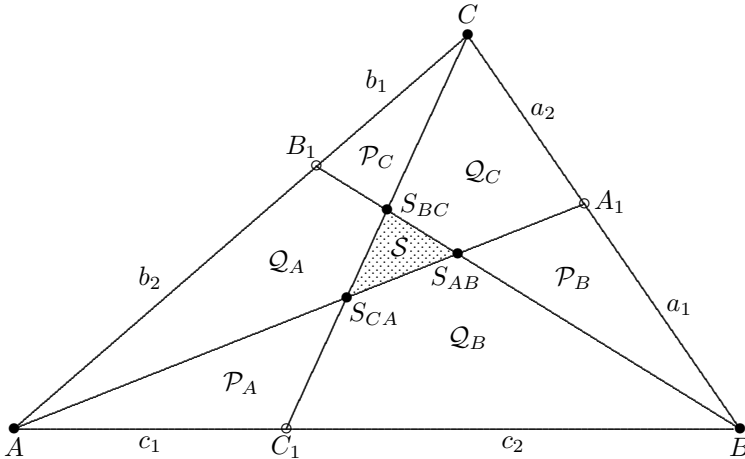
dostaneme rovnost

$$\frac{|S_{AB B_1}|}{|S_{AB B}|} = \frac{a_2 b_2}{a_1 b} \quad \text{a} \quad \frac{|S_{AB B_1}|}{|B B_1|} = \frac{a_2 b_2}{a_1 b + a_2 b_2}.$$

Předchozí tvrzení můžeme aplikovat na dvojice úseček BB_1, CC_1 se společným bodem S_{BC} a CC_1, AA_1 se společným bodem S_{CA} . Označme $s_a = c_1 a + c_2 a_2$, $s_b = a_1 b + a_2 b_2$ a $s_c = b_1 c + b_2 c_2$ a příslušné poměry zaznamenejme v následující tabulce:

$\frac{ S_{AB A_1} }{ S_{AB A} } = \frac{a_1 b_1}{a b_2}$	$\frac{ S_{AB A_1} }{ AA_1 } = \frac{a_1 b_1}{s_b}$	$\frac{ S_{AB B_1} }{ S_{AB B} } = \frac{a_2 b_2}{a_1 b}$	$\frac{ S_{AB B_1} }{ B B_1 } = \frac{a_2 b_2}{s_b}$
$\frac{ S_{BC B_1} }{ S_{BC B} } = \frac{b_1 c_1}{b c_2}$	$\frac{ S_{BC B_1} }{ B B_1 } = \frac{b_1 c_1}{s_c}$	$\frac{ S_{BC C_1} }{ S_{BC C} } = \frac{b_2 c_2}{b_1 c}$	$\frac{ S_{BC C_1} }{ C C_1 } = \frac{b_2 c_2}{s_c}$
$\frac{ S_{CA C_1} }{ S_{CA C} } = \frac{c_1 a_1}{c a_2}$	$\frac{ S_{CA C_1} }{ C C_1 } = \frac{c_1 a_1}{s_a}$	$\frac{ S_{CA A_1} }{ S_{CA A} } = \frac{c_2 a_2}{c_1 a}$	$\frac{ S_{CA A_1} }{ AA_1 } = \frac{c_2 a_2}{s_a}$

Vraťme se nyní k trojúhelníku ABC se stranami a, b, c , rozdělenými body A_1, B_1, C_1 na úseky $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$. Úsečkami AA_1, BB_1, CC_1 je trojúhelník rozdělen na sedm částí.



Obr. 3: Obsahy částí trojúhelníku ABC v obecném případě

Hlavní tvrzení. Označíme-li obsah trojúhelníku ABC symbolem Δ , obsahy trojúhelníků $AC_1 S_{CA}$, $BA_1 S_{AB}$ a $CB_1 S_{BC}$ jsou

$$\mathcal{P}_A = \frac{c_1^2 a_1}{c s_a} \Delta, \quad \mathcal{P}_B = \frac{a_1^2 b_1}{a s_b} \Delta \quad \text{a} \quad \mathcal{P}_C = \frac{b_1^2 c_1}{b s_c} \Delta.$$

MATEMATIKA

Dále, obsahy čtyřúhelníků $AS_{CA}S_{BC}B_1$, $BS_{AB}S_{CA}C_1$ a $CS_{BC}S_{AB}A_1$ jsou

$$Q_A = \frac{c_1(a_2bs_c - b_1^2s_a)}{bs_cs_a}\Delta, \quad Q_B = \frac{a_1(b_2cs_a - c_1^2s_b)}{cs_as_b}\Delta,$$

$$Q_C = \frac{b_1(c_2as_b - a_1^2s_c)}{as_bs_c}\Delta.$$

Obsah S trojúhelníku $S_{AB}S_{BC}S_{CA}$ je rozdíl Δ a součtu všech \mathcal{P} 's a \mathcal{Q} 's.

Důkaz hlavního tvrzení opět využije poměrů geometrických veličin. Obsah trojúhelníku AC_1C je $\frac{c_1}{c}\Delta$. Jelikož

$$\frac{|S_{CA}C_1|}{|CC_1|} = \frac{c_1a_1}{s_a},$$

dostáváme

$$\mathcal{P}_A = \frac{c_1^2a_1}{cs_a}\Delta$$

a podobně

$$\mathcal{P}_C = \frac{b_1^2c_1}{bs_c}\Delta,$$

a tedy

$$Q_A = \left(\frac{c_1}{c} - \frac{c_1^2a_1}{cs_a} - \frac{b_1^2c_1}{bs_c} \right) \Delta = c_1 \left(\frac{s_a - c_1a_1}{cs_a} - \frac{b_1^2}{bs_c} \right) =$$

$$c_1 \left(\frac{c_1a_1 + c_1a_2 + c_2a_2 - c_1a_1}{cs_a} - \frac{b_1^2}{bs_c} \right) \Delta = c_1 \left(\frac{a_2}{s_a} - \frac{b_1^2}{bs_c} \right) \Delta =$$

$$= \frac{c_1(a_2bs_c - b_1^2s_a)}{bs_cs_a}\Delta.$$

Obdobným způsobem dostaneme pomocí trojúhelníků BA_1A a CB_1B hodnoty pro \mathcal{P}_B , Q_B a Q_C .

Tím je důkaz hlavního tvrzení dokončen.

Alespoň slůvkem poznamenejme, že jsme podali důkaz pro případ, kdy bod C_1 leží mezi vrcholem A a průsečíkem strany AB a přímkou určené body C a S_{AB} . Ihned vidíme, že případ, kdy C_1 leží mezi tímto průsečíkem a vrcholem B , řešíme zcela obdobným způsobem.

Hraniční případ, kdy C_1 s průsečíkem strany AB a přímkou určené body C a S_{AB} , tj. případ, kdy body S_{AB} , S_{BC} a S_{CA} splývají, je popsán větou Cèvovou. Pripomeňme ji v následující formě.

Tvrzení (věta Cèvova). *Kterékoliv dva z bodů S_{AB} , S_{BC} , S_{CA} splývají (což je ekvivalentní s tím, že všechny tři body splývají) právě tehdy, když*

$$a_1b_1c_1 = a_2b_2c_2.$$

Vezměme libovolné dva body, třeba $S_{AB} = S_{CA}$. To znamená totéž, co

$$\frac{|S_{ABA_1}|}{|S_{ABA}|} = \frac{a_1b_1}{ab_2} = \frac{|S_{CAA_1}|}{|S_{CAA}|} = \frac{c_2a_2}{c_1a}.$$

A to znamená totéž, co $a_1b_1c_1 = a_2b_2c_2$.

Věta Cèvova je bezprostředním důsledkem věty Routhovy. Tu zde formulujeme ve tvaru vzorce (2) a ukážeme, že (2) je pouhým přepisem hlavního tvrzení.

Tvrzení (Věta Routhova).

$$\frac{\mathcal{S}}{\Delta} = \frac{(a_1b_1c_1 - a_2b_2c_2)^2}{s_a s_b s_c}. \tag{2}$$

Zde je přepis Hlavního tvrzení:

Poměr obsahů trojúhelníků $\mathcal{S} = S_{AB}S_{BC}S_{CA}$ a $\Delta = ABC$ se rovná

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{S}}{\Delta} &= 1 - \left(\frac{c_1^2 a_1}{c s_a} + \frac{a_1^2 b_1}{a s_b} + \frac{b_1^2 c_1}{b s_c} \right) - \\ &- \left(\frac{c_1(a_2 b s_c - b_1^2 s_a)}{b s_c s_a} + \frac{a_1(b_2 c s_a - c_1^2 s_b)}{c s_a s_b} + \frac{b_1(c_2 a s_b - a_1^2 s_c)}{a s_b s_c} \right) = \\ &= 1 - \left(\frac{c_1 a_2}{s_a} + \frac{a_1 b_2}{s_b} + \frac{b_1 c_2}{s_c} \right) = \\ &= \frac{s_a s_b s_c - c_1 a_2 s_b s_c - a_1 b_2 s_a s_c - b_1 c_2 s_a s_b}{s_a s_b s_c}. \end{aligned}$$

Dosadíme-li za s_a , s_b a s_c výrazy

$$\begin{aligned} s_a &= c_1 a_1 + c_1 a_2 + c_2 a_2, \\ s_b &= a_1 b_1 + a_1 b_2 + a_2 b_2, \\ s_c &= b_1 c_1 + b_1 c_2 + b_2 c_2, \end{aligned}$$

a vyjádříme a porovnáme v čitateli všech $27+3\cdot 9 = 54$ součinů, obdržíme rovnost

$$s_a s_b s_c - c_1 a_2 s_b s_c - a_1 b_2 s_a s_c - b_1 c_2 s_a s_b = (a_1 b_1 c_1 - a_2 b_2 c_2)^2,$$

čímž je rovnost (2) dokázána.

Poznámka. V literatuře (viz např. [4]) nalezneme Routhovu větu ve tvaru

$$\frac{S}{\Delta} = \frac{\left(\frac{a_2 b_2 c_2}{a_1 b_1 c_1} - 1\right)}{\left(\frac{a_2 b_2}{a_1 b_1} + \frac{b_2}{b_1} + 1\right) \left(\frac{b_2 c_2}{b_1 c_1} + \frac{c_2}{c_1} + 1\right) \left(\frac{c_2 a_2}{c_1 a_1} + \frac{a_2}{a_1} + 1\right)}.$$

Přesvědčte se, že se jedná o stejnou rovnost jako (2).

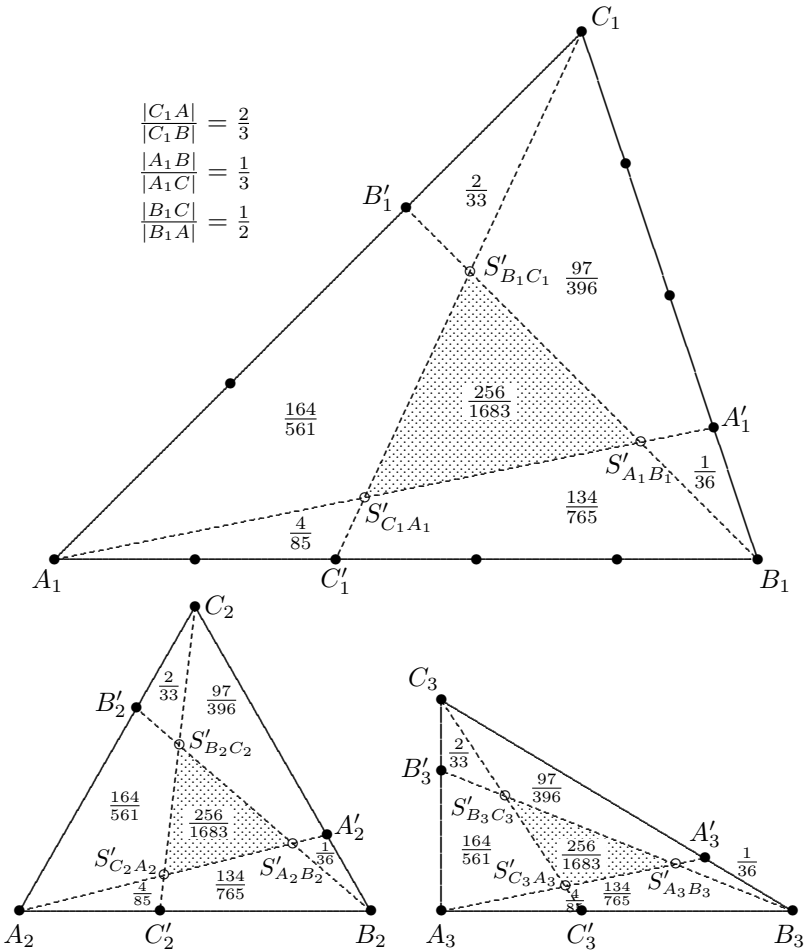
Nyní přikročme k samotnému poslání tohoto článku. Po nabytí zkušeností z předchozích úvah a výpočtů, je nyní snadné porozumět jádru našich tvrzení a shledat, že není podstatné, aby čísla $a, a_1, a_2, b, b_1, b_2, c, c_1, c_2$, která se v našich tvrzeních a výpočtech objevují, představovala skutečné rozměry stran trojúhelníků a jejich úseků. Podstatné jsou poměry těchto veličin, tj. čísla $\frac{a_1}{a}, \frac{a_1}{a_2}, \frac{b_1}{b}, \frac{b_1}{b_2}, \frac{c_1}{c}, \frac{c_1}{c_2}$ a od nich odvozené veličiny. Tak např. číslo a je součtem dvou hodnot (jmenovatele a čitatele) vyjadřujících poměr $\frac{a_1}{a_2}$. V tomto smyslu budeme formulovat naše tvrzení ve zbytku článku.

Výrazným důsledkem je skutečnost, že poměry obsahů částí trojúhelníku k obsahu trojúhelníku ABC vyznačené na obrázku 1 jsou nezávislé na volbě trojúhelníka. Závísí pouze na poměrech, v nichž jsou jeho strany rozděleny.

Poměry obsahů jednotlivých částí trojúhelníku k obsahu celého trojúhelníku na obr. 1 odpovídají volbě $\frac{a_1}{a_2} = \frac{4}{3}, \frac{b_1}{b_2} = \frac{1}{2}$ a $\frac{c_1}{c_2} = \frac{3}{5}$. Zkontrolujte hodnoty v obr. 1 užitím hlavního tvrzení.

Následující obr. 4 výrazně znázorňuje skutečnost, že tyto poměry obsahů nezávisí na volbě trojúhelníků.

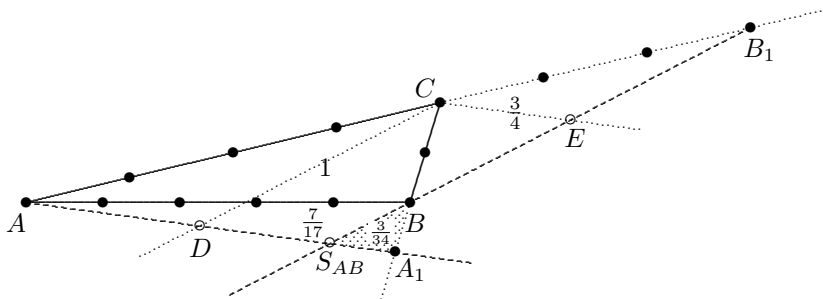
Důležitá je též poznámka, že čísla figurující v našich tvrzeních nemusí být celá čísla. Tak např. všechna naše tvrzení můžeme užít pro trojúhelník, jehož strany o délce $\sqrt{2}, \sqrt{3}$ a 2 jsou rozděleny na úseky 1 a $\sqrt{2}-1, \frac{\sqrt{3}-1}{2}$ a $\frac{\sqrt{3}+1}{2}, \sqrt{3}$ a $2-\sqrt{3}$. Ty mohou být v našich výpočtech reprezentovány čísly $a_1 = 1 + \sqrt{2}, a_2 = 1, a = 2 + \sqrt{2}, b_1 = 2 - \sqrt{3}, b_2 = 1, b = 3 - \sqrt{3}, c_1 = 3 + 2\sqrt{3}, c_2 = 1, c = 4 + 2\sqrt{3}$.



Obr. 4: Podstatná role poměrů vzdáleností

V závěrečné poznámce zobecníme předchozí výsledky na případ, kdy body A_1, B_1, C_1 nemusí ležet na stranách trojúhelníku ABC . Obr. 5 znázorňuje situaci, kdy bod A_1 leží na prodloužené straně BC a bod B_1 na prodloužené straně CA . Přitom

$$\frac{|A_1B_1|}{|A_1C_1|} = \frac{1}{3} \quad \text{a} \quad \frac{|B_1C_1|}{|B_1A_1|} = \frac{3}{7}. \quad (3)$$



Obr. 5: Obecná poloha A_1 a B_1

Ukážeme, že poměry délek úseček, které jsou definovány průnikem S_{AB} přímkou určených body A, A_1 a B, B_1 , stejně jako obsahy vzniklých trojúhelníků, lze určit stejným způsobem, jaký jsme užívali dosud. Podobnost trojúhelníků $\triangle S_{AB}A_1B \sim \triangle ECB$ a $\triangle S_{AB}AB_1 \sim \triangle ECB_1$ implikuje rovnost poměrů

$$\frac{|S_{ABA_1}|}{|BA_1|} = \frac{|EC|}{|BC|} \quad \text{a} \quad \frac{|S_{ABA}|}{|B_1A|} = \frac{|EC|}{|B_1C|},$$

odkud plyne

$$\frac{|S_{ABA_1}|}{|S_{ABA}|} = \frac{|BA_1||B_1C|}{|BC||B_1A|} = \frac{3}{14}. \quad (4)$$

Podobnost trojúhelníků $\triangle B_1S_{AB}A \sim \triangle CDA$ a $\triangle BS_{AB}A_1 \sim \triangle CDA_1$ zaručuje rovnost

$$\frac{|S_{AB}B_1|}{|S_{ABB}|} = \frac{|CA_1||B_1A|}{|BA_1||CA|} = \frac{21}{4}. \quad (5)$$

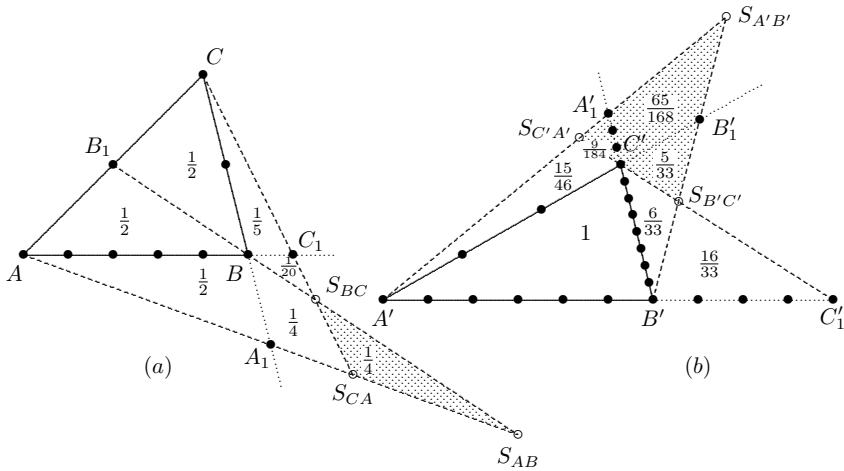
K určení poměrů obsahů \mathcal{P} trojúhelníků $AS_{AB}B$, BB_1C a A_1BS_{AB} využijeme rovnosti (3), (4) a (5). Označíme-li obsah $\mathcal{P}(ABC)$ trojúhelníku ABC pomocí Δ , dostáváme postupně

$$\mathcal{P}(AA_1B) = \frac{1}{2}\Delta, \quad \mathcal{P}(AA_1C) = \frac{3}{2}\Delta, \quad \mathcal{P}(ABB_1) = \frac{7}{4}\Delta,$$

$$\mathcal{P}(AS_{AB}B) = \frac{4}{17}\mathcal{P}(ABB_1) = \frac{7}{17}\Delta,$$

a tedy

$$\mathcal{P}(A_1BS_{AB}) = \left(\frac{1}{2} - \frac{7}{17}\right)\Delta = \frac{3}{34}\Delta.$$



Obr. 6 (a) (b): Obecná poloha bodů A_1, B_1, C_1 a A'_1, B'_1, C'_1

Obr. 6 ilustruje dvě typické situace. Trojúhelník (a) popisuje případ, kdy body A_1 a C_1 jsou zvoleny na prodloužených stranách BC a AB v poměru

$$\frac{|A_1B|}{|A_1C|} = \frac{1}{3}, \quad \frac{|B_1C|}{|B_1A|} = 1 \quad \text{a} \quad \frac{|C_1A|}{|C_1B|} = 6.$$

V tomto případě je celkem snadné určit potřebné poměry úseček jako

$$\frac{|S_{ABA_1}|}{|S_{ABA}|} = \frac{1}{2}, \quad \frac{|S_{ACA_1}|}{|S_{ACA}|} = \frac{2}{5}, \quad \frac{|S_{BCB_1}|}{|S_{BCB}|} = 3$$

k určení poměrné velikosti obsahů, jak popisuje první obrázek. Zde je

$$\mathcal{P}(S_{AB}S_{BC}S_{CA}) = \frac{1}{4}\mathcal{P}(ABC).$$

Poněkud náročnější je výpočet těchto poměrů v případě trojúhelníku (b). Zde dostáváme např.

$$\frac{|S_{A'B'A'_1}|}{|S_{A'B'A'}|} = \frac{11}{32}, \quad \frac{|S_{C'A'C'_1}|}{|S_{C'A'C'}|} = \frac{55}{9}, \quad \frac{|S_{B'C'B'_1}|}{|S_{B'C'B'}|} = \frac{5}{6}.$$

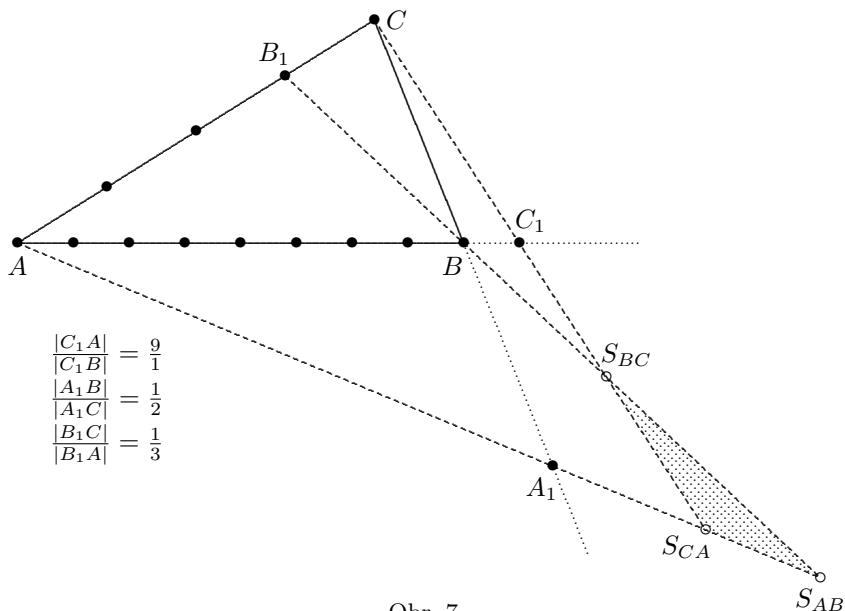
Poměry obsahů šesti trojúhelníků a jednoho čtyřúhelníku jsou vyznačeny v obrázku. Obsah trojúhelníku $S_{A'B'}S_{B'C'}S_{C'A'}$ zde splňuje

$$\mathcal{P}(S_{A'B'}S_{B'C'}S_{C'A'}) = \frac{6241}{10626}\mathcal{P}(A'B'C').$$

Článek zakončíme následující úlohou: Těchto sedm čísel

$$\frac{3}{40}, \frac{1}{8}, \frac{9}{70}, \frac{1}{4}, \frac{13}{35}, \frac{3}{4}, 1$$

reprezentujících poměry obsahů k obsahu trojúhelníku ABC přiřaďte k sedmi oblastem obr. 7.



Literatura

- [1] Dlab, V.: Důkladné porozumění elementární matematice. *Učitel matematiky*, 71 (2009), s. 169–182.
- [2] Dlab, V.: III. Aplikace: Věta Cèvova, věta Menelaova a věta Routhova. *Rozhledy matematicko-fyzikální*, 91 (2016), s. 1–13.
- [3] Dlab, V., Bečvář, J.: *Od aritmetiky k abstraktní algebře*. Serifa, Praha, 2016.
- [4] https://en.wikipedia.org/wiki/Routh%27s_theorem
- [5] <https://www.jstor.org/stable/3620856?refreqid=excelsior%3A84a74d8f898362921b23a805ff468856>
- [6] <https://www.geogebra.org/m/ejck6sb9>

Simpsonův paradox

Jiří Dvořák, Marie Snětinová, MFF UK, Praha

Abstrakt. V tomto příspěvku představíme neintuitivní a na pohled paradoxní situaci, kdy například hráč může být v každém kole horší než jeho soupeř, ale na konci zápasu je stejně prohlášen vítězem. Ukazujeme, že jde čistě o volbu úhlu pohledu: má zvítězit ten, kdo je v každém kole lepší, nebo ten, kdo je celkově lepší? Tato volba může mít v praxi závažné důsledky a při formulaci závěrů je vždy žádoucí být pečlivý a opatrný. Co když změna úhlu pohledu otočí závěry naruby?

Zkouška je od slova „zkusit“

Představme si dva hypotetické kamarády, Aloise a Bedřicha, spolužáky v prvním ročníku vysoké školy. V zimním semestru Alois podstoupil osm zkoušek, ve dvou z nich uspěl (25% úspěšnost). Bedřich v zimním semestru podstoupil pět zkoušek, uspěl jen u jedné (20% úspěšnost). Alois si nemohl odpustit rýpnutí: „Podívej, Bedřichu, jsem lepší student!“

S odřenýma ušima oba studenti postoupili do letního semestru a v letním zkouškovém období Alois podstoupil dvě zkoušky, v obou uspěl (100% úspěšnost). Bedřich podstoupil pět zkoušek, ve čtyřech uspěl (80% úspěšnost). Po poslední zkoušce to Alois zhodnotil jednoznačně: „Vidíš, pořád jsem lepší.“ Bedřich se ale nedal: „Nene, podívej; každý jsme měli dohromady deset zkoušek, tys uspěl ve čtyřech, já v pěti. Já byl lepší!“

Ponechme stranou otázku, který student byl „ve skutečnosti“ lepší. Oba předkládají korektní argumenty, oba svá tvrzení opírají o pravdivá data, viz tabulku 1.

	Zimní semestr		Letní semestr		Celkem	
Alois	2/8	25 %	2/2	100 %	4/10	40 %
Bedřich	1/5	20 %	4/5	80 %	5/10	50 %

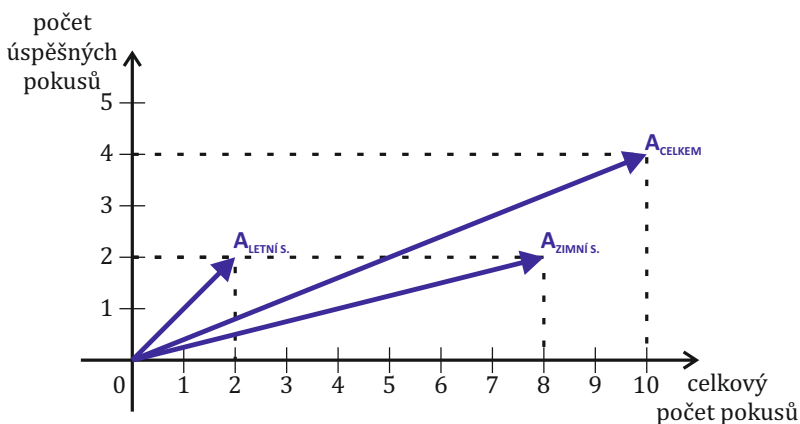
Tabulka 1: Poměr úspěšně složených zkoušek ku počtu všech skládaných zkoušek v jednotlivých semestrech i celkově

Jak je možné, že se jejich závěry tak liší? Procentuálně vzato, v každém ze semestrů byl úspěšnější Alois (25 % vs. 20 % v zimním semestru, 100 % vs. 80 % v letním semestru), celkově za akademický rok byl úspěšnější Bedřich (50 % vs. 40 %). To ale (možná překvapivě) není v rozporu. Pro svou neintuitivnost je tento fenomén označován jako „Simpsonův paradox“.

Užitečný způsob, jak se v daném problému vyznat, poskytuje vektorová reprezentace. Aloisův zimní semestr můžeme znázornit pomocí vektoru (8,2), neboli dva úspěchy z osmi pokusů, viz obr. 1. Sklon tohoto vektoru potom určuje Aloisovu úspěšnost: $2/8 = 0,25$. Aloisův letní semestr pak znázorníme pomocí vektoru (2,2). Aloisovo snažení za oba semestry se pak dá popsat součtem těchto dvou vektorů:

$$(8, 2) + (2, 2) = (8 + 2, 2 + 2) = (10, 4),$$

neboli čtyři úspěchy z deseti zkoušek, viz obr. 1.



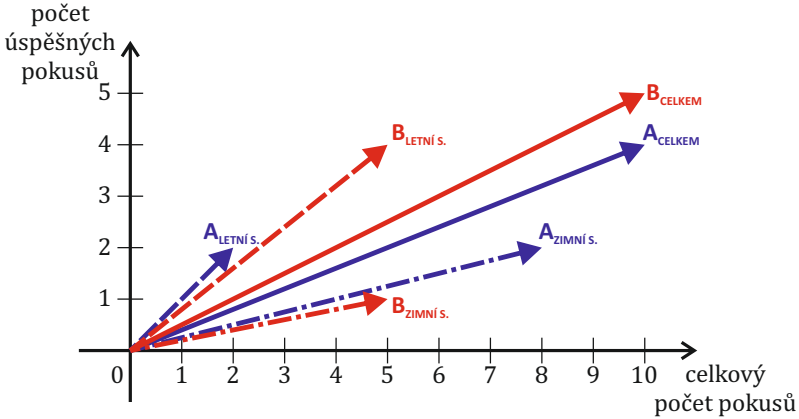
Obr. 1: Aloisova úspěšnost u zkoušek

Podobně pro Bedřichovy zkoušky použijeme vektory (5,1) a (5,4). Za oba semestry dohromady potom:

$$(5, 1) + (5, 4) = (5 + 5, 1 + 4) = (10, 5).$$

Obr. 2 ukazuje, že v každém semestru zvlášť je Alois úspěšnější (jeho dílčí vektory mají větší sklon), ale za oba semestry dohromady je Bedřich

úspěšnější (součet Bedřichových vektorů má větší sklon než součet Aloisových vektorů). To přesně odpovídá „paradoxnímu“ pozorování v tabulce výše, přestože o paradox ve skutečnosti nejde. Jednoduše řečeno, některé čtveřice vektorů tuto zajímavou vlastnost mají, přestože je poměrně neobvyklá.



Obr. 2: Porovnání úspěšnosti Bedřicha a Aloise

Poznamenejme, že taková paradoxní situace by nenastala, kdyby počty zkoušek v jednotlivých semestrech byly vyvážené, například kdyby každý ze studentů podstoupil v každém semestru pět zkoušek. Řekněme, že Alois uspěl v zimním semestru u a_1 z těchto pěti zkoušek, v letním semestru u a_2 zkoušek, a podobně Bedřich uspěl u b_1 , respektive b_2 zkoušek. Pokud byl Alois v každém semestru úspěšnější, znamená to $a_1 > b_1, a_2 > b_2$. Celkově pak Alois uspěl u $a_1 + a_2$ z 10 zkoušek, Bedřich u $b_1 + b_2$ z 10 zkoušek. Z předchozího plyne, že $a_1 + a_2 > b_1 + b_2$ a Alois by tak byl celkově úspěšnější i při pohledu na celý akademický rok.

Uvedený příklad Simpsonova paradoxu je převzatý (a doplněný) ze stránky [1], respektive z knížky [2].

Tady jde o zdraví...

Ze stránky [1] přebíráme i následující příklad, tentokrát ze skutečné lékařské praxe, kde nesprávně vyvozené závěry mohou mít velmi závažné následky. Poznamenejme, že anglická stránka [3] uvádí k tomuto příkladu více podrobností.

V experimentální studii podstoupilo 350 pacientů operaci ledvinových kamenů klasickým postupem a 350 pacientů speciálním postupem (tzv. perkutánní nefrolitotomie). Zákrok byl hodnocen jako úspěšný, pokud po třech měsících po zákroku nebyly u daného pacienta pozorovány ledvinové kameny. V tabulce 2 vidíme, že v kategorii pacientů s malými kameny (do velikosti 2 cm) byl úspěšnější klasický operační postup, stejně jako v kategorii pacientů s velkými kameny (velikost nad 2 cm).

	Malé kameny		Velké kameny		Celkem	
Klasický postup	$\frac{81}{87}$	93 %	$\frac{192}{263}$	73 %	$\frac{273}{350}$	78 %
Speciální postup	$\frac{234}{270}$	87 %	$\frac{55}{80}$	69 %	$\frac{289}{350}$	83 %

Tabulka 2: Poměr úspěšných operací ku počtu provedených operací v jednotlivých kategoriích (malé vs. velké kameny) i celkově

Když zapomeneme na velikost kamenů a podíváme se na celkové výsledky, vychází jako úspěšnější naopak nový, speciální postup. Zdálo by se žádoucí tento typ zákroku nasadit do rutinní praxe, protože přece pacientům pomáhá s větší pravděpodobností než klasický postup. To by ale byla chyba a zbytečný hazard se zdravím pacientů! Když totiž přichází pacient do nemocnice, má buď malé kameny (a výhodnější je pro něj klasický postup), nebo velké kameny (a také je pro něj výhodnější klasický postup). Pro žádného jednotlivého pacienta není nový, speciální postup výhodnější.

Jádro problému je zde v nevyváženém rozdělení pacientů mezi oba operační postupy, s ohledem na velikost kamenů, kterými trpí. Speciální postup byl ve studii použitý zejména u pacientů s malými kameny, kde jsou ale oba operační postupy velmi úspěšné. Celková úspěšnost speciálního postupu je tedy nejvíce ovlivněna jeho výsledky na skupině malých kamenů. Naopak klasický postup byl použitý zejména u pacientů s velkými kameny, kde jsou oba postupy méně úspěšné. Celková úspěšnost klasického postupu je tedy nejvíce ovlivněna jeho výsledky na skupině velkých kamenů. Kdyby byli pacienti s velkými/malými kameny rozdělení mezi obě metody spravedlivě, k paradoxním závěrům bychom nemohli dojít, jak už jsme diskutovali výše. Studie tedy nebyla dobře navržena a teprve během jejího vyhodnocování se zjistilo, že velikost kamenů má zásadní roli pro úspěch zákroku, dokonce větší, než typ použitého zákroku.

Zkouška dospělosti

Pro zajímavost doplníme ještě reálný příklad z českého prostředí. Tabulka 3 ukazuje úspěšnost studentů u státní maturity z matematiky (jarní termín zkoušky, řádný termín) v letech 2015 a 2016. Jde o podíly studentů, kteří zkoušku úspěšně složili. Studenti jsou rozděleni do dvou skupin: gymnázia a všechny ostatní typy středních škol. Data je možné ověřit na stránce [4].

V tabulce si můžeme všimnout, že celková úspěšnost se v roce 2016 mírně zvýšila oproti roku 2015. To Cermat interpretoval jako mírné zlepšení maturantů v matematice. Na druhou stranu, podíly úspěšných studentů mezi roky 2015 a 2016 v každé ze skupin „gymnázia“ a „ostatní“ mírně klesly. Tento úhel pohledu zase podávala některá média jako mírné zhoršení maturantů v matematice.

	Gymnázia		Ostatní		Celkem	
2015	$\frac{6\,846}{7\,095}$	96,5 %	$\frac{7\,843}{12\,209}$	64,2 %	$\frac{14\,689}{19\,304}$	76,1 %
2016	$\frac{6\,662}{6\,916}$	96,3 %	$\frac{6\,386}{10\,072}$	63,4 %	$\frac{13\,048}{16\,988}$	76,8 %

Tabulka 3: Poměr počtu úspěšných maturantů ku počtu všech maturantů z matematiky v jednotlivých skupinách podle typu školy (gymnázia vs. ostatní) i celkově

V tomto případě je paradoxní situace způsobena tím, že ve skupině „ostatní“ klesl mezi roky 2015 a 2016 počet maturantů podstupujících zkoušku z matematiky (ať už úspěšně nebo neúspěšně) mnohem výrazněji než ve skupině „gymnázia“. Přestože v každé ze skupin došlo k mírnému snížení úspěšnosti, v celkovém podílu za daný rok hrála kategorie „ostatní“ v roce 2016 menší roli (10 072 z celkových 16 988 studentů, tedy cca 59 %) než v roce 2015 (12 209 z celkových 19 304 studentů, tedy cca 63 %). v roce 2016 je tedy větší vliv skupiny „gymnázia“, která celkovou úspěšnost vytahuje nahoru oproti roku 2015.

Když paradox není paradox

Na závěr zdůrazněme, že v tomto příspěvku jsme se vás snažili přesvědčit, že v uvedených příkladech vlastně o žádný paradox nejde. Tradiční označení „paradox“ se odkazuje k neintuitivní možnosti dvojí, protikladné interpretace, která závisí na úhlu pohledu. Pouze kontext da-

ného problému určuje, který úhel pohledu a potažmo který způsob interpretace je „správný“ ve smyslu užitečný pro zodpovězení položených otázek. V příkladu z lékařského prostředí jsme viděli, že volba vhodného či nevhodného úhlu pohledu může mít závažné důsledky. Dobrou zprávou je, že výskyt dat s touto vlastností je poměrně neobvyklý a patří zejména do oblasti statistických anekdot a folkloru. Přesto bychom měli být pokaždé při interpretaci dat opatrní a přemýšlet, zda při změně úhlu pohledu neumožňují jinou interpretaci.

Literatura

- [1] https://cs.wikipedia.org/wiki/Simpsonův_paradox Dostupné online, citováno 30. 9. 2021.
- [2] Anděl, J. *Statistické úlohy, historky a paradoxy*. Matfyzpress, Praha, 2018.
- [3] https://en.wikipedia.org/wiki/Simpson%27s_paradox Dostupné online, citováno 30. 9. 2021.
- [4] <https://vysledky.ceremat.cz/data/Default.aspx> Dostupné online, citováno 30. 9. 2021.

* * * * *

NASYCENÉ PÁRY

*Když teplota klesne pod bod
rosný,
vodní páry pocítí hlad
mocný.
Na kondenzačních jádrech se
zachytí
a za chvíli úplně se
nasytí.
Já bych ale nebyl
příliš rád,
kdybych se měl tím způsobem
stravovat!*

Emil Calda: Úvod do obecné teorie prostoru, Karolinum, Praha, 2003

Laserovým nanostrukturováním k funkcionalizaci povrchů

Petr Hauschwitz, Fyzikální ústav AV ČR

1. Kvantový generátor koherentního záření

Objev laseru byl velkou událostí a navždy proměnil celou řadu průmyslových i vědních oborů. *Laser* neboli *kvantový generátor koherentního záření* je založen na jevu, kterému říkáme stimulovaná emise záření. To nám ostatně napovídá už i jeho anglický akronym (LASER = Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation, tedy zesílení světla stimulovanou emisí záření). Tento jev, popsáný poprvé samotným Albertem Einsteinem, popisuje chování vybuzeného (tzv. excitovaného) systému a vstupního fotonu. Systém (například atom a jeho energetické hladiny) můžeme vybudit ze základního do excitovaného stavu dodáním energie, například pomocí srážek s jinými atomy nebo ozářením fotonu. Tímto způsobem se elektron v základním stavu může přenést na vyšší energetickou hladinu. Tam ale zůstává jen krátkou dobu a poté samovolně přechází zpět do základního stavu. Při zpětném přechodu musí elektron přebytečnou energii vyzářit a to například ve formě fotonu. Takový foton má zcela náhodný směr, fázi i polarizaci – jedná se o tzv. *spontánní emisi*. Pokud ale do excitované soustavy přijde další foton, s energií rovnou rozdílu energetických hladin, pak dojde k *emisi stimulované* – excitovaná soustava vyzáří při přechodu do základního stavu foton o stejné energii, polarizaci i fázi, jako má vstupní foton. Tímto způsobem může docházet ke kopírování vstupních fotonů a tím i ke vzniku laserového záření.

2. Laser jako přesný nástroj

Jako první objevil laser v roce 1960 americký fyzik a inženýr *Theodor Maiman* a již rok poté byl laser využit při operaci duhovky nebo kožních nádorů. Dnes již uplynulo od objevu více než 60 let a laserové systémy běžně využíváme každý den, ať už se jedná o čtečky čárových kódů u pokladen v obchodě, laserové tiskárny nebo například fotoaparáty moderních smartphonů (laserový autofocus). Stejně tak je tomu v průmyslu, zdravotnictví, potravinářství nebo například v armádě. To

vše díky výhodám, které laser poskytuje oproti konvenčním metodám. Těmito výhodami jsou zejména: bezkontaktní přístup, vysoká přesnost, kvalita a rychlost opracování.

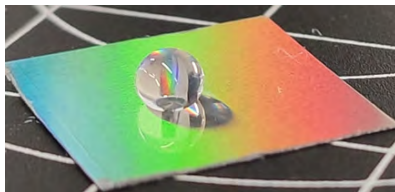
Laserový systém má celou řadu parametrů, které lze volit v závislosti na cílové aplikaci. Vedle výkonu patří mezi základní parametry vlnová délka („barva“ laseru), která může napovědět, jak dobře se bude záření daného laseru absorbovat, rozptylovat nebo odrážet od povrchu materiálu. Řada laserů navíc funguje v tzv. *pulzním režimu*. Laser tedy nesvítí kontinuálně, ale záření z laseru je přerušované. V takovém případě sledujeme parametry, jako je délka jednoho laserového pulzu, energie pulzu a opakovací frekvence – jak rychle dokáže laser s těmito parametry střílet.

Délky laserového pulzu se pohybují v neuvěřitelném rozmezí přesahujícím 15 řádů. Tedy zatímco pro aplikace, jako je laserové kalení, sváření a řezání, využíváme kontinuální laserové systémy až po systémy generující ms pulzy (10^{-3} s), pro aplikace, kde se chceme vyhnout velkému množství nataveného materiálu, např. pro řezání a vrtání extrémně malých otvorů ve zlomcích milimetru, se využívají kratší pulzy v oblasti nanosekund 10^{-9} s. Pokud laserové pulzy dále zkrátíme až na úroveň 10^{-12} s nebo 10^{-15} s hovoříme o tzv. *ultrakrátkých laserových pulzech*. V tomto případě se zásadně mění proces interakce laserového záření s materiálem – takto krátký laserový pulz dokáže materiál odpařit dříve, než dojde k přenosu tepla z laserového záření do okolního materiálu. Teoreticky se tedy můžeme vyhnout jakémukoli tavení materiálu a dosáhnout tak vysokých přesností s detaily pod úrovní jednoho mikrometru (10^{-6} m).

3. Funkcionalizace povrchů ultrakrátkými laserovými systémy

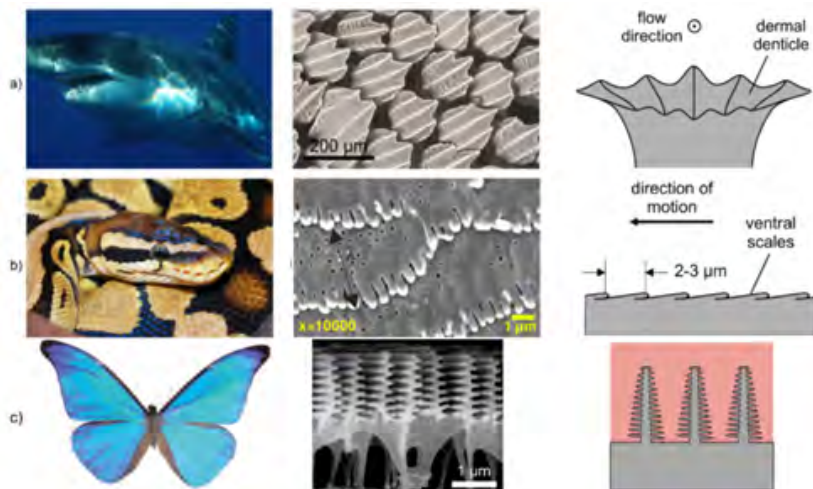
S takto přesným nástrojem je pak možné na povrchu materiálu vytvářet speciální mikro- a nanostruktury, které dokáží změnit makroskopické vlastnosti běžných materiálů. Tedy na povrchu materiálů, jako je například sklo, hliník nebo nerezová ocel, je laserem možné vytvořit strukturu, která změní povrchové vlastnosti – např. vizuální vlastnosti (matný/lesklý povrch), biokompatibilitu povrchu nebo jeho antibakteriální účinky.

Takových funkčních povrchů je ale celá řada s širokým uplatněním ve vědě i průmyslu, ať už se jedná o letecký průmysl (ledofobní povrchy, povrchy snižující odpor vzduchu, hydrofobní povrchy), automobilový průmysl (samočistící povrchy, korozivzdorné povrchy, redukce tření), zdravotnictví (antibakteriální, biokompatibilní povrchy) a mnoho dalších.



Obr. 1: Fotografie antibakteriální a superhydrofobní struktury na slitině NiTi sloužící k výrobě stentů

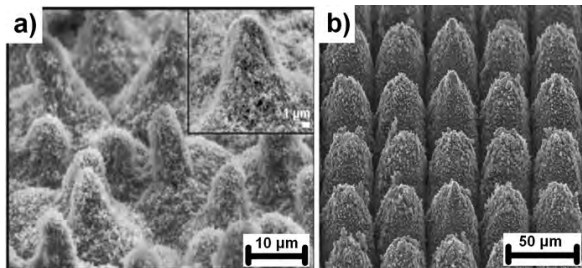
Inspiraci pro výrobu funkčních povrchů nacházíme často v přírodě. Například povrch žraločí kůže je pokryt antibakteriální mikrostrukturou snižující tření ve vodě, nohy gekona pak přilnavou mikrostrukturou umožňující gekonovi šplhat po svislé skleněné stěně nebo kůže hada mikrovýstupky snižujícími tření. Některé druhy motýlů pak mají křídla pokryta speciálními mikrostrukturami, na kterých dochází k difrakci a interferenci. Nám se pak jeví jako barevná, přestože neobsahují žádný barevný pigment.



Obr. 2: Funkční mikrostruktury vyskytující se v přírodě [1]: (a) antibakteriální kůže žraloka snižující tření ve vodě; (b) kůže hada snižující tření při pohybu na souši; (c) struktura motýlích křídel s difrakční strukturou

Známým příkladem je také superhydrofobní (vodu odpuzující) a zároveň samočistící povrchová struktura lotosového listu kombinující mikrovýstupky o velikosti přibližně $10\ \mu\text{m}$ a nanostrukturu, která tyto

výstupky pokrývá (obr. 3a). Pomocí laseru pak můžeme tento povrch zreplikovat, případně i vylepšit. Na obr. 3b je zachycena replika superhydrofobní struktury lotosového listu na letecké slitině hliníku.



Obr. 3: Obrázky z elektronového mikroskopu porovnávající strukturu lotosového listu (a) s laserem vytvořenou strukturou na slitině leteckého hliníku (b) [2, 3]

Pokud na takový povrch dopadne vodní kapka, ihned z něj steče pryč a přitom s sebou může odnést i povrchové nečistoty – samočisticí efekt. K tomu dochází v důsledku uvěznění vzduchu mezi těmito povrchovými strukturami. Na superhydrofobním povrchu voda pouze klouže po vrcholcích mikrovýstupků a na vzduchovém polštáři mezi nimi. Nedočká se smáčet celý povrch. S vyšší kinetickou energií se kapka z takového povrchu rovnou odrazí pryč, jak je zachyceno v sekvenci fotografií na obr. 4. Toho se dá využít například u ledofobních povrchů – pokud na povrchu nebude voda, nemůže ani zmrznout.



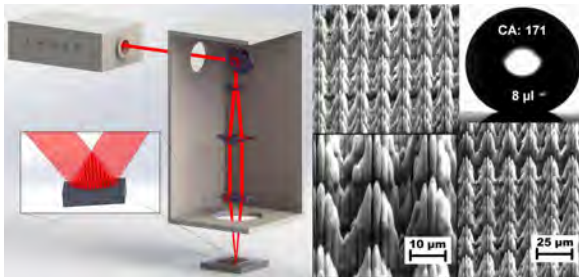
Obr. 4: Kapka po dopadu na superhydrofobní povrch

4. Aplikace v reálném světě

Pro aplikace v reálném světě a průmyslu potřebujeme tyto povrchy vyrábět rychle a efektivně. Současné metody laserového opracování využívají velmi často jeden laserový svazek, který se po povrchu pohybuje pomocí motorizovaných zrcátek nebo posuvných stolečků. Rychlosti opracování pro takto jemný detail v řádu jednotek mikrometrů se pohybují velmi často pod hodnotou $1 \text{ cm}^2/\text{min}$. Opracování 1 m^2 by nám

tedy zabralo necelých 7 dní. Je tedy jasné, že opracování velkých ploch, například ledofobní funkcionalizace křídla letadla, by bylo velmi pomalé a drahé.

Tomu, jak takové procesy urychlit, se věnují v Dolních Břežanech v laserovém centru HiLASE. Díky vysokému výkonu a pulzní energii, kterou generují zde postavené lasery, je možné laserový svazek rozdělit na stovky až tisíce subsvazků a všemi najednou pak daný materiál opracovat. Toho lze docílit pomocí difrakční optiky, interferencí několika svazků nebo holografickým obráběním. Ilustrace takového uspořádání je zobrazena na obr. 5, kde je vstupní svazek rozdělen na 2 subsvazky, které pak recombínují na vzorečku za účelem vytvoření interferenčního obrazce ve formě periodicky rozmístěných linek (interferenčních maxim). Těch může na vzorečku vzniknout i několik stovek a se všemi najednou lze pak obrábět. Pravá část obr. 5 pak ukazuje výslednou superhydrofobní strukturu na fotografii z elektronového mikroskopu.



Obr. 5: Ilustrace metody dvousvazkového interferenčního opracování (vlevo) a výsledné superhydrofobní mikrostruktury (vpravo)

Pomocí těchto multisvazkových metod lze dosáhnout produktivitv blízcích se $1 \text{ m}^2/\text{min}$. S tím, jak dále poroste dostupný výkon ultrakrátkých laserových systémů, bude výroba stále rychlejší, efektivnější, tím i levnější a dostupná pro stále širší spektrum běžných i průmyslových oblastí.

Literatura

- [1] Müller, F. A., Kunz, C., Gräf, S.: Bio-inspired functional surfaces based on laser-induced periodic surface structures. *Materials*, 9 (2016), č. 6, s. 476, <https://doi.org/10.3390/ma9060476>.

- [2] Fotakis, C., Barberoglou, M., Zorba, V. et al.: *Applications of ultrafast lasers in materials processing: fabrication on self-cleaning surfaces and scaffolds for tissue engineering*. In: 15th International School on Quantum Electronics: Laser Physics and Applications. International Society for Optics and Photonics, Vol. 7027 (2008), article id. 702702, s. 1–6.
- [3] Hauschwitz, P., Jagdheesh, R., Rostohar, D., Brajer, J. et al.: Nanostructure fabrication on the top of laser-made micropillars for enhancement of water repellence of aluminium alloy. *Materials Letters*, 256 (2019), <https://doi.org/10.1016/j.matlet.2019.126601>.
- [4] Hauschwitz, P., Jagdheesh, R., Alamri, S., Rostohar, D. et al.: Fabrication of functional superhydrophobic surfaces on carbon fibre reinforced plastics by IR and UV direct laser interference patterning. *Applied Surface Science*, 508 (2020), doi: 10.1016/j.apsusc.2019.144817.

Energie nabité desky – aplikace čtyřnásobného integrálu

Pavel Pokorný, VŠCHT Praha

1. Význam určitého integrálu

Určitý integrál je matematický nástroj vhodný k řešení úloh, které nelze spočítat „jednoduše najednou“. Díky integrálu dostaneme řešení jako součet velmi mnoha velmi malých příspěvků, z nichž každý se dá jednoduše spočítat (jak uvidíme dále např. jako obsah obdélníka). Pro konečný počet příspěvků dostaneme pouze přibližný výsledek, ale integrál jako limita pro nekonečně mnoho nekonečně malých příspěvků dá přesný výsledek. Např. obsah plochy mezi grafem kladné spojitě funkce $f(x)$ a osou x nad úsečkou od a do b se spočítá pro konstantní funkci, jejímž grafem je úsečka rovnoběžná s osou x , jako obsah obdélníku $S = f \cdot (b - a)$. Pro nekonstantní funkci si můžeme plochu pod grafem představit rozdělenou na velký počet tenkých svislých nudliček o výšce $f(x)$ a šířce dx . Pak obsah jedné nudličky je

$$dS = f(x) dx$$

a celkový obsah je

$$S = \int_a^b f(x) dx.$$

Podobně, práce W konstantní síly F po dráze x , kde síla má směr posunutí, je $W = Fx$. Pro nekonstantní sílu $F(x)$, která závisí na poloze x , uvažujeme nekonečně malé posunutí dx . Pak příspěvek k práci po tomto malém úseku dráhy je $dW = F(x) dx$ a celková práce je

$$W = \int_a^b F(x) dx.$$

Pro kladnou spojitou funkci dvou proměnných $z = f(x, y)$ je grafem plocha v prostoru xyz . Můžeme uvažovat objem V tělesa mezi grafem této funkce a rovinou xy nad obdélníkem $\langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle$. Pro konstantní funkci je tímto tělesem kvádr o rozměrech f , $b - a$ a $d - c$, má tedy objem $V = f \cdot (b - a) \cdot (d - c)$. Pro nekonstantní funkci $f(x, y)$ si můžeme představit toto těleso rozdělené na velký počet tenkých sloupků o výšce $f(x, y)$ s podstavou ve tvaru obdélníku o rozměrech dx a dy . Pak $f(x, y) dx dy$ je obsah boční stěny jednoho tenkého sloupku. Představíme-li si pro určitost uvažované těleso jako bochník chleba (s obdélníkovým půdorysem), je $\int_a^b f(x, y) dx$ obsah jedné strany krajíce chleba. Pak dy si můžeme představit jako tloušťku tohoto krajíce a $\int_a^b f(x, y) dx dy$ je objem jednoho krajíce. Dále

$$\int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy$$

je objem celého bochníku, tedy objem celého tělesa.

Podobně trojný integrál funkce tří proměnných bychom si mohli představit jako objem tělesa ve čtyřrozměrném prostoru. Pro lepší představu trojného integrálu si můžeme představit integrovanou funkci jako hustotu $\varrho(x, y, z)$ a uvažovat hmotnost m tělesa o této hustotě a objemu V . Pro konstantní hustotu je hmotnost $m = \varrho \cdot V$. Pro nekonstantní hustotu si těleso rozdělíme na velký počet malinkých kvádríků o rozměrech dx , dy a dz . Pak objem jednoho malého kvádríku je $dV = dx dy dz$ a hmotnost takového kvádríku je $dm = \varrho(x, y, z) dx dy dz$ a hmotnost celého tělesa je

$$m = \int_e^f \int_c^d \int_a^b \varrho(x, y, z) dx dy dz.$$

Mohlo by se zdát, že trojným integrálem funkce tří proměnných fyzikální aplikace končí. My si ale v tomto článku ukážeme aplikaci čtyřnásobného integrálu pro výpočet energie elektricky nabitě čtvercové desky.

2. Výpočet energie elektricky nabitě čtvercové desky

Uvažujme desku tvaru čtverce o straně L , která je elektricky nabitá celkovým nábojem Q tak, že má konstantní plošnou hustotu elektrického náboje

$$\sigma = \frac{Q}{L^2}.$$

(Deska je z nevodivého materiálu.)

Určíme nejprve energii soustavy dvou bodových nábojů o velikosti q_1 a q_2 . Podle Coulombova zákona se tyto dva náboje odpuzují silou

$$F = k \frac{q_1 q_2}{r^2},$$

zde

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon},$$

kde ε je permitivita prostředí a r je vzdálenost nábojů. Integrací této síly dostaneme práci, kterou musíme vykonat, abychom přemístili druhý náboj z nekonečna do vzdálenosti r od prvního náboje. To bude odpovídat energii soustavy dvou bodových nábojů

$$E = - \int_{\infty}^r F \, dx = - \int_{\infty}^r k \frac{q_1 q_2}{x^2} \, dx = k q_1 q_2 \left[\frac{1}{x} \right]_{\infty}^r = k \frac{q_1 q_2}{r}.$$

Znaménko minus souvisí s tím, že síla má opačný směr než posunutí náboje.

Nabitou desku si můžeme představit jako soustavu složenou z velkého počtu malých nabitých „kousků“. Energie nabitě desky bude součtem energií všech dvojic těchto malých nabitých kousků. Označme polohu jednoho kousku (X, Y) , jeho obsah $dX \, dY$, jeho náboj $\sigma \, dX \, dY$ a polohu druhého kousku (U, V) , jeho obsah $dU \, dV$ a náboj $\sigma \, dU \, dV$. Později přejdeme k bezrozměrným veličinám x, y, u, v . Vzdálenost těchto dvou kousků je

$$r = \sqrt{(X - U)^2 + (Y - V)^2}.$$

Energie desky bude

$$E = \int_0^L \int_0^L \int_0^L \int_0^L k \frac{\sigma \, dX \, dY \, \sigma \, dU \, dV}{r}.$$

Přejdeme od souřadnic X, Y, U, V v délkových jednotkách, např. v metrech, k bezrozměrným souřadnicím x, y, u, v vztahy $X = Lx, Y = Ly, U = Lu$ a $V = Lv$ a dostaneme

$$E = k \frac{Q^2}{L} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(x-u)^2 + (y-v)^2}} dx dy du dv.$$

Abychom spočítali tento čtyřnásobný integrál

$$I_4 = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(x-u)^2 + (y-v)^2}} dx dy du dv,$$

provedeme nejprve několik pomocných výpočtů.

3. Pomocné výpočty

Exponenciální funkci budeme z důvodu úspory místa psát na řádku, tedy $e^x = \exp x$. Použijeme komplexní exponenciálu

$$\exp(i\varphi) = \cos \varphi + i \sin \varphi,$$

kde i je imaginární jednotka (tedy $i^2 = -1$). Tento vztah lze dokázat použitím Taylorovy řady pro exponenciálu a pro funkce sinus a kosinus

$$\begin{aligned} \exp x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots, \\ \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \dots, \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2} + \dots \end{aligned}$$

Sečtením a odečtením vztahů

$$\exp(i\varphi) = \cos \varphi + i \sin \varphi$$

a

$$\exp(-i\varphi) = \cos \varphi - i \sin \varphi$$

dostaneme další vztahy pro funkce sinus a kosinus:

$$\cos x = \frac{\exp(ix) + \exp(-ix)}{2}, \quad \sin x = \frac{\exp(ix) - \exp(-ix)}{2i}.$$

Podobnými vztahy jsou definovány funkce hyperbolický sinus a hyperbolický kosinus

$$\sinh x = \frac{\exp(x) - \exp(-x)}{2}, \quad \cosh x = \frac{\exp(x) + \exp(-x)}{2}.$$

Z definice těchto funkcí přímo plynou vztahy

$$\begin{aligned} \sinh(ix) &= i \sin x, & \sin(ix) &= i \sinh x, \\ \cosh(ix) &= \cos x, & \cos(ix) &= \cosh x. \end{aligned}$$

Proč mají slovo hyperbolický ve svém názvu, je vidět z následující úvahy. Pro funkce sinus a kosinus platí

$$\sin^2 t + \cos^2 t = 1$$

a parametricky zadaná křivka

$$x = \cos t, \quad y = \sin t$$

je kružnice

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Podobně pro hyperbolický kosinus a hyperbolický sinus platí

$$\begin{aligned} \cosh^2 t - \sinh^2 t &= \frac{(\exp(t) + \exp(-t))^2}{4} - \frac{(\exp(t) - \exp(-t))^2}{4} = \\ &= \frac{\exp(2t) + 2 + \exp(-2t) - \exp(2t) + 2 - \exp(-2t)}{4} = 1. \end{aligned}$$

Proto parametricky zadaná křivka

$$x = \cosh t, \quad y = \sinh t$$

je hyperbola

$$x^2 - y^2 = 1.$$

Podobně jako pro derivace funkcí sinus a kosinus platí

$$(\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x,$$

lze téměř z paměti odvodit

$$(\sinh x)' = \cosh x, \quad (\cosh x)' = \sinh x,$$

tedy bez znaménka minus.

Funkce \sinh je rostoucí, a tedy prostá na \mathbb{R} , proto k ní existuje inverzní funkce $\operatorname{arcsinh}$. Lze pro ni najít vyjádření tak, že řešíme rovnici

$$y = \sinh x$$

pro neznámou x . Použijeme substituci $w = \exp(x) > 0$ a dostaneme

$$y = \frac{w - \frac{1}{w}}{2},$$

$$2yw = w^2 - 1,$$

$$w^2 - 2yw - 1 = 0.$$

To je kvadratická rovnice, která má dva kořeny. Nás zajímá ten kladný

$$w = y + \sqrt{y^2 + 1},$$

odkud dostáváme předpis pro inverzní funkci k hyperbolickému sinu, tj.

$$\operatorname{arcsinh} x = \log(x + \sqrt{x^2 + 1}),$$

kde \log je přirozený logaritmus.

Podobně pro hyperbolický kosinus (pokud se omezíme na nezáporné argumenty, aby byla funkce prostá) lze odvodit vztah pro inverzní funkci

$$\operatorname{arccosh} x = \log(x + \sqrt{x^2 - 1}).$$

Tyto funkce mají užitečné derivace

$$\begin{aligned} (\operatorname{arcsinh} x)' &= (\log(x + \sqrt{x^2 + 1}))' = \\ &= \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{\frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{\sqrt{x^2 + 1}}}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}. \end{aligned}$$

Proto

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} dx = \operatorname{arcsinh} x = \log(x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

Aditivní konstantu u primitivní funkce zde i dále vynecháváme, protože naším cílem bude určitý integrál.

A pro $b > 0$ je

$$\left(\operatorname{arcsinh} \frac{x}{b}\right)' = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{x}{b}\right)^2 + 1}} \frac{1}{b} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + b^2}}.$$

Proto

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + b^2}} dx = \operatorname{arcsinh} \frac{x}{b}.$$

Podobně lze odvodit

$$(\operatorname{arccosh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

Odvodíme si ještě několik dalších integrálů, které budeme potřebovat. Podobně, jako lze využít substituci $x = \sin t$ pro výpočet integrálu

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1 - x^2} dx &= \left| \begin{array}{l} x = \sin t \\ dx = \cos t dt \end{array} \right| = \int \cos^2 t dt = \int \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \\ &= \frac{1}{2} \left(t + \frac{\sin 2t}{2} \right) = \frac{1}{2} (t + \sin t \cos t) = \frac{1}{2} (\arcsin x + x \sqrt{1 - x^2}), \end{aligned}$$

můžeme použít substituci $x = \sinh t$ pro výpočet integrálu

$$\int \sqrt{1 + x^2} dx.$$

Tak, jako jsme použili vztah

$$\cos^2 t = \frac{1 + \cos 2t}{2},$$

odvodíme si podobný vztah pro hyperbolický kosinus

$$\cosh^2 t = \frac{(\exp(t) + \exp(-t))^2}{4} = \frac{\exp(2t) + \exp(-2t) + 2}{4} = \frac{1 + \cosh 2t}{2}.$$

A tak, jako jsme při závěrečných úpravách použili vztah $\sin 2t = 2 \sin t \cos t$, odvodíme obdobný vztah pro hyperbolické funkce

$$\begin{aligned} 2 \sinh t \cosh t &= 2 \frac{\exp(t) - \exp(-t)}{2} \frac{\exp(t) + \exp(-t)}{2} = \\ &= \frac{\exp(2t) - \exp(-2t)}{2} = \sinh 2t. \end{aligned}$$

Spočtěme tedy integrál

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1 + x^2} dx &= \left| \begin{array}{l} x = \sinh t \\ dx = \cosh t dt \end{array} \right| = \int \cosh^2 t dt = \int \frac{1 + \cosh 2t}{2} dt = \\ &= \frac{1}{2} \left(t + \frac{\sinh 2t}{2} \right) = \frac{1}{2} \left(t + \sinh t \cosh t \right) = \frac{1}{2} (\operatorname{arcsinh} x + x \sqrt{1 + x^2}). \end{aligned}$$

Dále s využitím vztahu

$$\left(\operatorname{arcsinh} \frac{1}{x} \right)' = -\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} \frac{1}{x^2} = -\frac{1}{x\sqrt{1 + x^2}}$$

vypočteme metodou per partes integrál

$$\begin{aligned} \int \operatorname{arcsinh} \frac{1}{x} dx &= \left| \begin{array}{l} u' = 1 \quad v = \operatorname{arcsinh} \frac{1}{x} \\ u = x \quad v' = -\frac{1}{x\sqrt{1+x^2}} \end{array} \right| = \\ &= x \operatorname{arcsinh} \frac{1}{x} + \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = x \operatorname{arcsinh} \frac{1}{x} + \operatorname{arcsinh} x. \end{aligned}$$

Budeme ještě potřebovat následující limitu typu „nula krát nekonečno“

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \operatorname{arcsinh} \frac{1}{x}.$$

Protože

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{arcsinh} y}{y} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}}{1} = 0,$$

je s použitím substituce $x = \frac{1}{y}$ také

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \operatorname{arcsinh} \frac{1}{x} = 0.$$

Tato funkce je sudá, tudíž můžeme přejít od jednostranné limity k oboustranné

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{arcsinh} \frac{1}{x} = 0.$$

A také

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \operatorname{arcsinh} \frac{1}{x} = 0.$$

4. Dvojný integrál

Při výpočtu čtyřnásobného integrálu

$$I_4 = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(x-u)^2 + (y-v)^2}} dx dy du dv,$$

na jednotkové čtyřrozměrné hyperkrychli si nejdříve spočteme vnitřní dvojný integrál

$$I_2 = \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(x-u)^2 + (y-v)^2}} dx du$$

na jednotkovém čtverci.

Označíme konstantu $b = |y - v|$ a v integrálu

$$I_2 = \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(x-u)^2 + b^2}} dx du$$

použijeme substituci

$$x = \frac{s-t}{\sqrt{2}}, \quad u = \frac{s+t}{\sqrt{2}}, \quad \text{neboli} \quad s = \frac{x+u}{\sqrt{2}}, \quad t = \frac{u-x}{\sqrt{2}},$$

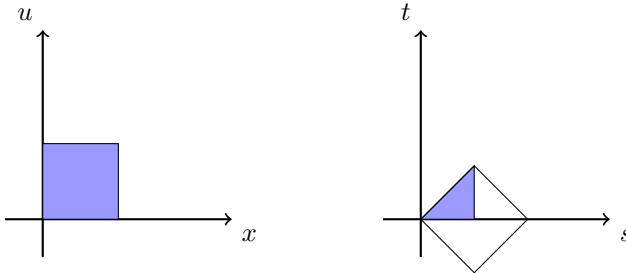
tedy

$$\begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}, \quad \text{kde } A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Matice A představuje otočení o 45° (protože zobrazuje jednotkový vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ mířící na východ na jednotkový vektor $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ mířící na severovýchod a jednotkový vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ mířící na sever na jednotkový vektor $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ mířící na severozápad) a její determinant je $\det A = 1$. V nových souřadnicích s a t je integrovaná funkce nezávislá na s a sudá v t , můžeme proto integrovat na jedné čtvrtině otočeného čtverce (viz obr. 1, kde je vyznačena množina, na které integrujeme v rovině xu a v rovině st) a integrál vynásobíme čtyřmi.

Tím dostáváme

$$\begin{aligned} I_2 &= 4 \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \int_t^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{\sqrt{2t^2 + b^2}} ds dt = \frac{4}{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} - t}{\sqrt{t^2 + \frac{b^2}{2}}} dt = \\ &= 4 \left[\frac{1}{2} \operatorname{arcsinh} \frac{t\sqrt{2}}{b} - \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{t^2 + \frac{b^2}{2}} \right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = 2 \operatorname{arcsinh} \frac{1}{b} + 2b - 2\sqrt{1 + b^2}. \end{aligned}$$


 Obr. 1: Přechod od souřadnic x, u k souřadnicím s, t

5. Čtyřnásobný integrál

Původní čtyřnásobný integrál je

$$I_4 = \int_0^1 \int_0^1 \left(2 \operatorname{arcsinh} \frac{1}{|y-v|} + 2|y-v| - 2\sqrt{1+(y-v)^2} \right) dy dv.$$

Použijeme opět stejnou substituci jako při výpočtu integrálu I_2 , tedy otočení o 45° maticí A . A i zde je potom integrovaná funkce sudá v t a nezávislá na s , takže můžeme opět integrovat pouze na jedné čtvrtině čtverce. Situaci ilustruje stejný obrázek jako při výpočtu I_2 . Dostaneme

$$\begin{aligned} I_4 &= 4 \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \int_t^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(2 \operatorname{arcsinh} \frac{1}{t\sqrt{2}} + 2t\sqrt{2} - 2\sqrt{1+2t^2} \right) ds dt = \\ &= 8 \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - t \right) \left(\operatorname{arcsinh} \frac{1}{t\sqrt{2}} + t\sqrt{2} - \sqrt{1+2t^2} \right) dt. \end{aligned}$$

A použitím drobné substituce $g = t\sqrt{2}$ dostaneme

$$\begin{aligned} I_4 &= 4 \int_0^1 (1-g) \left(\operatorname{arcsinh} \frac{1}{g} + g - \sqrt{1+g^2} \right) dg = \\ &= 4 \left[g \operatorname{arcsinh} \frac{1}{g} + \operatorname{arcsinh} g + \frac{g^2}{2} - \frac{1}{2}(g\sqrt{1+g^2} + \operatorname{arcsinh} g) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{g^2}{2} \operatorname{arcsinh} \frac{1}{g} - \frac{1}{2}\sqrt{1+g^2} - \frac{g^3}{3} + \frac{1}{3}(1+g^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \\ &= 4 \left(\operatorname{arcsinh} 1 - \frac{\sqrt{2}-1}{3} \right). \end{aligned}$$

Takže závěr je

$$I_4 = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(x-u)^2 + (y-v)^2}} dx dy du dv =$$

$$= 4 \left(\operatorname{arcsinh} 1 - \frac{\sqrt{2}-1}{3} \right) \doteq 2,97321.$$

Všimněte si, že ač není integrovaná funkce omezená shora, jedná se o nevlastní integrál, je tento integrál konvergentní, tedy má konečnou hodnotu.

Energie nabitě desky tedy je

$$E = k \frac{Q^2}{L} I_4 = 4 \left(\operatorname{arcsinh} 1 - \frac{\sqrt{2}-1}{3} \right) k \frac{Q^2}{L}.$$

6. Výpočet na počítači

Výpočet pomocí software *Mathematica*

Pro symbolické výpočty na počítači můžeme s výhodou použít počítačový algebraický systém *Mathematica*. Pro výpočet integrálu se použije příkaz `Integrate` a pro získání přibližné numerické hodnoty použijeme příkaz `N` takto:

```
i=Integrate[1/Sqrt[(x-u)^2+(y-v)^2],{x,0,1},{y,0,1},{u,0,1},{v,0,1}]
```

```
Out[1]= -----
          -4 (-1 + Sqrt[2] - 3 ArcSinh[1])
          3
```

```
In[2]:= N[i]
Out[2]= 2.97321
```

Na notebooku s procesorem Intel Core i7 trval výpočet necelé dvě minuty. Tento výsledek je ve shodě s naším ručním výpočtem.

Konkurenční software Maple verze 2018 tento integrál nespočítal vůbec.

Výpočet metodou Monte Carlo

Pro vícenásobné integrály můžeme použít metodu Monte Carlo. To je souhrnný název pro numerické algoritmy, které využívají generátor

pseudonáhodných čísel. Pro numerický výpočet nepotřebujeme symbolické operace, proto můžeme napsat program např. v programovacím jazyce C. Ten má tu výhodu, že je dostupný na každém počítači s operačním systémem Linux. Výpočet probíhá tak, že vygenerujeme velký počet čtveřic pseudonáhodných čísel mezi nulou a jedničkou, což budou argumenty integrované funkce. V těchto pseudonáhodných čtveřicích vyčíslíme integrovanou funkci a výsledek přičítáme do proměnné, do které na začátku výpočtu uložíme nulu. Na závěr součet vydělíme počtem vygenerovaných bodů. Pro generování pseudonáhodných čísel použijeme funkci `drand48()`. Program může vypadat např. takto:

```
# include <stdio.h>
# include <math.h>
# include <stdlib.h>
int main ()
{
    int i,im=100000000;
    double x,y,u,v,w,s=0;
    for (i=0;i<im;i++) {
        x = drand48();
        y = drand48();
        u = drand48();
        v = drand48();
        w = sqrt((x-u)*(x-u)+(y-v)*(y-v));
        if(w>0) s += 1/w;
    };
    printf("%G\n",s/im);
    return(0);
}
```

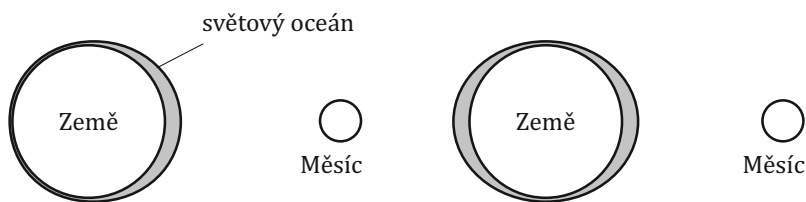
Tento program generuje 10^8 pseudonáhodných čtveřic a výpočet na počítači s procesorem Intel Core i7 trval 3 sekundy a dal výsledek 2,9729, což se shoduje s přesným výsledkem na 4 platné číslice. To je v souladu s očekáváním, že relativní chyba výsledku je nepřímo úměrná odmocnině z počtu bodů.

Slapové síly

Karel Rauner, Pedagogická fakulta ZČU, Plzeň

Poznámka redakce: Tento článek vyšel v časopise *Rozhledy matematicko-fyzikální* již v roce 1996 (Rauner, K.: Slapové síly. *Rozhledy matematicko-fyzikální*, roč. 73 (1996), č. 4, s. 165–172. Se svolením autora jsme se rozhodli jej znovu otisknout a věříme, že i po čtvrt století od svého prvního uveřejnění přinese čtenářům spoustu zajímavých informací.

Již ve dvou článcích časopisu *Školská fyzika* jsem se zmínil o slapových silách [6, 7] (*Může člověk přežít zrychlení 10 000g?*, *Kam a kdy za světovými rekordy*). Přitom i řada absolventů fyzikálního studia má o vzniku slapových sil nepřesnou představu. Každý sice ví, že slapové síly jsou na Zemi vyvolávány Měsícem a Sluncem a že jsou příčinou přílivu a odlivu, mnohé však už zarazí fakt, že příliv i odliv se opakují dvakrát denně. Častá představa vzniku přílivu totiž počítá pouze se zvýšením přitažlivé síly Měsíce v nejbližším bodě, proto si řada lidí představuje vznik přílivu a odlivu zdeformováním hladiny světového oceánu podle obr. 1. Správnou situaci podle obr. 2 nevysvětluje zcela uspokojivě ani J. I. Perelman v *Zajímavé astronomii* [1], podle kterého je na odvrácené straně Země přitahována k Měsíci více pevná část Země než oceán.



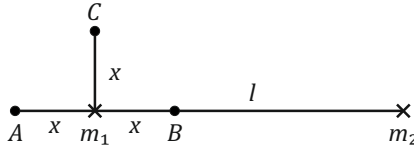
Obr. 1

Obr. 2

Správné vysvětlení i přibližný výpočet velikosti slapových sil nám umožní teprve vědomí toho, že soustava podle obr. 2 se v rovnovážném stavu může udržovat pouze rotací kolem společného hmotného středu.

Skutečnou situaci si zjednodušíme následujícím zadáním: Rotací po kruhových drahách se udržují ve stálé vzdálenosti l dva hmotné body

s hmotnostmi m_1 , m_2 . Za předpokladu, že na soustavu nepůsobí žádné vnější síly, vypočítejte periodu rotace. Určete zrychlení působící na bod s hmotností m ($m \ll m_1$, $m \ll m_2$) ve vzdálenosti $x < l$ od bodu m_1 v bodech A , B , C (obr. 3). Na tomto obrázku je nákretna rovinou rotace.



Obr. 3

Řešte obecně i pro číselné hodnoty odpovídající soustavě Země–Měsíc: $m_1 = 5,976 \cdot 10^{24}$ kg, $m_2 = 7,35 \cdot 10^{22}$ kg, $l = 384\,400$ km, $x = 6\,378$ km, $m = 1$ kg. Gravitační konstantu přitom dosazujte s hodnotou $G = 6,672 \cdot 10^{-11}$ N·m²·kg⁻². Vzdálenost x odpovídá zemskému povrchu na rovníku, l je průměrná vzdálenosti středu Měsíce od středu Země.

Nejprve nalezneme polohu hmotného středu soustavy m_1 , m_2 . Označíme-li x_T vzdálenost hmotného středu od bodu m_1 , platí

$$x_T = \frac{m_2 \cdot l}{m_1 + m_2}. \quad (1)$$

Po dosazení je číselná hodnota $x_T = 4\,670$ km. Dostáváme patrně pro mnohé překvapivý výsledek: hmotný střed soustavy Země–Měsíc leží uvnitř Země. Podmínkou pro kruhový pohyb je rovnost dostředivé síly (gravitační přitahování Země a Měsíce) a setrvačné odstředivé síly. Z této podmínky pro Zemi je možné určit úhlovou rychlost rotace:

$$G \frac{m_1 m_2}{l^2} = m_1 \omega^2 x_T \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{G m_2}{l^2 x_T}}, \quad (2)$$

po dosazení je

$$\omega = \sqrt{\frac{G(m_1 + m_2)}{l^3}}. \quad (3)$$

Číselně je $\omega = 2,6657 \cdot 10^{-6}$ s⁻¹, což odpovídá periodě

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2,357 \cdot 10^6 \text{ s} = 27,28 \text{ dne}.$$

Výsledek je nepatrně odlišný od skutečné periody oběhu soustavy (siderický měsíc), která je 27,32 dne. Důvodem odchylky jsou zaokrouhlené

vstupní číselné hodnoty a nepřesnosti vzniklé nahrazením skutečných těles hmotnými body i odchylkou trajektorie Měsíce od kruhové dráhy.

Protože v zadání neuvažujeme rotaci Země kolem vlastní osy (m_1 je hmotná bod), skládá se zrychlení g_a v bodě A ze tří složek: g_{a1} – zrychlení určené gravitačním působením m_1 (Země), g_{a2} – zrychlení určené gravitačním působením m_2 (Měsíce) a g_{a3} – odstředivého zrychlení v neinerciální soustavě. Pro velikost těchto složek platí

$$mg_{a1} = G \frac{mm_1}{x^2}, \quad mg_{a2} = G \frac{mm_2}{(x+l)^2}, \quad g_{a3} = \omega^2(x+x_T). \quad (4)$$

Vzhledem k orientaci jednotlivých složek zrychlení je výsledné zrychlení v bodě A

$$g_a = g_{a1} + g_{a2} - g_{a3}, \quad (5)$$

kladný směr jsme přitom přisoudili orientaci k bodu m_1 . Podobně je pro bod B

$$mg_{b1} = G \frac{mm_1}{x^2}, \quad mg_{b2} = G \frac{mm_2}{(l-x)^2}. \quad (6)$$

Odstředivé zrychlení je pro $x < x_T$ $g_{b3} = \omega^2(x_T - x)$, pro $x \geq x_T$ $g_{b3} = \omega^2(x - x_T)$. Pro $x < x_T$ tedy dostaneme v bodě B zrychlení

$$g_b = g_{b1} - g_{b2} + g_{b3},$$

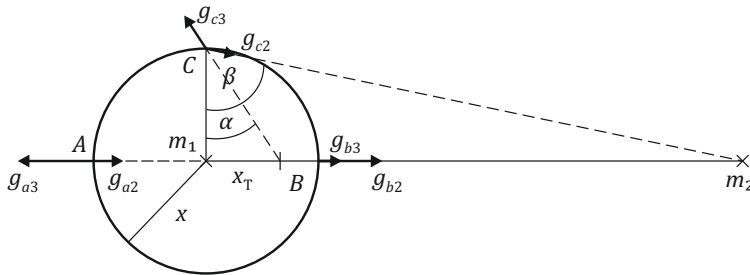
pro $x \geq x_T$

$$g_b = g_{b1} - g_{b2} - g_{b3}. \quad (7)$$

Výsledné vztahy pro zrychlení v bodech A a B jsou

$$\begin{aligned} g_a &= G \frac{m_1}{x^2} + G \frac{m_2}{(x+l)^2} - \omega^2(x+x_T), \\ g_b &= G \frac{m_1}{x^2} - G \frac{m_2}{(l-x)^2} - \omega^2(x-x_T). \end{aligned} \quad (8)$$

Po číselném dosazení je $g_{a1} = g_{b1} = 9,801\,614\,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, $g_{a2} = 3,211\,32 \cdot 10^{-5} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, $g_{a3} = 7,850\,97 \cdot 10^{-5} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, $g_{b2} = 3,431\,70 \cdot 10^{-5} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, $g_{b3} = 1,213\,44 \cdot 10^{-5} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. Výsledná zrychlení v bodech A a B jsou $g_a = 9,801\,567\,6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, $g_b = 9,801\,567\,56 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. Jednotlivé složky zrychlení ve všech uvažovaných bodech jsou zakresleny na obr. 4. Kružnicí je na tomto obrázku znázorněn poloměr Země.



Obr. 4

Velikosti jednotlivých složek zrychlení v bodě C jsou

$$g_{c1} = G \frac{m_1}{x^2}, \quad g_{c2} = G \frac{m_2}{x^2 + l^2}, \quad g_{c3} = \omega^2 \sqrt{x^2 + x_T^2}. \quad (9)$$

Po dosazení $g_{c2} = 3,31785 \cdot 10^{-5} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, $g_{c3} = 5,61739 \cdot 10^{-5} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, $g_{c1} = g_{a1} = g_{b1}$. Úhly α , β je možné vypočítat z naznačených trojúhelníků:

$$\text{tg } \alpha = \frac{x_T}{x} \Rightarrow \alpha = 36,21^\circ, \quad \text{tg } \beta = \frac{l}{x} \Rightarrow \beta = 89,45^\circ. \quad (10)$$

Vzhledem k tomu, že $g_{c1} \gg g_{c2}$, $g_{c1} \gg g_{c3}$, a k tomu, že vodorovné složky g_{c2} , g_{c3} se prakticky odečítají, je možné určit výsledné zrychlení v bodě součtem průmětů do směru g_{c1} :

$$g_c = g_{c1} + g_{c2} \cos \beta - g_{c3} \cos \alpha. \quad (11)$$

Po dosazení je $g_c = 9,8015690 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

Porovnáním jednotlivých hodnot zrychlení je zřejmé, že

$$g_c > g_a > g_b, \quad (12)$$

nebo číselně

$$g_c = g_a + 1,447 \cdot 10^{-6} = g_b + 1,447 \cdot 10^{-6} \quad [\text{m} \cdot \text{s}^{-2}], \quad (13)$$

$$g_a = g_b + 5,49 \cdot 10^{-8} \quad [\text{m} \cdot \text{s}^{-2}].$$

V bodě C působí největší tíhové zrychlení. V bodě A se zrychlení snižuje odstředivou silou, která velikostí převyšuje přitažlivou sílu Měsíce, v bodě B je zrychlení menší vlivem odstředivé síly i přitažlivosti Měsíce. Nerovnost (12) vysvětluje tvar hladiny světového oceánu podle obr. 2.

Největší změna tíhového zrychlení během jednoho dne vyvolaná Měsícem je tedy podle našeho výpočtu $1,4 \cdot 10^{-6} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. Obvykle udávaná hodnota maximální denní změny tíhového zrychlení, vyvolaná slapovými silami Měsíce, je menší: $1,1 \cdot 10^{-6} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. Rozdíl je způsoben tím, že jsme počítali tíhová zrychlení v bodech ležících v rovině rotace Měsíce. Těmito body pochopitelně neprochází při rotaci Země kolem vlastní osy žádný konkrétní bod na Zemi. Po korekci na úhel rovníkové roviny a roviny rotace Měsíce by shoda byla výraznější. Vzhledem k dynamice jevu přílivu a odlivu a k podstatnému vlivu tvaru pobřeží není možné vypočítat změnu výšky hladiny. Jsou místa, na kterých jsou slapové přílivy a odlivy nepozorovatelné, větší vliv na hladinu má proměnlivost mořských proudů a směr a síla větrů, jsou však místa, kde pravidelné změny výšky hladiny přesahují 10 metrů. To jsou také místa, kde se vyplatí budovat přílivové elektrárny a vyrábět tak energii na úkor rotační energie Země. Je třeba ještě podotknout, že na výšku přílivu má i vliv snížení tíhového zrychlení s rostoucí vzdáleností od středu Země.

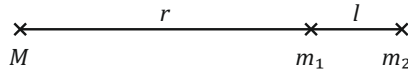
Ze vztahů (8) je vidět, že při růstu x se pro jisté hodnoty dosáhne místa, kde $g_a(x_a) = 0$, $g_b(x_b) = 0$. Takovým bodům se říká *Lagrangeovy librační body* a hmotný bod s hmotností $m \ll m_1$, $m \ll m_2$ by v nich byl v labilní rovnováze [2]. Jestliže některé části objektů s velmi malou hustotou (obří hvězdy) dosáhnou vzdálenosti x_b , přetéká hmota na druhý objekt. Tento jev je znám z astronomie a s přetékáním hmoty v podobných soustavách dvojhvězd je spojena řada dalších zajímavých efektů.

Slapové síly jsou někdy obecněji chápány jako síly, které mají původ v nehomogenitě gravitačního pole. Je pak zřejmé, že takové síly se uplatní i v nerovnovážných stavech soustav, např. při volném pádu dvou těles. Kdyby se jednalo o Zemi a Měsíc, byla by situace podobná obr. 2, setrvačnou odstředivou sílu by nahradila setrvačná síla odpovídající zrychlení Země jako neinerciální soustavy. Představíme-li si naopak případ, kdy Země a Měsíc jsou fixovány v nehybném stavu nějakou další silou (jako by byly přibity na nehmotné prkénko), nastala by situace podle obr. 1.

Často se také v astronomii mluví o slapových silách v souvislosti s rozpadem kosmických těles (komet) v blízkosti planet a hvězd s velkou hmotností. Tuto možnost ověříme na následujícím zjednodušeném příkladu.

Ve vzdálenosti r od hmotného bodu s hmotností M krouží bod s hmotností m_1 spojený nehmotným pevným vláknem délky $l \ll r$ s bodem

o hmotnosti m_2 . Platí $m_1 + m_2 \ll M$. Body m_1, m_2 krouží synchronizovaně kolem svého hmotného středu tak, že spojnice Mm_2 je stále totožná se spojnicí Mm_1 (obr. 5). Vypočítejte sílu napínající vlákno.



Obr. 5

Protože $l \ll r$, můžeme považovat za vzdálenost hmotného středu soustavy m_1, m_2 od bodu M právě vzdálenost r . Pak podle (3) je úhlová rychlost rotace soustavy

$$\omega = \sqrt{G \frac{M}{r^3}}, \tag{14}$$

Hmotný střed celé soustavy je podle předpokladů v místě bodu M , proto jsou odstředivé síly působící na hmotné body

$$F_{o1} = m_1 \omega^2 r, \quad F_{o2} = m_2 \omega^2 (r + l), \tag{15}$$

gravitační síly

$$F_{g1} = G \frac{M m_1}{r^2}, \quad F_{g2} = G \frac{M m_2}{(r + l)^2} \tag{16}$$

Označíme-li sílu napínající vlákno F , platí na koncích vlákna:

$$F + F_{o1} = F_{g1}, \quad F + F_{g2} = F_{o2},$$

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{2} (F_{o2} + F_{g1} - F_{o1} - F_{g2}) = \\ &= \frac{1}{2} \omega^2 [m_2 (r + l) - m_1 r] + \frac{1}{2} GM \left[\frac{m_1}{r^2} - \frac{m_2}{(r + l)^2} \right]. \end{aligned} \tag{17}$$

Výsledek je možno zjednodušit při $m_1 = m_2 = m$:

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{2} \omega^2 ml + G \frac{Mm}{2r^2} \left[1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{l}{r}\right)^2} \right] \approx \\ &\approx \frac{1}{2} \omega^2 ml + GMm \frac{l}{r^3} = \frac{3GMml}{2r^3}, \end{aligned} \tag{18}$$

přičemž jsme využili přibližného vztahu pro velmi malá x :

$$\frac{1}{(1 + x)^2} \approx 1 - 2x.$$

Získaného výsledku můžeme využít v několika konkrétních příkladech:

- a) $M = 5,976 \cdot 10^{24} \text{ kg}$, $m = m_1 = m_2 = 50 \text{ kg}$, $l = 1 \text{ m}$, $r = 7000 \text{ km}$.
 Počítáme přibližně sílu, kterou slapové síly *natahují člověka* na orbitální stanici Země. Po dosažení vychází nepatrná síla $F = 0,87 \text{ mN}$.
- b) Ponecháme všechny předchozí údaje, jen Zemi zaměníme za neutronovou hvězdu s $M = 10^{31} \text{ kg}$. Síla již vychází znatelná: $F = 146 \text{ N}$.
- c) Přiblíží-li se sonda s člověkem k neutronové hvězdě až na vzdálenost $r = 10^6 \text{ m}$ ($M = 10^{31} \text{ kg}$, $m = m_1 = m_2 = 50 \text{ kg}$, $l = 1 \text{ m}$), dosahuje síla již velikosti $F = 50000 \text{ N}$, tedy hodnoty, která už snadno *lidské tělo přetrhne* [3].

Poznámka: Ze vztahů (16) můžeme vidět, že výslednice gravitačních sil na body m_1 , m_2 neodpovídá gravitační síle, která by působila na bod s hmotností $m_1 + m_2$ umístěný v hmotném středu soustavy m_1 , m_2 . V nehomogenních gravitačních polích nejsou hmotný střed a těžiště totožnými body. Ze vztahů (16) dostáváme pro r_T – vzdálenost těžiště soustavy m_1 , m_2 :

$$\frac{m_1}{r^2} + \frac{m_2}{(r+l)^2} = \frac{m_1 + m_2}{r_T^2}, \quad (19)$$

proto

$$r_T^2 = \frac{m_1 + m_2}{\frac{m_1}{r^2} + \frac{m_2}{(r+l)^2}}. \quad (20)$$

V drtivé většině případů však lze rozdíl mezi hmotným středem a těžištěm zanedbat, v příkladu c) je těžiště jen o $0,38 \mu\text{m}$ blíže k hvězdě než hmotný střed.

Na závěr se podíváme, jak se mohli běžní lidé seznámit s problematikou slapových sil v minulosti. Před 200 lety bylo zdrojem poučení v průměrné rodině hojně vydávané převyprávění bible, které bylo zároveň jakousi encyklopedií. V jedné z takových publikací se o problematice přílivu a odlivu píše [4]:

Aby pak vody mořské pro ustavičné stánj se nezkažyly a neshnily, protož Pán Bůh nařjdl, aby Moře netoliko od ustavičných větrů sem a tam zmjtané bylo, nýbrž taky mocý měsýce wždy geho přibýwalo a ubýwalo. Nýbrž moře wokolo půlnocy skrze podzemský welmi weliký kanály a průchody až na neywyšší hory wystupuge, a k polednjmu zase k prwněgssýmu mjstu se nawracuge (str. 9).

Je tedy vidět, že autor publikace měl na příliv a odliv stejný názor, jaký jsme si ilustrovali na obr. 1. Pro úplnost se sluší poznamenat, že vesmír popisovaný v této publikaci je pojat jako geocentrický a na Měsíci

tečou řeky (...též podobně ty řeky a vody, které w měsýci se nacházý, gsau suptylné a čisté, gako křisstál, a kdyby z nich kdo gen gednau se napil, hnedby se wssecek nadul a opuchl. Ze pak ty vody, které w měsýcy gsau, dolu neprssý, to zřjzenj Božjho přichazý, aby vody okolo Centrum, nebo prostředku měsýce se točili a plinuli).

Před sto lety byl zdrojem poučení běžné rodiny Ottův slovník naučný [5]. V něm pod heslem dmutí moře můžeme číst:

Dmutí moře (přiliv a odliv, slapy) slove střídavé stoupání a klesání mořských vod, které v období 24 hodin a 52 min. dvakráte se opakuje, tak že na každé místo, na kterém výjev ten vůbec se vyskytuje, ve zmíněném období dvakráte přiliv a dvakrát odliv má a které vespolek se střídají tak, že po každém přilivu následuje odliv a naopak. ...

Z těchto a jiných pozorováním zjištěných jevů soudíme, že příčinou dmutí moře jest přitažlivá síla, kterou měsíc i slunce na vodstvo mořské a na zeměkouli vůbec působí. Ježto přitažlivé této síly do dálky rychle (čtverečně) ubývá, jest přirozeno, že na přivrácené straně země přitažlivost měsíce silněji se jeví, než ve středobodu země a na odvrácené straně z téhož důvodu opět slaběji než ve středu země nebo na straně k měsíci přivrácené. Mysleme si, že na straně země k vrcholícímu měsíci přivrácené leží vodstvo mořské, rovněž tak na straně odvrácené, pak bude na obou stranách přiliv moře a to na přivrácené straně větší přitažlivostí a na odvrácené menší přitažlivostí měsíce, než jaká na střed zemský se jeví, způsobený asi tak jako člověk, ve vodě po krk stojící, dvojím způsobem vodou zaplaven býti může, buď, že mu voda nad hlavu vystoupí nebo že mu dole nohy hloub zapadne, čímž mu voda také hlavu zaplaví.

Tolik tedy Ottův slovník naučný, na dvou stranách textu tohoto hesla není ani zmínka o odstředivé síle.

Literatura

- [1] Perelman, J. I.: *Zajímavá astronomie*. Naše vojsko, Praha, 1954.
- [2] Randa, M.: Hillový plochy, Lagrangeovy librační body. *Školská fyzika*, 2 (1994–95).
- [3] Niven, L.: *Neutronová hvězda. Těžká planeta*, Mladá fronta, Praha, 1979.
- [4] Martin z Rochem: *Veliký Život Pana a Spasytele Nasseho Krysta Ge-žisse...* Impresio Karlo-Ferdinande, Praha, 1759.
- [5] *Ottův slovník naučný*, VII. díl. J. Otto, Praha, 1893.
- [6] Rauner, K.: Může člověk přežít zrychlení 10 000 g? *Školská fyzika*, 3 (1995–96).
- [7] Rauner, K.: Kam a kdy za světovými rekordy. *Školská fyzika*, 4 (1995–96).

Blázni, kteří se nezabývají kvantovou mechanikou

Albert Einstein (1879–1955) působil jako ředitel ústavu teoretické fyziky na německé univerzitě v Praze od dubna 1911 do července 1912. V té době byl již znám jako tvůrce speciální teorie relativity a intenzivně se zabýval teorií gravitace. Podstatně také přispěl k rozvoji kvantové fyziky, která ho ovšem poněkud zaskočila svými důsledky. Stále si nechtěl připustit, že jevy v mikrosvětě můžeme předpovídat jen s určitou pravděpodobností. Vyjadřoval to slovy „*Bůh přece nehraje v kostky!*“ Einsteinova pracovna byla tehdy ve Viničné ulici; dnes patří budova Přírodovědecké fakultě Karlovy univerzity. Einsteinův nástupce v jeho funkci Philipp Frank vzpomíná na své první setkání s Einsteinem v Praze:

Einsteinova pracovna na univerzitě měla výhled do parku s krásnými zahradami a stinnými stromy. Einstein si všiml, že ráno se tam procházely jenom ženy a odpoledne pouze muži; někteří chodili jednotlivě, pohrouženi do hluboké meditace, zatímco jiní se shromažďovali do skupin a byli zaměstnáni vášnivými diskusemi. Když se ptal, co je to za podivnou zahradu, dověděl se, že je to park patřící k zemskému blázcinci. Lidé procházející se na zahradě byli chovanci tohoto ústavu, byli to neškodní pacienti, kteří nemuseli být v izolaci. Když jsem poprvé přijel do Prahy, Einstein mi tento pohled z okna ukázal a vysvětlil mi ho – Tamhle jsou blázni, kteří se nezabývají kvantovou teorií.

Einstein navštívil Prahu ještě jednou, v roce 1921, na pozvání německého spolku Urania, zabývajících se popularizací vědy, aby tu proslavil přednášku o teorii relativity. Je třeba poznamenat, že v té době nebyla teorie relativity obecně přijímána, naopak měla mnoho odpůrců a mnohými byla vysmívána. Je zajímavé, že Einstein, který se za svého prvního pobytu v Praze s českými fyziky téměř nestýkal, při své druhé návštěvě navštívil Přírodovědeckou fakultu Karlovy univerzity na Karlově, aby vyjádřil podporu fyzikům nové, demokratické Československé republiky. Ve fyzikální pracovně zastihl profesory teoretické fyziky Františka Závíšku a Viktora Trkala, kteří byli náhodou stoupenci teorie relativity a dokonce měli na stěně Einsteinův portrét. Einstein se na něj překvapeně podíval a k užaslým profesorům pronesl: „Tady mě máte živého.“

I. Štoll, Hrátky matematiků a fyziků

👉 Objednávky časopisu 👈

Od roku 2020 vyřizuje objednávky časopisu
Rozhledy matematicko-fyzikální
společnost

MediaCall, s. r. o.

Vídeňská 546/55

639 63 Brno

tel: +420 532 165 165

e-mail: export@mediacall.cz

Objednávky lze realizovat i přes web:

www.zahranicnitisk.com

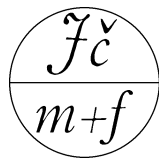
Pro členy JČMF vyřizuje objednávky předplatného sekretariát JČMF. Roční předplatné bude od nového ročníku 2022 pro členy JČMF 200 Kč.

Elektronická verze čísla 1/2022 je ke stažení na adrese:

<https://rozhledy.jcmf.cz/wp-content/uploads/RMF-97-1.pdf>

heslo: mrkvi4ka

ROZHLEDY matematicko-fyzikální Ročník 97 (2022), číslo 1



OBSAH

J. Jelínek: Kreslení stereoskopických obrázků	1
A. Jančařík, T. Kepka, I. Volný: Beznulá čísla	13
V. Dlab: Připomeňme si podobnost trojúhelníků	18
J. Dvořák, M. Snětinová: Simpsonův paradox	29
P. Hauschwitz: Laserovým nanostrukturováním k funkcionalizaci povrchů	35
P. Pokorný: Energie nabitě desky – aplikace čtyřnásobného integrálu	40
K. Rauner: Slapové síly	52
I. Štoll: Blázní, kteří se nezabývají kvantovou mechanikou	60

Pokyny pro autory

Příspěvky dodávejte na adresu redakce v elektronické podobě. Nejlépe napsané ve formátu $\text{L}^{\text{T}}\text{E}^{\text{X}}$, přijatelný je i formát $\text{PlainT}^{\text{E}}\text{X}$, je akceptovatelný i text připravený editorem Word či podobným.

Pokud jde o obrázky, je žádoucí, aby byly připraveny v reprodukovatelné podobě. Každý obrázek nechte v samostatném souboru, nejlépe ve formátu eps nebo pdf. Přípustná je též bitmapa v dostatečném rozlišení.

Ke každému zasílanému příspěvku (ne u soutěží, zpráv a recenzí) přiložte krátkou anotaci v českém jazyce. Dále je žádoucí, aby u každého příspěvku byla uvedena literatura, na kterou je v textu odkazováno.