ROZHLEDY

MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ

ČASOPIS PRO ZÁJEMCE O MATEMATIKU, FYZIKU A INFORMATIKU

ROČNÍK 97 (2022) • ČÍSLO 3

Vydává Jednota českých matematiků a fyziků
tel.: 222 090 708-9, e-mail: jcmf@math.cas.cz
za podpory MFF UK Praha a FJFI ČVUT Praha

Vycházejí 4 čísla v kalendářním roce

Obálku navrhl Bohuslav Šír

Sazbu programem TEX připravil RNDr. Miloslav Závodný

Adresa redakce: MFF UK, V Holešovičkách 2, 182 00 Praha 8 – Troja
e-mail: rozhledy@jcmf.cz

Internetové stránky časopisu: https://rozhledy.jcmf.cz/

Vytiskla Tiskárna Pohlline, Zálesí 1126/88, 142 00 Praha 4

Distribuci pro předplatitele provádí v zastoupení vydavatele
MediaCall, s. r. o.
Vídeňská 546/55, 639 00 Brno
tel.: +420 532 165 165, e-mail: export@mediacall.cz
web: www.zahranicnitisk.com

ISSN 0035-9343 MK ČR E4691

Konstrukce slov s konstantními mezerami

Anežka Kasalová, Malostranské gymnázium, Praha

Abstrakt. Představíme si slova s konstantními mezerami a zaměříme se na jejich konstrukci s využitím počítače. Začneme terminologií a základními vlastnostmi slov s konstantními mezerami. Poté popíšeme pseudokód programu pro generování takových slov a uvedeme odkaz na jeho implementaci v Pythonu. Budeme se věnovat i optimalizacím programu a nakonec si představíme nové výzvy a problémy spojené s programem.

1. Úvod

Slova s konstantními mezerami, jimž se věnuje tento článek, jsou úzce spjatá s disciplínou zvanou kombinatorika na slovech. Základní pojmy vysvětlíme níže, pokud tedy nějaký termín z úvodu nebude jasný, laskavý čtenář si jej vyhledá dále v textu. V kombinatorice na slovech jsou velmi aktuálním tématem vlastnosti balancovaných slov, viz články z poslední doby [2, 4]. Nekonečné slovo nad abecedou $\mathcal{A}$ se nazývá balancované, pokud pro každou dvojici jeho faktorů u a v stejné délky platí, že pro libovolné písmeno z abecedy $\mathcal{A}$ se počet výskytů tohoto písmene ve slovech u a v liší nejvýše o jedna. Nad binární abecedou $\{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ jsou aperiodická balancovaná slova právě dobře známá slova sturmovská [1]. Pro vícepísmenné abecedy platí, že aperiodická balancovaná slova lze konstruovat tak, že se výskyty písmene `a` ve sturmovském slově postupně přepisují pomocí nějakého slova s konstantními mezerami a výskyty písmene `b` pomocí jiného slova s konstantními mezerami nad disjunktními abecedami.

Příklad 1. Nejznámějším sturmovským slovem je Fibonacciho slovo, které získáme, když začneme s písmenem `a` a postupně aplikujeme přepisovací pravidla $\mathtt{a} \to \mathtt{ab}$ a $\mathtt{b} \to \mathtt{a}$ písmeno po písmenu. Dostáváme tak delší a delší prefixy nekonečného Fibonacciho slova:

```
a
ab
aba
abaab
abaababa
abaababaabaab
abaababaabaababaababa
...
```

Přepišme nyní Fibonacciho slovo pomocí slov s konstantními mezerami $(01)^\omega$ a $(234235)^\omega$.

abaababaabaababaababaabaababaab...

0210314012013051021301401203105...

Čtenář může zkontrolovat, že faktory stejné délky v prefixu Fibonacciho slova i v prefixu získaného slova splňují podmínku balancovanosti.

2. Pojmy z kombinatoriky na slovech

V kombinatorice na slovech se studují vlastnosti konečných a nekonečných slov. Právě do této oblasti patří námi studovaná slova s konstantními mezerami. Pojďme se tedy nejprve podívat na základy kombinatoriky na slovech.

Abecedou $\mathcal{A}$ rozumíme konečnou množinu symbolů, říkáme jim *písmena*. *Slovem* w nazýváme konečnou posloupnost písmen. Jeho *délkou* rozumíme počet písmen, která obsahuje, a označíme ji $|w|$. Pod *nekonečným slovem* $\mathbf{u}$ nad abecedou $\mathcal{A}$ pak rozumíme nekonečnou posloupnost písmen z $\mathcal{A}$, v níž se každé písmeno z $\mathcal{A}$ skutečně vyskytuje, tj. $\mathbf{u} = u_1u_2u_3\ldots$, kde $u_i \in \mathcal{A}$. Nekonečné slovo $\mathbf{u}$ nazveme *periodické*, pokud existuje konečné slovo v takové, že $\mathbf{u} = vvvvvvv\cdots = v^\omega$. Symbolem ω tedy značíme nekonečné řetězení stejného slova. Nekonečné slovo se nazývá *aperiodické*, pokud není periodické, a to ani po useknutí libovolného konečného prefixu.[1)]

Nechť $\mathbf{u} = u_1u_2u_3\ldots$ je periodické nekonečné slovo nad abecedou $\mathcal{A} = \{0, 1, \ldots, d-1\}$. *Periodou* P slova $\mathbf{u}$ nazveme nejmenší $P \in \mathbb{N}$ takové, že $u_j = u_{j+P}$ pro každé $j \in \mathbb{N}$.[2)]

Říkáme, že nekonečné slovo $\mathbf{u}$ má *konstantní mezery*, pokud pro každé písmeno $i \in \mathcal{A}$ platí, že existuje konstanta $p_i \in \mathbb{N}$ tak, že mezery mezi po sobě jdoucími výskyty písmene i v $\mathbf{u}$ jsou rovny p_i. Takové p_i nazveme *periodou písmene* i. Je zřejmé, že slovo $\mathbf{u}$ s konstantními mezerami je periodické a že perioda každého písmene dělí periodu slova $\mathbf{u}$. Dále první výskyt písmene $i \in \mathcal{A}$ budeme značit n_i. Je snadné nahlédnout, že $n_i \le p_i$.

[1)] V textu jsou nekonečná slova značena tučně, konečná normálně.

[2)] Pojem perioda budeme rovněž používat pro slova, např. pro $\mathbf{u} = (0102)^\omega$ je periodou $P = 4$, ale také slovo 0102. Konkrétní význam bude vždy zřejmý z kontextu.

Příklad 2. Příkladem slova s konstantními mezerami nad abecedou $\{0, 1, 2\}$ je $\mathbf{u} = (0102)^\omega$. Perioda slova $\mathbf{u}$ je $P = 4$ a perioda písmene nula je $p_0 = 2$ a perioda písmene jedna a dva je rovna $p_1 = p_2 = 4$. První výskyty písmen jsou postupně $n_0 = 1, n_1 = 2, n_2 = 4$. Příkladem periodického slova, které nemá konstantní mezery, nad abecedou $\{0, 1, 2\}$ je $\mathbf{v} = (0122)^\omega$.

3. Vlastnosti slov s konstantními mezerami

Definice 1. Nekonečná slova s konstantními mezerami, která vzniknou jedno z druhého permutací abecedy nebo posunem nebo obojím, nazveme *ekvivalentní*.

Příklad 3. Slova $\mathbf{u} = (0102)^\omega$ a $\mathbf{v} = (2101)^\omega$ jsou ekvivalentní, protože $\mathbf{v}$ vzniklo z $\mathbf{u}$ posunem o jednu pozici a permutací $0 \to 1, 1 \to 2, 2 \to 0$.

Pozorování 1. Ověřme, že jde o ekvivalenci na množině nekonečných slov s konstantními mezerami nad abecedou $\mathcal{A}$.[3)]

1. Reflexivita: Zjevně $\mathbf{u}$ je ekvivalentní s $\mathbf{u}$, protože vzniklo identickou permutací písmen.
2. Symetrie: Pokud $\mathbf{v}$ je ekvivalentní s $\mathbf{u}$, pak $\mathbf{v}$ vzniklo z $\mathbf{u}$ posunem o k pozic (k může být i nula) a jistou permutací písmen (může být i identická). Jistě $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$ mají stejnou délku periody P. Pak $\mathbf{u}$ vzniklo z $\mathbf{v}$ inverzní permutací písmen a posunem o $P - k$ pozic, tedy $\mathbf{v}$ je ekvivalentní s $\mathbf{u}$.
3. Tranzitivita: Pokud $\mathbf{u}$ je ekvivalentní s $\mathbf{v}$ a $\mathbf{v}$ je ekvivalentní s $\mathbf{w}$, pak $\mathbf{v}$ vzniklo z $\mathbf{u}$ posunem o k pozic a jistou permutací písmen π, dále $\mathbf{w}$ vzniklo z $\mathbf{v}$ posunem o ℓ pozic a jistou permutací písmen σ. Tudíž $\mathbf{w}$ vzniklo z $\mathbf{u}$ posunem o $k + \ell$ pozic a složenou permutací písmen $\sigma \circ \pi$ a platí tedy, že $\mathbf{w}$ je ekvivalentní s $\mathbf{u}$. Závěr zní, že relace je i tranzitivní.

Příklad 4. Jedinými slovy s konstantními mezerami s písmeny z abecedy $\{0, 1\}$ jsou $\mathbf{u} = (01)^\omega$ a $\mathbf{v} = (10)^\omega$. Jsou ekvivalentní, protože $\mathbf{v}$ vzniklo z $\mathbf{u}$ posunem o jednu pozici nebo též permutací $0 \to 1$, $1 \to 0$. Slova s konstantními mezerami s písmeny z abecedy $\{0, 1, 2\}$ mají dvě

3) Ekvivalence E na neprázdné množině M je každá podmnožina $E \subset M \times M = \{(m, n) \mid m, n \in M\}$, která má vlastnosti reflexivity, symetrie a tranzitivity. Místo $(m, n) \in E$ píšeme $m \sim n$. Vzájemně ekvivalentní prvky tvoří tzv. třídu ekvivalence.

třídy ekvivalence. Jejich reprezentanty jsou $\mathbf{u} = (012)^\omega$ a $\mathbf{v} = (0102)^\omega$. Další slova s konstantními mezerami už z nich získáme jedině permutací abecedy, např. $(201)^\omega$, nebo posunem, např. $(1020)^\omega$, nebo obojím, např. $(0121)^\omega$.

V programu pro hledání všech slov s konstantními mezerami se nám budou velmi hodit následující tvrzení o periodách slov a písmen.

Lemma 1. *Délka periody nekonečného slova s konstantními mezerami je vždy rovna nejmenšímu společnému násobku period jednotlivých písmen.*

Důkaz. Nechť perioda slova je P a n je nsn všech period písmen. P je dělitelné všemi periodami písmen, proto n dělí P. Takže $P \geq n$.

Na druhou stranu, vybereme-li jakékoliv písmeno a posuneme se od něj o n, pak narazíme znovu na to samé písmeno. Neboli $u_i = u_{i+n}$ pro každé $i \in \mathbb{N}$. A jelikož P je nejmenší číslo s předchozí vlastností, je jasné, že $P \leq n$.

Z těchto dvou úvah pak plyne, že $n = P$.

Lemma 2. *Periody písmen ve slově s konstantními mezerami nad abecedou $\mathcal{A} = \{0, 1, \ldots, d-1\}$ splňují* [4]

$$\sum_{i=0}^{d-1} \frac{1}{p_i} = 1.$$

Důkaz. Pokud slovo $\mathbf{u}$ má konstantní mezery a periodu P a pokud písmeno i má periodu p_i, pak se i v prefixu $\mathbf{u}$ délky P vyskytuje $\frac{P}{p_i}$-krát. Odtud plyne, že

$$P = \sum_{i=0}^{d-1} \frac{P}{p_i},$$

což po vykrácení číslem P dává $\sum_{i=0}^{d-1} \frac{1}{p_i} = 1$.

Definice 2. Nechť n, n', p, p' jsou přirozená čísla splňující $n \leq p$ a $n' \leq p'$. Řekneme, že (n, p) a (n', p') jsou *v kolizi*, pokud existují $k, k' \in \mathbb{N}_0$ [5] taková, že

$$n + kp = n' + k'p'. \tag{1}$$

[4] Používáme zkrácený zápis součtu $\sum\limits_{i=0}^{d-1} \frac{1}{p_i} = \frac{1}{p_0} + \frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_{d-1}}$.

[5] Symbol $\mathbb{N}_0$ značí množinu obsahující přirozená čísla a nulu.

Lemma 3. *Páry (n,p) a (n',p') jsou v kolizi, právě když $D = \mathrm{nsd}(p,p')$* [6] *je dělitelem $n - n'$.*

Důkaz. Pokud jsou (n,p) a (n',p') v kolizi, podle (1) platí $n - n' = k'p' - kp$. Jelikož D dělí p i p', jistě D dělí $n - n'$. Pro důkaz opačné implikace využijeme, že když $D = \mathrm{nsd}(p,p')$, pak použitím Eukleidova algoritmu je možné najít $\hat{k}, \hat{\ell} \in \mathbb{Z}$ tak, že $\hat{k}p' = D + \hat{\ell}p$. Pak ale také umíme najít $\tilde{k}, \tilde{\ell} \in \mathbb{Z}$ tak, že $\tilde{k}p' = n - n' + \tilde{\ell}p$ (předchozí rovnost jsme vynásobili celým číslem $\frac{n-n'}{D}$). Odtud $n + \tilde{\ell}p = n' + \tilde{k}p'$. Pokud $\tilde{k}, \tilde{\ell}$ nejsou obě nezáporná, pak stačí přičíst na obě strany vhodný násobek pp' tak, aby $n + (\tilde{\ell} + sp')p = n' + (\tilde{k} + sp)p'$ splňovalo, že $k = (\tilde{\ell} + sp') \geq 0$ a $k' = (\tilde{k} + sp) \geq 0$. Dostali jsme $n + kp = n' + k'p'$ pro čísla $k, k' \in \mathbb{N}_0$, což podle (1) znamená, že (n,p) a (n',p') jsou v kolizi.

Z předchozích lemmat bezprostředně plyne stěžejní věta, která popisuje slova s konstantními mezerami a na níž založíme program pro generování slov s konstantními mezerami.

Věta 1. *Nechť je dána abeceda $\mathcal{A} = \{0, 1, \ldots, d-1\}$ a páry (n_0, p_0), (n_1, p_1), …, (n_{d-1}, p_{d-1}) takové, že $n_i \leq p_i$ pro každé $i \in \mathcal{A}$. Pak páry (n_0, p_0), (n_1, p_1), …, (n_{d-1}, p_{d-1}) dají vzniknout slovu s konstantními mezerami, právě když žádné dva páry (n_i, p_i) a (n_j, p_j) pro $i, j \in \mathcal{A}$, $i \neq j$, nejsou v kolizi a $\sum_{i=0}^{d-1} \frac{1}{p_i} = 1$.*

Důsledek 1. *V nekonečném slově s konstantními mezerami musí být všechny periody písmen po dvojicích soudělné.*

Důkaz. Pokud existuje dvojice nesoudělných period písmen p_i, p_j, tj. $D = \mathrm{nsd}(p_i, p_j) = 1$, pak podle lemmatu 3 jsou páry (n_i, p_i) a (n_j, p_j) v kolizi, což je dále podle věty 1 nepřípustné pro slovo s konstantními mezerami.

Důsledek 2. *Nekonečné slovo* **u** *s konstatními mezerami nad abecedou $\mathcal{A} = \{0, 1, \ldots, d-1\}$ může mít $\mathrm{nsd}(p_0, p_1, \ldots, p_{d-1}) = 1$, pouze když se v prvočíselném rozkladu periody p_i každého písmene $i \in \mathcal{A}$ nachází alespoň dvě různá prvočísla.*

Důkaz. Pro spor předpokládejme, že by prvočíselný rozklad p_i jednoho z písmen obsahoval mocninu pouze jednoho prvočísla. Protože $\mathrm{nsd}(p_0, p_1, \ldots, p_{d-1}) = 1$, jistě musí existovat p_j nesoudělné s p_i. Podle důsledku 1 toto nemůže nastat.

[6] $\mathrm{nsd}(p,p')$ značí největšího společného dělitele p a p'.

Lemma 4. *Nechť α je prvočíslo, které se vyskytuje jako dělitel některé z period písmen. Označme m maximální exponent takový, že α^m dělí některou z period písmen. Pak α^m dělí alespoň dvě periody p_i a p_j pro $i \neq j$, $i, j \in \mathcal{A} = \{0, 1, \ldots, d-1\}$.*

Důkaz. Jelikož $P = \mathrm{nsn}(p_0, p_1, \ldots, p_{d-1})$, číslo α^m dělí P, zatímco číslo α^{m+1} nedělí P. Protože $\sum_{i=0}^{d-1} \frac{1}{p_i} = 1$, platí vztah:

$$P = \sum_{i=0}^{d-1} \frac{P}{p_i}.$$

Pokud pouze jedna z period, bez újmy na obecnosti p_1, je dělitelná α^m, pak ve výše uvedené rovnici jsou všechny výrazy až na $\frac{P}{p_1}$ dělitelné α, což je spor.

Na závěr této kapitoly zmíníme metodu, pomocí které lze získávat slova s konstantními mezerami nad většími abecedami pomocí slov s konstantními mezerami nad menšími abecedami. Je to proplétáním (anglicky shuffling) konečného počtu slov s konstantními mezerami nad disjunktními abecedami.

Definice 3. Mějme k nekonečných slov. Jejich *proplétáním* rozumíme slovo, které vznikne postupným čtením prvních písmen z daných k slov, poté druhých písmen, třetích atd.

Pokud propleteme k slov s konstantními mezerami nad disjunktními abecedami, vznikne slovo s konstantními mezerami, v němž se perioda každého písmene oproti původnímu slovu k-krát zvětšila.

Příklad 5. Slovo s konstantními mezerami $\mathbf{u} = (013024013025)^\omega$ vzniklo proplétáním tří slov $(0)^\omega$, $(12)^\omega$, $(3435)^\omega$. Skutečně platí, že se periody proplétáním třikrát zvětšily:

- perioda písmene 0 ve slově $\mathbf{u}$ je rovna 3, zatímco $p_0 = 1$ ve slově $(0)^\omega$,
- perioda písmene 1 a 2 ve slově $\mathbf{u}$ je rovna 6, zatímco $p_1 = p_2 = 2$ ve slově $(12)^\omega$,
- perioda písmene 3 ve slově $\mathbf{u}$ je rovna 6, zatímco $p_3 = 2$ ve slově $(3435)^\omega$,
- perioda písmene 4 a 5 ve slově $\mathbf{u}$ je rovna 12, zatímco $p_4 = p_5 = 4$ ve slově $(3435)^\omega$.

Naopak také platí, že když k dělí periodu každého písmene ve slově s konstantními mezerami, pak toto slovo vzniklo proplétáním k slov s konstantními mezerami, tj. pokud $\mathbf{u} = u_1u_2u_3\ldots$, pak $\mathbf{u}$ je propletením slov:

$$u_1u_{1+k}u_{1+2k}u_{1+3k}\cdots$$
$$u_2u_{2+k}u_{2+2k}u_{2+3k}\cdots$$
$$\cdots$$
$$u_ku_{2k}u_{3k}u_{4k}\cdots$$

Příklad 6. Slovo $\mathbf{u} = (012304210324)^\omega$ splňuje $p_0 = p_2 = 4$ a $p_1 = p_3 = p_4 = 6$, tedy periody jsou sudé. Slovo $\mathbf{u}$ vzniklo propletením slov $(02)^\omega$ a $(134)^\omega$.

4. Program

Hlavním cílem článku je představit náš program pro generování slov s konstantními mezerami. Je dostupný i s popisem přes webovou službu GitHub [3].

Přistupme nejprve k popisu pseudokódu.

4.1. Pseudokód programu

Vstupem programu je počet písmen abecedy $d \geq 2$. (Pro $d = 1$ existuje jediné slovo s konstantními mezerami 0^ω.) Bez újmy na obecnosti předpokládáme, že písmeno 0 má nejmenší periodu p_0 a jeho první výskyt $n_0 = 1$. Výstupem programu jsou všechna nekonečná slova s konstantními mezerami (až na ekvivalenci) nad abecedou dané velikosti, přesněji řečeno, vypíše se tvar jejich period.

Přípravná funkce:

- Do proměnné d vlož uživatelem zadaný počet písmen a $\mathcal{A}$ polož rovno $\{0, 1, \ldots, d-1\}$.
- Vytvoř seznam Prefixy a vlož do něj slova

$$010, 0120, 01230, \ldots, 0123\ldots(d-1)0.$$

- Vytvoř prázdný seznam Periody.

Dokud není seznam Prefixy prázdný, aplikuj vždy na první slovo ze seznamu následující funkci.

Funkce přidání dalšího písmene:

Pokud slovo u ze seznamu Prefixy neobsahuje již každé písmeno alespoň dvakrát, proveď následující kroky:

- Najdi nejdelší slovo v s prefixem u, které je jednoznačně určeno parametry (n_i, p_i), kde i jsou opakující se písmena ve slově u. Pokračuj se slovem v.
- Pokud v neobsahuje všechna písmena z $\mathcal{A}$, na pozici $|v| + 1$ doplň nejmenší písmeno i z $\mathcal{A}$, které v neobsahuje. Nové slovo vi vlož na konec seznamu Prefixy.
- Uvažuj všechna písmena j, která se ve v vyskytují jednou a splňují:

  (a) $p_j = |v| + 1 - n_j \geq n_j$, tj. že po připsání j za slovo v je jeho perioda p_j větší nebo rovna prvnímu výskytu j,

  (b) $p_j \geq p_0$, tj. že perioda p_j je větší nebo rovna periodě p_0.

  Pro každé takové j zkontroluj, zda jemu odpovídající pár

  $$(n_j, p_j) = (n_j, |v| + 1 - n_j)$$

  není v kolizi s žádným párem (n_i, p_i), kde i jsou písmena obsažená ve v alespoň dvakrát.

  – Pokud nenastane žádná kolize a

  $$\sum_i \frac{1}{p_i} + \frac{1}{|v| + 1 - n_j} < 1,$$

  přidej nové slovo vj na konec seznamu Prefixy.

  – Pokud nenastane žádná kolize a

  $$\sum_i \frac{1}{p_i} + \frac{1}{|v| + 1 - n_j} = 1$$

  a slovo vj obsahuje všechna písmena z $\mathcal{A}$, do seznamu Periody vlož prefix vj délky $\mathrm{nsn}(p_0, p_1, \ldots, p_{d-1})$.
- Slovo u smaž ze seznamu Prefixy.

Funkce, která vyhodí ekvivalentní slova:

- V seznamu Periody seřaď slova podle délky.
- Pokud je jen jedno slovo dané délky, vytiskni ho.
- Slova, která mají stejnou délku, porovnej pomocí Funkce porovnání.

Funkce porovnání:

- Ze slov stejné délky jedno vytiskni.
- Procházej postupně následující slova stejné délky ze seznamu Periody a porovnávej je s vytištěnými slovy:
  - Pokud je slovo stejné jako některé již vytištěné, pak ho zahoď.
  - U porovnávaného slova přehoď první písmeno na konec, proveď permutaci písmen tak, aby první výskyty písmen splňovaly $n_0 < n_1 < \ldots < n_{d-1}$, a pokud je nyní stejné jako některé již vytištěné, tak ho zahoď. Takto pokračuj tolikrát, kolik je délka periody.
  - Pokud v žádném případě nedojde ke shodě, pak slovo vytiskni.

4.2. Tvoření slov podle pseudokódu programu

Pro čtenářovu lepší orientaci popišme konstrukci všech nekonečných slov s konstatními mezerami nad abecedou o třech písmenech podle programu.

- Seznam Prefixy na začátku obsahuje slova 010 a 0120.
- Začneme s prefixem 010. Podle Funkce přidání dalšího písmene přidáme do seznamu Prefixy slovo 0102. Dále vytvoříme slovo 0101, které ale splňuje $\sum_{i=0}^{1} \frac{1}{p_i} = 1$, a přitom neobsahuje tři písmena. Slovo 010 smažeme ze seznamu Prefixy.
- Poté pokračujeme prefixem 0120 – podle Funkce přidání dalšího písmene vytvoříme dva nové prefixy 01201 a 01202. Druhý z nich ale nesplní podmínku $n_2 \leq p_2$, protože $n_2 = 3$ a $p_2 = 2$. Do Prefixů přidáme proto pouze 01201 a naopak smažeme 0120.
- Prefix 0102 podle Funkce přidání dalšího písmene prodloužíme na 01020 a poté dostaneme 010201 a 010202, kde ovšem druhý prefix opět nesplní podmínku $n_2 \leq p_2$. Do Prefixů přidáme proto pouze 010201 a naopak smažeme 0102.
- Prefix 01201 doplníme podle Funkce přidání dalšího písmene na 012012 a do seznamu Periody vložíme slovo 012. Smažeme 01201 z Prefixů.
- Prefix 010201 povinně prodloužíme na 0102010. Následně doplníme na 01020102 a do seznamu Periody vložíme 0102. Smažeme 010201 ze seznamu Prefixy, čímž jej vyprázdníme.

- Jelikož máme od každé délky jedinou periodu, vytiskneme je.

  Závěr: Vytiskli jsme slova 012 a 0102.

4.3. Vylepšení programu při implementaci

- Ve skutečnosti program neukládá celý tvar prefixu. V pseudokódu je to uvedeno pro přehlednost. Program si pamatuje n_i a p_i u každého písmene.
- Rovnice $\sum_{i=0}^{d-1} \frac{1}{p_i} = 1$ je v programu upravena na

$$\sum_{i=0}^{d-1} \frac{1}{p_i} + 0{,}000\,000\,1 \geq 1,$$

  a to vzhledem k reprezentaci reálných čísel počítačem. (Počítač k výpočtu nepoužívá zlomky, ale jejich přibližný přepočet ve float aritmetice.)
- Do programu je přidána možnost volby mezi třemi výstupy. První zobrazí periody slov s konstantními mezerami a druhý nejprve celkovou délku periody a poté ke každému písmenu napíše jeho n_i a p_i. Třetí výstup vypíše možné délky period.
- Ve Funkci porovnání nahrazujeme jednotlivá písmena jejich číselnou periodou. A následné porovnávání provádíme nikoli posouváním o jedno písmeno, ale posouváním o nejmenší periodu písmene (což je perioda písmene 0).

4.4. Možné optimalizace programu vedoucí ke zvýšení rychlosti

Program, který máme implementovaný, na průměrném počítači najde slova s konstantními mezerami nad abecedou s nejvýše 12 písmeny. Jako nadějná optimalizace do budoucna vypadá využití proplétání. Nezískáme tímto způsobem sice všechna slova s konstantními mezerami (nelze získat slova, pro která je největší společný dělitel period písmen roven jedné), ale i tak by mohlo jít o výrazné urychlení.

5. Úlohy pro čtenáře

Úloha pro pozorné a vědomostí chtivé čtenáře: *Za pomoci teorie z článku vymyslete příklad nekonečného slova s konstantními mezerami tak, aby největší společný dělitel period písmen byl jedna.*

Poděkování

Závěrem bych chtěla poděkovat doc. Ing. Ľubomíře Dvořákové, Ph.D., za toto hezké výzkumné téma, kterému se věnuji i ve své práci SOČ. Děkuji také za milou pomoc při psaní článku. Poděkování patří také prof. Ing. Editě Pelantové, CSc., za užitečné návrhy ke zjednodušení článku i programu. Poděkuji ještě svému obětavému tatínkovi panu Štěpánu Kasalovi za pomoc s kódováním programu.

Literatura

[1] Balková, Ľ.: Nahlédnutí pod pokličku kombinatoriky na nekonečných slovech. *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*, 56 (2011), č. 1, s. 9–18.

[2] Dolce, F., Dvořáková, Ľ., Pelantová, E.: On balanced sequences and their asymptotic critical exponent. *Proceedings LATA 2021, LNCS*, 12638 (2021), s. 293–304.

[3] Kasalová, A.: *Programy pro hledání slov s konstantními mezerami.* `https://github.com/kasal/ak-soc`

[4] Rampersad, N., Shallit, J., Vandomme, É.: Critical exponents of infinite balanced words. *Theoret. Comput. Sci.*, 777 (2019), s. 454–463.

Příloha

1. výstup programu pro abecedu délky 4:

```
SEQ: [0, 1, 0, 2, 0, 1, 0, 3]
SEQ: [0, 1, 0, 2, 0, 3]
SEQ: [0, 1, 2, 0, 1, 3]
SEQ: [0, 1, 2, 3]
```

2. výstup programu pro abecedu délky 4:

```
seq 0, with period length 8
  n_i:  0  1  3  7
  p_i:  2  4  8  8
seq 1, with period length 6
  n_i:  0  1  3  5
  p_i:  2  6  6  6
```

```
seq 2, with period length 6
  n_i:  0  1  2  5
  p_i:  3  3  6  6
seq 3, with period length 4
  n_i:  0  1  2  3
  p_i:  4  4  4  4
```

3. výstup programu pro abecedu délky 4:

```
Possible period lengths for alphabet size 4:
 [4, 6, 8]
```

Dále uvedeme 2. typ výstupu pro další dvě velikosti abecedy.

slovo	délka periody	n_0, n_1, n_2, n_3, n_4	p_0, p_1, p_2, p_3, p_4
1.	16	$0, 1, 3, 7, 15$	$2, 4, 8, 16, 16$
2.	12	$0, 1, 3, 7, 11$	$2, 4, 12, 12, 12$
3.	12	$0, 1, 3, 5, 11$	$2, 6, 6, 12, 12$
4.	8	$0, 1, 3, 5, 7$	$2, 8, 8, 8, 8$
5.	12	$0, 1, 2, 5, 11$	$3, 3, 6, 12, 12$
6.	9	$0, 1, 2, 5, 8$	$3, 3, 9, 9, 9$
7.	6	$0, 1, 2, 4, 5$	$3, 6, 6, 6, 6$
8.	8	$0, 1, 2, 3, 7$	$4, 4, 4, 8, 8$
9.	12	$0, 1, 2, 3, 5$	$4, 6, 4, 6, 6$
10.	5	$0, 1, 2, 3, 4$	$5, 5, 5, 5, 5$

Tabulka 1: Výstup pro $\mathcal{A} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

slovo	délka periody	$n_0, n_1, n_2, n_3, n_4, n_5$	$p_0, p_1, p_2, p_3, p_4, p_5$
1.	32	$0, 1, 3, 7, 15, 31$	$2, 4, 8, 16, 32, 32$
2.	24	$0, 1, 3, 7, 15, 23$	$2, 4, 8, 24, 24, 24$
3.	24	$0, 1, 3, 7, 11, 23$	$2, 4, 12, 12, 24, 24$
4.	16	$0, 1, 3, 7, 11, 15$	$2, 4, 16, 16, 16, 16$
5.	24	$0, 1, 3, 5, 11, 23$	$2, 6, 6, 12, 24, 24$
6.	18	$0, 1, 3, 5, 11, 17$	$2, 6, 6, 18, 18, 18$
7.	12	$0, 1, 3, 5, 9, 11$	$2, 6, 12, 12, 12, 12$
8.	16	$0, 1, 3, 5, 7, 15$	$2, 8, 8, 8, 16, 16$
9.	24	$0, 1, 3, 5, 7, 11$	$2, 8, 12, 8, 12, 12$
10.	10	$0, 1, 3, 5, 7, 9$	$2, 10, 10, 10, 10, 10$
11.	24	$0, 1, 2, 5, 11, 23$	$3, 3, 6, 12, 24, 24$
12.	18	$0, 1, 2, 5, 11, 17$	$3, 3, 6, 18, 18, 18$
13.	18	$0, 1, 2, 5, 8, 17$	$3, 3, 9, 9, 18, 18$
14.	12	$0, 1, 2, 5, 8, 11$	$3, 3, 12, 12, 12, 12$
15.	12	$0, 1, 2, 4, 5, 11$	$3, 6, 6, 6, 12, 12$
16.	12	$0, 1, 2, 4, 5, 10$	$3, 6, 6, 12, 6, 12$
17.	18	$0, 1, 2, 4, 5, 8$	$3, 6, 9, 6, 9, 9$
18.	18	$0, 1, 2, 4, 5, 7$	$3, 9, 6, 9, 6, 9$
19.	16	$0, 1, 2, 3, 7, 15$	$4, 4, 4, 8, 16, 16$
20.	12	$0, 1, 2, 3, 7, 11$	$4, 4, 4, 12, 12, 12$
21.	8	$0, 1, 2, 3, 6, 7$	$4, 4, 8, 8, 8, 8$
22.	12	$0, 1, 2, 3, 5, 11$	$4, 6, 4, 6, 12, 12$
23.	8	$0, 1, 2, 3, 5, 7$	$4, 8, 4, 8, 8, 8$
24.	24	$0, 1, 2, 3, 5, 6$	$4, 6, 8, 6, 6, 8$
25.	10	$0, 1, 2, 3, 4, 9$	$5, 5, 5, 5, 10, 10$
26.	6	$0, 1, 2, 3, 4, 5$	$6, 6, 6, 6, 6, 6$

Tabulka 2: Výstup pro $\mathcal{A} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

Řešení kvadratické rovnice graficky

Jakub Řada, MFF UK, Praha

Abstrakt. Kvadratická rovnice je standardně řešena pomocí diskriminantu či rozkladu na součin. V tomto článku si ukážeme další metodu hledání kořenů určitého typu kvadratické rovnice pomocí pravítka a kružítka, tj. užitím tzv. eukleidovské konstrukce.

Standardní hledání kořenů kvadratické rovnice

Obecná kvadratická rovnice je dána předpisem $ax^2 + bx + c = 0$, kde $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Nejuniverzálněji se kvadratická rovnice řeší přes diskriminant, kde hledané kořeny mají tvar

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Dále je hojně využívanou metodou rozklad na součin pomocí Viètových vzorců. V tomto případě se rovnice rozloží na součin

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),$$

kde x_1 a x_2 jsou hledané kořeny kvadratické rovnice, jelikož splňují $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ a $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$. Tyto metody řešení kvadratických rovnic jsou podrobně rozepsané v učebnici Rovnice a nerovnice [2, s. 122–125]. V tomto článku si však ukážeme netradiční způsob hledání kořenů kvadratické rovnice využitím planimetrické konstrukce, kterou popisuje Descartes ve své knize La Géométrie [1, s. 4–7].

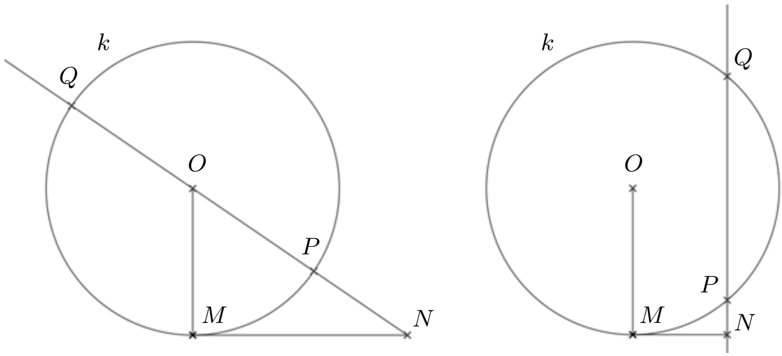
Grafické hledání kořenů kvadratické rovnice

Nejprve upravme obecnou kvadratickou rovnici na normovaný tvar a vyjádřeme druhou mocninu neznámé.

$$x^2 = px + q, \quad \text{kde } p = \frac{-b}{a},\ q = \frac{-c}{a}.$$

Konstrukce kořenů pro případ $q > 0$: Sestrojme pravoúhlý trojúhelník MNO (obr. 1a) s pravým úhlem u vrcholu M, kde délka strany

$|MN| = \sqrt{q}$ a $|MO| = \left|\frac{1}{2}p\right|$. (Čtenář si rozmyslí, že pravý úhel lze konstruovat kružítkem a pravítkem). Nyní sestrojme kružnici k se středem v bodě O o poloměru $|MO|$. Průsečíky kružnice k s prodlouženou stranou trojúhelníku ON označme P a Q. Potom vzdálenosti $|PN|$ a $|QN|$ jsou hledaná řešení kvadratické rovnice až na znaménko, neboť vzdálenost je vždy kladná. Znaménko určíme později.



(a) První konstrukce

(b) Druhá konstrukce

Obr. 1: Grafické hledání kořenů kvadratické rovnice $x^2 = px + q$

Důkaz. Kořeny x_1, x_2 mají být rovné vzdálenostem

$$x_1 = |PN| = |ON| - |OP| \quad \text{a} \quad x_2 = |QN| = |ON| + |OQ|$$

až na znaménko. Jelikož $|OP| = |OQ| = |OM|$, můžeme hledané řešení zjednodušit: $x_{1,2} = |ON| \pm |OM|$.

Dle Pythagorovy věty je délka strany

$$|ON| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}p\right)^2 + (\sqrt{q})^2} = \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} + \frac{-c}{a}} = \frac{1}{2a}\sqrt{b^2 - 4ac},$$

tudíž hledaná řešení jsou

$$x_{1,2} = |ON| \pm |OM| = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \pm \frac{b}{2a}.$$

Tím jsme dokázali, že nalezené vzdálenosti se rovnají našemu známému vzorci s diskriminantem až na znaménko, neboť vzdálenost nemůže být záporná.

Konstrukce kořenů pro případ $q < 0$: V tomto případě začneme stejně jako v předchozí konstrukci pouze s tím rozdílem, že položíme $|MN| = \sqrt{-q}$ (obr. 1b). Tedy $|OM| = \left|\frac{1}{2}p\right|$ a $k(O, |OM|)$ zůstávají stejné. Poté sestrojíme rovnoběžku s úsečkou OM procházející bodem N. (Čtenář si rozmyslí, že konstruovat rovnoběžku daným bodem lze pomocí pravítka a kružítka). Průsečíky rovnoběžky s kružnicí k označme body P a Q. Vzdálenosti $|NP|$ a $|NQ|$ určují opět velikosti kořenů (opět až na znaménko, které určíme později).

Důkaz této konstrukce je analogický s důkazem konstrukce první.

Existence řešení a konstruovatelnost

Pokud vychází diskriminant záporný, tak kvadratická rovnice nemá řešení v $\mathbb{R}$. Stejně tak není hledání řešení kvadratické rovnice graficky univerzální, protože nastanou případy, kdy konstrukci nelze sestrojit.

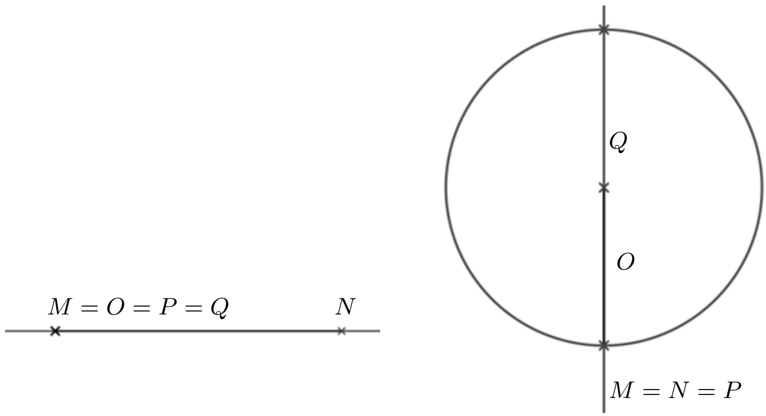
- Bude-li $a = 0$, pak nelze konstrukci provést, nejedná se o kvadratickou rovnici.
- Pokud bude $b = 0$ nelze sestrojit stranu trojúhelníku $|MO| = \frac{1}{2}p$. Na druhou stranu je možné celou konstrukci zjednodušit do hledání úsečky (obr. 2a) délky $\sqrt{q}$. Neboť dostáváme ryze kvadratickou rovnici, která má stejné řešení (opět až na znaménko).
- Také může nastat případ, kdy bude $c = 0$. Pak se pravoúhlý trojúhelník MNO zdeformuje na úsečku, protože body M a N budou splývat (obr. 2b). Kořeny pak vychází $x_1 = |ON| - |OM| = 0$ a $x_2 = |ON| + |OM| = 2|OM| = 2\left|\frac{1}{2}p\right| = \left|\frac{-b}{a}\right|$. To je stejné řešení jako pro rovnici bez absolutního členu $0 = ax^2 + bx = x(ax + b)$, kde je taktéž $c = 0$ (opět až na znaménko).

Určení znaménka v jednotlivých případech

Při hlubším prozkoumaní výsledků první konstrukce zjistíme, že jeden kořen je vždy kladný a druhý záporný. Možno ověřit například v interaktivní konstrukci s dosazením řešení do rovnice [4] v GeoGebře, která však není důkazem. Nebo pomocí faktu, že součin kořenů je roven $\frac{c}{a}$. Jelikož součet kořenů je roven $\frac{-b}{a}$ dostáváme:

pro $p > 0$ je $|PN|$ kořen se záporným znaménkem a $|QN|$ s kladným znaménkem a

pro $p < 0$ je $|PN|$ kořen s kladným znaménkem a $|QN|$ se záporným znaménkem.



(a) Ryze kvadratická rovnice $ax^2 + c = 0$.

(b) Kvadratická rovnice bez absolutního členu $ax^2 + bx = 0$

Obr. 2: Grafické hledání kořenů ve speciálních případech kvadratické rovnice

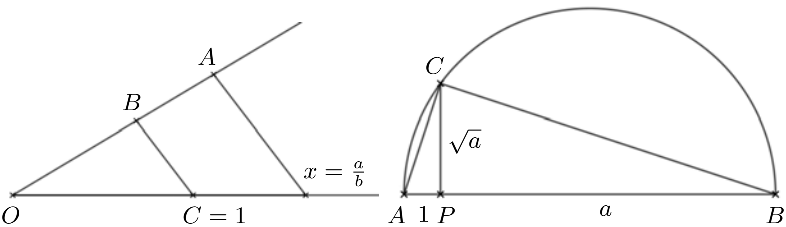
Z druhé konstrukce opět v interaktivní verzi [4], můžeme usoudit, že oba kořeny jsou kladné, nebo oba záporné. Tudíž

pro $p > 0$ jsou $|PN|$, $|QN|$ kořeny s kladným znaménkem,

pro $p < 0$ jsou $|PN|$, $|QN|$ kořeny se záporným znaménkem.

Konstrukce pro úplnost

Při hledání řešení kvadratické rovnice graficky byly použity matematické operace. Samozřejmě je možné je spočítat numericky, ale pro úplnost není na škodu zde uvést, jak hledat dané řešení ryze graficky bez použití jediného výpočtu [3, s. 54–55].



(a) Konstrukce podílu dvou čísel

(b) Konstrukce odmocniny z čísla

Obr. 3: Konstrukce místo výpočtu

Prvně je potřeba uvést konstrukci podílu dvou čísel $\frac{a}{b}$ (obr. 3a). Daná konstrukce vychází z podobnosti trojúhelníků. Neznámou délku označme x. Pak chceme, aby $x = \frac{a}{b}$, což dále upravíme na tvar

$$\frac{x}{1} = \frac{a}{b}$$

(neboli $x : 1 = a : b$). Zvolme tedy libovolný úhel s vrcholem O. Na jednom rameni sestrojme úsečky délky $a = |OA|$ a $b = |OB|$. Na druhém rameni vyznačíme délku úsečky $1 = |OC|$. Pak vedeme bodem A rovnoběžku s přímkou spojující BC a určíme její průsečík s druhým ramenem. Vzdálenost od průsečíku k bodu O je námi hledaná vzdálenost.

Dále je potřeba umět zkonstruovat odmocninu čísla a (obr. 3b). Tuto konstrukci můžeme řešit pomocí Euklidovy věty o výšce. Sestrojme úsečku AB délky $a + 1$, na které vyznačme mezi body AB bod P ve vzdálenosti 1 od bodu A. Nad AB sestrojme kruhový oblouk. Dále vztyčme kolmici z bodu P k úsečce AB a průsečík této kolmice s kruhovým obloukem označíme C. Vzdálenost $|CP|$ je rovna hledané vzdálenosti $\sqrt{a}$.

Závěr

V tomto článku jsme ukázali, jak je možné najít řešení kvadratické rovnice pouze pomocí kružítka a pravítka. Dále jsme ukázali konstrukci pro speciální tvary kvadratických rovnic a rozebrali jsme případy, kdy řešení pomocí pravítka a kružítka nelze nalézt. Tato metoda hledání kořenů kvadratické rovnice nemá ambici nahradit standardní řešení, navíc je náchylná na přesnost rýsování. Jejím cílem je rozšířit čtenářovy obzory a propojit různé partie matematiky.

Tento výstup vznikl v rámci projektu SVV č. 260580

Literatura

[1] Descartes, R.: (překlad: J. Fiala): *La Géométrie.* Oikoymenh, Praha, 2010.

[2] Charvát, J., Boček, L., Zhouf, J.: *Matematika pro gymnázia: Rovnice a nerovnice.* Prometheus, Praha, 1999.

[3] Pomykalová, E.,Horák, K.,Kalcovský, A.: *Matematika pro gymnázia: Planimetrie.* Jednota českých matematiků a fyziků, Praha, 1999.

[4] `https://www.geogebra.org/m/ny9hwpdb`.

p-adická čísla

Adéla Heroudková, Gymnázium Brno, třída Kapitána Jaroše

Úvod

Když na přelomu 19. a 20. století přišel německý matematik Kurt Hensel s myšlenkou p-adických čísel, netušil, jak velkou roli budou hrát v matematice o pár desetiletí později.

V dnešní době patří mezi jeden z hlavních předmětů zkoumání v teorii čísel a mají využití i v jiných oborech, jako je kryptografie, fyzika, biologie a dokonce i geologie [4]. Minulý rok se dokonce přišlo na to, že by se mohla dát používat při modelování šíření viru Covid-19 [5].

Bohužel i přesto stále nepatří ani mezi základní vysokoškolské učivo. Já si ovšem myslím, že by spoustu nejen vysokoškolských studentů mohla p-adická čísla nadchnout. Proto se nyní pokusím nastínit základní myšlenku p-adických čísel a jejich vlastností.

Reálná čísla a nekonečné řady

Než se podíváme na to, co jsou to čísla p-adická, zamysleme se nad tím, co jsou to čísla reálná.

Reálná čísla se skládají z čísel racionálních a iracionálních. Racionální jsou ta, která mají konečný nebo periodický desetinný rozvoj, a iracionální jsou ta, která mají nekonečný neperiodický desetinný rozvoj – například číslo π nebo $\sqrt{2}$.

Též můžeme říct, že reálná čísla jsou množina všech nekonečných řad následujícího tvaru:

$$\pm \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot 10^{m-k} = \pm(a_0 \cdot 10^{m-0} + a_1 \cdot 10^{m-1} + a_2 \cdot 10^{m-2} \dots),$$

kde m je celé číslo a $a_n \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$.

Každé reálné číslo umíme napsat jako tuto řadu alespoň jedním způsobem. Součet každé této řady je roven nějakému reálnému číslu. Pro ujasnění si pojďme ukázat dva konkrétní příklady:

Příklad 1. Pokusme se napsat číslo 320,78 jako zmíněnou nekonečnou řadu:

$$320{,}78 = 3\cdot 10^2 + 2\cdot 10^1 + 0\cdot 10^0 + 7\cdot 10^{-1} + 8\cdot 10^{-2} + 0\cdot 10^{-3} + 0\cdot 10^{-4}\ldots$$

Podívejme se na řadu, která se bude rovnat π:

$$\pi = 3\cdot 10^0 + 1\cdot 10^{-1} + 4\cdot 10^{-2} + 1\cdot 10^{-3} + 5\cdot 10^{-4} + 9\cdot 10^{-5} + \ldots$$

Jak vidíme, umíme tak napsat čísla s konečným i nekonečným desetinným rozvojem.

Je zřejmé, že se dané nekonečné řady musí rovnat daným číslům. Nicméně s čísly s nekonečným rozvojem je to přeci jen trochu trikovější, protože u nich sčítáme nekonečně mnoho čísel (při konečném desetinném rozvoji od jistého momentu přičítáme jen nuly) a obecně nemusí platit, že když sečteme nekonečně mnoho čísel, dostaneme reálné číslo – v mnoha případech bychom dostali plus, nebo minus nekonečno, anebo součet nemusí existovat vůbec. Na rozpoznání, zda je nekonečná řada rovna reálnému číslu nebo nekonečnu, nám slouží cauchyovské posloupnosti.

Abychom později mohli pracovat s cauchyovskými posloupnostmi p-adických čísel, zadefinujeme si je obecně pro metrické prostory.

Definice 1. Metrický prostor je neprázdná množina M spolu s metrikou ρ (vzdáleností), funkcí $\rho\colon M\times M\to\mathbb{R}_+^0$, kde pro libovolná $x, y, z\in M$ platí:

- $\rho(x,y) = 0$ právě tehdy, když $x = y$,
- $\rho(x,y) = \rho(y,x)$,
- trojúhelníková nerovnost: $\rho(x,z)\le\rho(x,y)+\rho(y,z)$.

Vzdálenost (metriku) dvou reálných čísel definujeme jako absolutní hodnotu jejich rozdílu. Nyní není těžké si rozmyslet, že reálná čísla s touto metrikou skutečně splňují definici metrického prostoru. Nulovou vzdálenost dostaneme skutečně právě tehdy, když budeme dělat absolutní hodnotu rozdílu dvou stejných čísel. Je jedno, zda budeme brát vzdálenost čísla x od čísla y nebo obráceně. Ze školy známe trojúhelníkovou nerovnost, takže není těžké si rozmyslet, že reálná čísla s touto metrikou splňují i třetí bod z definice.

Definice 2. (*Cauchyovská posloupnost*) Uvažujme posloupnost prvků metrického prostoru M $(a_0, a_1, a_2, \dots)$ takovou, že pro jakékoli kladné pevně dané $\varepsilon > 0$ existuje index N tak, že následující nerovnost platí pro všechna $i > N$, $j > N$:

$$\rho(a_i, a_j) < \varepsilon.$$

Tedy pro libovolně malé kladné reálné číslo existuje hranice, za kterou je již vzdálenost libovolných dvou členů posloupnosti menší než toto číslo. Takovou posloupnost nazveme cauchyovskou.

Pro každou nekonečnou řadu máme definovanou posloupnost částečných součtů – například pro π je touto posloupností $(3; 3{,}1; 3{,}14; 3{,}141; 3{,}1415; 3{,}14159; \dots)$, tedy postupně přičítáme jednotlivé sčítance v nekonečné řadě. Platí, že pokud je posloupnost částečných součtů nekonečné řady cauchyovská, nekonečná řada takzvaně konverguje (její součet není roven $\pm\infty$). A v tomto případě je skutečně posloupnost $(3; 3{,}1; 3{,}14; 3{,}141; 3{,}1415; 3{,}14159; \dots)$ cauchyovská a součtem této řady je proto π.

Posloupnosti částečných součtů řad, pomocí kterých jsme vyjadřovali reálná čísla, jsou vždy cauchyovské. Pro libovolně malé nezáporné epsilon platí, že od jistého členu jsou od sebe částečné součty vzdáleny o méně, než je hodnota tohoto čísla. Například si vezměme $\varepsilon = 10^{-10}$ – pro toto malé číslo je hranicí částečný součet $a_0 \cdot 10^0 + \dots + a_{-10} \cdot 10^{-10}$, protože když si vezmeme libovolný větší částečný součet, jejich vzdálenost bude určitě menší než 10^{-10}:

$$\begin{aligned} &|(a_0 \cdot 10^0 + \dots + a_{-10} \cdot 10^{-10}) - \\ &\qquad - (a_0 \cdot 10^0 + \dots + a_{-10} \cdot 10^{-10} + a_{-11} \cdot 10^{-11} + \dots)| = \\ &\qquad\qquad = |-(a_{-11} \cdot 10^{-11} + \dots)| < 10^{-10}, \end{aligned}$$

protože $a_n \in \{0, 1, \dots, 9\}$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. A vzhledem k tomu, že tato hranice existuje pro libovolně malou mocninu 10, existuje pro všechna libovolně malá ε.

Pokud je to čtenáři trochu nejasné, doporučuji si to promyslet pro zmiňovanou posloupnost $(3; 3{,}1; 3{,}14; 3{,}141; 3{,}1415; 3{,}14159; \dots)$.

Všechny tyto znalosti nyní budeme potřebovat při popisování p-adických čísel, ale přišlo mi jednodušší je vysvětlit na reálných číslech. Ona jsou totiž p-adická čísla těm reálným hodně podobná.

p-adická čísla a p-adická absolutní hodnota

Existuje více způsobů, jak p-adická čísla definovat (pro zájemce odkazuji na [2] do sekce o p-adických číslech). Já bych vám zde ráda představila ten dle mého názoru nejjednodušší na pochopení pro středoškolské studenty.

Stejně jako můžeme reálná čísla definovat jako množinu konvergentních nekonečných řad, můžeme podobně definovat i p-adická čísla. Množinu p-adických čísel definujeme pro každé prvočíslo p následovně:

$$\mathbb{Q}_p = \left\{ \sum_{n=k}^{\infty} a_n p^n, k \in \mathbb{Z}, a_n \in \{0, 1, \dots, p-1\} \right\}.$$

Je vidět, že tato množina obsahuje všechna kladná celá čísla. Též je vidět, že každá konečná řada nám opět zadá racionální číslo (protože sčítáme konečně mnoho racionálních čísel).

Jak je to ale s těmi nekonečnými? Přeci přičítáme pořád větší mocniny p, tudíž bychom měli dostat nekonečno, protože posloupnost částečných součtů takovéto řady přeci nemůže být cauchyovská.

Trik je v tom, že na p-adických definujeme jinak vzdálenost než na reálných číslech.

Než se ale do této vzdálenosti pustíme, musíme definovat, co je to p-valuace:

Věta 1. *Pro každé prvočíslo p a každé celé nenulové n existuje právě jedno celé nezáporné $v_p(n)$ tak, že*

$$n = p^{v_p(n)} m, \quad m \in \mathbb{Z}, \quad p \nmid m.$$

Důkaz. Tato věta plyne z toho, že pro každé celé nenulové n máme jednoznačný rozklad na součin prvočinitelů (až na násobení ± 1). Následně $v_p(n)$ je rovno exponentu p v tomto rozkladu.

Definice 3. Číslo $v_p(n)$ z předchozí věty 1 nazýváme p-valuací čísla n. Valuaci rozšíříme na racionální čísla následovně: jestliže $x = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, $a, b \in \mathbb{Z}$, $\mathrm{nsd}(a, b) = 1$, potom

$$v_p(x) = v_p(a) - v_p(b).$$

Pro nulu zavedeme

$$v_p(0) = \infty.$$

Příklad 1. Pro ujasnění si uveďme příklad:

- $9 = 3^2 \implies v_3(9) = 2$,
- $4 = 2^2(3^0)$, $54 = 2^1 3^3 \implies v_3(\frac{4}{54}) = 0 - 3 = -3$,
- $3 = 3^1(5^0)$, $22 = 2^1 11^1 (5^0) \implies v_5(\frac{3}{22}) = 0 - 0 = 0$.

Pojďme se podívat na nějaké užitečné vlastnosti p-valuace:

Věta 2. *Pro všechna $x, y \in \mathbb{Q}$, platí:*

1. $v_p(xy) = v_p(x) + v_p(y)$,
2. $v_p(x + y) \geq \min\{v_p(x), v_p(y)\}$.

Důkaz. Nejprve si vezměme případ, kdy je jedno z čísel nulové. Součtem celého čísla a nekonečna rozumíme nekonečno a nekonečno považujeme za větší než libovolné celé číslo. Potom je pro tento případ jasné, že tvrzení platí.

Čísla $x \neq 0, y \neq 0$ si zapíšeme jako: $x = p^a \frac{x'}{x''}, y = p^b \frac{y'}{y''}$, $p \nmid x'x''y'y''$ a $x', x'', y', y'' \in \mathbb{Z}$.

První vlastnost dokážeme následovně:

$$v_p(xy) = v_p\left(p^a \frac{x'}{x''} p^b \frac{y'}{y''}\right) = v_p\left(p^{a+b} \frac{x'}{x''} \frac{y'}{y''}\right) = a + b = v_p(x) + v_p(y).$$

Nyní se podívejme na druhou vlastnost a řekněme bez újmy na obecnosti, že platí, že $\min\{v_p(x), v_p(y)\} = \min\{a, b\} = a$:

$$v_p(x+y) = v_p\left(p^a \frac{x'}{x''} + p^b \frac{y'}{y''}\right) = v_p\left(p^a\left(\frac{x'}{x''} + p^{b-a}\frac{y'}{y''}\right)\right) =$$
$$= a + v_p\left(\frac{x'}{x''} + p^{b-a}\frac{y'}{y''}\right) \geq \min\{a, b\}.$$

Poslední nerovnost musí platit, protože když si převedeme zlomek na stejného jmenovatele, dostaneme

$$v_p\left(\frac{x'y'' + p^{b-a}y'x''}{x''y''}\right) \geq 0,$$

neboť p může dělit $x'y'' + p^{b-a}y'x''$, ale nemůže dělit $x''y''$. Levá strana je tudíž rovna a, pokud je $b > a$, protože pak $p \nmid (x'y'' + p^{b-a}y'x'')$.

Naopak pokud je $a = b$, pak součet $x + y$ může mít jinou valuaci než $\min\{a, b\}$. Prvočíslo p totiž může dělit $x'y'' + y'x''$.

Za pomoci p-valuace můžeme zavést slibovanou p-adickou vzdálenost. Použijeme na to takzvanou p-adickou absolutní hodnotu.

Definice 4. Pro každé nenulové $x \in \mathbb{Q}$ definujeme jeho p-adickou absolutní hodnotu jako:

$$|x|_p = p^{-v_p(x)}.$$

Pokud $x = 0$, pak $|x|_p = 0$.

Nyní se pojďme zamyslet, v čem se podobá a v čem se liší od klasické absolutní hodnoty, jak jsme si ji představili před chvilkou.

Platí, že $|x|_p = 0$ právě tehdy, když $x = 0$, stejně jako u klasické absolutní hodnoty. Stejně tak platí $|xy|_p = |x|_p \cdot |y|_p$, což plyne z první části věty 2. Z druhé části této věty plyne i další vlastnost stejná s klasickou absolutní hodnotou: $|x + y|_p \leq |x|_p + |y|_p$ – tedy trojúhelníková nerovnost.

Druhá část této věty nám též umožňuje říct ještě silnější tvrzení, a to, že $|x + y|_p \leq \max\{|x|_p, |y|_p\}$ – jedná se o takzvanou nearchimédovskou vlastnost, a proto p-adické absolutní hodnotě říkáme nearchimédovská. Klasická absolutní hodnota tuto vlastnost nemá a říká se jí tudíž archimédovská.

Když si opět definujeme vzdálenost dvou čísel jako absolutní hodnotu (v tomto případě p-adickou absolutní hodnotu) jejich rozdílu, dostaneme, že stejně jako reálná čísla i p-adická čísla tvoří metrický prostor.

Díky nearchimédovské vlastnosti p-adické absolutní hodnoty platí následující věta.

Věta 3. *Posloupnost (x_n) racionálních čísel je cauchyovská vzhledem k nearchimédovské absolutní hodnotě $|\ |_p$ právě tehdy, když pro libovolně malé ε platí, že existuje index $N \in \mathbb{N}$ takový, že:*

$$|x_N - x_{N+1}|_p < \varepsilon.$$

Důkaz můžete opět nalézt v [3] v druhé kapitole nebo si ho zkusit rozmyslet.

Díky této větě platí, že p-adická čísla, jakožto nekonečné řady, mají vždy konečný součet. Posloupnosti jejich částečných součtů jsou totiž určitě cauchyovské.

Uveďme si dva konkrétní příklady nekonečných p-adických řad.

Příklad 2. Zkusme najít 3-adické vyjádření pro $\frac{1}{5}$. Pro tento zlomek platí, že pokud ho vynásobíme pětkou, dostaneme jedničku. Tento vztah musí splňovat i jejich 3-adické vyjádření. Nekonečnou řadu pro jedničku a pětku známe a tu pro $\frac{1}{5}$ si pojďme prozatím napsat pomocí neurčitých koeficientů:

$$1 = (2 + 1 \cdot 3)(a_0 + a_1 \cdot 3 + a_2 \cdot 3^2 + \dots).$$

Nyní musí platit, že $2a_0$ dává zbytek 1 po dělení třemi, tudíž $a_0 = 2$. Odtud dostaneme

$$-3^2 = (2 + 1 \cdot 3)(a_1 \cdot 3 + a_2 \cdot 3^2 + \dots),$$

tudíž $0 = 2a_1 \cdot 3 \mod 9$, což je ekvivalentní $0 = 2a_1 \mod 3$. Máme tak $a_1 = 0$. Odtud dále plyne

$$-3^2 = (2 + 1 \cdot 3)(a_2 \cdot 3^2 + a_3 \cdot 3^3 + \dots),$$

tedy $-3^2 = 2a_2 \cdot 3^2 \mod 3^3$, což je ekvivalentní $-1 = 2a_2 \mod 3$. Platí proto $a_2 = 1$. Odtud nyní dostaneme

$$-2 \cdot 3^3 = (2 + 1 \cdot 3)(a_3 \cdot 3^3 + a_4 \cdot 3^4 + \dots),$$

tudíž $-2 \cdot 3^3 = 2a_3 \cdot 3^3 \mod 3^4$, což je ekvivalentní $-2 = 2a_3 \mod 3$. Máme tak $a_3 = 2$. Podobným uvažováním bychom postupně spočítali i zbytek koeficientů pro $\frac{1}{5}$ a dostali, že $\frac{1}{5} = \dots 1012\ 1012\ 1012\ 102|_3$. Pro přehlednost píšeme 3-adické vyjádření pouze pomocí koeficientů (jako bychom psali číslo v trojkové soustavě).

Dalším příkladem nekonečných p-adických řad jsou vyjádření pro záporná racionální čísla. My se podíváme na vyjádření záporných celých čísel, protože se s nimi lépe počítá.

Příklad 3. Podívejme se na 3-adické vyjádření čísel 1, 2, 3, 4, 5:

$$1 = 1|_3, \quad 2 = 2|_3, \quad 3 = 10|_3, \quad 4 = 11|_3, \quad 5 = 12|_3.$$

Nyní hledáme vyjádření pro čísla -1, -2, -3, -4 a -5. Když tato čísla přičteme k jejich číslům opačným, dostaneme nulu.

Podívejme se na -1, jako koeficient a_0 musí mít 2, protože po sečtení s $1|_3$ dostaneme na pozici jednotek 0. Nicméně nám přeteče jednička na další pozici, tudíž $a_1 = 2$, abychom opět dostali nulu. A znovu nám přetekla jednička, takže též přidáme dvojku a když budeme pokračovat dál dostaneme: $-1 = \dots 2222|_3$. Stejným uvažováním dostaneme i vyjádření pro ostatní záporná čísla:

$$-2 = \dots 2221|_3,\ -3 = \dots 22220|_3,\ -4 = \dots 22212|_3,\ -5 = \dots 22211|_3.$$

Příklad 4. Stejně bychom pracovali i s jinými prvočísly než je 3. Můžeme se zamyslet, jak by obecně vypadala -1 v p-adickém vyjádření. Platí, že 1 vypadá ve všech p soustavách následovně: $1 = 1|_p$. Tudíž $-1 = \ldots(p-1)(p-1)(p-1)(p-1)|_p$.

Díky nearchimédovské vlastnosti p-adické absolutní hodnoty též platí, že v p-adickém prostoru jsou všechny trojúhelníky rovnoramenné. Což znamená, že když si vezmeme libovolná tři p-adická čísla a spočítáme jejich vzdálenosti, vždy se budou alespoň dvě z těchto tří hodnot rovnat.

Věta 4. *V p-adickém prostoru jsou všechny trojúhelníky rovnoramenné.*

Důkaz. Mějme tři p-adická čísla x, y, z. Ukážeme, že pokud

$$|x-y|_p \neq |y-z|_p,$$

tak platí:

$$|x-z|_p = \max\{|x-y|_p, |y-z|_p\}.$$

Díky symetrii mezi x a z můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že $|x-y|_p < |y-z|_p$. Z nearchimédovské vlastnosti plyne

$$|x-z|_p \leq \max\{|x-y|_p, |y-z|_p\} = |y-z|_p.$$

Podobně

$$|y-z|_p \leq \max\{|y-x|_p, |x-z|_p\} = \max\{|x-y|_p, |x-z|_p\}.$$

Maximum vpravo nemůže být $|x-y|_p$, protože $|x-y|_p < |y-z|_p$. Je to tedy $|x-z|_p$. Z čehož dostaneme $|x-z|_p = |y-z|_p$, což jsme chtěli dokázat.

V p-adickém prostoru se též velice zajímavě chovají koule. Pojďme si nejprve zadefinovat, co to taková koule je:

Definice 5. Otevřenou p-adickou kouli o poloměru r a středu $a \in \mathbb{Q}_p$ definujeme následovně:

$$B(a,r) = \{x \in \mathbb{Q}_p, |x-a|_p < r\}.$$

A uzavřenou p-adickou kouli o poloměru $r \in \mathbb{R}$ a středu $a \in \mathbb{Q}_p$ definujeme následovně:

$$\bar{B}(a,r) = \{x \in \mathbb{Q}_p, |x-a|_p \leq r\}.$$

Pro p-adické koule platí následující tvrzení:

Věta 5.

1. *Pokud* $b \in B(a, r)$*, pak*

$$B(a, r) = B(b, r).$$

   Jinými slovy, každý bod ležící v otevřené kouli je jejím středem.

2. *Mějme* $a, b \in \mathbb{Q}_p$*,* $r, s \in \mathbb{R}$*, pro která platí*

$$B(a, r) \cap B(b, s) \neq \emptyset,$$

   potom platí, že

$$B(a, r) \subset B(b, s) \quad \textit{nebo} \quad B(b, s) \subset B(a, r).$$

   Tedy každé dvě otevřené koule se buď neprotínají, nebo jedna leží v té druhé.

Důkaz. Vzhledem k tomu, že $b \in B(a, r)$, platí, že $|b - a|_p < r$. Vezměme si libovolné $x \in B(a, r)$, $x \neq b$. Tudíž opět platí $|x - a|_p < r$. Z nearchimédovské vlastnosti plyne:

$$|x - b|_p \leq \max\{|x - a|_p, |b - a|_p\} < r.$$

Tedy $x \in B(b, r)$, z čehož plyne

$$B(a, r) \subset B(b, r).$$

Když prohodíme a a b, dostaneme opačnou inkluzi, z čehož plyne, že jsou tyto dvě koule shodné.

Nyní se podívejme na druhé tvrzení. Bez újmy na obecnosti řekněme, že $r \leq s$. Podle zadání musí existovat $c \in B(a, r) \cap B(b, s)$. Potom podle prvního tvrzení víme, že

$$B(a, r) = B(c, r) \quad \text{a} \quad B(b, s) = B(c, s).$$

Z toho dostaneme:

$$B(a, r) = B(c, r) \subset B(c, s) = B(b, s),$$

což je to, co jsme chtěli dokázat.

Toto tvrzení platí i pro uzavřené koule a dokazuje se stejně.

Důležitou uzavřenou koulí v p-adických číslech je koule se středem v nule a poloměrem jedna, nazýváme ji množinou celých p-adických čísel:

$$\bar{B}(0,1) = \mathbb{Z}_p = \{x \in \mathbb{Q}_p, |x - 0| \leq 1\}.$$

Též se dá zapsat následovně:

$$\mathbb{Z}_p = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n p^n, a_n \in \{0, 1, \ldots, p-1\} \right\}.$$

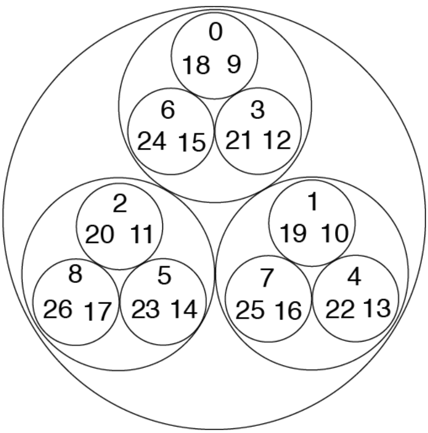
Je vidět, že její podmnožinou jsou celá čísla, protože všechna celá čísla mají p-adickou absolutní hodnotu menší nebo rovnu jedné.

Celá p-adická čísla mají spoustu užitečných vlastností, o kterých se můžete dozvědět v [3, kapitola 3].

p-adická čísla v prostoru

Další zvláštností p-adických čísel je, že není jednoduché si je představit v prostoru. Netvoří totiž souvislý prostor jako reálná čísla.

Ale díky tomu, že je máme vyjádřené jako dané nekonečné řady, můžeme si je představit následovně: máme p koleček, v každém z nich p menších koleček, a tak to pokračuje dál. Na obr. 1 vidíme případ, kdy $p = 3$. Pro zjednodušení jsou na obrázku jenom celá p-adická čísla. Největší koule je tedy $\bar{B}(0,1)$ a v ní jsou postupně koule o poloměru $\frac{1}{p}$, $\frac{1}{p^2}$ atd.

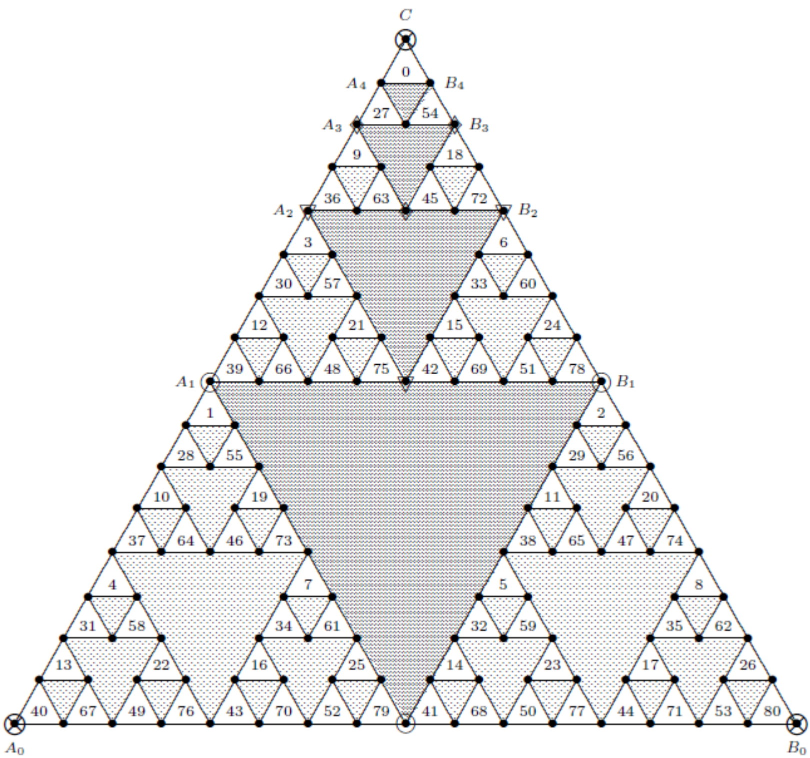


Obr. 1 [8]

A jak se umisťují čísla do koleček? Čísla se stejným koeficientem u p^0 umístíme do stejného kolečka. Následně v tomto kolečku roztřídíme čísla do p menších koleček podle koeficientu u p^1 atd. Pro p-adická čísla platí, že čím menší kolečko spolu sdílejí, tím jsou si p-adicky blíže.

Příklad 5. Například 26 napíšeme 3-adicky jako $2+2\cdot 3+2\cdot 3^2$. Následně 17 napíšeme 3-adicky jako $2+2\cdot 3+3^2$ a 23 napíšeme jako $2+3+2\cdot 3^2$. Všechna tato čísla mají koeficient u p^0 dva, proto spolu sdílejí větší kolečko. Koeficient u p^1 mají 26 a 17 opět dva, proto spolu sdílejí i menší kolečko, ale 23 má tento koeficient roven jedné, proto je v jiném kolečku. A kdyby se do koleček rozdělovaly dál, tak 17 a 26 spolu už menší kolečko sdílet nebudou, protože koeficient u p^2 už mají různý.

Hezky se dají celá 3-adická čísla znázornit pomocí doplnění do Sierpiňského trojúhelníku (obr. 2).



Obr. 2

Vidíme zde čísla ve vzdálenosti 0, $\frac{1}{27}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{3}$ a 1 od nuly. Nahoře vidíme nulu a pod ní jsou čísla, co jsou jí nejblíže, 27 a 54, ve vzdálenosti $\frac{1}{27}$. Dva trochu větší trojúhelníčky pod body A_3 a B_3 obsahují čísla ve vzdálenosti $\frac{1}{9}$ od nuly. Dva ještě větší trojúhelníky pod body A_2 a B_2 obsahují čísla ve vzdálenosti $\frac{1}{3}$ od nuly a ty největší trojúhelníky pod body A_1 a B_1 obsahují čísla ve vzdálenosti 1 od nuly.

Doufám, že je z obrázků jasné, že i když se p-adická čísla v něčem podobají těm reálným, v mnoha případech se chovají odlišně, protože nejsou uspořádaná lineárně.[1)]

Využití p-adických čísel v matematice

Významné využití v matematice má například p-adická analýza, kde sice existuje spousta zajímavých tvrzení, která neplatí v reálné analýze, ale zase se zde daleko hůř pracuje s derivacemi.

Jeden z důvodů, proč jsou p-adická čísla tak užitečná, je, že kromě reálných a p-adických čísel neexistují žádné další množiny obsahující racionální čísla s takovými vlastnostmi, jako mají tyto množiny. V matematice je někdy těžké rozhodnout, zda tvrzení platí pro racionální čísla, a využívá se toho, že se tato tvrzení prvně zkoumají pro reálná a p-adická čísla. Například platí, že kvadratická forma má řešení nad racionálními čísly, právě když má řešení v reálných číslech a ve všech p-adických.

Jako důkaz, jak moc aktuálním tématem v matematice p-adická čísla jsou, může posloužit fakt, že je využil Andrew Wiles při svém důkazu Velké Fermatovy věty a můžeme je nalézt i ve dvou Problémech tisíciletí.

Kdybyste se chtěli podívat na nějaké trochu pochopitelnější využití p-adických čísel, doporučuji se podívat na důkaz, že čtverec není možné rozdělit na lichý počet trojúhelníků stejného obsahu, který využívá 2-adických čísel. Podrobný důkaz můžete nalézt v [1] a [6].

Poděkování

Závěrem bych chtěla poděkovat svému recenzentovi za spoustu dobrých rad a připomínek.

[1)] Mějme relaci $\mathcal{R}$ na množině X a tři prvky $a, b, c \in X$. Potom tuto relaci nazveme lineárním uspořádáním, pokud splňuje, že je

– tranzitivní ($a\mathcal{R}b \wedge b\mathcal{R}c \implies a\mathcal{R}c$),
– slabě asymetrická ($a\mathcal{R}b \wedge b\mathcal{R}a \implies a = b$) a
– trichotomická ($a\mathcal{R}b \vee b\mathcal{R}a \vee a = b$). [7]

Literatura

[1] Dlab, V., Bečvář, J.: *Od aritmetiky k abstraktní algebře.* 2. vydání, ČVUT, Praha, 2022.

[2] Kato, K., Saitō, T., Kurokawa, N.: *Fermat's Dream.* Number theory, 186, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 2000.

[3] Heroudková, A.: *p-adická čísla.* Masarykova univerzita, Brno, 2021, `https://socv2.nidv.cz/archiv43/getWork/hash/e2ad1406-9303-11eb-acaf-005056bd6e49`.

[4] Khrennikov, A., Lopéz, M. C., Oleschko, K.: *Applications of p-adic numbers: from physics to geology.* In: *Advances in Non-Archimedean Analysis*, Contemporary mathematics, 665,2016, `https://www.researchgate.net/publication/303480790_Applications_of_-adic_numbers_from_physics_to_geology`.

[5] Khrennikov, A.: Ultrametric diffusion equation on energy landscape to model disease spread in hierarchic socially clustered population. *Physica A*, 583 (2021), č. 126284, s. 1–14. https://doi.org/10.1016/j.physa.2021.126284

[6] Verrill, H. A.: *Dissecting a square into triangles.* Louisiana State University, 2004, `https://web.archive.org/web/20100818142143/http://www.math.lsu.edu/~verrill/teaching/math7280/triangles.pdf`.

[7] Wikipedia: Lineární uspořádání. `https://cs.wikipedia.org/wiki/Line%C3%A1rn%C3%AD_uspo%C5%99%C3%A1d%C3%A1n%C3%AD`

[8] `https://static.scientificamerican.com/blogs/assets/Image/3adic3.png`

Počet jedniček v číslech od 1 do 1000

Milá redakce,

není to dlouho, co jsme se učili i celé týdny on-line. Učit matematiku, zejména názorně a jednoduše vysvětlovat slovní úlohy, bylo náročné pro učitele i žáky. Na druhou stranu vzniklo mnoho inspirativních situací, metod i jednotlivých úloh, které vyšly na světlo právě díky nezvyklým podmínkám.

čas od času se rád odkloním od standardního učiva a předložím žákům i sobě nějakou matematickou výzvu. Z jednoduchých námětů tak často vzniknou i docela složité, přitom velmi zábavné úlohy. žákům 5. ročníku jsem předložil tuto úlohu: *Spočítejte, kolik jedniček (cifer) je v číslech od 1 do 100.* Řešení úlohy jsem nechal zcela na žácích a k mému překvapení na ní pracovali velmi samostatně a v týmovém duchu. Došli jsme k nějakému výsledku (ten si může zvídavý čtenář sám objevit) a pak jsem zadal dětem dobrovolný domácí úkol, aby si spočítaly, kolik jedniček je v číslech od 1 do 1000. Velmi mě udivila pozitivní reakce jednoho tatínka, který s dcerou celý večer úlohu počítal a poslal mi e-mailem správné řešení, na které spolu přišli. S velkou radostí jsem žákyni dal velkou jedničku.

Zajímalo by mě, jestli existuje nějaký obecný postup, jak spočítat počet výskytů vybrané číslice v daném souboru čísel, např. zjistit, kolik jedniček je v číslech od 1 do milionu.

S pozdravem D.V. učitel z Prahy

Jak často se jednička vyskytne v dekadickém zápisu čísel?

Děkujeme panu učiteli D.V. za přínosnou otázku ohledně zápisu přirozených čísel. Ihned v začátku upřesněme, že se jedná o desítkový (dekadický) zápis čísel

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ 47,\ \ldots,\ 122,\ \ldots,\ 277,\ \ldots,\ 314\,159,\ \ldots,\ 153\,575\,832,\ \ldots$$

Ukážeme různé způsoby řešení, jak počet výskytů cifry jedna v dané množině přirozených čísel určit: od jednoduchého sledování a přičítání výskytu jednotlivých jedniček v daném seznamu uvažovaných čísel až po elegantní způsob, jak otázku okamžitě, bezprostředně zodpovědět. Právě tento okamžik poskytuje příležitost poukázat na jednu ze základních charakteristik matematiky, totiž na abstrakci! Jednotlivé kroky v postupu řešení jsou číslovány. Věříme, že ve výuce elementární matematiky může být takový přístup velice poučný a záslužný.

1. V řešení úlohy jednoduchým sečítáním jedniček z daného seznamu čísel jsme samozřejmě ihned omezeni velikostí skupiny čísel. Zkontrolovat všechna čísla od 1 do 10 nebo od 1 do 100 je snadné, od 1 do 1 000 už namáhavější a patrně od 1 do 10 000 ještě možné. Připustíme-li, že každou vteřinu bychom zkontrolovali čtyři čísla, trvalo by naše určení počtu jedniček v číslech od 1 do 10 000 téměř 42 minut, v číslech od 1 do 100 000 téměř 7 hodin a v číslech od jedné do milionu téměř 70 hodin! Ohromuje vás to? A co teprve, když si uvědomíte, že k určení počtu jedniček v číslech od jedné do bilionu (tj. do 10^{12}) tímto způsobem bychom potřebovali téměř osm tisíciletí!

Jednoduchým výpočtem tedy snadno zjistíme, že v zápisu čísel od 1 do 10 jsou jedničky 2, od 1 do 100 jich je 21 a od 1 do 1 000 jich je 301. Přitom si všimneme, že je vhodné uvažovat skupiny

– jednociferných čísel, tj. čísel od 0 do 9,
– jednociferných a dvojciferných čísel od 0 do 99 a
– jednociferných, dvojciferných a trojciferných čísel od 0 do 999;

v těchto skupinách je postupně 10 čísel, 100 čísel a 1 000 čísel. Počty jedniček v zápise čísel v těchto skupinách jsou 1, 20 a 300.

2. Předchozího poznání nyní využijeme k tomu, abychom v tomto odstavci popsali metodu, kterou lze použít pro jakkoli velké skupiny čísel. Předvedeme ji pro počet jedniček v 10 000 číslech od 0 do 9 999. Pro snadné vyjadřování, a především pro nakládání se všemi číslicemi včetně nuly stejně, rovnoměrně, budeme čísla v našem souboru zapisovat ve tvaru čtveřic (tj. každé jednociferné, dvojciferné či trojciferné číslo doplníme na čtveřici přidáním nul na začátek zápisu):

$$0 \sim 0000,\ 1 \sim 0001,\ 2 \sim 0002,\ \ldots,\ 9 \sim 0009,\ 10 \sim 0010,\\ 11 \sim 0011,\ 12 \sim 0012,\ \ldots,\ 47 \sim 0047,\ \ldots,\ 277 \sim 0277,\ \ldots,\\ 3\,145 \sim 3145,\ \ldots,\ 9\,999 \sim 9999.$$

Nyní začneme počítat: čísla mající ve svém dekadickém zápisu právě jednu jedničku jsou tvaru

$$\mathrm{xxx1},\ \mathrm{xx1x},\ \mathrm{x1xx}\ \text{a}\ \mathrm{1xxx},\ \text{kde x je jakákoliv číslice různá od 1.}$$

Proto je takových čísel $4 \cdot 9^3$.

Čísla mající ve svém dekadickém zápisu právě dvě jedničky jsou tvaru xx11, x1x1, 1xx1, x11x, 1x1x a 11xx, kde x je kterákoliv číslice různá od 1. Takových čísel je $6 \cdot 9^2$ a obsahují $6 \cdot 9^2 \cdot 2$ jedniček.

Čísla mající ve svém dekadickém zápisu právě tři jedničky jsou tvaru x111, 1x11, 11x1 a 111x, kde x je kterákoliv číslice různá od 1. Takových čísel je tedy $4 \cdot 9$ a obsahují $4 \cdot 9 \cdot 3$ jedniček.

Číslo 1111 má ve svém dekadickém zápisu 4 jedničky. Počet jedniček v číslech od 0 do 9 999 je tedy

$$4 \cdot 9^3 + 6 \cdot 9^2 \cdot 2 + 4 \cdot 9 \cdot 3 + 4 = 2\,916 + 972 + 108 + 4 = 4\,000.$$

3. Proveďme nyní tento výpočet pro počet jedniček v dekadickém zápisu čísel od 1 do 10^n pro libovolné přirozené číslo n. S výjimkou posledního čísla $10^n = 1000\ldots 0\,(n$ nul) a přidáním nuly, uvažujme 10^n čísel od 0 do $10^n - 1$ ve tvaru n-tic xxx…x, v nichž x reprezentuje libovolnou číslici od 0 do 9.

V následujících výpočtech využijeme binomické koeficienty

$$a_{n,k} = \frac{k}{n}\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} \quad \text{pro} \;\; k \in \{1, \ldots, n\},$$

které můžeme výhodně zobrazit ve tvaru Pascalova trojúhelníku

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccc}
&&&&&&&&& a_{1,1}{=}1 &&&&&&&&& \\
&&&&&&&& a_{2,1}{=}1 && 1 &&&&&&&& \\
&&&&&&& a_{3,1}{=}1 && a_{3,2}{=}2 && 1 &&&&&&& \\
&&&&&& a_{4,1}{=}1 && 3 && 3 && 1 &&&&&& \\
&&&&& a_{5,1}{=}1 && 4 && a_{5,3}{=}6 && 4 && 1 &&&&& \\
&&&& a_{6,1}{=}1 && 5 && 10 && 10 && 5 && 1 &&&& \\
&&& a_{7,1}{=}1 && 6 && 15 && a_{7,4}{=}20 && 15 && 6 && 1 &&& \\
&& a_{8,1}{=}1 && 7 && 21 && 35 && 35 && 21 && 7 && 1 && \\
& a_{9,1}{=}1 && 8 && 28 && 56 && a_{9,5}{=}70 && 56 && 28 && 8 && 1 & \\
a_{10,1}{=}1 && 9 && 36 && 84 && 126 && 126 && 84 && 36 && 9 && 1 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots &&&&&&&&
\end{array}$$

Zde n označuje pořadí řádků a členy trojúhelníku splňují Al-Karajiho rovnosti

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \;\text{ a }\; \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k} \;\text{pro}\; n \geq k \;\geq 1.$$

Připomeňme, že $\binom{n}{k}$ je číslo udávající počet podmnožin s k prvky množiny o n prvcích. Pro každé n definujeme $\binom{n}{0} = 1$. Dále budeme potřebovat binomickou větu: Pro libovolná reálná čísla a, b a n přirozené platí

$$\sum_{t=0}^{n} \binom{n}{t} a^t b^{n-t} = (a+b)^n.$$

Nyní už počítejme: Uvažujme n-tice xxx...xx, v nichž je právě jedno $\mathrm{x} = 1$, tj. n-tice tvaru 1xx...xx, x1x...xx, ..., xxx...x1. Počet jedniček v zápisu všech čísel v každém takovém případě je 9^{n-1}. Celkový počet jedniček v číslech, které mají ve svém zápisu právě jednu jedničku, je tedy

$$\binom{n}{1} \cdot 9^{n-1} = n \cdot \binom{n-1}{0} \cdot 9^{n-1}.$$

Podobně je $\binom{n}{2} \cdot 9^{n-2}$ n-tic, které mají ve svém zápisu právě dvě jedničky. Přispívají tedy do konečného počtu jedniček

$$\binom{n}{2} \cdot 2 \cdot 9^{n-2} = n \cdot \binom{n-1}{1} \cdot 9^{n-2}$$

jedničkami.

Stejným způsobem se přesvědčíme, že pro $k \leq n$ je $\binom{n}{k} \cdot 9^{n-k}$ n-tic, které mají ve svém zápisu právě k jedniček. Přispívají tedy k celkovému počtu jedniček

$$\binom{n}{k} \cdot k \cdot 9^{n-k} = n \cdot \binom{n-1}{k-1} \cdot 9^{n-k}$$

jedničkami. Celkový počet jedniček v dekadickém zápisu čísel od 0 do $10^n - 1 = 999\ldots99$ je tedy (použitím binomické věty)

$$\sum_{t=0}^{n-1} n \cdot \binom{n-1}{t} \cdot 9^{(n-1)-t} = n \cdot (9+1)^{n-1} = n \cdot 10^{n-1}.$$

Odtud dostáváme postupně počty jedniček 1, 20, 300, 4 000, 50 000, 600 000, ... v zápisu čísel od 0 do $9 = 10 - 1$, do $99 = 100 - 1$, do $999 = 1\,000 - 1$, do $9\,999 = 10\,000 - 1$, do $99\,999 = 100\,000 - 1$, do $999\,999 = 1\,000\,000 - 1$, ...

4. Nyní si stačí pouze uvědomit, že naprosto stejným způsobem, jakým jsme odvodili počet jedniček od 0 do $10^n - 1$, lze odvodit počet dvojek, trojek, ..., devítek i nul. Vezmeme-li v úvahu všech deset číslic, dostáváme $10 \cdot n \cdot 10^{n-1} = n \cdot 10^n$, což je počet všech číslic (cifer) v zápisu všech čísel od 0 do $10^n - 1$ ve tvaru n-tic.

Tento závěr nás přivedl k velmi stručnému a výstižnému řešení otázky pana učitele, které zde nyní formálně předvedeme (*bez jakékoliv reference na předchozí úvahy*).

Tvrzení 1. *Počet jedniček v dekadickém zápisu čísel od* 1 *do* 10^n *je*

$$n \cdot 10^{n-1} + 1.$$

Důkaz. Dekadický zápis každého čísla $k, 0 \leq k \leq 10^n - 1$, vyjádřeme ve formě n-tice doplněním potřebného počtu nul na předních místech. Např. číslo 277 bude ve formě sedmice ($n = 7$) vyjádřeno takto: 0000277. Ve formě dvanáctice ($n = 12$) to bude 000000000277. Označme M množinu těchto 10^n n-tic. K vyjádření všech těchto n-tic potřebujeme tedy $N = n \cdot 10^n$ číslic. Jelikož se v této reprezentaci uvedených čísel vyskytne stejný počet každé z 10 číslic, tj. stejný počet nul, jedniček, dvojek, ..., devítek, každá z číslic se vyskytne $\frac{N}{10}$-krát. Odtud plyne, že počet každé z číslic x, $0 \leq x \leq 9$, potřebných k vyjádření všech 10^n n-tic je $n \cdot 10^{n-1}$. Stačí pouze dodat, že přidáním čísla 10^n zvětšíme počet jedniček v zápisu čísel od 1 do 10^n o jednu na $n \cdot 10^{n-1} + 1$.

5. Již jsme zmínili, že počet dvojek, či trojek, ..., či devítek je v dekadickém zápisu čísel od 1 do 10^n vždy $n \cdot 10^{n-1}$. Otázkou tedy zbývá pouze počet nul potřebných k záznamu všech čísel od 1 do 10^n. Odpověď je dána v následujícím tvrzení.

Tvrzení 2. *Počet nul v dekadickém zápisu čísel od* 1 *do* 10^n *je*

$$\frac{10^{n-1} \cdot (9n - 10) + 9n + 1}{9}.$$

Důkaz tohoto tvrzení ponecháváme čtenáři. Stačí například spočítat, kolik nul užitých v zápisu všech čísel od 0 do $10^n - 1$ ve formě n-tic není v dekadickém zápisu čísel od 1 do 10^n zapotřebí.

K dekadickému zápisu všech čísel od jedné do milionu je tedy zapotřebí 488 895 nul, 600 001 jedniček a 600 000 každé z ostatních číslic. Pro zápis všech čísel od jedné do bilionu je zapotřebí 1 088 888 888 901 nul, 1 200 000 000 001 jedniček a 1 200 000 000 000 každé z ostatních číslic.

Měření Machova čísla v okrajovém plazmatu tokamaku GOLEM

Matyáš Pokorný, Gymnázium Jana Nerudy, Praha

Abstrakt. Článek vychází z práce SOČ ročníku 2022 z oboru č.2 Fyzika, která byla provedena na tokamaku GOLEM FJFI ČVUT. Jeho cílem je čtenáři představit problematiku sondového měření okrajového plazmatu a přiblížit, jakým způsobem je možné jej zkoumat pomocí Machova čísla. Představené metody jsou poté demonstrovány vlastním experimentem.

1. Termojaderná fúze a tokamaky

Termojaderná fúze (TF) je fyzikální proces, při kterém se za vysoké teploty slučují jádra lehčích prvků na těžší za uvolňování velkého množství energie, což je proces opačný jadernému štěpení. Hmotnost vzniklého jádra je menší než celková hmotnost sloučených jader a tento rozdíl v hmotnosti je uvolněn jako energie podle známého vztahu $\Delta E = \Delta mc^2$. Pro navození tohoto procesu se momentálně plánuje využít reakce mezi jádrem deuteria a tritia, tj. deuteronem a tritonem:

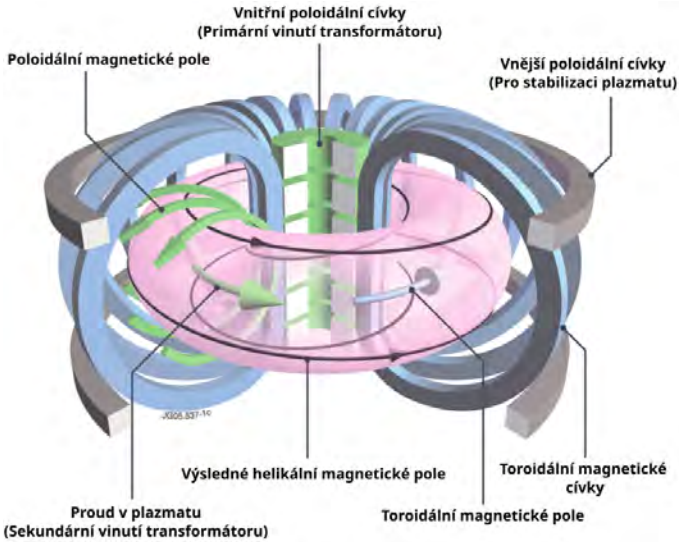
$$^2_1\mathrm{D} + {}^3_1\mathrm{T} \to {}^4_2\mathrm{He} + {}^1_0\mathrm{n} + 17,59\ \mathrm{MeV}.$$

Tritium $^3_1\mathrm{T}$ je možné tvořit přímo při TF pomocí uvolněných neutronů $^1_0\mathrm{n}$ a lithia a deuterium $^2_1\mathrm{D}$ se vyskytuje přírodně v oceánech.[1)] Paliva pro tuto reakci je na Zemi tedy dostatek. Produktem reakce je prostředí neškodné helium, neutron a 17,59 MeV energie ($1\ \mathrm{eV} = 1{,}602 \cdot 10^{-19}$ J). Energie uvolněná s $^4_2\mathrm{He}$ udržuje chod reakce a energie $^1_0\mathrm{n}$ je zpracovaná pro distribuci.

TF tedy poskytuje efektivní zdroj energie, který je udržitelný, jeho palivo je dostupné a odpadní látky prakticky neškodné. Problém TF je ten, že je velice obtížné jí dosáhnout (a udržet) v takových podmínkách, že energii produkuje, nikoli spotřebovává. Za pozemských podmínek musí být teplota látek vstupujících do reakce $T \approx 160 \cdot 10^6$ K, aby reakce produkovala energii a jakákoliv látka je při této teplotě v plazmatickém skupenství. Nejslibnější cestou k vytvoření, zažehnutí a udržení zažehnutého plazmatu pro TF se zdá být využití tzv. tokamaku.

1) V poměru atom deuteria ku atomu lehkého vodíku 1 : 6420.

Plazma v tokamaku můžeme popsat jako ionizovaný plyn. Částice mezi sebou nemají žádné nebo velmi slabé vazby, ale na rozdíl od plynu se v plazmatu nepohybují atomy či molekuly, ale ionty a elektrony. Tokamak pro spoutání plazmatu využívá magnetických cívek, jelikož ionty a elektrony jsou elektricky nabité částice. Jeho hlavními komponentami jsou toroidální komora, transformátorové jádro, centrální cívka a cívky toroidálního a poloidálního magnetického pole. Plazma je zažehnuto v komoře, kde je ohříváno pomocí elektrického proudu indukovaného centrální cívkou a udrženo magnetickým polem ve tvaru šroubovice. Tokamak je schématicky zobrazen na obr. 1.



Obr. 1: Schéma magnetického systému tokamaku

2. Sondové měření okrajového plazmatu

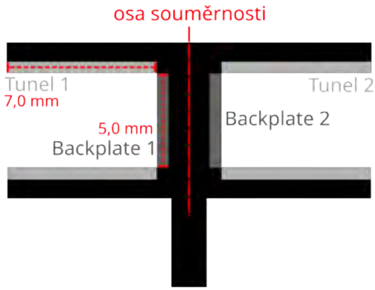
Zkoumat, jakým způsobem se při výboji[2)] chová plazma, můžeme různými způsoby a my se konkrétně zaměříme na zkoumání okrajového plazmatu pomocí elektrických sond. Sonda je relativně malý vodivý předmět, který se v průběhu výboje nachází na okraji plazmatu. Podle proudu částic, který na sondu dopadá v průběhu výboje, můžeme zjistit mnoho o charakteru plazmatu.

[2)] Výbojem nazýváme navození a udržení plazmatu v tokamaku.

Konkrétním využitím sond je zkoumání tvoření a rychlosti vírů či jiných toků částic v okrajovém plazmatu. Takovýto výzkum je důležitý, jelikož rychlost rotace plazmatu napomáhá jeho stabilitě a víry „trhají“ různé nežádoucí plazmatické struktury, jako např. turbulence. Pro zkoumání rychlosti toků částic v okrajovém plazmatu můžeme využít tzv. dvojité tunelové sondy, se kterou se nyní seznámíme.

2.1 Dvojitá tunelová sonda

Dvojitá tunelová sonda obsahuje čtyři elektrody, dvě elektrody „tunel“ (TN) a dvě elektrody „backplate“ (BP). Je osově symetrická a na každé její straně se v dutině nachází elektroda TN a BP. Všechny elektrody jsou od sebe vzájemně izolovány. Samotná sonda je zobrazena na obr. 2.a a její schématický průřez je na obr. 2.b.



Obr. 2: a) Dvojitá tunelová sonda b) Schéma průřezu dvojité tunelové sondy

Tato specifická konstrukce sondy nám umožňuje zkoumat lokální rychlost toků částic v okrajovém plazmatu. Při výboji na sondu pomocí externího zdroje přikládáme dostatečně vysoké záporné napětí tak, aby veškeré elektrony v plazmatu byly odpuzeny a na sondu dopadaly pouze ionty. Takovýto proud částic nazýváme iontový saturovaný proud I_{sat}^{+}. Díky faktu, že se elektrody nachází v dutinách těla sondy, je zde obsaženo i jejich elektrické pole. Proto při zvyšování záporného napětí na sondě se proud částic v jeden moment stane „saturovaným ionty“, jelikož na sondu dopadá maximální počet iontů. Se znalostí principu dvojité tunelové sondy nyní přejděme ke způsobu, jakým s její pomocí provádíme měření a výpočty.

2.2 Měření pomocí dvojité tunelové sondy

Nejprve se seznamme s pojmem „úhlový profil“, který je pro následující výpočty zásadní. Úhlový profil je závislost parametru okrajového plazmatu na úhlu sondy vůči magnetickým siločárám. Zaveďme úhel α, který svírá normála sondy vůči magnetickým siločárám (sonda je orientovaná rovnoběžně s magnetickými siločárami, když $\alpha = 90°$). Pro nás je poté důležitý úhlový profil $I^+_{sat}(\alpha)$ pro $\alpha \in [0°, 360°]$.

V rámci následujících výpočtů a metod se budeme snažit zjistit rychlost toků částic v okrajovém plazmatu v okolí sondy. Tuto rychlost zkoumáme pomocí tzv. Machova čísla M, které je definováno jako:

$$M = \frac{v_i}{c_i},$$

kde v_i značí rychlost objektu v určitém prostředí a c_i značí rychlost zvuku ve stejném prostředí. V kontextu TF se M nechová stejně, jako v jiných oborech. Pro nás bude popisovat rychlost plazmatu v okolí sondy v prostředí okrajového plazmatu, tedy u okraje komory tokamaku. Standardně M dělíme na jeho složku rovnoběžnou s magnetickými siločárami $M_\parallel$ a složku kolmou na magnetické siločáry $M_\perp$.

Podle výzkumu indického tokamaku ADITYA [1] můžeme využít následující rovnici, která udává vztah mezi oběma složkami M:

$$M_\parallel = K \cdot \ln(R_\alpha) + M_\perp \operatorname{cotg} \alpha, \tag{1}$$

kde K je kalibrační konstanta, kterou je nutné zjistit experimentálně a R_α je poměr I^+_{sat} na opačných stranách dvojité tunelové sondy:

$$R_\alpha = \frac{I^+_{sat}(\alpha)}{I^+_{sat}(\alpha + 180°)}. \tag{2}$$

Člen R_α známe pro libovolný úhel α, pokud jsme změřili úhlový profil I^+_{sat}. Nicméně v rovnici (1) jsou tři neznámé K, $M_\parallel$ a $M_\perp$ a nemůžeme tedy žádnou složku M spočítat přímo. V rámci SOČ byly využity dvě metody výpočtu M inspirované článkem [1], se kterými se nyní teoreticky seznámíme a poté uvedeme výsledky konkrétního měření.

2.3 První metoda výpočtu M

V rámci první metody budeme nuceni provést dvě zjednodušení. Všimněme si nejprve, že v rovnici (1) člen $M_\perp \operatorname{cotg} \alpha = 0$, pokud $\alpha = 90°$, tedy při orientaci sondy rovnoběžně s magnetickými siločárami. V této orientaci tedy můžeme využít vztahu:

$$M_\parallel = K \cdot \ln(R_{90°}). \tag{3}$$

Pro dopočítání $M_{\parallel}$ pro tento případ musíme převzít kalibrační konstantu K z předešlého měření či měření na jiném tokamaku. Poté, za silného (až nerealistického) předpokladu, že $M_{\parallel}$ zůstává konstantní pro každý další úhel α, můžeme pomocí rovnice (1) dopočítat $M_{\perp}$ pro libovolný úhel. Nakonec provedeme průměr hodnot $M_{\perp}$ a získáme průměrnou hodnotu M pro rychlost plazmatu v okolí sondy.

2.4 Druhá metoda výpočtu M

Druhá metoda výpočtu Machova čísla nám umožňuje provést menší či žádné zjednodušení, ale vyžaduje vyšší počet měření v rámci úhlového profilu I^{+}_{sat}. Nejprve vyjádříme z rovnice (1) známý člen $\ln(R_\alpha)$:

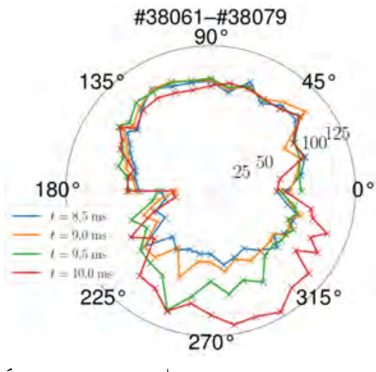
$$\ln(R_\alpha) = \frac{M_{\parallel} - M_{\perp} \operatorname{cotg} \alpha}{K}. \tag{4}$$

Nyní se dívejme na levou část rovnice jako na funkci $f_L(\alpha)$ a na pravou jako funkci $f_R(\alpha)$. Pokud změříme úhlový profil I^{+}_{sat}, známe tím průběh $f_L(\alpha)$ (viz (2)). Aby byla poté splněna uvedená rovnost, musí si průběhy obou funkcí být co nejpodobnější. Takové hodnoty K, $M_{\parallel}$, $M_{\perp}$, při kterých je splněna rovnost, určíme pomocí počítačového programu.

3. Výsledky měření

3.1 Úhlový profil I^{+}_{sat}

Hlavním cílem tohoto měření, při kterém byly využity výše popsané metody, bylo poprvé stanovit hodnotu M v okrajovém plazmatu tokamaku GOLEM. Výsledkem měření je úhlový profil I^{+}_{sat}, pomocí něhož jsou poté provedeny výpočty M. Nejvydařenější profil je znázorněn na obr. 3.



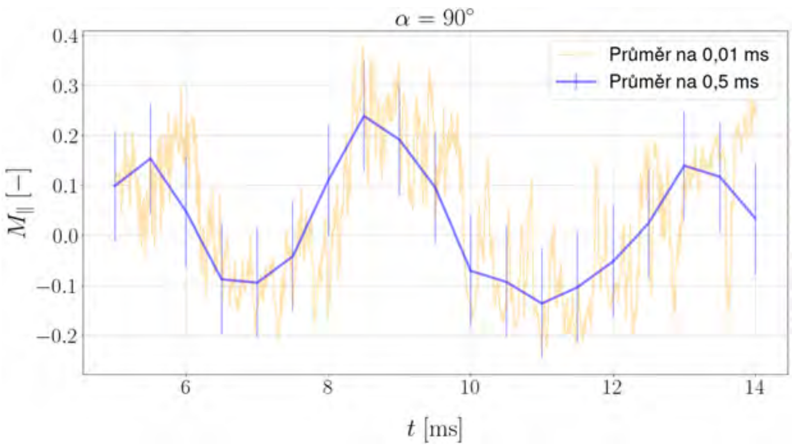
Obr. 3: Úhlový profil I^{+}_{sat} v polárních souřadnicích

Radiální souřadnice ukazuje hodnotu I^+_{sat} [mA] a úhlová souřadnice znázorňuje úhel α. Interval úhlu α mezi jednotlivými hodnotami I^+_{sat} je max. 10°. Pomocí čísel nad grafem můžeme provedené výboje najít v internetové databázi tokamaku GOLEM. Jednotlivé hodnoty t znázorňují čas uběhlý od začátku výboje[3)], při kterém je zaznamenaná hodnota I^+_{sat}.

Všimněme si například, že průměrná hodnota I^+_{sat} je nejvyšší při $\alpha = 90°$ a nejnižší při $\alpha = 0°$ nebo 180°. Zároveň si všimněme charakteristického tvaru křivky úhlového profilu I^+_{sat}, který se shoduje např. s profilem z výzkumu [2], který byl vykonán na předchozí verzi tokamaku GOLEM, tokamaku CASTOR. Tento tvar je způsoben faktem, že I^+_{sat} je minimální, když je sonda kolmá na magnetické siločáry a lokální maximum je i na straně sondy odvrácené od rotace plazmatu při orientaci sondy rovnoběžně s plazmatem.

3.2 Výsledek první metody

Výpočet M první metodou přinesl nečekané výsledky. Při prvním kroku, tedy určení $M_\parallel$ podle rovnice (3), bylo zjištěno, že v rámci výboje, kdy $\alpha = 90°$, se hodnota $M_\parallel$ pohybovala na poměrně širokém intervalu. Časový vývoj $M_\parallel$ při tomto výboji vypadá následovně:



Obr. 4: Časový vývoj $M_\parallel$ při výboji, kdy $\alpha = 90°$

Proto nemůžeme pouze vzít průměrnou hodnotu $M_\parallel$ z určitého časového intervalu, jelikož bychom se tím dopustili vysoké nepřesnosti. Roz-

3) Jeden výboj na tokamaku GOLEM trvá přibližně 15 ms.

dělme tedy výsledek výpočtu první metodou na dva, jeden při minimální hodnotě

$$M_{\parallel} = -0{,}08 \pm 0{,}01$$

a druhý při maximální hodnotě

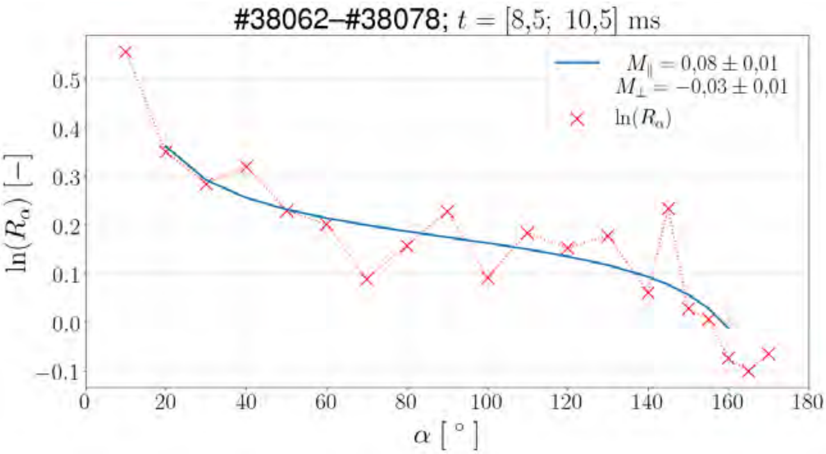
$$M_{\parallel} = 0{,}18 \pm 0{,}05.$$

Hodnotu kalibrační konstanty $K = 0{,}43$ převezmeme z článku [1]. Nyní můžeme pro obě hodnoty $M_{\parallel}$ dopočítat hodnotu $M_{\perp}$ pomocí rovnice (1) pro různé úhly α. Pokud provedeme průměr hodnot $M_{\perp}$ na hodnotách α, pro které jsme vypočítali dvě $M_{\parallel}$, získáme následující M:

$$M_{\parallel} = 0{,}18 \pm 0{,}05; \quad M_{\perp} = -0{,}04 \pm 0{,}18,$$
$$M_{\parallel} = -0{,}08 \pm 0{,}01; \quad M_{\perp} = -0{,}02 \pm 0{,}10.$$

3.3 Výsledek druhé metody

Od druhé metody očekáváme přibližný průměr hodnot M získaných pomocí první metody. Úhlový profil $\ln(R_\alpha)$ vychází z profilu viz obr. 3. Aproximace pravé strany rovnice (4) podle profilu $\ln(R_\alpha)$ byla provedena v jazyku Python a vypadá následujícím způsobem:



Obr. 5: Aproximace Machova čísla podle úhlového profilu $\ln(R_\alpha)$

Modrá křivka znázorňuje funkci pravé strany rovnice (4) a je vyznačena pouze na platném intervalu $\alpha \in [20°; 160°]$, jelikož zde člen $\operatorname{cotg} \alpha$

v rovnici (4) nediverguje. Aproximace stanovila hodnotu konstanty na $K = 2{,}3$. Toto je pozitivní výsledek, jelikož v rovnici využité pro druhou metodu konstanta K figuruje jako dělitel a $\frac{1}{2{,}3} \doteq 0{,}43$, což je hodnota K použitá při první metodě. Hodnotu M určila aproximace jako:

$$M_{\parallel} = 0{,}08 \pm 0{,}01; \quad M_{\perp} = -0{,}03 \pm 0{,}01, \tag{5}$$

což je přibližně rovno průměru hodnot získaných pomocí první metody a potvrzuje se tím správnost našich výsledků.

3.4 Shrnutí výsledků

Závěrem shrňme hlavní výsledky práce a porovnejme dvě využité metody. Na tokamaku GOLEM je přibližná hodnota složek Machova čísla v okrajovém plazmatu $M_{\parallel} = 0{,}08 \pm 0{,}01$ a $M_{\perp} = -0{,}03 \pm 0{,}01$. Přesnost výsledků druhé metody je znatelně vyšší než té první, ale vzhledem k relativně malému počtu hodnot $\ln(\mathrm{R}_\alpha)$ je hodnota odchylky pravděpodobně podhodnocená. První metoda v tomto případě nebyla zatížena nepřesnou hodnotou K, každopádně stále zůstává nepřesnost v předpokladu, že $M_{\parallel}$ zůstává konstantní pro všechny hodnoty α. Z principu první metody však vždy získáme více či méně přesný výsledek, zatímco druhá metoda při menším počtu naměřených dat nezaručuje poskytnutí výsledku vůbec. Proto činíme závěr, že v případě menšího počtu naměřených dat (krok méně než 10° mezi hodnotami I^{+}_{sat} v úhlovém profilu) je optimální využít první metody, zatímco při průměrném až vyšším počtu naměřených dat (krok 10° a více) je optimální využít metody druhé.

L i t e r a t u r a

[1] Sangwan, D., Jha, R., Tanna, R.: Multidirectional plasma flow measurement by Gundestrup Probe in scrape-off layer of ADITYA tokamak. *Physics of Plasmas*, 22 (2015), č. 11 DOI: 10.1063/1.4935292.

[2] Stockel, J., Adámek, J., Balan, P., Bilyk, O., Brotánková, J., Dejarnac, R., Devynck, P., Ďuran, I., Gunn, J. P., Hron, M., Horáček, J., Ionita, C., Kocán, M., Martines, E., Pánek, R., Peleman, P., Schrittwieser, R., Van Oost, G., Žáček, F.: : Advanced probes for edge plasma diagnostics on the CASTOR tokamak. *Journal of Physics: Conference Series*, 63 (2007), č. 1 DOI: 10.1088/1742-6596/63/1/012001.

Známe povrchové napětí vody?

Jana Kalová, PřF JU, České Budějovice

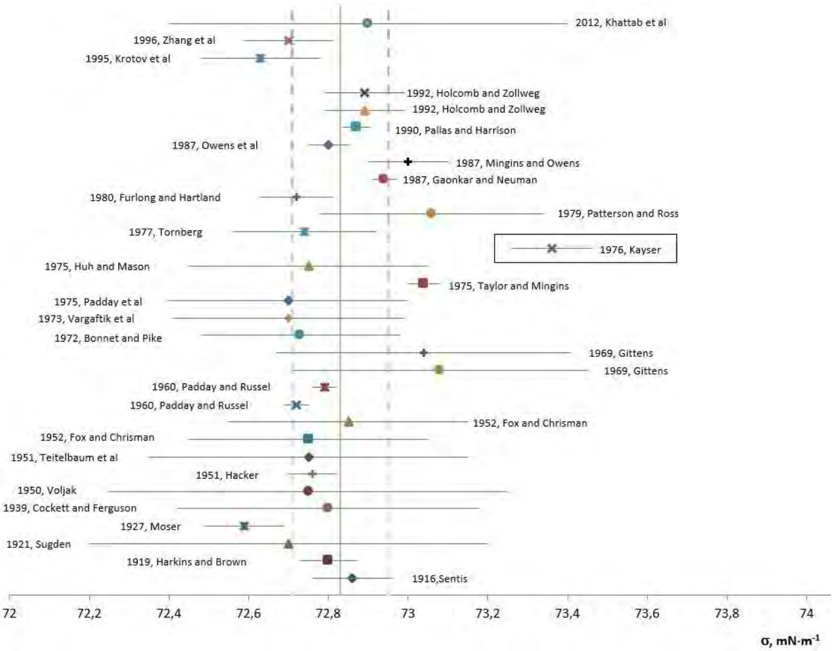
Abstrakt. The article presents some mysteries connected to surface tension of the most spread substance on the Earth's surface—ordinary water. It presents problems occuring when determining a precise value of surface tension, and points out achievements of Czech research at measuring surface tension in the supercooled water region.

Voda je jednou z nejdůležitějších chemických sloučenin. Je nezbytná pro život na Zemi, má nesmírný význam v řadě průmyslových aplikací, dopravě, vojenství. S povrchovým napětím vody se setká každý. U rybníka můžeme pozorovat vodoměrky, které díky povrchovému napětí dokážou běhat po hladině. Díky povrchovému napětí jsou vodní kapky kulaté. Povrchové napětí lze využít k experimentu s plovoucí mincí, která je těžší než voda a měla by klesnout ke dnu. Povrchové napětí umožňuje vodě vzlínat, podílí se na vzniku srážek, hraje roli při vzniku kavitace v parních nebo vodních turbínách. Povrchové napětí má rovněž vliv na rychlost šíření bakterií a virů – např. když zakašleme, viry a bakterie se vznáší v oblacích kapiček, jejichž velikost určuje mj. i povrchové napětí, které tím určuje i vzdálenost, na kterou mohou doletět (např. větší kapičky 2 m, menší 6 m).

Známe přesnou hodnotu povrchového napětí vody?

Je překvapivé, že přesnou hodnotu povrchového napětí vody vlastně neznáme. Zatímco hustotu vody za atmosférického tlaku a dané teploty umíme určit s přesností na 6 platných číslic, u povrchového napětí je situace složitější. Lze tvrdit, že povrchové napětí při některých teplotách (20 °C, 25 °C) známe s přesností na 3 platné číslice.

Obr. 1 ilustruje měření povrchového napětí vody použitá v [1] k určení jeho hodnoty při 20 °C. Ačkoliv autoři některých experimentů deklarují přesnost určení povrchového napětí vody hodnotou 0,1 mN/m, na obrázku vidíme, že rozdíly mezi jednotlivými experimenty jsou mnohem větší. Je to dáno např. citlivostí experimentů na čistotu vody, započítáním různých korekcí k měřeným hodnotám v závislosti na použité metodě měření apod. Ale testování těchto vlivů stejně všechny rozdíly mezi měřeními nevysvětluje. Můžeme říci, že povrchové napětí vody ještě na své super přesné měření, které by s velkou přesností a bezesporně určilo hodnotu povrchového napětí při dané teplotě a tlaku, čeká. Pochopitelně tuto situaci umíme obejít, např. můžeme jako odpovídající hodnotu uvažovat průměr naměřených dat. Autoři v [1] použili vážený průměr a pro povrchové napětí vody při 20 °C získali hodnotu $\sigma_{20} = (72{,}83 \pm 0{,}12)$ mN/m. (Povrchové napětí vody je na teplotě velmi závislé. V publikaci [1] je uvedena referenční hodnota povrchového napětí vody při 25 °C, $\sigma_{25} = (72{,}01 \pm 0{,}10)$ mN/m.)



Obr. 1: Experimentální data použitá k určení povrchového napětí vody při 20 °C

Rozdíly mezi výsledky jednotlivých měření však stále zůstávají záhadou, která čeká na vyřešení.

Povrchové napětí vody nevykazuje anomálii v podchlazené vodě

Další záhadou, která je spojena s povrchovým napětím vody, je její chování v tzv. podchlazené oblasti. Všichni víme, že voda jako kapalina může za normálního atmosférického tlaku existovat mezi 0 °C a 100 °C. Za určitých okolností ale může voda existovat v kapalném stavu i po překročení teploty 100 °C. Pak mluvíme o *přehřáté vodě.* V kapalném stavu může voda zůstat i poměrně hluboko pod 0 °C, pak mluvíme o *podchlazené vodě.* Oba tyto stavy, podchlazená a přehřátá voda, se nazývají *metastabilní stavy.* Metastabilní proto, že stačí např. drobná trhlinka ve stěně nádoby a voda buď začne vřít nebo se promění v led. Ve skutečnosti k tomuto fázovému přechodu dojde, i kdyby experiment probíhal za ideálních podmínek. V každé kapalině probíhají fluktuace, zvláště v oblasti fázového přechodu. Např. v oblasti 0 °C se objevují zárodky ledu, které se většinou rozpustí. Ale je jen otázkou času, kdy se objeví tzv. kritický zárodek, který dosáhne takové velikosti, že fázový přechod už je nevratný a celý objem kapalné vody se nevyhnutelně promění v led. Podobné je to u přehřáté vody, kde kritickým zárodkem je bublinka páry.

Zkoumání podchlazené vody je v poslední době velmi populární. Řada týmů se pustila do zkoumání termodynamických vlastností podchlazené vody. Z pohledu experimentů je zde jeden omezující faktor, a tím je čas. Dříve nebo později se objeví kritický zárodek ledu, a tím měření končí. Voda se musí rozmrazit, někdy je třeba vyčistit i celé měřící zařízení a pokračovat s novým měřením od začátku. Ale přesto se vlastnosti podchlazené vody měří a ukazuje se, že voda má v této oblasti řadu anomálií [2]. Tyto anomálie by měla vykazovat i teplotní závislost povrchového napětí vody pro teploty pod 0 °C. Ale zatím se zdá, že ani při dosažení teploty −32,3 °C povrchové napětí vody žádnou anomálii nevykazuje! Takže opět čekáme na nějaký experiment, který umožní dostat se dále pod zatím rekordní dosaženou teplotu −32,3 °C [3].

Postavení ČR ve zkoumání povrchového napětí vody

V České republice existuje dlouhá tradice výzkumu termofyzikálních vlastností vody a páry. Když v roce 1929 vznikla mezinárodní společnost IAPS, která se záhy přejmenovala na IAPWS (The International Association for the Properties of Water and Steam), ČR, resp. bývalé Československo bylo mezi pěti zakládajícími státy. Původním smyslem této organizace bylo vylepšit účinnost parních turbín nebo alespoň umožnit jejich srovnání. A protože ČR byla (a stále je) světovou špičkou v oblasti parních turbín, bylo jasné, že takové členství je pro ČR výhodné.

Stručné shrnutí příspěvků ČR k historii této asociace, která má nyní přes 20 členů, lze najít na stránkách České společnosti pro vlastnosti vody a vodní páry [4]. ČR se aktuálně podílí na výzkumu IAPWS v oblasti povrchového napětí vody, a to jednak unikátními měřeními povrchového napětí (Ústav termomechaniky AV ČR, FST ZČU v Plzni), jednak zpracováním výsledků měření a tvorbou závislosti povrchového napětí vody na teplotě (PřF JU České Budějovice).

Literatura

[1] Kalová, J., Mareš, R.: Reference values of surface tension of water. *International Journal of Thermophysics*, 36 (2015), s. 1396–1404.

[2] Kalová, J.: Podivná voda. *Rozhledy matematicko-fyzikální*, 84 (2009), č. 2, s. 22–26.

[3] Kalová, J., Mareš, R.: Surface tension in the supercooled water region. *International Journal of Thermophysics*, 42 (2021), č. 9 article id.131, doi: 10.1007/s10765-021-02884-z, s. 1572–1404.

[4] `http://www.czpws.cz`.

Co se fyzikové naučili od básníků

Ivo Kraus, FJFI, ČVUT, Praha

Věda je jednou z etap vývoje lidské kultury. Téměř tři tisíciletí do sebe vstřebávala výsledky práce geniálních umělců, literátů, filozofů a náboženských myslitelů, až se nakonec změnila v kvalitativně nový jev. Její duchovní i materiální cíle (a také výsledky) byly hned od počátku protichůdné: poznat lidstvo i svět, zároveň však ovládnout (pokořit) přírodu.

Z hlediska objemu poznatků rozlišovali *antičtí filozofové* tři oblasti vědění: *přírodu (fyziku), společnost (etiku), myšlení (logiku). Aristotelés*[1)] dělil hmotné věci na neživé, rostlinné a živočišné. Všechno, co člověk vyprodukoval, je materiální, morální nebo teoretické; podle toho, jestli zkoumaný objekt náleží světu fyziky, etiky či metafyziky. Aby vyřešil problémy s tříděním na minerály, rostliny a živočichy, napsal osm knih o fyzice.

[1)] Aristotelés ze Stageiry (384–322 př. n. l.), největší filozof starověku.

V dnešní době je obvyklé rozlišovat vědy *přírodní* (astronomie, fyzika, chemie, geologie, fyzická geografie, biologie, fyziologie člověka, antropologie a hraniční vědy, jako např. astrofyzika, fyzikální chemie, chemická fyzika, geofyzika, geochemie, biofyzika, biochemie aj.), *humanitní, technické* a *matematické.*

Fyzika bývá definována jako přírodní věda studující základní vlastnosti hmotných částic a polí (nositelů a zprostředkovatelů vzájemného působení), jejich interakci, strukturu látek, různé druhy energie a jejich přeměnu. Podle obsahu a povahy zkoumaných jevů se dále člení na užší obory, např. mechaniku, akustiku, optiku, termodynamiku, elektřinu a magnetismus, fyziku kvantovou, atomovou, jadernou, elementárních částic, pevných látek, kvantovou optiku a teorii relativity. V mnoha dalších oborech (mezních, hraničních) jsou poznatky fyziky odedávna nebo nově uplatňovány. Patří k nim astronomie, astrofyzika, kosmologie, meteorologie, geofyzika, biofyzika, kvantová chemie aj. Další dělení fyziky umožňují použité pracovní metody: fyzika *experimentální* (odvozování fyzikálních zákonů z pokusů), *teoretická* (hledání obecných fyzikálních principů a zákonů), *matematická* (vývoj a zdokonalování matematického aparátu, metod a výpočetních postupů používaných ve fyzice), *praktická* (provádění fyzikálních měření a studium měřících metod).

Významnou podporou nejrůznějším a často velmi latentním protivědeckým aktivitám je obviňování vědy ze současných neduhů našeho světa. (Konzumace technického pokroku se však žádný z odpůrců exaktních věd nezříká.) Přitom vědecké objevy a technické vynálezy mají za energetické, ekologické i další problémy lidstva asi takovou odpovědnost jako novorozenec. Zdaleka nejenom na něm přece záleží, vyroste-li svým bližním pro radost.

Autoři starověkých fyzikálních učebnic a monografií

Epikúros ze Samu (341–270 př. n. l.), řecký antický filozof.

Přestože zanechal více spisů než všichni ostatní filozofové před ním, z jeho díla se bohužel v uceleném tvaru zachovaly jen tři dopisy s naučným obsahem (*List Hérodotovi* podává přehled nauky o atomech, *List Pýthokleovi* o astronomii a meteorologii, *List Menoikeovi* s důležitými etickými naukami) a *Hlavní myšlenky* – úhrn Epikúrovy filozofie ve čtyřiceti tezích, které se měli jeho žáci naučit nazpaměť.

Epikúros nebyl jen zakladatelem helénistické filozofické školy, zdůrazňující etické principy přátelství, nebázlivosti a rozumného užívání slasti, ale jako filozof významně prohloubil také učení *Leukippa z Mílétu*[2] a do *Démokritova*[3] atomismu zavedl moment náhody. Přisoudil atomům schopnost se z vlastního podnětu nepatrně odchylovat při pohybu v prázdném prostoru od svislého směru, a to ne v určitém místě ani v určitém čase.

Zvláštní pozornost věnoval objasnění příčiny blesků, zatmění Slunce a Měsíce, vzniku mraků, větrů, smrští a jiných přírodních jevů. Nešlo mu však o vědeckou teorii, ale o jakýkoli výklad, který není zatížen náboženskými představami.

Titus Lucretius Carus (asi 99–asi 55 př. n. l.), římský filozof a básník.

O Lucretiově životě se žádné zprávy nedochovaly. Jisté však je, že příležitost stát se nesmrtelným dostal díky *Epikúrovi ze Samu*. „Jinak to byl muž neznámý, zahynul sebevraždou,“ napsal významný český filozof Emanuel Rádl.

Jedno z nejkrásnějších děl římské literatury, Lucretiova báseň *De rerum natura* (*O přírodě*) má šest částí (zpěvů, knih). První obsahuje úvahy, že základem všeho jsou atomy a prázdno, v druhé je pojednáno o tvarech a pohybech atomů, ve třetí o podstatě duše, ve čtvrté o psychických procesech, v páté o kosmologii a vzniku lidské civilizace, v šesté o kosmických a meteorologických jevech [1].

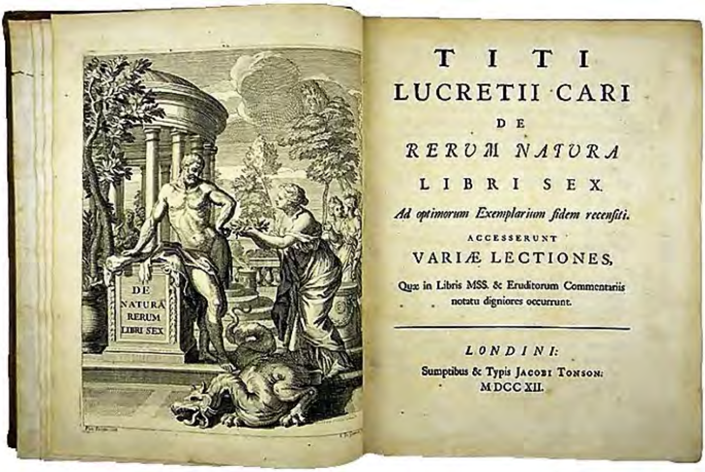
Šíření epikúrovské filozofie považoval Lucretius za své životní poslání; byl přesvědčen, že Epikúros má o lidstvo větší zásluhy než kdokoliv z bohů, héróů nebo lidí, neboť odhalil pravdu o podstatě světa: „Z takové tmy tak jasně pozvednout světlo, jenž první jsi uměl a ozářit života dary, za tebou kráčím, ty řeckého plemene chloubo, v tvé šlépěje pevně

[2] Leukippos z Mílétu (asi 500–440 př. n. l.), starořecký filozof. Vyslovil tezi o kauzalitě (popření náhody). Nic se neděje nazdařbůh, nýbrž vše podle řádu (logos) a nutně. Uznával nesčíslné, stále se pohybující prvky, atomy, a nekonečné množství tvarů v nich. Ty se pohybují v prázdnu a spojujíce se působí vznik, rozlučujíce se působí zánik.

[3] Démokritos z Abdér (asi 460–370 př. n. l.), starořecký filozof. Za svůj dlouhý život napsal na sedm desítek spisů nejrůznějšího zaměření: etické, fyzikální, matematické, múzické, o umění. Základními prvky jeho světa jsou neviditelné částice – atomy. Při srážkách a odrazech se připojuje stejné ke stejnému, vznikají shluky atomů, a nakonec i věci viditelné. Všechno složené vzniká spojením oddělených atomů, zánik je rozlučováním atomů dosud spojených. Tak se rodí a zanikají bezpočetné světy a my patříme do jednoho z nich. Vlastnosti věcí jsou výsledkem různého tvaru, velikosti, polohy a uspořádání atomů. I člověk, jeho tělo a duše, se skládá z atomů. Duše je proto něco tělesného, přestože jde o těleso velmi jemné. Po smrti člověka se atomy duše rozptýlí. Laureát Nobelovy ceny za fyziku z roku 1933 Erwin Schrödinger (1887–1961) prohlásil, že prvním kvantovým fyzikem nebyl Max Planck, ale Démokritos z Abdér.

teď vlastní chodidla kladu – ne že bych s tebou snad soutěžit toužil, spíš z lásky, že se ti podobat chci; což vlaštovka může se labuti rovnat? či v kolenech nepevné kůzle dokázat v běhu tolik co závodní hřebec? ... Slovem pravdy nám tedy očistil srdce, vytkl strachu a žádosti meze a určil, v čem to nejvyšší dobro, kam tíhneme všichni, tkví, a ukázal cestu, jak pěšinou prostou a přímým směrem se k němu můžeme dostat...“

Epos, který Lucretius věnoval příteli *Gaiu Memmiovi*, je básnickým převyprávěním obtížných a abstraktních filozofických úvah, literární skvost plný metafor, přirovnání, obrazů a podobenství. A zároveň i důkazem, že výklad exaktních věd nemusí být nudný ani nesrozumitelný.



Obr. 1: Titulní list Lucretiova eposu *De rerum natura*; vydání z roku 1712

Jak to řekne fyzik[4)] nebo filozof a jak básník Titus Lucretius Carus

– *Nic nevzniká z nejsoucna a nic nezaniká v nejsoucno. Vesmír byl vždy takový, jaký je nyní, a vždy takový i bude.*

„Ke zrodu věcí je určena určitá hmota,
co může z ní vzejít a povstat, je určeno pevně.
Žádná věc tedy nemůže z ničeho vzniknout,
každá chce svoje símě, z něhož by vzešla
a v jemné vanutí vzduchu by pozvedla hlavu.“

4) Tyto myšlenky nemusí odpovídat současnému stavu fyzikálního poznání.

– Vesmír sestává z těles a z prázdného prostoru.

„Je tedy prostor, je prázdný a nehmatatelný.
Jinak by na žádný způsob se nemohly věci pohybovat.“

– Kromě těles a prázdného prostoru již nemůže být nic jsoucího samo o sobě, nýbrž existovat mohou jen jejich nutné nebo nahodilé vlastnosti jako např. čas.

„Čas sám o sobě není: to předměty samy
nám dávají znát, co se stalo v minulé době,
co probíhá nyní a co se později zběhne;
čas sám v sobě – to uznáš – nevnímá nikdo,
bez souvislosti s klidem a pohybem věcí.“

– Tělesa jako taková jsou jednak složeniny, jednak prvky, z nichž složená tělesa sestávají. Tyto prvky jsou nedělitelné a neproměnlivé. Jejich nedělitelnost vyplývá z toho, že neobsahují žádný prázdný prostor, který je podmínkou dělitelnosti.

„Hmota jsou předně ta prvotní tělíska věcí,
za druhé vše, co je shlukem řečených prvků.
Žádná síla však nemůže atomy zničit,
ty nakonec vítězí vždycky svou neprostupností.“

– Vesmír je nekonečný. Pokud by byl konečný, měl by nějakou mez, která by jej oddělovala od něčeho jiného. Nekonečný je nejen prázdný prostor, ale i množství atomů. V opačném případě by se atomy v prázdném prostoru rozptýlily, nesrážely by se navzájem ani nespojovaly.

„Samotný vesmír si nemůže položit meze;
toť přírodní zákon; ten chce, aby hranici hmoty
tvořilo prázdno a hmota zas hranici prázdna,
a zásluhou takové střídy je bez konce vesmír.“

– Množství rozmanitých tvarů atomů není nekonečné.

„Tělísko každé, už lidskému oku
neviditelné, má konečný vrcholek, špici,
která je určitě dál už nedělitelná,...
Atomů rozdílné tvary jsou konečné počtem...
Atomů, jejichž tvary jsou střiženy stejně,
je bezmezně mnoho.“

– Vlastnosti látek závisejí na způsobu, kterým jsou atomy mezi sebou vázány.

„Ať jakoukoli se oděje těleso barvou,
není jí pokryto proto, že takovou barvu
už jeho látkové prvky by bývaly vpily;
vždyť barvu nemají tělíska naprosto žádnou...
U těchto tělísek velice záleží na tom,
s kterými prvky se v jaké poloze spojí
a jaký pohyb si navzájem sdělí či přejmou.
Nebe i moře a země i řeky i slunce
jsou z jedněch a týchž co zvířata, stromy a plody;
jen spoje a pohyby prvků jsou pokaždé jiné.
Vždyť v těch našich verších je napořád vidět
rozličná písmena společná přemnoha slovům,
ačkoli nelze popřít, že slova i verše
smyslem i líbezným zvukem se navzájem liší.“

– Z nekonečného počtu atomů vyplývá možnost existence nekonečného množství světů.

„Už na žádný způsob se nemůže podobat pravdě,
že vznikl jen tento svět a jediné nebe
a tělísek tolik že mohlo by zahálet venku...
Proto dím zas a zas a ty uznej, že jiné
takové sestavy hmoty jsou jistě i jinde
jako ta naše, jíž horoucně objímá éter.“

Lucretiovy verše nepopisují výsledky Epikúrova smyslového poznání. Jsou to jen mistrovsky vyjádřené logické úvahy o podstatě věcí vycházející z každodenní zkušenosti. Na tom, že jejich závěry zůstaly dodnes inspirativní i poučné, není vlastně vůbec nic divného. „Co je důležité, je očím neviditelné. Ať už je to dům, hvězdy nebo poušť, to, co je dělá krásnými, je neviditelné.“ (Antoine de Saint-Exupéry, *Malý princ*)

Publius Vergilius Maro (70–19 př. n. l.), římský epický a didaktický básník.

Po Lucretiově vzoru napsal naučnou báseň také Vergilius. Dílo *Georgica* (*Zpěvy rolnické*) z roku 29 př. n. l. pojednává ve čtyřech knihách (ve 2188 hexametrických verších) jak o pěstování plodin, sadařství a vinařství, chovu dobytka a včelařství, tak o lidském životě, o přírodě a uspořádání lidské společnosti [2].

Obr. 2: Mozaika ze 3. stol. n. l. (Landesmuseum Trier)

Citujme několik veršů z druhé knihy Vergiliových *Zpěvů rolnických*, které jsou svědectvím jeho studií přírodních věd.

Mě kéž nejprve přijmou Múzy nade vše sladké,
které posvátně vzývám prostoupen nesmírnou láskou.
Kéž mi pochopit dají nebeské dráhy a hvězdy,
různá zatmění slunce a těžké zápasy luny.
Proč se otřásá země, proč vzdouvá se hladina moře
vysoko k pobřežním skalám a zas zpět k sobě se vrací.
Proč zimní slunce tak spěchá vnořit se do oceánu
a co zdržuje noc, když v létě nastává pozdě.
Šťastný ten, kdo mohl poznat příčiny věcí.
Překonal ze smrti hrůzu, z osudu neúprosného,
Netrápí ho ani jekot, jímž hlásí se Acherón[5] lačný.

Lucius Annaeus Seneca Mladší (4 př. n. l.–65 n. l.), římský básník, filozof a spisovatel.

Pocházel stejně jako jeho otec, slavný rétor Lucius Annaeus Seneca Starší, ze španělské Córdoby. Po většinu svého života byl odkázán na milost i nemilost římských císařů: za Caliguly se stal členem senátu, jeho nástupce Claudius ho nejdříve odsoudil k osmiletému vyhnanství na Korsice a potom vybral jako vychovatele Nerona, syna své druhé manželky Agrippiny. V prvním pětiletí Neronovy vlády byl Seneca vlastně regentem říše. Nakonec se však svému žáku znelíbil natolik, že musel spáchat sebevraždu; otevřel si žíly a vykrvácel.

[5] Acheron (řec. Acherón), řeka v podsvětí.

Ze Senecových filozofických spisů prosluly zejména *Listy* [3], 124 dopisů s osobními životními a mravními zkušenostmi určenými (nejen) mladšímu příteli Luciliovi. Jednotlivým problémům individuální etiky věnoval řadu rozprav označovaných souhrnně *Dialogi*. Ve skutečnosti to jsou téměř ve všech případech monology pojednávající o duševním klidu, dobročinnosti, šťastném životě, mírnosti, prozřetelnosti, důslednosti mudrcově, hněvu a krátkosti života: „Je lépe užívat vzdělání jen prostým způsobem k nabytí dobré mysli. Avšak my, jako se rozptylujeme zbytečnostmi v jiných věcech, tak činíme i v samé filozofii. Trpíme nestřídmostí v učenosti zrovna tak jako ve všem ostatním. Neučíme se pro život, ale pro školu.“ (Seneca, 106. list Luciliovi)

Obr. 3: První strana Senecova spisu *Questionibus naturalibus* (13. stol.)

Seneca Mladší je také autorem devíti tragédií s mytologickými náměty a kompilačního spisu *Otázky přírodní filozofie* (*Naturales quaestiones libri VIII*). Dílo, používané ve středověku jako učebnice fyziky, má 8 knih (částí, kapitol) [4]. V první jsou popisovány světelné atmosférické efekty (meteory, halové jevy, duha aj.), druhá se zabývá hromy a blesky, třetí část je věnována hydrologii. Dalších pět knih pojednává o Nilu (*De Nilo*), mracích (*De nubibus*), větru (*De ventis*), zemětřesení (*De terrae motu*) a kometách (*De cometis*). Shromážděný materiál Seneca kriticky nekomentuje a jeho správnost sám neověřuje. Jen u pohybů planet a komet poznamenal, že tyto zákony, v jeho době tak temné a zmatené, budou jistě jednou vyloženy jasně a přesvědčivě. Mezi více než třiceti starověkými autoritami, na něž se ve svém díle odvolal, jsou např. *Démokritos, Miléťan Anaximenés, Aristotelés* a jeho žák *Theofrastos* nebo univerzální učenec a filozof *Poseidónios z Apameie.*

Jak se učilo na středověkých školách podle *Naturales quaestiones*? Když byla např. probírána duha, museli studenti nejdříve vyslechnout, co si o duze mysleli všichni Senecovi předchůdci; teprve pak přišly na řadu autorovy vlastní představy a pokus uvést je do souladu s empirií. Na rozdíl od současnosti nebylo ovšem nutné předkládaným experimentálním výsledkům bezvýhradně důvěřovat. Zpravidla šlo totiž o pozorování přírodních jevů přístupných bez jakékoliv přístrojové techniky; základním a často jediným pramenem poznání byla zkušenost. Studenti mohli proto vyučovanou látku doplňovat vlastními poznatky.

Duhu Seneca považoval (stejně jako Aristotelés) za deformovaný obraz Slunce, odmítl však (Aristotelovu) představu, že tento atmosférický úkaz vzniká odrazem paprsků na oblacích. Když si všiml duhy také u vodotrysků, podmínil (správně) její vznik vlhkým prostředím. A protože nejednou pozoroval ranní červánky i rudý západ slunce, prohlásil (chybně) duhu za zvláštní způsob obarvení mraků slunečním světlem.

Fyzici a lyrici

S tímto názvem byla v říjnu 1959 ruským týdeníkem *Literaturnaja gazeta* uveřejněna báseň *Borise Abramoviče Sluckého*[6]. Měla zcela mimořádný ohlas a vášnivá diskuse o tom, jestli jsou ve 20. století potřebnější fyzici nebo lyričtí básníci, probíhala mezi exaktními vědci a literáty

[6] Boris Abramovič Sluckij (1919–1986), ruský básník židovského původu. Báseň Fyzici a lyrici o údělu poezie v naší civilizaci vyšla v českém překladu Jaroslava Kabíčka v knize B. A. Sluckij: *Dlouhé poledne.* Československý spisovatel, Praha 1985.

ještě dlouhou dobu. Sám jsem byl účastníkem jednoho semináře, který na toto téma pořádala katedra fyziky kovů v Leningradském polytechnickém institutu (nyní Sanktpetěrburská polytechnická univerzita Petra Velikého) ještě v roce 1968.

Fyzici jsou na výsluní.
Lyrici jsou odstrčeni.
Nejde o kalkul a trůny,
jde o zákonité změny.

Nejspíše jsme nezahlídli,
co jsme první spatřit měli!
Nejspíš nevládneme křídly
– naše jamby zdřevěněly,
aniž vzlét by do sfér snění,
Pegas podupává v koutě...
To proto jsme odstrčeni
a fyzici na forhontě.

Je to evidentní. V ráži
přít se o to není zdravé.
Už to ani neuráží.
Naopak je zajímavé
pozorovat, jak – co pěna –
tuchne sláva rýmů s rytmy
a vznešenost nezhrzena
bere zavděk logaritmy.

Nakonec se obhájci obou táborů shodli na tom, že je lidem stejně potřebná fyzika i umění.

Podpora věd exaktních se vždy zúročí i ve prospěch humanitních. Není průkaznější doklad tohoto tvrzení než dílo *Alberta Einsteina* (1879–1955). Byl stejně geniální fyzik jako tvůrčí duch filozofie. Ve zkoušce času dokonale obstála jeho teorie relativity i myšlenky o víře v člověka, svět vzájemné pomoci a veliké poslání vědy. Připomeňme, co napsal o *Fjodoru Michajloviči Dostojevském.*

„Dostojevskij[7] mně dal víc, než kterýkoli jiný myslitel ve vědě, víc než Gauss.“ (Mir gibt Dostojewski mehr als irgend ein Wissenschaftler, mehr als Gauss.) Co mohli mít ti dva společného? Když autor *Bratrů*

[7] Fjodor Michailovič Dostojevskij (1821–1881), ruský spisovatel a filozof.

Karamazových v roce 1881 zemřel, byly Albertu Einsteinovi dva roky. Najdeme-li tedy u obou géniů podobnou formulaci postoje k existenci Boha, nelze pochybovat o prioritě. Dostojevský se vyjádřil slovy Ivana Karamazova v rozhovoru s bratrem Aljošou [5].

„Jestliže Bůh je a skutečně stvořil svět, stvořil jej, jak nám je dokonale známo, podle Euklidovy geometrie a lidský rozum stvořil s představou pouze tří prostorových rozměrů. Nicméně byli a jsou i teď geometři a filozofové, dokonce velmi vynikající, kteří pochybují, že by celý svět nebo ještě obecněji řečeno celé bytí bylo stvořeno jen podle Euklidovy geometrie; odvažují se dokonce snít o tom, že by se dvě rovnoběžky, které se podle Euklida nemohou na zemi nikdy setkat, někde v nekonečnu přece možná setkaly. Usoudil jsem, můj milý, že nedovedu-li pochopit ani tohle, kdepak bych pochopil Boha. Přiznávám pokorně, že mi chybějí schopnosti k řešení takových otázek, můj rozum je euklidovský, pozemský, kdepak bych tedy mohl posuzovat věci, které nejsou z tohoto světa.“ (Dostojevskij zřejmě znal práce zakladatele neeuklidovské geometrie, profesora Kazaňské univerzity *N. I. Lobačevského*[8)]).

Později Albert Einstein napsal: „Lidský rozum není schopen pochopit čtyři rozměry. Jak by mohl tedy pochopit Boha, pro něhož znamená tisíc let i tisíc rozměrů totéž, co jeden rok či jediný rozměr.“

O spolupráci učitelů fyziky a literatury

Při jedné pracovní cestě na Fyzikální fakultu Jakutské[9)] státní univerzity M. K. Ammosova (nyní Severovýchodní federální univerzita M. K. A.) jsem navštívil katedru metodiky výuky fyziky a tam se setkal s pro mne dosud neznámým způsobem využití literatury při výuce.

Středoškoláci měli za úkol fyzikálně interpretovat básnické obraty z děl právě probíraných ruských autorů. Učitel přečetl verše, studenti určili

---

[8)] Nikolaj Ivanovič Lobačevskij (1792–1856), ruský matematik.

[9)] V žádném jiném regionu naší planety není tak dlouhá a tuhá zima jako v Jakutsku (oficiální název této největší republiky Ruské federace je Republika Sacha). Téměř celé Jakutsko je na trvale zmrzlé půdě. Během letních měsíců, kdy teploty dosahují až 40 °C, sice země do hloubky jednoho až dvou metrů rozmrzá, v zimě se však znovu „mění na kámen“. V mnoha místech jsou pod povrchem uvězněny obrovské masy čistého ledu. Pokud vlivem klimatických změn roztají, vzniknou podzemní dutiny, půda poklesne a v terénních propadlinách se objeví jezera. Už teď jich je tolik, že každý obyvatel republiky může mít jedno úplně sám pro sebe. O nížinatých oblastech na severu se dá těžko říci, jestli tam je více souše nebo vody.

Některé jakutské instituce prý díky mrazům ušetří; je-li třeba určit vlastnosti materiálů při teplotách kolem −50 °C, naplánují fyzici své experimenty na zimu a pak zkoumané vzorky levně ochlazují za oknem.

název básně a autora a pak vysvětlili fyzikální podstatu některých jevů z citovaných úryvků, např.:

„Však v jizbě zpěv?
tam dívka přede
a smolná louč ji zvečera
přátelsky *praská do šera.*“
...
„Na říčce jako na parketu
vše *leskne* se a *v bruslí letu*
houf chlapců v běhu zápasí.
Led pod bruslemi hvízdá si.“
...
„Ves třpytila se stříbrem zimy;
za oknem, na něž dýchl mráz,
se ozval sborem stračí hlas
a vrchy měkce zvlněnými
proudilo světlo, tančil jas.“
...
„Led jedva *průhledný*,
jenž temněl nad jezerem,
nehybné potoky
křišťálem přepínal.“

Všechny ukázky jsou od *A. S. Puškina*[10], první tři z románu *Evžen Oněgin* (překlad Josefa Hory), čtvrtá z lyrické básně *Ovidiovi* (překlad V. A. Jung).

Na otázky fyzikáře „*Proč* hořící dřevo praská? *Proč* se zamrzlá říčka leskne? *Proč* je led kluzký? *Jak* vznikají ledové květy na okenních sklech? Jaký led je nazýván *černý*? Co znamená pojem *křišťál*?“ čtenáři Rozhledů jistě odpoví sami.

Závěrečné poučení

Mravnost činů a pravdivost poznání se nedá měřit pouze užitečností. Ani věda nesmí sloužit jen jako nástroj k dosažení praktických cílů. Jejím původním posláním je podílet se na obecné vzdělanosti národa. Neznalosti gramatiky, literatury či historie jsou stejnou vadou na intelektuální

[10] Alexandr Sergejevič Puškin (1799–1837), ruský básník, dramatik a prozaik.

kráse člověka jako mezery jeho vzdělání v matematice, fyzice nebo chemii.

Obr. 4: Hlavní budova Severovýchodní federální univerzity v Jakutsku

Literatura

[1] Carus, T. L.: *O přírodě.* Svoboda, Praha, 1971, překlad J. Nováková.

[2] Vergilius Maro, P.: *Zpěvy rolnické (Georgica).* Academia, Praha, 2016, překlad H. Kurzová.

[3] Seneca, L. A.: *Výbor z listů Luciliovi.* Svoboda, Praha, 1969, překlad B. Ryba.

[4] Seneca, L. A.: *Naturwissenschaftliche Untersuchungen.* Martinus F. A. Brok, Darmstadt, 1995.

[5] Dostojevskij, F. M.: *Bratři Karamazovi.* SNKLU, Praha, 1965, překlad P. Voskovec.

☛ Objednávky časopisu ☚

Objednávky časopisu
Rozhledy matematicko-fyzikální
vyřizuje společnost

MediaCall, s. r. o.
Vídeňská 546/55
639 63 Brno
tel: +420 532 165 165
e-mail: export@mediacall.cz

Objednávky lze realizovat i přes web:

www.zahranicnitisk.com

Pro členy JČMF vyřizuje objednávky předplatného sekretariát JČMF. Předplatné pro rok 2022 činí pro členy JČMF 200 Kč.

Elektronická verze čísla 3/2022 je ke stažení na adrese:
https://rozhledy.jcmf.cz/wp-content/uploads/RMF-97-3.pdf
heslo: ko59nek

ROZHLEDY
matematicko-fyzikální
Ročník 97 (2022), číslo 3

OBSAH

Pokyny pro autory

Příspěvky dodávejte na adresu redakce v elektronické podobě. Nejlépe napsané ve formátu LaTeX, přijatelný je i formát PlainTeX, je akceptovatelný i text připravený editorem Word či podobným.

Pokud jde o obrázky, je žádoucí, aby byly připraveny v reprodukovatelné podobě. Každý obrázek nechť je v samostatném souboru, nejlépe ve formátu eps nebo pdf. Přípustná je též bitmapa v dostatečném rozlišení.

Ke každému zasílanému příspěvku (ne u soutěží, zpráv a recenzí) přiložte krátkou anotaci v českém jazyce. Dále je žádoucí, aby u každého příspěvku byla uvedena literatura, na kterou je v textu odkazováno.