

ROZ HLEDY

MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ

ČASOPIS PRO ZÁJEMCE O MATEMATIKU, FYZIKU A INFORMATIKU

ROČNÍK 98 (2023) • ČÍSLO 1

Vydává Jednota českých matematiků a fyziků
tel.: 222 090 708-9, e-mail: jcmf@math.cas.cz
za podpory MFF UK Praha a FJFI ČVUT Praha



Vycházejí 4 čísla v kalendářním roce

Obálku navrhl Bohuslav Šír

Sazbu programem $\text{\TeX}$ připravil RNDr. Miloslav Závodný

Adresa redakce: MFF UK, V Holešovičkách 2, 182 00 Praha 8–Troja
e-mail: rozhledy@jcmf.cz

Internetové stránky časopisu: <https://rozhledy.jcmf.cz/>

Vytiskla Tiskárna Pohline, Zálesí 1126/88, 142 00 Praha 4

Distribuci pro předplatitele provádí v zastoupení vydavatele
MediaCall, s. r. o.

Vídeňská 546/55, 639 00 Brno

tel.: +420 532 165 165, e-mail: export@mediacall.cz

web: www.zahranicnitisk.com

ISSN 0035-9343

MK ČR E4691

© Jednota českých matematiků a fyziků, Praha 2023

Redakční rada

Vedoucí redaktorka:

doc. Ing. Lubomíra Dvořáková, Ph.D., FJFI ČVUT Praha

Redaktorka pro matematiku:

doc. Ing. Lubomíra Dvořáková, Ph.D., FJFI ČVUT Praha

Redaktor pro fyziku:

Mgr. Matěj Ryston, Ph.D., MFF UK Praha

Členové redakční rady:

prof. RNDr. Vlastimil Dlab, DrSc., F.R.S.C., Praha

doc. RNDr. Zdeněk Drozd, Ph.D., MFF UK Praha

RNDr. Petr Hanuš, FSv ČVUT Praha

doc. RNDr. Jaroslav Hora, CSc., FPE ZČU Plzeň

prof. RNDr. Ivo Kraus, DrSc., FJFI ČVUT Praha

doc. RNDr. Jan Kříž, Ph.D., PřF UHK Hradec Králové

prof. RNDr. Miroslav Lávička, Ph.D., FAV ZČU Plzeň

RNDr. Pavel Pokorný, Ph.D., VŠCHT Praha

RNDr. Miroslav Randa, Ph.D., PdF ZČU Plzeň

RNDr. Filip Studnička, Ph.D., PřF UHK Hradec Králové

doc. RNDr. Jan Šlégr, Ph.D., PřF UHK Hradec Králové

prof. RNDr. Pavel Tlustý, CSc., PedF JU České Budějovice

doc. RNDr. Pavel Töpfer, CSc., MFF UK Praha

RNDr. Vladimír Wagner, CSc., ÚJF AV ČR Řež

Slovo úvodem

Milé čtenářky, milí čtenáři,
v ruce držíte první číslo 98. ročníku časopisu *Rozhledy matematicko-fyzikální*.

Čtyři roky byla vedoucí redaktorkou didaktička fyziky *Marie Snětinová*, která vedla časopis směrem, ve kterém chci pokračovat i já. Na tomto místě bych jí ráda za celou redakční radu za její nadšenou a obětavou práci pro časopis poděkovala!

I do budoucna zůstává cílem, aby *Rozhledy* byly tím nejlepším časopisem pro středoškoláky se zájmem o matematiku, fyziku a informatiku a aby byly rovněž inspirací středoškolským profesorům těchto předmětů. Podle mého mínění se nám daří plnit časopis zajímavými a kvalitními články (pravidelně i v angličtině), které procházejí recenzí a jejichž autory jsou často i sami středoškoláci! Není ovšem jedinou úlohou časopisu, aby otiskoval zajímavé články. Rovněž dáváme prostor pozvánkám na akce, jako jsou soutěže, olympiády, tábory, přednášky, exkurze, korespondenční semináře, akce vysokých škol pro středoškoláky, a zprávám z těchto akcí. Představujeme netradiční zdroje pro studium a výuku M, F, I, jako jsou videa, internetové sbírky úloh, online přednášky a pokusy. Občas otiskneme rozhovor se zajímavými osobnostmi a recenze knih, o kterých se domníváme, že si zaslouží pozornost našich čtenářů. Pravidelně nahlížíme do historie matematiky a fyziky. Zároveň ale reagujeme na aktuální témata, ať už to byl v minulosti covid a s ním související modely šíření epidemií či téma online výuky nebo aktuální objevy z fyziky, o nichž se snažíme informovat.

Tento časopis bude z velké části takový, jaký si ho vy, naši čtenáři, uděláte. Neváhejte a kontaktujte nás, pokud pracujete na zajímavém projektu a chcete se podělit se čtenáři o pěkné výsledky nebo organizujete akci pro středoškoláky nebo točíte videa pro zájemce o M, F, I nebo děláte cokoliv jiného, co si zaslouží pozornost ostatních středoškoláků.

Těším se na spolupráci se všemi zájemci o matematiku, fyziku a informatiku a na dobré nápady, které od nich vzejdou pro další rozvoj našeho časopisu. A zejména nám všem přeji, ať si časopis najde cestu na všechny střední školy a ať středoškoláci vědí, že opravdu stojí za to *Rozhledy* číst!

Ľubomíra Dvořáková (matematicka a vedoucí redaktorka)

Tri definície elipsy a ich názorné prepojenie

Viera Čerňanová, Pedagogická fakulta Trnavskej univerzity, Trnava

V tomto príspevku vložíme elipsu spolu s ostatnými kužeľosečkami do historického kontextu. Predtým si pripomenieme tri definície elipsy, s ktorými sa môžeme stretnúť v matematike na vyššom stupni vzdelávania. Sú odvodené od rôznych vstupných geometrických konfigurácií.

1. Elipsa je uzavretá rovinná krivka, ktorá je prienikom rotačnej kužeľovej plochy a roviny neprechádzajúcej vrcholom tejto plochy.
2. Elipsa je množina bodov v rovine, ktoré majú rovnaký súčet vzdialeností od dvoch pevných bodov ležiacich v tejto rovine.¹⁾
3. Elipsa je množina bodov v rovine určenej bodom a priamkou, ktorá ním neprechádza, pričom body elipsy majú rovnaký pomer vzdialeností $e < 1$ od tohto bodu a priamky.²⁾

Kužeľosečky v starogréckej matematike

Počiatky teórie kužeľosečiek lokalizujeme do starovekého Grécka. Často sa spájajú s menom Apollonius z Pergy (262–190 p.n.l.)³⁾, avšak už sto rokov pred ním objavil Menaechmus (380–320 p.n.l.) pri riešení iného problému parabolu a hyperbolu.⁴⁾ Usudzuje sa, že Menaechmus objavil tiež elipsu a rozvinul teóriu kužeľosečiek, ktorým sa vďaka tomu hovorilo aj Menaechmove krivky. V dobe pred Apolloniom študovali kužeľosečky a ich vlastnosti aj ďalší grécki učitelia ako Aristaeus Starší (370–300 p.n.l.), Euklides z Alexandrie (asi 325–270 p.n.l.) či Archimedes zo Syrakúz (287–212 p.n.l.) [3, 4, 7].

V ponímaní starogréckych matematikov sa kužeľ vytváral rotáciou pravouhlého trojuholníka okolo jednej odvesny. Kužeľosečky boli rezmi kužeľovej plochy (plášťa) rovinou kolmou na generujúcu úsečku, čiže na

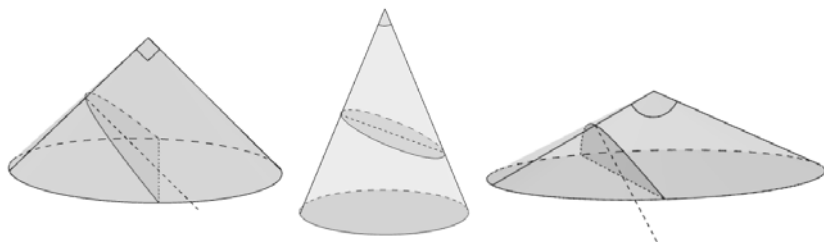
¹⁾Tieto body voláme *ohniská* elipsy, uvedený súčet je *dĺžka hlavnej osi* elipsy.

²⁾Daný bod je *ohnisko*, priamka je *určujúca (riadiaca)* priamka elipsy, číslo e je *excentricita*.

³⁾Životopisné údaje uvedené v tomto príspevku ako i niektoré zaujímavosti sme čerpali z online encyklopédie Wikipédia a overovali v citovaných zdrojoch.

⁴⁾Menaechmus objavil parabolu a hyperbolu ako vedľajší produkt, ktorý využil pri riešení delfského problému zdvojenia kocky.

hranu kužeľa. Vzniknutá kužeľosečka mala názov podľa veľkosti uhla pri vrchole kužeľa: *pravouhlá*, *ostrouhlá* alebo *tupouhlá* (obr.1). Klasifikácia bola teda odvodená inak, než ju robíme v súčasnosti. Súčasná klasifikácia sa odvíja od veľkosti uhla, pod ktorým pretína rovina hranu tej istej kužeľovej plochy, ako sme uviedli v definícii 2 príspevku [1]. Zodpovedajúcu definíciu elipsy 1 nájdeme tiež v prvej časti tohto článku. Poznamenajme, že tupouhlá kužeľosečka (hyperbola) ako rez plášt'a rotačného kužeľa rovinou nemala vo svojich starogréckych počiatkoch dve časti, ale iba jednu.



Obr. 1: Zľava: pravouhlá, ostrouhlá a tupouhlá kužeľosečka

Apollonius zhrnul a významne rozšíril dovtedajšie poznatky o kužeľosečkách v ôsmich spisoch, z ktorých prvé štyri sumarizujú a dopĺňajú štyri Euklidove knihy o kužeľosečkách a objavy iných Apolloniových predchodcov, ďalšie štyri sú Apolloniovým autorským prínosom. *Veľký geometer*, ako ho nazvali, významne zovšeobecnil teóriu kužeľosečiek, keď namiesto rotačného kužeľa uvažoval neohraničenú kužeľovú plochu, či už rotačnú alebo šikmú. Táto plocha vznikla v Apolloniovom ponímaní ako množina bodov pozostávajúca z priamok prechádzajúcich daným pevným bodom a dotýkajúcich sa danej kružnice, ktorá s týmto bodom neleží v tej istej rovine. Apollonius použil vo svojich spisoch názvy, pod ktorými poznáme kužeľosečky dnes: *parabola* (pravouhlá), *elipsa* (ostrouhlá) a *hyperbola* (tupouhlá kužeľosečka). *Kružnicu* považoval za samostatný typ kužeľosečky, nie za špeciálny prípad elipsy. Bolo možné vytvoriť ju dvomi spôsobmi: ako priesečnicu rotačnej kužeľovej plochy a roviny rovnobežnej s rovinou generujúcej kružnice, alebo ako priesečnicu šikmej kužeľovej plochy a vhodnej roviny. Apollonius tiež zistil, že hyperbola má dve časti súmerné podľa vrcholu kužeľovej plochy, a nazval ich *vetvy*. Apollonius si bol vedomý – a podľa terajších odborníkov aj vedel dokázať, no úplné dôkazy sa nezachovali – že definície

1, 2, 3 určujú tú istú rovinnú krivku, elipsu. Pritom *kuželosečka* je prienikom kužeľovej plochy a roviny (Ap1.), čo zodpovedá našej definícii 1. V spomenutých spisoch nájdeme:

Ap2. *Súčet ohniskových vzdialeností (t. j. vzdialeností od ohnísk) ľubovoľného bodu elipsy sa rovná dĺžke hlavnej osi.* ([4], Proposition 73, spis III. 51, 52)

Ap3. *V regulárnej kuželosečke je vzdialenosť od pevného bodu (ohniska) úmerná vzdialenosti od pevnej priamky (riadiacej priamky). Tento pomer vzdialeností nazývame excentricita (výstrednosť).* ([3, s. 119])

Grécki matematici pokračovali v štúdiu kuželosečiek aj v nasledujúcich storočiach. Výraznejšie stopy v tejto oblasti zanechal pol tisícročia po Apolloniovi jeho obdivovateľ Pappus z Alexandrie (290–350 n.l.).

Veľmi stručný pohľad do neskorších období

Arabskí matematici sa v X. storočí intenzívne zaoberali zostrojením a overovaním nástroja, ktorým by bolo možné konštruovať kuželosečky spojitým spôsobom, nie bod za bodom – čiže podobne, ako sa rysujú kružnice pomocou kružidla [6].

Kuželosečky a pridružené telesá (elipsoid, paraboloid, hyperboloid, ...) sa vďaka svojim vlastnostiam dostali do centra záujmu v optike, astronómii a iných exaktných vedách, ale aj v umení. Medzi osobnosťami renesančnej Európy, ktoré významne prispeli k pokroku v tejto oblasti, vyniká Leonardo da Vinci (1452–1519) či Johannes Kepler (1571–1630).

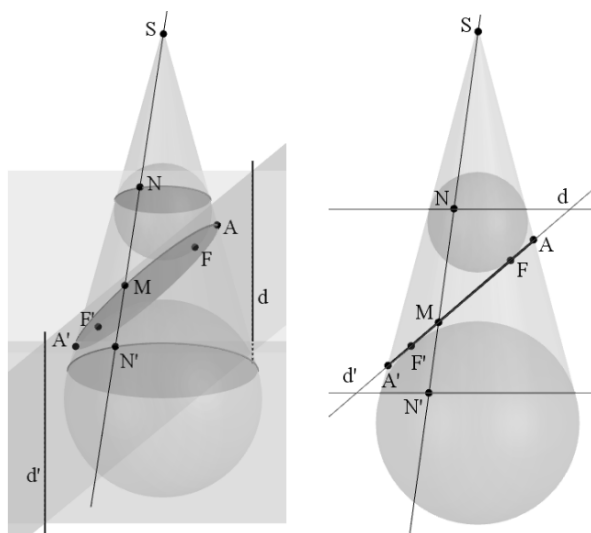
Sedemnásťte storočie zaznamenalo nástup a rozvoj projektívnych metód, ktoré sa naďalej dynamicky rozvíjajú. Tieto metódy ovplyvnili aj pohľad na kuželosečky. Philippe de la Hire (1640–1718) bol jedným z prvých matematikov, ktorí považovali každú regulárnu kuželosečku za obraz kružnice pri vhodne zvolenom premietaní.

Dandelinove sféry

V roku 1822 zverejnil francúzsko-belgický matematik a banský inžinier Germain Pierre Dandelin (1794–1847) názorný prístup umožňujúci elegantne dokázať Apolloniove tvrdenia [2, 8]. S podobným nápadom prišiel v tom istom období iný Belgičan Adolphe Quetelet (1796–1874). Preto nájdeme príslušnú vetu pod názvom *Dandelinova veta*, *Dandelin-Queteletova veta* alebo *Belgická veta o kuželosečkách*. V našom príspevku uvádzame jej znenie a dôkaz pre elipsu.

Veta 1. *Nech je prienikom rotačnej kužeľovej plochy $\mathcal{K}$ a roviny $\mathcal{P}$ elipsa $\mathcal{E}$. Potom existujú dve guľové sféry vpísané do $\mathcal{K}$ a dotýkajúce sa $\mathcal{P}$, pre ktoré platí:*

- (i) *Dotykové body sfér s rovinou $\mathcal{P}$ sú ohniskami elipsy $\mathcal{E}$.*
- (ii) *Priesečnice roviny $\mathcal{P}$ s rovinami, v ktorých ležia kružnice spoločné ploche $\mathcal{K}$ a jednotlivým sféram, sú riadiace priamky elipsy $\mathcal{E}$.*



Obr. 2: Dandelinove sféry – vľavo mierny pohľad, vpravo pohľad spredu

Dôkaz tvrdenia (i). Rovina $\mathcal{P}$ neprechádza vrcholom kužeľovej plochy (označme ho S), pretože $\mathcal{P} \cap \mathcal{K}$ je elipsa. Preto sa práve dve spomedzi sfér vpísaných do $\mathcal{K}$ dotýkajú $\mathcal{P}$ (obr. 2). Tieto sféry pomenujeme $\mathcal{G}$ a $\mathcal{G}'$, ich dotykové body s rovinou $\mathcal{P}$ označme F a F' .

Zvoľme bod M na elipse $\mathcal{E}$. Naším cieľom je dokázať, že $|MF| + |MF'|$ je konštanta, ktorá nezávisí od voľby bodu M . To bude zodpovedať ohniskovej definícii elipsy 2 s ohniskami F, F' .

Priamka $\overleftrightarrow{SM}$ je hranou plochy $\mathcal{K}$. Označme N, N' body, v ktorých sa $\overleftrightarrow{SM}$ dotýka sfér $\mathcal{G}, \mathcal{G}'$. Keďže $\overleftrightarrow{MF}$ a $\overleftrightarrow{MN}$ sú dotyčnice z bodu M k tej istej sfére $\mathcal{G}$, pre vzdialenosti platí $|MF| = |MN|$. Analogicky

$|MF'| = |MN'|$. Získané rovnosti sčítajme, dostaneme

$$|MF| + |MF'| = |MN| + |MN'| = |NN'|. \quad (1)$$

Uvedomme si, že každá guľová sféra vpísaná do rotačnej kužeľovej plochy s ňou má spoločnú kružnicu, ktorá leží v rovine kolmej na os plochy. To znamená, že pre ľubovoľnú polohu bodu M na $\mathcal{E}$ bude vzdialenosť príslušných bodov N, N' rovnaká.

Tým sme dokázali tvrdenie (i) podobným spôsobom, aký predložili Dandelin aj Quetelet.

Dokážme tiež, že konštanta $|NN'|$ sa rovná dĺžke hlavnej osi elipsy, čiže $|NN'| = |AA'|$, kde A, A' sú hlavné vrcholy elipsy. Využijeme skutočnosť, že body A, A', F, F' sú kolineárne, keďže ležia v rovine $\mathcal{P}$ a zároveň v rovine $\mathcal{O}$ určenej vrcholom S a bodmi A, A' . Rovina $\mathcal{O}$ totiž obsahuje os kužeľovej plochy a pretína sféry $\mathcal{G}, \mathcal{G}'$ v hlavných kružniciach. Dotykové body sfér s rovinou $\mathcal{P}$ sú teda zároveň dotykovými bodmi spomenutých kružníc s priesečnicou rovín $\mathcal{P}$ a $\mathcal{O}$, čo je priamka $\overleftrightarrow{AA'}$. Platí

$$|AF| + |AF'| = |AF| + |AF| + |FF'| = 2|AF| + |FF'| \quad (2)$$

a podobne

$$|A'F| + |A'F'| = 2|A'F'| + |F'F|. \quad (3)$$

Na druhej strane, keďže bodom M na elipse môže byť aj niektorý hlavný vrchol elipsy, na základe (1) máme

$$|AF| + |AF'| = |NN'| = |A'F| + |A'F'|. \quad (4)$$

Vďaka (4) môžeme dať pravé strany (2) a (3) do rovnosti, odkiaľ

$$|AF| = |A'F'|.$$

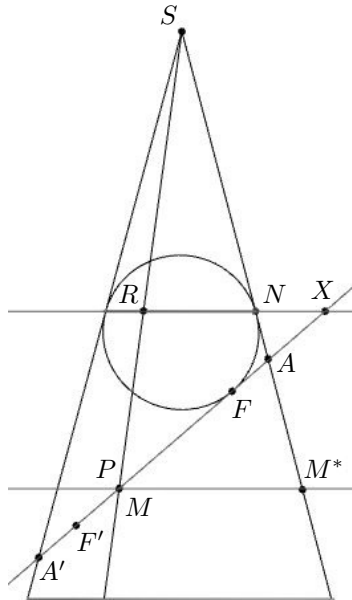
Túto rovnosť využijeme v ľavej časti (4)

$$|NN'| = |AF| + |AF'| = |A'F'| + |AF'| = |AA'|,$$

čím je dôkaz tvrdenia (i) aj s naším dodatkom dokončený.

Poznámka 1. Dandelin ani Quetelet nevyužili v dôkaze druhého tvrdenia myšlienku sfér. No už o niekoľko rokov neskôr (1829) britský matematik Pierce Morton predniesol a následne publikoval dôkaz [5], ktorý na tomto mieste s úpravami priblížime čitateľom.

Dôkaz tvrdenia (ii). Ako v (i), rovina $\mathcal{P}$ pretína rotačnú kužeľovú plochu $\mathcal{K}$ v elipse $\mathcal{E}$ s hlavnými vrcholmi A a A' . Do $\mathcal{K}$ je vpísaná sféra $\mathcal{G}$, ktorá sa dotýka roviny $\mathcal{P}$ v ohnisku F elipsy. Obr. 3 znázorňuje rez rotačného kužeľa vrcholovou rovinou $\mathcal{O}$ určenou bodmi S, A, A' . Keďže $\mathcal{P}$ ako aj rovina obsahujúca dotykovú kružnicu $\mathcal{K} \cap \mathcal{G}$ sú kolmé na $\mathcal{O}$, na obrázku sú znázornené ako priamky. Priesečníca týchto dvoch rovín d je priamka kolmá na $\mathcal{O}$, na obrázku ju vidíme ako bod X .



Obr. 3: Rez kužeľa a jednej sféry vrcholovou rovinou

Chceme dokázať, že ak $M \in \mathcal{E}$, tak pomer vzdialeností $|MF| : |Md|$ je konštanta nezávislá od voľby bodu M , čo zodpovedá definícii 3. Dokážeme tiež, že táto konštanta, štandardne označovaná e , spĺňa $e < 1$.

Hrana $\overleftrightarrow{SA}$ sa dotýka $\mathcal{G}$ v bode N . Z časti (i) vieme, že $|AF| = |AN|$. Takisto, ak $M \in \mathcal{E}$ je ľubovoľný bod a $R = \overleftrightarrow{SM} \cap \mathcal{G}$, tak $|MF| = |MR|$. Otočíme M okolo osi kužeľovej plochy tak, že dostaneme bod $M^* \in \overleftrightarrow{SA}$. Bod M^* teda leží v rovine kolmej na os kužeľovej plochy a prechádzajúcej bodom M . Pri tom istom otočení sa R zobrazí do N . Preto platí

$$|MF| = |MR| = |M^*N|. \quad (5)$$

Nech P je kolmý priemet bodu M na priamku $\overleftrightarrow{AA'}$. Potom $\overleftrightarrow{MP} \parallel d$, a teda pre vzdialenosti platí

$$|Md| = |Pd| = |PX|. \quad (6)$$

Využijeme skutočnosť, že všetky spomenuté body okrem M a R ležia v tej istej rovine $\mathcal{O}$. Platí $\overleftrightarrow{PM^*} \parallel \overleftrightarrow{NX}$, bod A je priesečníkom úsečiek NM^* a PX . Preto

$$|M^*N| : |PX| = |AN| : |AX|. \quad (7)$$

Keďže $\mathcal{E}$ je elipsa, pre veľkosti uhlov platí $|\sphericalangle SAX| > |\sphericalangle ASA'|$. Preto $|AN| < |AX|$. Pomocou vzťahov (5), (6) ako aj $|AN| < |AX| = |Ad|$ dostaneme po dosadení do (7)

$$|MF| : |Md| = |AF| : |Ad| = e < 1.$$

Dôkaz pre druhé ohnisko F' a príslušnú priamku d' je analogický.

Podakovanie

Tento príspevok vznikol s podporou grantu KEGA 001UMB-4/2020.

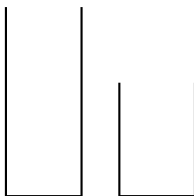
Literatúra

- [1] Čerňanová, V.: Elipsa, dcéra z rodiny kužeľosečiek. *Rozhledy matematicko-fyzikální*, 97 (2022), č. 4, s. 19–23.
- [2] Dandelin, G.: Mémoire sur quelques propriétés remarquables de la focale parabolique. *Nouveaux mémoires de l'Académie royale des sciences et belles-lettres de Bruxelles*, 2 (1822), s. 171–200.
- [3] Heath, T. L.: *A History of Greek Mathematics*. Volume I. Clarendon Press, Oxford, 1921.
- [4] Heath, T. L.: *Apollonius of Perga: Treatise on Conic Sections*. Cambridge University Press, Cambridge, 1896.
- [5] Morton, P.: On the Focus of a Conic Section. *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, 3 (1830), s. 185–190.
- [6] Raynaud, D.: Le tracé continu des sections coniques à la Renaissance: applications optico-perspectives, héritage de la tradition mathématique arabe. *Arabic Sciences and Philosophy*, 17 (2007), č. 2, s. 299–345.
- [7] Wells, D.: *The Penguin Dictionary of Curious and Interesting Geometry*. 1st edition, Penguin Books, London, 1991.
- [8] https://en.wikipedia.org/wiki/Dandelin_spheres.

Přelévání vody mezi nádobami, teorie grafů a modulární aritmetika

Pavel Pokorný, VŠCHT Praha

Uvažujme dvě nádoby na vodu, jednu o objemu 5 litrů, druhou o objemu 3 litry, ale bez rysek udávajících výšku hladiny (viz obr. 1). Můžeme jednu nebo druhou nádobu zcela naplnit čerstvou vodou, můžeme libovolnou nádobu zcela vyprázdnit (tím, že vodu vylijeme do odpadu) nebo můžeme vodu z jedné nádoby přelít do druhé nádoby, a to tak, že buďto přelijeme všechnu vodu, pokud se do druhé nádoby vejde, tedy až do stavu, kdy je první nádoba prázdná, nebo můžeme přelít takové množství vody, až je druhá nádoba zcela plná.



Obr. 1: Schématický náčrtek velké nádoby o objemu 5 litrů (vlevo) a malé nádoby o objemu 3 litry (vpravo)

Úloha zní: Lze s původně prázdnými nádobami dosáhnout stavu, kdy je v jedné nádobě 1 litr vody?

Uvedeme rychlé intuitivní řešení této úlohy a pak si ukážeme některé zajímavé matematické pojmy a algoritmy, které jsou užitečné i v jiných souvislostech.

Intuitivní řešení

Když zkoušíme téměř náhodně, jaké jsou dovolené operace, tak po chvíli nejspíše dospějeme k této možnosti: Naplníme malou nádobu po okraj, tedy aby v ní byly 3 litry vody. Pak tuto vodu přelijeme do velké nádoby. Potom opět malou nádobu naplníme po okraj a nakonec vodou z malé nádoby doplníme velkou nádobu, aby byla plná, tedy přelijeme 2 litry. Tak zůstane v malé nádobě právě 1 litr vody.

A co kdybychom začali naopak tím, že naplníme na začátku velkou nádobu po okraj, tedy aby v ní bylo 5 litrů? Jak lze dále postupovat? Můžeme přelít 3 litry do malé nádoby a ve velké nádobě zůstanou 2 litry. Pak malou nádobu vyprázdníme. Poté 2 litry z velké nádoby přelijeme do malé a velkou opět naplníme po okraj. Nyní můžeme malou nádobu doplnit z velké tím, že z ní přelijeme 1 litr, takže ve velké budou 4 litry a malá bude plná. Pak malou nádobu vyprázdníme. Nyní z velké nádoby, ve které jsou 4 litry, můžeme přelít do malé nádoby 3 litry a ve velké nádobě zbude 1 litr. Tento druhý způsob je zjevně delší. Nabízí se otázka, jak najít nejkratší postup vedoucí k danému cíli. A jaké stavy lze dosáhnout a jaké nelze?

V dalších kapitolách si ukážeme některé zajímavé matematické nástroje, které jsou užitečné pro hledání odpovědi na tyto a další otázky.

Matice přechodů

Pro pečlivý popis zavedeme veličiny: objem velké nádoby $a = 5$, objem malé nádoby $b = 3$, množství vody ve velké nádobě $x \in \{0, 1, \dots, a\}$ a množství vody v malé nádobě $y \in \{0, 1, \dots, b\}$. Pak celkový počet možných stavů je $n = (a + 1)(b + 1) = 24$. Očíslujme tyto stavy indexem $i = (b + 1)x + y$; $i \in \{0, 1, 2, \dots, n - 1\}$. Tedy např. stav $(0; 0)$, kdy $x = 0$, $y = 0$ označíme indexem $i = 0$, stav $(0; 1)$, kdy $x = 0$, $y = 1$ označíme indexem $i = 1$, až stav $(5; 3)$, kdy $x = 5$, $y = 3$ označíme indexem $i = 23$. Zpětný výpočet, tedy jak nalézt stav $(x; y)$ z indexu i , lze provést takto: $y = i \bmod (b + 1)$, $x = (i - y)/(b + 1)$, kde $\bmod$ je operace modulo, tedy zbytek po dělení. Např. pro stav $(2; 3)$, kdy $x = 2$, $y = 3$ je index $i = 4x + y = 11$ a naopak $y = 11 \bmod 4 = 3$ a $x = (11 - 3)/4 = 2$, protože 11 děleno 4 jsou 2 a zbytek je 3.

K operaci modulo se ještě vrátíme. Poznamenejme jen, že např. $\bmod 10$ vlastně dá z čísla zapsaného v desítkové soustavě číslici na místě jednotek, např. $158 \bmod 10 = 8$.

Nyní můžeme zavést matici přechodu (pozor, že v jiných souvislostech tento výraz může znamenat něco zcela jiného), tedy čtvercovou tabulku čísel, která má 24 řádků a 24 sloupců. Na řádku i ve sloupci j bude 0, jestliže nelze jedním krokem přejít ze stavu i do stavu j , a bude tam 1, jestliže to lze. Krokem zde rozumíme jednu dovolenou operaci s nádobami, tedy

- naplnění jedné nebo druhé nádoby
- vyprázdnění jedné nebo druhé nádoby

- přelití vody z jedné nádoby do druhé (a to tak, až bude buďto cílová nádoba plná, nebo až bude zdrojová nádoba prázdná)

Tak dostaneme následující matici

[illegible]

Při ručním výpočtu je nebezpečí chyby, která se špatně odhaluje, proto je vhodné tyto úkony provést na počítači např. pomocí těchto příkazů v systému *Mathematica*:

```
a = 5; (* velikost leve nadoby *)
b = 3; (* velikost prave nadoby *)
n = (a + 1)*(b + 1); (* pocet stavu *)
t = Table[0, {n}, {n}]; (* pripravime si matici nul *)
s[x_, y_] := 1 + (b + 1) x + y; (* jak spocitat index *)
Table[
  t[[s[x, y], s[0, y]]] = 1; (* levou nadobu lze vyprazdnit *)
  t[[s[x, y], s[x, 0]]] = 1; (* pravou nadobu lze vyprazdnit *)
  t[[s[x, y], s[a, y]]] = 1; (* levou nadobu lze naplnit *)
  t[[s[x, y], s[x, b]]] = 1; (* pravou nadobu lze naplnit *)
];
```

```

If[x > 0 && y < b && x <= b - y, t[[s[x, y], s[0,x+y]]]=1];
(* je-li vlevo trochu vody, lze ji prelit doprava *)
If[x > 0 && y < b && x > b - y, t[[s[x, y], s[x+y-b,b]]]=1];
(* je-li vlevo hodne vody, lze trochu ulit doprava *)
If[x < a && y > 0 && y <= a - x, t[[s[x, y], s[x+y,0]]]=1];
(* je-li vpravo trochu vody, lze ji prelit doleva *)
If[x < a && y > 0 && y > a - x, t[[s[x, y], s[a,x+y-a]]]=1];
(* je-li vpravo hodne vody, lze trochu ulit doleva *)
t[[s[x, y], s[x, y]]] = 0,
(* prechod do stejneho stavu je zbytecne uvazovat *)
{x, 0, a}, {y, 0, b}];
TeXForm[t] (* vystup matice t ve formatu TeX *)

```

Např. na prvním řádku vidíme pouze dvě jedničky. Ve čtvrtém sloupci, tedy pro index $i = 3$, to odpovídá přechodu $(0; 0) \rightarrow (0; 3)$, kdy naplníme pravou nádobu, a v dvacátém prvním sloupci, tedy pro index $i = 20$, to odpovídá přechodu $(0; 0) \rightarrow (5; 0)$, kdy naplníme levou nádobu.

Dále vidíme, že některé sloupce obsahují pouze nuly, např. šestý sloupec, tedy s indexem $i = 5$ odpovídající stavu $(1; 1)$. To znamená, že do tohoto stavu se nelze dostat dovolenou operací z jiného stavu. Tedy pro naše další úvahy lze vynechat tento stav, tedy škrtnout sloupec a řádek s tímto indexem. Podobně odstraníme i další sloupce a řádky s indexem odpovídajícím nulovému sloupci (je jich celkem 8). Tak dostaneme následující matici přechodu mezi dosažitelnými stavy, kterou označíme P . Matice P má velikost 16×16 , zatímco původní matice měla velikost 24×24 .

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Zde již je význam indexu jiný než v předchozí matici 24×24 . Označme m počet přípustných stavů. Zde tedy $m = 16$. Stavů budeme opět číslovat od nuly.

Označme p_{ij} prvek matice P na řádku i ve sloupci j . Hodnota $p_{ij} = 1$ znamená, že se lze v jednom kroku dostat ze stavu i do stavu j . V opačném případě je $p_{ij} = 0$.

A co když budeme uvažovat dva kroky? Tedy v prvním kroku cestu ze stavu i do stavu j a ve druhém kroku cestu ze stavu j do stavu k . To bude možné, pokud $p_{ij} = 1$ a $p_{jk} = 1$, tedy pokud $p_{ij}p_{jk} = 1$ pro nějaký mezistav, tedy pro nějaké j . Takových přípustných mezistavů j může existovat i více. Pak součet součinů $\sum_{j=0}^{m-1} p_{ij}p_{jk}$ bude udávat počet cest ze stavu i do stavu k . Můžeme tedy zavést matici P^2 s prvky

$$p_{ik}^{(2)} = \sum_{j=0}^{m-1} p_{ij}p_{jk},$$

jejíž prvky $p_{ik}^{(2)}$ udávají počet cest ze stavu i do stavu k ve dvou krocích (zde dvojka v závorce je pouze pravý horní index, neznamená druhou mocninu čísla p_{ik} ani druhou derivaci, pochází z dvojky v symbolu P^2 , který ale již má význam druhé mocniny matice P , jak ukážeme dále).

$$P^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Tato operace se nazývá násobení matic a pro dvě matice A a B , kde matice A je typu $u \times v$, tedy má u řádků a v sloupců, a matice B je typu $v \times w$, tedy má v řádků a w sloupců, můžeme uvažovat jejich součin, což bude matice $C = A \cdot B$ s prvky

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^v a_{ij}b_{jk},$$

což je vlastně skalární součin i -tého řádku matice A s k -tým sloupcem matice B . Je tedy nutné, aby šířka matice A , tedy počet jejích sloupců, se rovnal výšce matice B , tedy počtu jejích řádků.

Je-li význam prvku a_{ij} matice A počet cest ze stavu i do stavu j a význam prvku b_{jk} matice B počet cest ze stavu j do stavu k , pak význam prvku c_{ik} matice C je počet cest ze stavu i do stavu k (přes stav j). Tento význam součinu matic je jeden z důvodů, proč je násobení matic právě takto zavedeno, zdánlivě zbytečně složitě. Nabízí se otázka, proč nelze násobení matic zavést po složkách, podobně jako sčítání matic. Lze, ale takto definované násobení by mělo mnohem méně použití.

Takto zavedené matice nám umožní snadno zjistit, kolik kroků je potřeba, abychom se z daného výchozího stavu, např. ze stavu $(0; 0)$ dostali do určitého stavu, např. do stavu $(5; 1)$. Násobíme postupně matice P : $P^2 = P \cdot P$, $P^3 = P^2 \cdot P$, $P^4 = P^3 \cdot P$, ... a dostáváme

$$P^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 1 \\ 7 & 0 & 0 & 9 & 3 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 5 & 3 & 0 & 6 \\ 7 & 0 & 0 & 9 & 0 & 0 & 3 & 3 & 1 & 1 & 1 & 0 & 6 & 0 & 3 & 6 \\ 6 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 7 \\ 7 & 3 & 0 & 5 & 0 & 3 & 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 9 & 0 & 0 & 6 \\ 6 & 0 & 0 & 9 & 3 & 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & 3 & 0 & 5 & 1 & 1 & 7 \\ 7 & 0 & 3 & 5 & 0 & 0 & 1 & 4 & 3 & 0 & 0 & 1 & 8 & 0 & 0 & 7 \\ 5 & 0 & 0 & 9 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 8 & 0 & 1 & 5 \\ 5 & 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 9 & 0 & 0 & 5 \\ 7 & 0 & 0 & 8 & 1 & 0 & 0 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 5 & 3 & 0 & 7 \\ 7 & 1 & 1 & 5 & 0 & 3 & 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 3 & 9 & 0 & 0 & 6 \\ 6 & 0 & 0 & 9 & 1 & 0 & 1 & 3 & 1 & 1 & 3 & 0 & 5 & 0 & 3 & 7 \\ 7 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 4 & 3 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 6 \\ 6 & 3 & 0 & 6 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 & 3 & 0 & 0 & 9 & 0 & 0 & 7 \\ 6 & 0 & 3 & 5 & 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 3 & 9 & 0 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

až teprve v matici

$$P^4 = \begin{pmatrix} 13 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 7 & 7 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 13 \\ 20 & 6 & 0 & 19 & 0 & 4 & 3 & 5 & 10 & 5 & 0 & 1 & 25 & 1 & 0 & 21 \\ 20 & 0 & 6 & 18 & 0 & 1 & 3 & 9 & 10 & 1 & 0 & 4 & 24 & 1 & 0 & 22 \\ 7 & 1 & 0 & 20 & 0 & 0 & 3 & 1 & 2 & 5 & 0 & 0 & 21 & 0 & 0 & 7 \\ 21 & 0 & 1 & 25 & 6 & 0 & 1 & 10 & 6 & 3 & 4 & 0 & 18 & 4 & 1 & 20 \\ 21 & 4 & 1 & 18 & 0 & 6 & 3 & 5 & 10 & 2 & 0 & 4 & 25 & 1 & 0 & 20 \\ 20 & 0 & 1 & 25 & 0 & 0 & 7 & 9 & 5 & 3 & 1 & 0 & 22 & 0 & 4 & 18 \\ 21 & 0 & 4 & 14 & 0 & 0 & 2 & 11 & 10 & 1 & 0 & 1 & 17 & 1 & 0 & 21 \\ 21 & 0 & 1 & 17 & 1 & 0 & 1 & 10 & 11 & 2 & 0 & 0 & 14 & 4 & 0 & 21 \\ 18 & 4 & 0 & 22 & 0 & 1 & 3 & 5 & 9 & 7 & 0 & 0 & 25 & 1 & 0 & 20 \\ 20 & 0 & 1 & 25 & 4 & 0 & 2 & 10 & 5 & 3 & 6 & 0 & 18 & 1 & 4 & 21 \\ 20 & 1 & 4 & 18 & 0 & 4 & 3 & 6 & 10 & 1 & 0 & 6 & 25 & 1 & 0 & 21 \\ 7 & 0 & 0 & 21 & 0 & 0 & 5 & 2 & 1 & 3 & 0 & 0 & 20 & 0 & 1 & 7 \\ 22 & 0 & 1 & 24 & 4 & 0 & 1 & 10 & 9 & 3 & 1 & 0 & 18 & 6 & 0 & 20 \\ 21 & 0 & 1 & 25 & 1 & 0 & 5 & 10 & 5 & 3 & 4 & 0 & 19 & 0 & 6 & 20 \\ 13 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 7 & 7 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 13 \end{pmatrix}$$

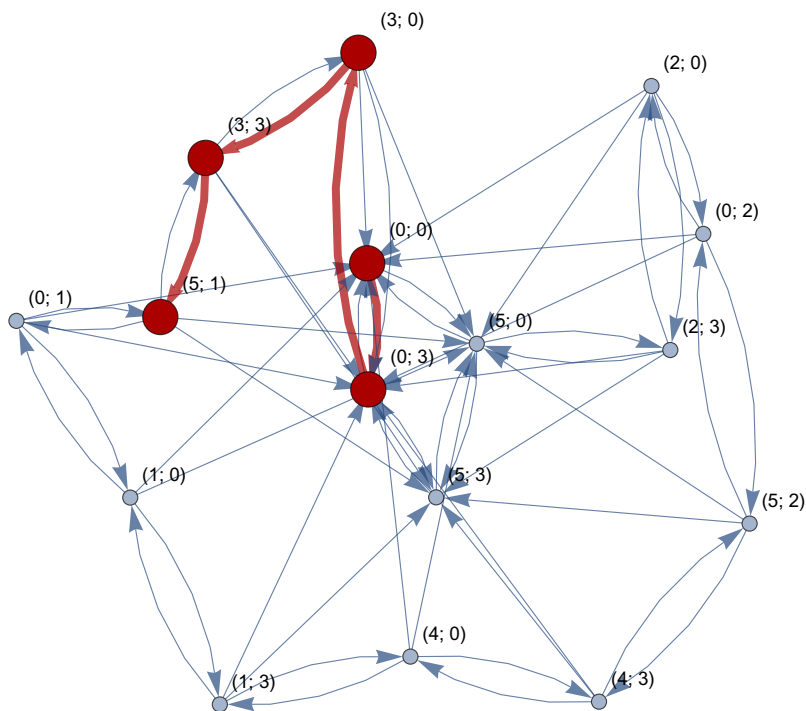
se na prvním řádku v čtrnáctém sloupci objeví poprvé nenulové číslo, které ukazuje, že se lze čtyřmi kroky dostat ze stavu $(0;0)$ do stavu $(5;1)$, který má podle původního číslování index 21 a po vyškrtnutí nedosažitelných stavů je to čtrnáctý stav.

V další kapitole si ukážeme jiný zajímavý nástroj pro sledování přechodu mezi stavy.

Teorie grafů

Body představující stavy našeho systému se v teorii grafů nazývají vrcholy (anglicky vertex). Dva vrcholy mohou být spojeny hranou (anglicky edge). Tato hrana může být orientovaná od jednoho vrcholu k druhému, jak tomu je v našem případě, kdy hrana značí možnost přechodu z jednoho stavu do druhého. Grafem pak nazýváme dvojici (V, E) , kde V je množina vrcholů a E je množina hran. Hranou v orientovaném grafu rozumíme uspořádanou dvojici vrcholů grafu, viz [1, 2].

Z matice přechodů P lze sestavit graf, viz obr. 2. V našem případě je matice přechodů P matice o velikosti 16×16 , protože náš systém má 16 dosažitelných stavů. Proto bude mít graf 16 vrcholů. Každému nenulovému prvku p_{ij} matice P (těch je 58) odpovídá orientovaná hrana od i -tého vrcholu k j -tému vrcholu. Proto bude mít graf 58 orientovaných hran. Na obr. 2 jsou vrcholy označeny pro přehlednost ne indexem, ale souřadnicemi (x, y) , jejichž význam je objem vody v levé a pravé nádobě.



Obr. 2: Graf popisující stavy systému dvou nádob a možné přechody mezi stavy. Tučnou čarou je vykreslena nejkratší cesta ze stavu $(0;0)$ do stavu $(5;1)$

Tučnou čarou je vykreslena nejkratší cesta ze stavu $(0;0)$ do stavu $(5;1)$. K nalezení nejkratší cesty můžeme použít Dijkstrův algoritmus, viz [3, 4]. Ten je srozumitelně popsán v pěkných skriptech [1] a tento popis algoritmu zde pro pohodlí čtenáře zopakujeme. Pro naši úlohu chceme najít nejkratší cestu z daného vrcholu do jiného daného vrcholu grafu, přičemž počítáme pouze počet operací, tedy počet hran. Dijkstrův algoritmus je obecnější ve dvou ohledech. Dovoluje nalézt nejkratší cesty z daného vrcholu do všech vrcholů grafu. Pracuje s grafy, kde hrany mohou mít různé délky a algoritmus pak hledá nejkratší cestu. To si lze představit, jako kdyby vrcholy byla města spojená silnicemi o různých délkách a my hledáme nejkratší cestu z daného města do jednotlivých měst. Tato nalezená cesta bude popsána tak, že každý vrchol bude mít přiřazeného svého předchůdce v této nejkratší cestě.

Označme v_0 výchozí vrchol, z něhož hledáme nejkratší cesty. Každému vrcholu v přiřadíme dočasnou hodnotu $dh(v)$, na počátku nekonečno, a trvalou hodnotu $th(v)$, to bude nalezená nejkratší vzdálenost od výchozího vrcholu v_0 . Celý algoritmus lze popsat v těchto pěti krocích:

1. Polož $th(v_0) = 0$ a $dh(v) = \infty$ pro každý jiný vrchol.
2. Necht' u je poslední vrchol, kterému byla přiřazena trvalá hodnota (na začátku je to vrchol v_0). Pro každý vrchol v , který nemá přiřazenu trvalou hodnotu a je spojen hranou s vrcholem u , polož

$$dh(v) = \min\{dh(v), th(u) + c(u, v)\},$$

kde $c(u, v)$ je délka nebo cena hrany mezi vrcholy u a v . Pro náš případ s nádobami je cena každé existující hrany rovna jedné.

3. Pokud v předcházejícím kroku došlo ke změně dočasné hodnoty, nastav předchůdce vrcholu v vrchol u .
4. Ze všech vrcholů, které nemají přiřazenou trvalou hodnotu, vyber vrchol v , jehož dočasná hodnota $dh(v)$ je minimální, a polož $th(v) = dh(v)$. Zde je hlavní myšlenka algoritmu: Jestliže žádný jiný vrchol bez trvalé hodnoty nemá kratší vzdálenost od počátečního vrcholu, tak přes něj nemůže vést kratší cesta. To platí za důležité podmínky, že váhy hran jsou nezáporná čísla. V našem případě jsou váhy hran rovny jedné, tedy nezáporné.
5. Pokud nemají všechny vrcholy přiřazenou trvalou hodnotu, pokračuj bodem 2. Jinak algoritmus končí.

Poznamenejme, že vrcholy, které nejsou spojené s výchozím vrcholem, budou mít po dokončení Dijkstrova algoritmu délku cesty nekonečno.

Ukažme si použití Dijkstrova algoritmu na náš příklad, kdy hledáme nejkratší cestu z vrcholu $(0; 0)$ do vrcholu $(5; 1)$, viz tabulka 1. V prvním sloupci je seznam všech vrcholů ve formátu $(x; y)$. Další sloupce odpovídají stavu na začátku provádění bodu 2. algoritmu. Každé políčko obsahuje dočasnou hodnotu (nepodtržené číslo) nebo trvalou hodnotu (podtržené číslo) a za čárkou je předchůdce vrcholu, který je uveden na příslušném řádku v prvním sloupci.

Na začátku nastavíme trvalou hodnotu vrcholu $(0; 0)$ na hodnotu 0 a toto číslo podtrhneme, protože je to již trvalá hodnota. Tento bod nemá předchůdce. Ostatním vrcholům přiřadíme dočasnou hodnotu nekonečno.

Tabulka 1: Ukázka použití Dijkstrova algoritmu pro nalezení nejkratší cesty z vrcholu $(0; 0)$ do vrcholu $(5; 1)$. V prvním sloupci je seznam všech vrcholů. Ty odpovídají stavům systému dvou nádob. V prvním řádku jsou čísla udávající iteraci (kolo) algoritmu. V hlavní části tabulky je nepodtržené číslo dočasná hodnota, podtržené číslo je trvalá hodnota délky cesty z vrcholu $(0; 0)$ do daného vrcholu (uvedeného v prvním sloupci). Za čárkou je uveden předchůdce daného vrcholu.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$(0, 0)$	<u>0</u>								
$(0, 1)$	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
$(0, 2)$	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	4, (2; 0)	4, (2; 0)
$(0, 3)$	∞	<u>1</u> , (0; 0)							
$(1, 0)$	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
$(1, 3)$	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
$(2, 0)$	∞	∞	∞	∞	3, (2; 3)	3, (2; 3)	<u>3</u> , (2; 3)		
$(2, 3)$	∞	∞	∞	<u>2</u> , (5; 0)					
$(3, 0)$	∞	∞	2, (0; 3)	2, (0; 3)	<u>2</u> , (0; 3)				
$(3, 3)$	∞	∞	∞	∞	∞	3, (3; 0)	3, (3; 0)	<u>3</u> , (3; 0)	
$(4, 0)$	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
$(4, 4)$	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
$(5, 0)$	∞	1, (0; 0)	<u>1</u> , (0; 0)						
$(5, 1)$	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	<u>4</u> , (3; 3)
$(5, 2)$	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
$(5, 3)$	∞	∞	2, (0; 3)	2, (0; 3)	2, (0; 3)	<u>2</u> , (0; 3)			

To zapíšeme do prvního sloupce v hlavní části tabulky, který má nahoře číslo 1.

V 1. kole algoritmu je $u = (0; 0)$. Ten je spojen se dvěma vrcholy, $(0; 3)$ a $(5; 0)$. Proto nastavíme jejich dočasnou hodnotu 1 a jejich předchůdce $(0; 0)$. Ve 4. bodě vybereme např. vrchol $(0; 3)$ a jeho dočasnou hodnotu prohlásíme za trvalou (v tabulce ji podtrhneme). Existuje-li více vrcholů s minimální dočasnou hodnotou, vybereme libovolný z nich. Na ostatní se pak dostane při dalších kolech algoritmu.

V 2. kole algoritmu je $u = (0; 3)$. Ten je spojen se třemi vrcholy, $(5; 3)$, $(3; 0)$ a $(0; 0)$. Vrchol $(0; 0)$ má již nastavenou trvalou hodnotu,

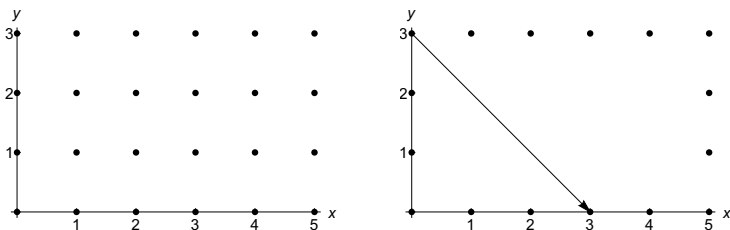
proto jeho záznam již neměníme (ani neopisujeme do dalších sloupečků). Pro vrcholy $(5; 3)$ a $(3; 0)$ nastavíme jejich dočasnou hodnotu 2 a jejich předchůdce $(0; 3)$. Záznam vrcholu $(5; 0)$ opíšeme. Minimum dočasných hodnot má nyní vrchol $(5; 0)$, a to 1. Proto tuto jedničku prohlásíme za trvalou hodnotu a v tabulce si ji podtrhneme.

Ve 3. kole algoritmu je $u = (5; 0)$. Ten je spojen se třemi vrcholy, $(0; 0)$, $(5; 3)$ a $(2; 3)$. Vrchol $(0; 0)$ již má přiřazenu trvalou hodnotu, a to 0, proto s ním již nepracujeme. Do vrcholu $(5; 3)$ vedou dvě cesty: původní přes vrchol $(0; 3)$ a nová přes vrchol $(5; 0)$, obě stejně dlouhé (2), proto jeho údaje nyní neměníme. Do vrcholu $(2; 3)$ jsme zatím našli cestu délky 2, jeho předchůdce je zatím vrchol $(5; 0)$. Z třech vrcholů $(2; 3)$, $(3; 0)$ a $(5; 3)$ s dočasnou hodnotou 2 vybereme např. vrchol $(2; 3)$ a prohlásíme jeho dočasnou hodnotu za trvalou.

Takto postupuje dále, výsledky zapisujeme do tabulky, až v 9. kole dospějeme k výsledku, že do bodu $(5; 1)$ vede cesta délky 4 a přechtením předchůdců jednotlivých bodů zjistíme, jak tato nejkratší cesta vypadá, tedy přes které vrcholy vede.

Příkaz pro hledání nejkratší cesty je běžnou součástí softwarových nástrojů pro práci s grafy. Např. v prostředí *Mathematica* se jmenuje `FindShortestPath`.

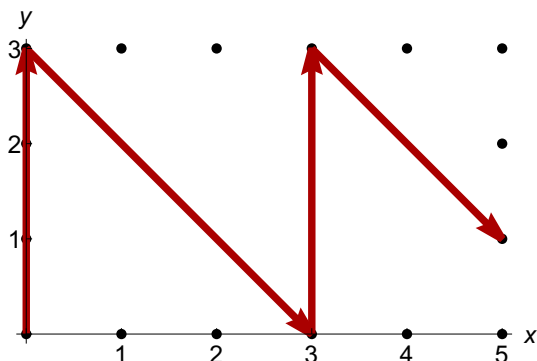
Modulární aritmetika



Obr. 3: Vlevo: body v rovině představující všechny možné stavy soustavy dvou nádob. Vpravo: pouze dosažitelné stavy. Šipkou je zobrazen přechod z bodu $(0; 3)$ do bodu $(3; 0)$, tedy kdy všechnu vodu z plné malé nádoby přelijeme do prázdné velké nádoby

Podívejme se na ještě jeden možný způsob řešení naší úlohy o přelévání vody mezi dvěma nádobami. Když si množství vody v levé nádobě označíme x a množství vody v pravé nádobě y , můžeme stav našeho systému dvou nádob vyjádřit bodem v rovině o kartézských souřadnicích $(x; y)$.

Všechny možné stavy pak vytvoří obdélníkovou síť bodů o celočíselných souřadnicích (viz obr. 3 vlevo) a dosažitelné stavy jsou reprezentovány body na obvodu tohoto obdélníku (viz obr. 3 vpravo).



Obr. 4: Nejkratší cesta z bodu $(0; 0)$ do bodu $(5; 1)$ podobně jako na obr. 2, ale zde jsou vrcholy grafu umístěny do bodů podle jejich kartézských souřadnic

Jaké přechody jsou možné a jak se zobrazí na obrázku? Vyjděme ze stavu, kdy jsou obě nádoby prázdné, tedy z bodu $(0; 0)$. Můžeme naplnit velkou nádobu vodou. Tím se přesuneme z levého dolního rohu do pravého dolního rohu. Nebo můžeme naplnit malou nádobu, pak se přesuneme do levého horního rohu. Když naplníme i druhou nádobu, tak se přesuneme do pravého horního rohu. Vyprázdnění velké nádoby znamená přesun na levý okraj (malá nádoba zůstává beze změny, tedy souřadnice y se nemění). Vyprázdnění malé nádoby znamená přesun na dolní okraj (nyní velká nádoba zůstává beze změny, tedy souřadnice x se nemění). Podobně naplnění velké nádoby je přesun na pravý okraj, stav malé nádoby se nemění, tedy souřadnice y se nemění. Naplnění malé nádoby je přesun na horní okraj při zachování souřadnice x .

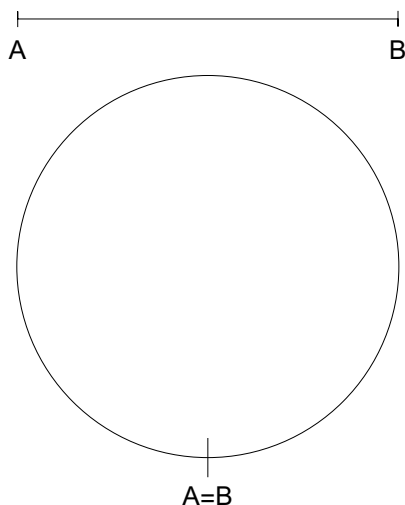
A co přelévání z jedné nádoby do druhé? Při tomto ději se celkové množství vody v obou nádobách zachovává, pohybujeme se po přímce $x + y = \text{konst}$, to je přímka klesající pod úhlem 45° . Na obr. 3 vpravo je šipkou mířící doprava dolů zobrazen přechod, kdy přelijeme veškerou vodu z plné malé nádoby do velké nádoby.

Obr. 4 je obdobou obr. 2, tedy ukazuje dosažitelné body a nejkratší cestu z bodu $(0; 0)$ do bodu $(5; 1)$, ale vrcholy jsou umístěny v rovině podle jejich kartézských souřadnic.

Jak je to s dosažitelností jednotlivých bodů? Při přelévání vody z malé nádoby do velké (pohyb na obr. 4 doprava dolů) proces končí, když buďto dojde voda v malé nádobě (na obr. 4 narazíme na dolní okraj) nebo dosáhneme plné velké nádoby (na obr. 4 narazíme na pravý okraj). A podobně při přelévání vody z velké nádoby do malé (pohyb na obr. 4 doleva nahoru) proces končí, když buďto dojde voda ve velké nádobě (na obr. 4 narazíme na levý okraj) nebo dosáhneme plné malé nádoby (na obr. 4 narazíme na horní okraj). Při hledání všech dosažitelných bodů můžeme tedy sledovat, kam se všude dostaneme, když provádíme přelévání z malé nádoby do velké (pohyb doprava dolů) doprovázené doléváním malé nádoby, když je prázdná, a vyléváním velké nádoby do odpadu, když je plná. Nebo obráceně přeléváme vodu z velké nádoby do malé, doplnění doléváním velké nádoby a vyprazdňováním malé.

Ty pomocné operace (doplňování a vylévání vody) vlastně jen ztotožňují body na horním okraji s body na dolním okraji obdélníku a body na levém okraji s body na pravém okraji.

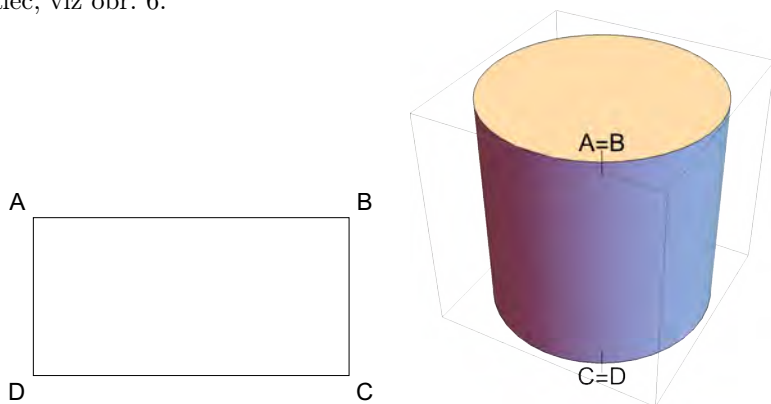
Když ztotožníme krajní body úsečky, dostaneme kružnici (až na nepodstatné deformace), viz obr. 5.



Obr. 5: Když ztotožníme krajní body úsečky (jako bychom zapnuli pásek u kalhot), dostaneme kružnici

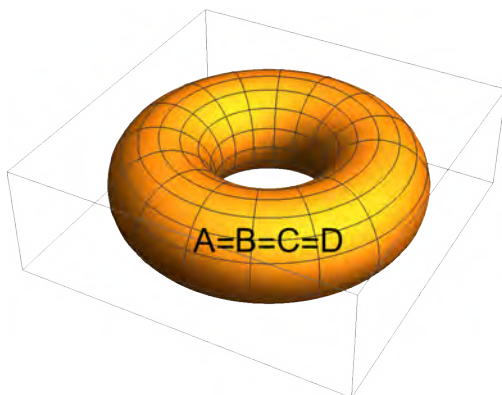
MATEMATIKA

Když ztotožníme hranu obdélníku s protilehlou hranou, dostaneme válec, viz obr. 6.



Obr. 6: Když ztotožníme levou stranu obdélníku s protější stranou (jako bychom stočili vysokoškolský diplom do tuby), dostaneme válec

A když ztotožníme navíc druhou stranu obdélníku s protilehlou stranou, dostaneme torus (ten si můžeme představit jako povrch nafouknuté pneumatiky), viz obr. 7. Milovníci sladkého pečiva si místo pneumatiky raději představí americkou koblihu neboli donut.



Obr. 7: Torus je plocha, kterou si můžeme představit jako dvakrát stočený obdélník

Takže přelévání vody z malé nádoby do velké, doprovázené doplňováním vody do malé nádoby, když je prázdná, a vyléváním vody z velké

nádoby, když je plná, si můžeme představit jako pohyb jihovýchodním směrem v rovině. A buďto uvažujeme, že opustíme náš základní obdélník a dostáváme se postupně do jeho dalších kopií, nebo se při nárazu na pravou hranu vrátíme na levou hranu a při nárazu na spodní hranu se vrátíme na horní hranu. To je ekvivalentní nahrazení vodorovné souřadnice x výrazem $x \bmod 5$ a nahrazení svislé souřadnice y výrazem $y \bmod 3$, kde mod je zbytek po dělení. Např. $11 \bmod 5 = 1$, protože $11 : 5$ je 2 a zbude 1. Anebo se na tento proces můžeme dívat jako na pohyb po toru.

Naše otázka zní, které všechny body lze takto navštívit. Průsečíky přímký popisující sledovaný proces s dolní hranou obdélníku, přesněji s body o vodorovné souřadnici $x \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ se střídají tak, že nový průsečík je o 3 jednotky vpravo oproti předchozímu průsečíku. Navštívíme takto všechny body?

Je-li počet bodů, zde 5, nesoudělný s velikostí kroku, zde 3, pak navštívíme všechny body. To lze snadno dokázat sporem. Uvažujme obecně počet bodů a (zde 5) na úsečce a velikost skoku b (zde 3). Předpokládáme, že přirozená čísla a a b jsou nesoudělná, tedy jejich největší společný dělitel $\gcd(a, b) = 1$. Zkratka gcd pochází z anglického výrazu greatest common divisor. Dále předpokládáme, že když začneme z bodu x_0 , tak dostáváme postupně body

$$x_1 \equiv x_0 + b \pmod{a}, \quad x_2 \equiv x_0 + 2b \pmod{a},$$

obecně

$$x_n \equiv x_0 + nb \pmod{a}.$$

Chceme dokázat, že takto navštívíme všechny body množiny $\{0, 1, 2, \dots, a-1\}$. Důkaz provedeme sporem. Předpokládejme tedy, že po n krocích se dostaneme do bodu, kde jsme již byli po m krocích, aniž bychom mezitím navštívili všechny body. Pak by se navštívené body opakovaly a dosud nenavštívené body by nebyly navštíveny nikdy. Přitom má platit $0 < n - m < a$. Dostat se do bodu, kde jsme již byli, znamená

$$x_m \bmod a = x_n \bmod a,$$

tedy

$$x_n - x_m = ka,$$

kde $k \in \mathbb{N}$ je přirozené číslo. Protože

$$x_m \equiv x_0 + mb \pmod{a}, \quad x_n \equiv x_0 + nb \pmod{a},$$

je

$$x_n - x_m = (n - m)b = ka.$$

Zde jsou čísla a a b nesoudělná, takže rozdíl $(n - m)$ musí být násobkem a . To ale není možné, protože $0 < n - m < a$. Tím je důkaz proveden.

To znamená, že jsou-li objemy nádob a a b nesoudělná čísla, jako tomu je v našem původním příkladu, kde $a = 5$ a $b = 3$, tak postupně navštívíme všechny body obvodu obdélníku.

Kdyby naopak čísla a a b nebyla nesoudělná, například kdyby bylo $a = 10$ a $b = 6$, tedy jejich největší společný dělitel $\gcd(a, b) = 2$, tak by dosažitelné body byly pouze ty body, jejichž souřadnice jsou násobky čísla 2, nikdy bychom nedostali bod, kde $x = 1$.

A kdyby dokonce podíl a/b nebyl racionální, ale iracionální číslo, tak by pohyb po toru vytvořil křivku, která by jeho povrch vyplnila hustě a nikdy se nevrátila do bodu, ve kterém již byla. Výrazem hustě vyplnit zde myslíme to, že v libovolně malém okolí libovolného bodu se nachází bod křivky.

Závěr

Na jednoduché úloze jsme ukázali, jak zajímavé matematické nástroje můžeme použít. Chvillemi se mohlo zdát, že jdeme louskat oříšky parním strojem, ale pro nás to byla dobrá příležitost seznámit se s těmito užitečnými postupy.

Literatura

- [1] Turzík, D., Pavlíková, P.: *Diskrétní matematika*. VŠCHT, Praha, 2007.
- [2] Wikipedia: *Graph (discrete mathematics)*. [online] [https://en.wikipedia.org/wiki/Graph_\(discrete_mathematics\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Graph_(discrete_mathematics)).
- [3] Wikipedia: *Dijkstra's algorithm*. [online] https://en.wikipedia.org/wiki/Dijkstra's_algorithm.
- [4] Kára, J., Král', D., Mareš, M.: Recepty z programátorské kuchařky Korespondenčního semináře z programování, 1. část. *Rozhledy matematicko-fyzikální*, 80 (2005), č. 1, s. 26–33.

Proč si Češi pořizují solární panely?

Michaela Makešová, Michaela Valentová, FEL ČVUT v Praze

Abstrakt. Obnovitelné zdroje energie (OZE) jsou jednou z hlavních cest přechodu k uhlíkové neutralitě, a to zejména v odvětví energetiky. Přestože se jejich podíl v posledním desetiletí výrazně zvýšil, pro včasný a efektivní odklon od fosilních paliv je stále zapotřebí jejich výraznějšího rozvoje.

Rozvoj OZE s sebou nese řadu efektů (dopadů), které lze primárně rozdělit na přímé a nepřímé. Kromě snížení emisí skleníkových plynů a dalších ekologických a ekonomických přínosů přináší rozvoj OZE i další nepřímé efekty pro jednotlivce i společnost (socioekonomické, environmentální, zdravotní a jiné), tzv. vícenásobné efekty. Článek analyzuje motivace soukromých investorů při pořizování malých fotovoltaických systémů (na střechy rodinných domů) a zaměřuje se zejména na to, jak tito malí investoři (domácnosti) zahrnují tyto vícenásobné efekty do svého rozhodování.

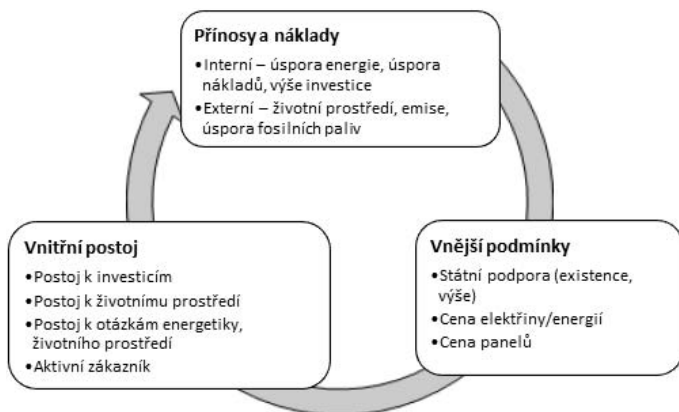
Výsledky našeho vzorku respondentů, který se ukázal jako dostatečně statisticky reprezentativní, ukazují, že (1) nefinanční přínosy, rozdělené na osobní a společenské, jsou pro investory do fotovoltaických elektráren v domácnostech významné a jsou reprezentovány zejména zájmem o životní prostředí (86 % respondentů) a energetickou bezpečností (82 % respondentů); (2) nefinanční přínosy jsou zvažovány ve stejné míře jako finanční přínosy; (3) investory méně zajímá výše současné investice ve vztahu k budoucím úsporám nákladů a (4) investoři jsou stále ochotnější stát se aktivními zákazníky a aktivně ovlivňovat svou spotřebu a výrobu energie.

Dosažení klimatické neutrality do poloviny 21. století je jedním z hlavních dlouhodobých cílů EU i dalších významných zemí [1]. Nedílnou součástí tohoto přechodu bude značný rozvoj obnovitelných zdrojů energie (OZE), jehož cílem je zabránit negativním environmentálním, případně sociálně-ekonomickým důsledkům dosavadních způsobů získávání energie, jako je neudržitelné využívání přírodních zdrojů, rostoucí závislost na dovozu fosilních paliv nebo negativní dopad na životní prostředí a lidské zdraví. Podíl OZE, zejména v elektroenergetice, se v posledním desetiletí výrazně zvýšil (např. v EU se mezi lety 2004 a 2019 více než zdvojnásobil [2]), ale je třeba jeho výraznějšího rozvoje, aby byl přechod elektroenergetického sektoru v souladu s přechodem na klimatickou neutralitu. Například se očekává, že instalovaný výkon fotovoltaiky v Česku se v letech 2020–2030 dále zdvojnásobí, přičemž jedním z hlavních tahounů investic do fotovoltaiky má být sektor domácností s malými insta-

lacemi (do 10 kWp) – zhruba polovina očekávaného nového instalovaného výkonu [3].

Rozvoj obnovitelných zdrojů v energetice zároveň přináší nejen zmírnění emisí skleníkových plynů a finanční úspory, ale také řadu nepřímých finančních a dalších, socioekonomických, efektů, které se v odborných kruzích označují jako vícenásobné dopady [4, 5, 6]. Pod pojmem vícenásobné dopady (efekty) obnovitelných zdrojů energie (ME OZE) si lze tedy představit všechny dopady a efekty, které kromě přímých individuálních finančních přínosů a nákladů vznikají jednotlivcům i společnosti [6].

Soukromí investoři obvykle při procesu nákupu OZE srovnávají širěji či úžeji vymezený poměr nákladů a přínosů [7], ale vliv na jejich rozhodnutí má i jejich vnitřní nastavení a názory [8, 9]. Náš výzkum proto přináší hloubkovou socioekonomickou analýzu rozhodování domácností o instalaci fotovoltaiky na střechy rodinných domů. Hlavním cílem výzkumu je zmapovat ME OZE vstupující do rozhodovacího procesu domácností a identifikovat nejvýznamnější faktory, které mají vliv na rozhodnutí o investici do fotovoltaických panelů se zaměřením na vícenásobné dopady. Analýza je založená na výstupech hloubkových rozhovorů a dotazníkového šetření na případové studii českých domácností. Hlavní výzkumnou otázkou tedy je, do jaké míry jsou drobní investoři motivováni kromě finančních dopadů i dalšími, nefinančními dopady a jaká je jejich struktura.



Obr. 1: Struktura faktorů ovlivňujících rozhodování soukromého investora

Rozhodovací proces

Faktory ovlivňující proces rozhodování jednotlivců se dají rozdělit do tří skupin – přínosy a náklady, vnitřní postoj a vnější podmínky. Přínosy a náklady zahrnují jak přínosy pro jednotlivce (interní), tak pro společnost (externí), vnitřní postoj pak zohledňuje vnitřní nastavení vzhledem k investicím, životnímu prostředí apod. Vnější (okrajové) podmínky pak určují rámec rozhodování, ať už jsou přímo ovlivnitelné veřejnými subjekty (státní podpora) nebo jsou určovány trhem (cena energií, fotovoltaických panelů).

Metodika výzkumu

Vlastní výzkum probíhal v několika fázích. V první fázi bylo nutné identifikovat všechny možné faktory ovlivňující soukromé investory a určit jejich charakter. V první řadě bylo třeba popsat celý proces pořízení FVE, dále určit jednotlivé zástupce zúčastněných stran (stakeholdery), kteří do procesu vstupují. Se zástupci těchto stran byly následně vedeny polostrukturované rozhovory, ze kterých vyplynula množina 25 faktorů, které byly následně validovány a potvrzeny na panelové diskusi odborníků.



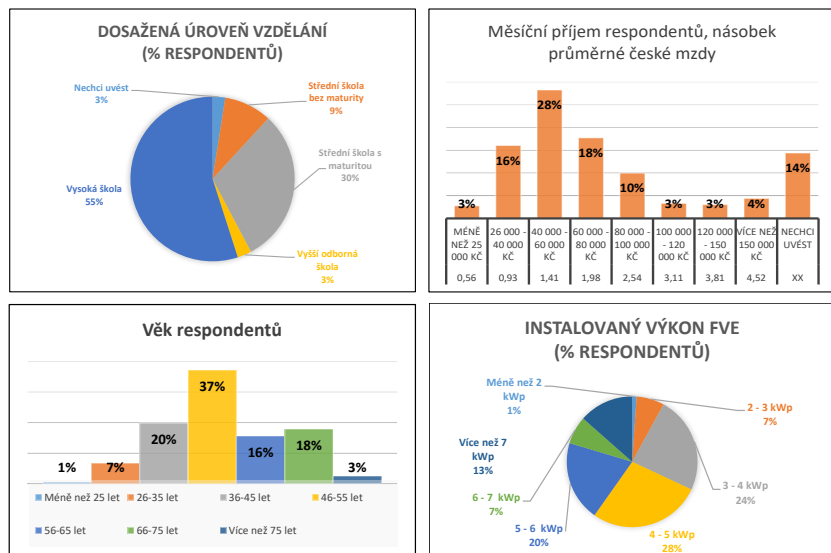
Obr. 2: Postup výzkumu

V druhé fázi výzkumu bylo provedeno pilotní dotazníkové šetření, jehož cílem bylo zjistit míru zvažování jednotlivých identifikovaných faktorů, tedy jak dotazovaní majitelé FVE zahrnuli jednotlivé faktory do svého rozhodování. Otázky byly doplněny o řadu kvalitativních otázek zaměřených na osobní nastavení, názory a zkušenosti investorů.

Ve třetí fázi pak bylo na základě této pilotní studie provedeno rozsáhlé dotazníkové šetření s optimalizovaným dotazníkem, které umožnilo detailně popsat jednotlivé faktory rozhodování. Výsledkem byly také závěry ohledně heterogenity populace v oblasti rozhodování a identifikace pěti základních pilířů rozhodování.

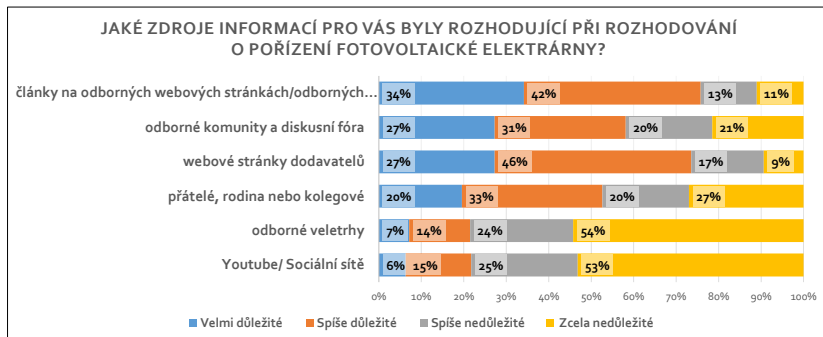
Výsledky

Celkem se výzkumu účastnilo 363 respondentů. V daném vzorku převažovali respondenti s vysokoškolským vzděláním (55 % respondentů). Téměř dvě pětiny z nich jsou ve věku 46–55 let. Respondenti, resp. jejich domácnosti (dva lidé, kteří vydělávají), vydělávají průměrnou mzdu. Klíčové charakteristiky vzorku byly ověřeny oproti celé populaci (všichni majitelé fotovoltaických systémů v domácnostech v České republice).



Obr. 3: Základní charakteristiky vzorku respondentů

Hlavním zdrojem informací při rozhodování, zda vůbec pořídit FVE elektrárnu jsou odborné weby a stránky dodavatelských firem. Vliv okolí (rodiny, přátel, případně kolegů) je méně významný, i když stále 53 % respondentů uvedlo, že je pro ně okolí v rozhodovacím procesu spíše nebo velmi důležité (obr. 4).

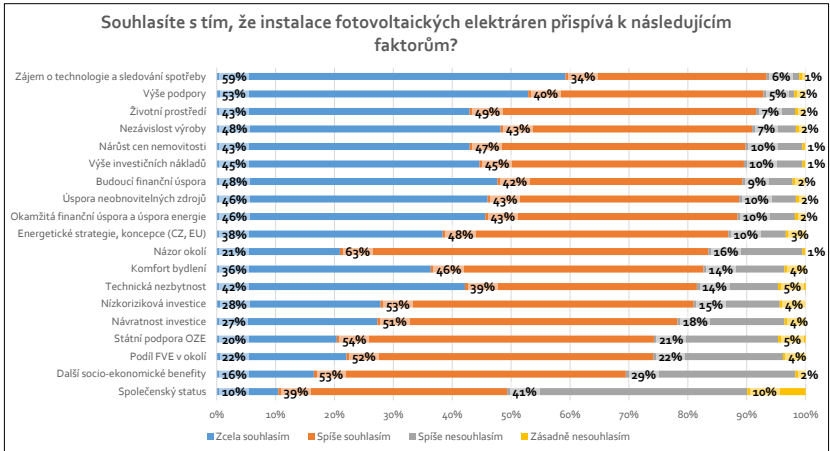


Obr. 4: Zdroje informací respondentů

Identifikované faktory

Podle respondentů má instalace FVE největší přínos k přehledu o spotřebě energie zákazníka a ke zlepšení životního prostředí. Podle respondentů také rozvoj FVE přispívá k vyšší nezávislosti výroby energie nebo k úspoře neobnovitelných zdrojů energie. Respondenti také například předpokládají, že FVE může zvyšovat komfort bydlení (82 % zcela nebo spíše souhlasí). Naopak FVE podle respondentů nemá vliv na společenský status vlastníka nebo například další socioekonomické přínosy (například zvyšování zaměstnanosti nebo rozvoj vzdělání). To jsou faktory, které hrají roli v jiných státech a jsou velmi spojené s otázkou přístupu ke zdrojům energie (tzv. energy access), který je stále nedostatečný zejména v rozvojových zemích.

Mezi nejdůležitější faktory pro respondenty, které vstupují do jejich rozhodování o pořízení FVE, patří budoucí růst cen energií, úspora nákladů a ekologické přínosy. Tedy tím, že si pořizují FVE, snaží se malí investoři zejména chránit před předpokládaným budoucím růstem ceny energií. Zároveň se snaží snížit současné náklady na elektrickou energii a zvýšit také svou soběstačnost v oblasti zásobování elektrickou energií. Také jsou si ve velké míře vědomi i environmentálních přínosů, ke kterým díky pořízení FVE přispívají. Naopak na rozhodování o pořízení FVE nemá v zásadě žádný vliv (na rozdíl například od Německa či Rakouska) to, zda roste zastoupení FVE na střechách domů, jak se na FVE dívá okolí nebo například technická nezbytnost (odlehlost obydlení nebo nespolehlivost dodávek elektrické energie, což mohou být faktory, které v jiných oblastech budou hrát významnější roli).



Obr. 5: Mnohostranné efekty rozvoje FVE – vnímání respondentů

Výše uvedených 19 faktorů lze na základě výsledků dotazníkového šetření seskupit do pěti hlavních pilířů rozhodování (tabulka 1). Lze říci, že jednotlivé faktory v rámci každého pilíře se „chovají“ podobně, respektive je investoři zahrnují do svého rozhodování jako agregovaný celek. Tato agregace pak může sloužit při dalších výzkumech i například identifikaci jednotlivých „skupin“ investorů podle toho, jak jsou u nich zastoupeny jednotlivé pilíře rozhodování.

Tabulka 1 Pilíře rozhodování

Soukromé ekonomické výhody	Návratnost investice Okamžitá finanční úspora a úspora energie Budoucí finanční úspora Nízkorizikovost investice
Počáteční investice	Výše investičních nákladů Výše podpory
Technické přínosy	Nezávislost výroby Technická nezbytnost Zájem o technologie a sledování spotřeby Komfort bydlení

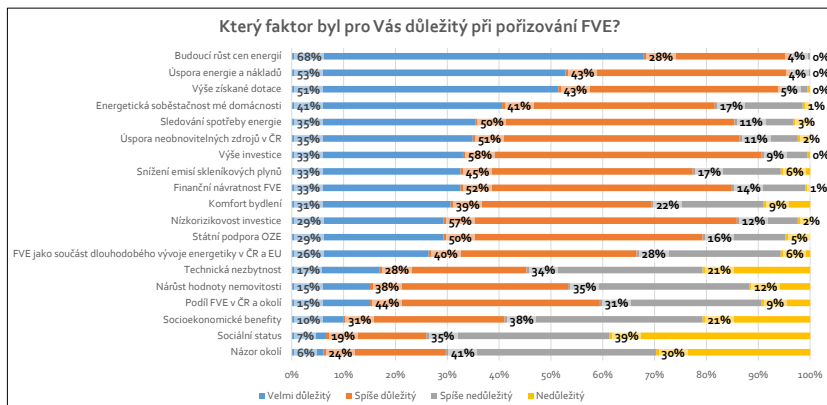
Socioekonomický faktor

Energetické strategie, koncepce (CZ, EU)
Státní podpora OZE
Úspora neobnovitelných zdrojů
Další socioekonomické benefity
Životní prostředí

Vnímání okolního prostředí

Podíl FVE v okolí
Názor okolí
Společenský status
Nárůst cen nemovitosti

Zajímavým výsledkem zejména s ohledem na rozvoj decentralizované energetiky a konceptu aktivních spotřebitelů¹⁾ je, že v rámci vzorku byla relativně běžnou součástí instalace zároveň instalace baterie nebo pořízení elektromobilu (ať už aktuální nebo plánované během následujících pěti let). Zároveň byly také fotovoltaické systémy velmi často instalovány společně s řadou dalších energeticky úsporných opatření, jako například zateplením domu nebo výměnou oken. To je velmi důležité z pohledu spotřeby energie celého domu – je vhodné opatření na straně spotřeby (úspor energie) řešit současně se stranou výroby (změna zdroje na vytápění, instalace FVE).



Obr. 6: Vliv mnohostranných efektů rozvoje FVE na rozhodování respondentů

¹⁾ Často se používá termín prosumer, jako kombinace slov producer (výrobce) a consumer (spotřebitel).

Závěry a další postup

Výsledky vzorku, který se ukázal jako dostatečně statisticky reprezentativní, ukazují, že (1) osobní finanční přínosy jsou hlavní motivací pro pořízení FVE a skládají se z úspor energie a nákladů. Výše investice není nejdůležitější, pokud je kompenzována dostatečně velkou dotací. (2) Nefinanční přínosy, rozdělené na osobní a společenské, jsou pro investory do fotovoltaických elektráren v domácnostech významné. Typicky se jedná o přínos k životnímu prostředí (86 % respondentů) a osobní energetickou bezpečnost (82 % respondentů).

Zásadním zjištěním je, že nefinanční přínosy jsou zvažovány ve stejné míře jako finanční přínosy a investory méně zajímá výše současné investice ve vztahu k budoucím úsporám nákladů. Respondenti také instalují FVE společně s dalšími opatřeními na úsporu energií a jsou ochotnější stát se aktivními zákazníky a přímo aktivně ovlivňovat nejen spotřebu (například prostřednictvím úsporných opatření), ale také výrobu energie (instalace FVE a dalších systémů).

Faktory ovlivňující rozhodovací proces lze agregovat do několika hlavních pilířů rozhodování, které dostatečně pokrývají všechny zvažované efekty v rozhodovacím procesu. Tato kategorizace pak dále umožní i typologizaci investorů, tedy umožní identifikovat hlavní skupiny investorského chování. Výsledky tohoto výzkumu budou také dále zpřesněny na reprezentativním vzorku respondentů (2565 respondentů) z populace všech vlastníků FVE, kteří obdrželi dotaci z programu Zelená úsporám, (databáze 15 000 zákazníků).

Výsledky výzkumu lze kromě jiného využít například i pro optimální nastavení politických opatření na podporu rozvoje obnovitelných zdrojů. Výsledky napovídají, že při cílení podpůrných opatření je možné kromě finančních nástrojů (dotace, zvýhodněné půjčky) využít mnohem více i například informační nástroje zaměřené právě na další efekty rozvoje OZE, dobré příklady praxe a další.

V případě zájmu o témata spojená s dekarbonizací a transformací energetického sektoru (ať už z technologického, tak i socioekonomického hlediska) také zveme čtenáře a čtenářky z řad středoškolských studentů k účasti na Energetické olympiádě, která již několik let úspěšně probíhá pod záštitou Fakulty elektrotechnické ČVUT. Jedná se o týmovou soutěž pro středoškolské studenty, zejména z posledních dvou ročníků. Týmy jsou maximálně tříčlenné, poskládat je lze bez omezení tříd nebo dokonce škol. Soutěž má dvě kola, první online a druhé prezenční. V prvním kole týmy řeší online ve stanoveném čase 30 úloh v systému, do kterého se

přihlásí a byli předtím zaregistrováni. Při prvním kole lze používat online zdroje, není tedy potřeba žádná zásadní příprava a znalosti problematiky.

Z tohoto kola poté postupuje nejlepších 25 týmů do druhého kola, kde řeší reálné problémy a navrhují vlastní řešení spojené s úsporami energie, obnovitelnými zdroji a dalšími technologiemi. Nejlepší tým pak získává hlavní cenu 50 000 Kč a řadu věcných cen.

Literatura

- [1] European Comission: *A European Green Deal*. 2019. Dostupné na: https://ec.europa.eu/info/strategy/priorities-2019-2024/european-green-deal_en [cit. 5.5.2021].
- [2] Eurostat: *Renewable energy statistics – Statistics Explained*. Dostupné na: https://ec.europa.eu/eurostat/statistics-explained/index.php?title=Renewable_energy_statistics#Share_of_renewable_energy_more_than_doubled_between_2004_and_2021 [cit. 20.12.2021].
- [3] MPO: *Vnitrostátní plán České republiky v oblasti energetiky a klimatu*. Dostupné na: <https://www.mpo.cz/cz/energetika/strategicke-a-koncepcni-dokumenty/vnitrostatni-plan-ceske-republiky-v-oblasti-energetiky-a-klimatu--252016/> [cit. 20.4.2021].
- [4] International Renewable Energy Agency: *Renewable Energy Benefits: Measuring the Economics*. 2016. Dostupné na: www.irena.org [online] [cit. 26.4.2020].
- [5] Ürges-Vorsatz, D. et al.: Measuring multiple impacts of low-carbon energy options in a green economy context. *Applied Energy*, 179 (2016), s. 1409–1426, doi: 10.1016/j.apenergy.2016.07.027.
- [6] Makešová, M., Valentová, M.: The concept of multiple impacts of renewable energy sources: A critical review. *Energies*, 14 (2021), č. 11:3183, s. 1–21, doi: 10.3390/en14113183.
- [7] Alam, S. S., Nik Hashim, N. H., Rashid, M., Omar, N. A., Ahsan, N., Ismail, M. D.: Small-scale households renewable energy usage intention: Theoretical development and empirical settings. *Renew. Energy*, 68 (2014), s. 255–263, doi: 10.1016/J.RENENE.2014.02.010.
- [8] Gamel, J., Menrad, K., Decker, T.: Is it really all about the return on investment? Exploring private wind energy investors' preferences. *Energy Res. Soc. Sci.*, 14 (2016), s. 22–32, doi: 10.1016/j.erss.2016.01.004.
- [9] de Freitas, R. A., Vogel, E. P., Korzenowski, A. L., Oliveira Rocha, L. A.: Stochastic model to aid decision making on investments in renewable energy generation: Portfolio diffusion and investor risk aversion. *Renew. Energy*, 162 (2020), s. 1161–1176, doi: 10.1016/J.RENENE.2020.08.012.

Nudný profesor

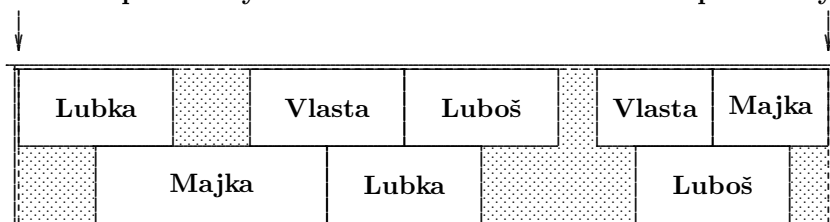
Tentokrát přetiskujeme zajímavou úlohu od Luboše Picka [1] (který ji ale slyšel od doktorandky Hanky Krulišové), ale řešení prozradíme jen u jednodušší varianty. Cílem je, aby si čtenáři nad řešením sami zapřemýšleli a třeba nám poslali svá řešení. Příště řešení prozradíme, a kdyby některý čtenář vymyslel ještě elegantnější řešení, než jaké známe my, tak ho rádi otiskneme.

Úloha: Nudný profesor vede tak nudnou přednášku, že studentům se chce spát už od jejího začátku. Téměř neustále alespoň jeden posluchač spí. Profesor ovšem dodržuje následující pravidlo: jestliže v některém okamžiku usne více než polovina přítomných studentů, bude se příště psát obzvlášť zapeklitá písemka. V inkriminovaný den přišlo na přednášku pět studentů. Přednáška byla tak strašlivě nudná, že každý student usnul právě dvakrát (ve dvou různých intervalech). Navíc, a tuto informaci prosím interpretujte správně, každý spal s každým. Otázka zní: *Bude se příště psát písemka?*

Prozradíme pouze, že kdyby studenti byli jen čtyři, pak by se písemce za stejných podmínek dalo vyhnout. Na obrázku jsme vyznačili, jak by mohlo vypadat takové „spací schéma“, které k písemce nepovede. Studenti nechť se bez újmy na obecnosti jmenují Luboš, Vlasta, Lubka a Majka.

Začátek přednášky

Konec přednášky



Literatura

- [1] Pick, L.: Dirichletovy šuplíčky. *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*, 61 (2016), č. 2, s. 106–118.

Transformace obrazu do frekvenční oblasti a jejích aplikace

Pavel Strachota, FJFI ČVUT v Praze

Abstrakt. Tento článek představuje matematiku i aplikace diskrétní Fourierovy transformace ve formě přístupné středoškolským studentům. Motivací jsou algoritmy ztrátové komprese obrazu. Poskytujeme teoretický základ i vizuálně zajímavé praktické aplikace.

Úvod

Většina z nás dnes rutinně používá digitální fotoaparát v mobilu a pořizuje s ním fotografie a videa, která sdílí přes internet. Z internetu nebo ze svého vlastního datového úložiště sledujeme filmy a posloucháme hudbu. Zvykli jsme si říkat, že si posíláme ty „JPEgy“, posloucháme „MP-trojky“ a sledujeme „MP-čtyřky“ (pravda, to poslední se zase tak často neříká). Abychom to mohli dělat, musíme mít na počítači nainstalované ty správné „kodeky“ (na mobilu to zpravidla až tolik neřešíme, prostě to funguje).

Zkratky JPEG [1], MP3 [2], MP4 [3] a mnoho dalších podobných odkazují na formáty ukládání (kódování) audiovizuálních dat tak sofistikovaným způsobem, aby výsledné datové soubory zabíraly co nejméně místa, a přitom bylo možné z nich rekonstruovat (dekódovat) původní obrazový nebo zvukový záznam. Kombinací slov kódování a dekodování pak vznikl výraz „kodek“, označující implementaci těchto algoritmů, a to typicky ve formě programové knihovny využitelné více různými aplikacemi.

Oproti objemu původních dat jsou výsledné soubory někdy i o několik řádů menší, čehož lze na rozdíl od univerzálních kompresních algoritmů (např. známého ZIPu) dosáhnout použitím ztrátové komprese. To znamená, že rekonstruovaná data nejsou (z hlediska uchované informace, tj. hodnot jednotlivých bajtů) identická s daty původními, ale subjektivně na pohled, resp. na poslech člověk pozná jen nepatrný rozdíl. Dnešní algoritmy ztrátové komprese šikovně využívají vlastností lidského vnímání a z původních dat zachovávají jen takovou informaci, která je pro smysl člověka podstatná. Klíčovým nástrojem k dosažení tohoto cíle jsou matematické transformace, které umožní takzvaně „převést data z oblasti

prostorové do frekvenční“. Například u transformovaného obrázku již data neukazují, na kterém místě je která barva, ale z jak vysokých vln o různých frekvencích se obrázek skládá.

Cílem první části našeho článku je vysvětlit a matematicky dokázat princip těchto transformací a poté prakticky demonstrovat jejich funkci. U čtenáře nepředpokládáme vysokoškolské znalosti matematiky, a proto samotnému důkazu předchází shrnutí některých použitých pojmů a konceptů, které na první pohled s tématem přímo nesouvisí. V druhé části se vrátíme k algoritmům ztrátové komprese obrazu a ukážeme si, jakým způsobem se v nich využívají transformace do frekvenční oblasti. Nechybí praktické příklady demonstrující efekt ztrátové komprese na reálné obrázky.

Reprezentace rastrového obrazu

Obrazová nebo zvuková data lze matematicky vyjádřit jako funkci závislou na čase a prostorových souřadnicích. Například rovinný šedotónový (tj. „černobílý“) obdélníkový obraz je dán funkcí f , která pro každý bod (x, y) z tohoto obdélníku dodá číslo vyjadřující intenzitu (světlost) $f(x, y)$ v tomto bodě v rozsahu od 0 (černá) do 1 (bílá). V případě rastrového obrazu složeného z obrazových bodů (pixelů) je však situace jednodušší. Předpokládáme-li, že pixely mají čtvercový tvar a obrázek má velikost $N \times M$ pixelů, je funkce f po částech konstantní (s konstantní hodnotou na ploše každého pixelu) a může teoreticky¹⁾ nabývat nejvýše MN hodnot. Veškerou informaci o obrázku lze proto uložit do matice (tabulky čísel)

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} f_{0,0} & f_{0,1} & \cdots & f_{0,N-1} \\ f_{1,0} & f_{1,1} & \cdots & f_{1,N-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{M-1,0} & f_{M-1,1} & \cdots & f_{M-1,N-1} \end{pmatrix}, \quad (1)$$

kde $f_{j,k}$ vyjadřuje intenzitu pixelu, který je v obraze j -tý shora a k -tý zleva, přičemž začínáme indexovat od nuly. Takto definovaná data lze transformovat do frekvenční oblasti pomocí dvourozměrné *diskrétní*

¹⁾Víme, že na počítači je i počet různých barev omezen. Např. v režimu True Color lze vybírat z celkem cca 16,7 milionu různých barev, ale pouze 256 z nich jsou odstíny šedi.

Fourierovy transformace (DFT)²⁾. Než si ukážeme jak, připomeneme si pár věcí z matematiky a trochu se procvičíme.

Součet N členů geometrické posloupnosti

Uvažujme posloupnost N čísel $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{N-1}$. Jejich součet značíme

$$\sum_{n=0}^{N-1} a_n = a_0 + a_1 + a_2 \cdots + a_{N-1},$$

znak Σ (velké řecké písmeno sigma) se nazývá *suma* a písmeno n je *sčítací index*, který při sčítání dané N -tice čísel nabývá postupně hodnot $0, 1, 2, \dots, N-1$.

Jednou z důležitých číselných posloupností je geometrická posloupnost, pro níž $a_n = q^n$ a q je dané reálné číslo, tzv. kvocient. Součet s_N prvních N členů geometrické posloupnosti najdeme snadno, pokud se nejprve zeptáme, kolik je $(1-q)s_N$. Dostaneme totiž

$$\begin{aligned} (1-q)s_N &= (1-q) \sum_{n=0}^{N-1} q^n = \sum_{n=0}^{N-1} q^n - q \sum_{n=0}^{N-1} q^n = \sum_{n=0}^{N-1} q^n - \sum_{n=0}^{N-1} q^{n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} q^n - \sum_{j=1}^N q^j = 1 - q^N. \end{aligned} \quad (2)$$

Úprava na druhém řádku v (2) spočívá v tzv. posunutí indexu, kdy definujeme $j = n+1$, takže jestliže se index n pohyboval od 0 do $N-1$, tak j půjde od 1 do N . V tu chvíli ale vidíme, že v obou sumách sčítáme pro $n = j = 1, 2, \dots, N-1$ stejná čísla, která se navzájem odečtou. První suma má ovšem navíc ještě sčítanec $q^0 = 1$ (pro $n = 0$) a druhá má zase navíc q^N (pro $j = N$). Z této úvahy již plyne poslední rovnost v (2). Vyjádřením s_N z (2) pak pro $q \neq 1$ okamžitě dostáváme hledanou hodnotu

$$s_N = \frac{1 - q^N}{1 - q}, \quad (3)$$

čehož později využijeme.

²⁾ neboli Fourierovy transformace aplikované na *diskrétní* data, tj. hodnoty definované na konečné množině oddělených bodů. Mimo to existuje i (spojitá) Fourierova transformace, která transformuje funkce definované na množině všech reálných čísel.

Komplexní čísla

Rozumíme již tedy trochu sumám, ovšem stále jsme se nedostali k věci. Ještě jednou (ale slibuji, že už naposledy) se zdržíme, tentokrát u komplexních čísel. Popisovat užitečnost komplexních čísel je mimo rámec tohoto textu, ale při troše zjednodušení lze říci, že v oboru komplexních čísel mají řešení všechny kvadratické rovnice, včetně těch se záporným diskriminantem. Komplexní čísla jsou totiž ve tvaru

$$z = x + iy, \text{ kde } x, y \text{ jsou reálná čísla a } i^2 = -1.$$

Číslo i říkáme *imaginární jednotka*, x je reálná část a y je imaginární část komplexního čísla z . Číslo $\bar{z} = x - iy$ nazýváme číslo komplexně sdružené k číslu z .

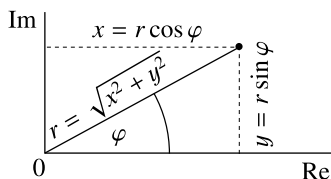
Každé komplexní z si lze také představit jako bod v rovině (tzv. *komplexní rovině*) o souřadnicích (x, y) , jak je vidět na obr. 1. Polohu tohoto bodu lze určit i v polárních souřadnicích, tj. jeho vzdáleností od počátku r a úhlem φ , který svírá jeho průvodič (spojnice s počátkem souřadné soustavy) s osou x (tzv. reálnou osou, protože čísla, pro která $y = 0$, jsou reálná). Zřejmě platí

$$x = r \cos \varphi,$$

$$y = r \sin \varphi,$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Číslu r říkáme *absolutní hodnota* komplexního čísla z (značíme $|z|$) a číslu φ *argument* komplexního čísla z .



Obr. 1: Komplexní číslo $z = x + iy$ jako bod v komplexní rovině a jeho polární souřadnice

Ukazuje se, že definice většiny elementárních funkcí reálné proměnné (např. $\sin x$, $\cos x$, e^x) lze vhodně rozšířit i do komplexního oboru. Pro tři

právě zmíněné funkce a libovolné komplexní číslo z platí velmi důležitý vztah

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z, \quad (4)$$

kterému se říká Eulerův vzorec. Díky němu můžeme psát

$$z = x + iy = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = re^{i\varphi},$$

a výrazu na pravé straně říkáme *goniometrický tvar* komplexního čísla z . Z něj je např. vidět, co se děje, když násobíme komplexní čísla $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$ a $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$. Dostáváme

$$z_1 z_2 = r_1 e^{i\varphi_1} r_2 e^{i\varphi_2} = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)},$$

takže součin má absolutní hodnotu rovnou součinu absolutních hodnot činitelů a argument rovný součtu argumentů jednotlivých činitelů³⁾.

Diskrétní Fourierova transformace

Konečně máme vše připraveno pro definici diskrétní Fourierovy transformace (DFT). Začneme pouze v jednorozměrném případě, kdy zdrojová data představují posloupnost N čísel $f_0, f_1, \dots, f_{N-1}$. Výsledkem DFT je jiná posloupnost N čísel $F_0, F_1, \dots, F_{N-1}$, tzv. *Fourierův obraz* nebo *spektrum* původní posloupnosti, jejíž n -tý prvek je definován vztahem

$$F_n = \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-2\pi i k n / N} \quad \text{pro } n = 0, 1, \dots, N-1. \quad (5)$$

Čísla f_k mohou být reálná i komplexní, ale čísla F_n jsou obecně komplexní. Velmi důležité je, že ze znalosti Fourierova obrazu lze vždy získat původní posloupnost, a to pomocí inverzní DFT (iDFT), která má tvar

$$f_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} F_n e^{2\pi i k n / N} \quad \text{pro } k = 0, 1, \dots, N-1. \quad (6)$$

Toto tvrzení si snadno dokážeme. Zvolíme-li pevné k a dosadíme-li do pravé strany (6) tvar F_n ze vztahu (5), dostaneme

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} F_n e^{2\pi i k n / N} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \left(\sum_{j=0}^{N-1} f_j e^{-2\pi i j n / N} \right) e^{2\pi i k n / N}, \quad (7)$$

³⁾... z čehož pak plyne tzv. Moivreova věta $(\cos x + i \sin x)^n = \cos(nx) + i \sin(nx)$.

kde jsme museli zvolit jiné označení sčítacího indexu uvnitř velké závorky (j místo k), protože k už je pevně dané číslo. Obecně celkem N^2 sčítanců obsažených v tomto součtu lze sčítat v libovolném pořadí, což využijeme k úpravě (7) do tvaru

$$\sum_{j=0}^{N-1} f_j \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-2\pi i j n / N} e^{2\pi i k n / N} = \sum_{j=0}^{N-1} f_j \frac{1}{N} \underbrace{\sum_{n=0}^{N-1} e^{2\pi i (k-j) n / N}}_{\text{OZII. } s_j}, \quad (8)$$

kde první (vnější) suma sčítá přes sčítací index j a vnitřní suma, kterou jsme označili jako s_j , sčítá přes n (v (7) to totiž bylo opačně). Navíc f_j bylo možné z vnitřní sumy vytknout, protože je to číslo nezávislé na n . Pro $j = k$ vnitřní suma obsahuje N jedniček ($e^0 = 1$), takže platí $s_k = N$. Pro $j \neq k$ si uvědomíme, že s_j je pouze součtem prvních N členů geometrické posloupnosti s kvocientem

$$q = e^{2\pi i (k-j) / N}.$$

Dle (3) tedy platí

$$s_j = \sum_{n=0}^{N-1} e^{2\pi i (k-j) n / N} = \frac{1 - q^N}{1 - q} = \frac{1 - e^{2\pi i (k-j)}}{1 - e^{2\pi i (k-j) / N}} = 0.$$

Poslední rovnost je vidět z Eulerova vzorce (4), neboť $(k - j)$ je celé číslo, a funkce $\sin$, $\cos$ jsou periodické s periodou 2π , takže

$$e^{2\pi i (k-j)} = \cos(2\pi(k-j)) + i \sin(2\pi(k-j)) = 1 + i \cdot 0.$$

Tím jsme zjistili, že hodnota (8), což je hodnota pravé strany rovnosti (6), je skutečně rovna f_k .

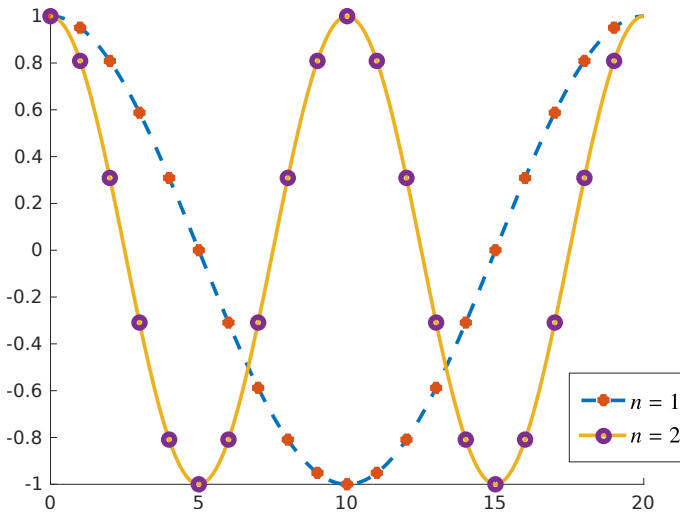
Abychom pochopili význam čísel F_n , vyjádříme si je v goniometrickém tvaru jako

$$F_n = r_n e^{i\varphi_n}$$

a dosadíme do definičního vztahu iDFT (6). Dostaneme

$$\begin{aligned} f_k &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} r_n e^{i\varphi_n} e^{2\pi i k n / N} = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{r_n}{N} e^{i(2\pi k n / N + \varphi_n)} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \frac{r_n}{N} (\cos(2\pi k n / N + \varphi_n) + i \sin(2\pi k n / N + \varphi_n)). \end{aligned} \quad (9)$$

Z toho je vidět, že absolutní hodnoty čísel F_n (tj. čísla r_n) jsou až na faktor $1/N$ rovny amplitudám kosinových, resp. sinových vln, které jsou vzorkovány v bodech $(2\pi kn/N)$ pro $k = 0, 1, \dots, N-1$. Argumenty čísel F_n (tj. čísla φ_n) pak definují jejich fázové posunutí. Sečtením všech takových vln vzniká původní posloupnost f_k . Přitom pro $n = 1$ projdeme pro $k = 0, 1, \dots, N-1$ právě přes jednu periodu funkcí $\cos$, resp. $\sin$, pro $n = 2$ projdeme přes 2 periody atd. (viz obr. 2). Index n se proto nazývá *frekvence*.



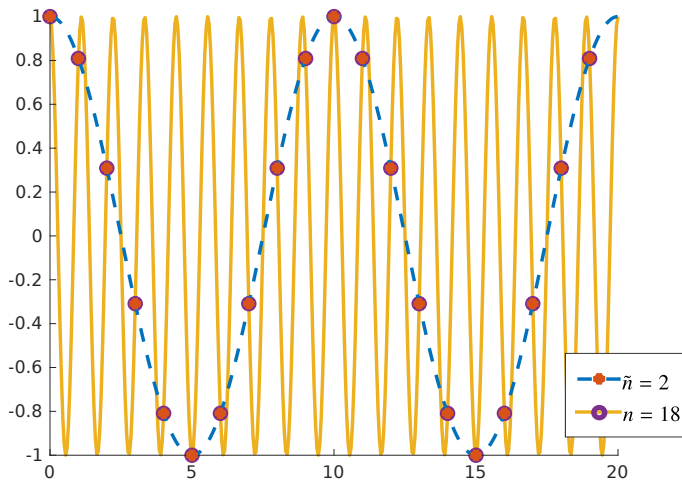
Obr. 2: Grafy funkce $\cos(2\pi xn/N)$ pro $N = 20$ a $n = 1, 2$ a její vzorky v N bodech, tj. hodnoty v bodech $x = k = 0, 1, \dots, N-1$, které (když $\varphi_n = 0$) vystupují ve vztahu (9)

Je docela zajímavé pozorovat, co se děje pro vysoké frekvence, tj. když n je blízko počtu členů posloupnosti N . Definujme si $\tilde{n} = N - n$, kde $n > N/2$. Snadný výpočet ukáže, že platí

$$e^{2\pi i kn/N} = e^{2\pi i k(N-\tilde{n})/N} = \underbrace{e^{2\pi i kN/N}}_{=1} e^{-2\pi i k\tilde{n}/N} = e^{-2\pi i k\tilde{n}/N} = \overline{e^{2\pi i k\tilde{n}/N}}. \quad (10)$$

V posledním kroku jsme využili Eulerův vzorec a definici komplexně sdruženého čísla. To znamená, že pro „velké“ $n > N/2$ má reálná část

výrazu $e^{2\pi i n k / N}$ (tj. $\cos(2\pi i n k / N)$) stejnou hodnotu jako pro „malé“ $\tilde{n} = N - n < N/2$, jak je vidět na obr. 3. Imaginární části pak mají navzájem opačná znaménka.



Obr. 3: Graf funkcí $\cos(2\pi x n / N)$ a $\cos(2\pi x \tilde{n} / N)$ pro $N = 20$, $n = 18$ a $\tilde{n} = N - n = 2$. I když jsou výsledné funkce evidentně odlišné, jejich vzorky v bodech $x = k = 0, 1, \dots, N - 1$ jsou stejné

Jestliže jsou navíc f_k reálná čísla (což při využití DFT pro transformace obrazu bude splněno), plyne z (10) a definičního vztahu (5) také vztah

$$F_n = \overline{F_{N-n}}. \quad (11)$$

Po aplikaci DFT na N reálných hodnot $f_0, \dots, f_{N-1}$ tedy dostáváme (pro N sudé) jen $N/2$ nezávislých hodnot $F_0, \dots, F_{N/2-1}$ a zbytek lze dopočítat z (11). To není překvapující, protože F_n jsou komplexní a „vydají“ za dvě reálná čísla, takže v nich je dost informací na to, aby bylo možné původní N -tici rekonstruovat pomocí iDFT dle vztahu (6).

Spektrum digitálního obrazu a jeho úpravy

Nyní si ukážeme zajímavé aplikace DFT na obrazová data. Budeme potřebovat dvourozměrnou DFT, která vznikne dvěma aplikacemi jedno-rozměrné DFT na matici $\mathbf{f}$ definovanou dle (1). Nejprve transformujeme

každý j -tý řádek obrazu dle

$$\tilde{F}_{j,n} = \sum_{k=0}^{N-1} f_{j,k} e^{-2\pi i k n / N}.$$

Poté aplikujeme DFT na výsledné hodnoty $\tilde{F}_{j,n}$ po sloupcích:

$$\begin{aligned} F_{m,n} &= \sum_{j=0}^{M-1} \tilde{F}_{j,n} e^{-2\pi i j m / M} = \sum_{j=0}^{M-1} \left(\sum_{k=0}^{N-1} f_{j,k} e^{-2\pi i k n / N} \right) e^{-2\pi i j m / M} \\ &= \sum_{j=0}^{M-1} \sum_{k=0}^{N-1} f_{j,k} e^{-2\pi i (k n / N + j m / M)}. \end{aligned} \quad (12)$$

Kdybychom postupovali nejprve po sloupcích a poté po řádcích, získali bychom totéž.

Zvolme si obrázek, na němž jsou vidět výrazné pravidelné pruhy, například ten na obr. 4a. Po aplikaci DFT si zobrazíme absolutní hodnoty spektra též jako obrázek, kde světlost jednotlivých bodů je úměrná hodnotám $|F_{m,n}|$ ⁴⁾. Kvůli symetrii (11), která nyní platí v obou rozměrech, je však šikovní přesunout pravou polovinu spektra doleva a dolní polovinu nahoru, takže dostaneme výsledek jako na obr. 4b, kde zastoupení nejnižších frekvencí ukazují body uprostřed. Hned si všimneme světlejších svislých pruhů. Ty dva nejbližší středu odpovídají frekvenci střídání pruhů na stěně. Pruhy jsou ale ostře ohraničené, tj. jejich intenzita se nemění plynule jako hodnoty funkce sinus nebo kosinus. K získání ostřejšího barevného přechodu jsou totiž zapotřebí i vyšší frekvence, kterým odpovídají pruhy dále od středu. Abychom si tuto myšlenku ověřili, odstranili jsme všechny zmíněné pruhy ze spektra (příslušné hodnoty jsme nastavili na nulu), což je vidět na obr. 4d. Nakonec jsme provedli iDFT a výsledkem je obr. 4c⁵⁾. Pruhy skutečně z velké části zmizely, ale naše úpravy způsobily jako vedlejší efekt i částečné poškození zbytku obrázku.

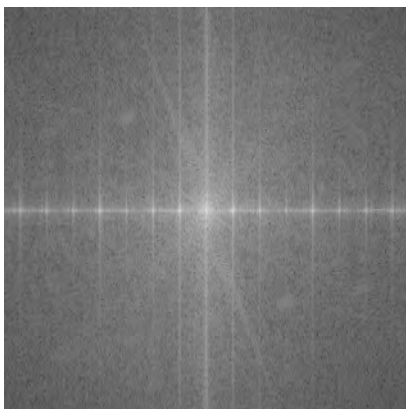
Pro demonstraci schopností DFT si ještě vyrobíme novou variantu optického klamu „Marilyn nebo Einstein“, která byla před časem velmi

⁴⁾Přesněji řečeno, světlost je na obr. 4b úměrná logaritmu $|F_{m,n}|$, abychom viděli jako dostatečně světlé i amplitudy vyšších frekvencí. Se zvyšováním frekvence totiž u každého „rozumného“ obrázku její amplituda prudce klesá, a to i o několik řádů.

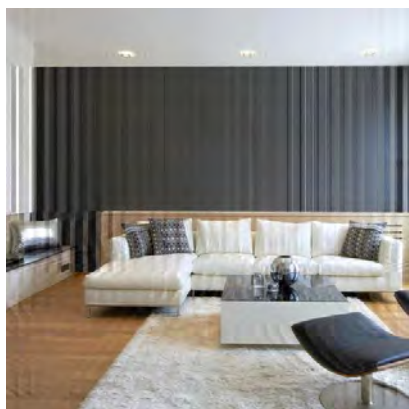
⁵⁾Pozornému čtenáři neujde, že obrázek je barevný, přičemž jsme se dosud bavili jen o šedotónových obrázcích. Barva ale není pro nás až taková věda. Stejně úpravy spektra jsme totiž provedli pro všechny tři barevné kanály R, G, B a výsledek pak opět složili dohromady.



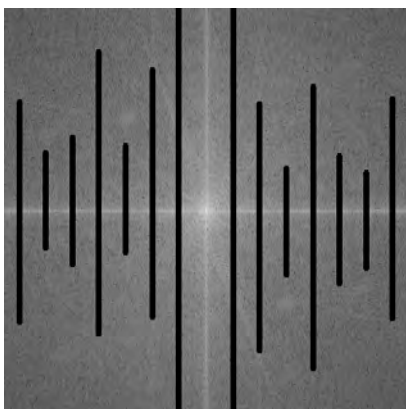
(a) Původní obrázek



(b) Spektrum původního obrázku



(c) Rekonstruovaný obrázek

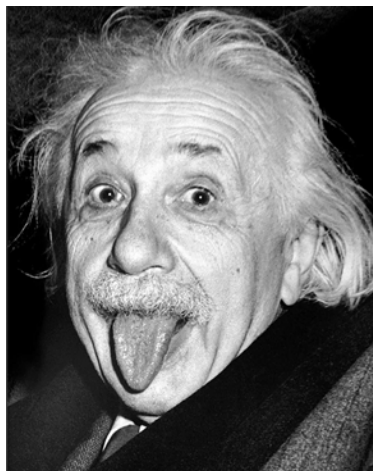


(d) Modifikované spektrum

Obr. 4: Odstranění některých frekvencí ve frekvenční oblasti a rekonstrukce obrázku z modifikovaného spektra

populární na internetu [4]. Jako zdrojová data nám poslouží fotografie obličejů Marilyn Monroe (obr. 5a) a Alberta Einsteina (5b), avšak záměrně jiné, než byly použity v původní verzi iluze. Po získání spektra fotografie Marilyn v něm vynulujeme amplitudy všech vyšších frekvencí mimo malý kroužek okolo středu (okolo nulové frekvence), neboli aplikujeme *nízkofrekvenční filtr*. Po provedení iDFT získáme obr. 5c. Je vidět, že z fotografie zmizely všechny detaily a je velmi „rozmazaná“. V pravém

horním rohu je pro představu zobrazena i aplikace nízkofrekvenčního filtru na spektrum, ovšem pro ilustraci je místo úplného vynulování použito jen ztmavení.

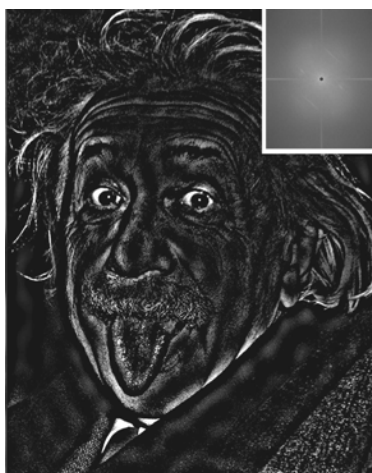


(a) Původní fotografie Marilyn Monroe

(b) Původní fotografie Alberta Einsteina



(c) Marilyn po aplikaci nízkofrekvenčního filtru



(d) Einstein po aplikaci vysokofrekvenčního filtru

Obr. 5: Příprava optického klamu „Marilyn nebo Einstein?“

Spektrum fotografie Einsteina zpracujeme zcela opačně. Aplikujeme *vysokofrekvenční filtr*, neboli vynulujeme jen malé kruhové okolí středu. Výsledek je na obr. 5d, kde naopak zůstaly kontury a tvary, ale zmizely barvy. Výslednou iluzi na obr. 6, pak získáme sečtením obou obrázků 5c a 5d. Na její princip přijdete snadno: pozorujeme-li obrázek z velké dálky (případně si sundáme brýle, případně si obrázek v PDF na počítači zmenšíme), detailní kontury nevidíme a zdá se nám, že na obrázku je Marilyn. Pokud se však podíváme dostatečně zblízka, zaujmou nás detailní kontury a na obrázku rozpoznáme Alberta Einsteina s vyplazeným jazykem.



Obr. 6: Výsledná podoba optického klamu „Marilyn nebo Einstein?“

Ztrátová komprese obrazu

Vraťme se nyní k algoritmům ztrátové komprese obrazu, kterými jsme naši diskusi začali. Vzhledem k tomu, o jak komplikovanou a rozsáhlou problematiku se dnes jedná, omezíme se na stručný a ne zcela přesný popis.

Komprese do více než 30 let starého a přitom stále populárního formátu JPEG začíná transformací barevných kanálů R, G, B, jejímž výsledkem je pro každý pixel informace o jeho světlosti (intenzitě) a o jeho odstínu. Vzhledem k tomu, že lidské oko mnohem snáze rozezná rozdíly v intenzitě než rozdíly v barevném odstínu, neukládají se hodnoty odstínu pro každý pixel samostatně, ale jen pro bloky o velikosti 2×2 pixely.

Poté nastupuje převod dat o intenzitách i o odstínech barev do frekvenční oblasti, a to samostatně a vždy po čtvercích velikosti 8×8 . Nepoužívá se přímo DFT, nýbrž tzv. diskrétní kosinová transformace (DCT) [5], jejíž tvar lze odvodit aplikací DFT na data rozšířená pomocí vhodné symetrie (pro zájemce jsou technické detaily shrnuty v dodatku). Ve výsledku DCT pracuje jen s funkcí kosinus a výhodou je, že po transformaci reálných dat získáváme opět reálné koeficienty. Vlastnosti výsledku jsou však stejné, jako jsme si demonstrovali v předchozích experimentech s DFT: amplitudy kosinových vln velmi rychle klesají s frekvencí.

Ztrátovost komprese spočívá ve vhodném zaokrouhlení těchto amplitud, přičemž se spoléháme na to, že více či méně z nich se zaokrouhlí na nulu. Různou úroveň zaokrouhlování může uživatel řídit pomocí koeficientu kvality, který je vyjádřen v procentech. Z každého bloku 8×8 tak zbude jen několik málo nenulových hodnot, které se vhodně seřadí za sebe a podstoupí bezztrátovou kompresi pomocí dalších algoritmů, o nichž tento článek nepojednává. Při dekódování pomocí inverzní DCT se pak z malého počtu nenulových hodnot obnoví celý čtverec 8×8 , jehož hodnoty se pro „rozumné“ obrázky příliš neliší od originálu.

Výsledná úroveň komprese závisí na nastavení kvality i na složitosti obrázku, což si autor zkusil na svých nedávných fotografiích. Při rozlišení 5792×4344 pixelů (cca 25 megapixelů) a ukládání barevných hodnot R, G, B ve třech bytech pro každý pixel by každý takový obrázek zabíral v paměti cca 75 MB.



(a) kvalita 80%, velikost 4900 kB



(b) kvalita 80%, velikost 2840 kB

Obr. 7: Rozdílný kompresní poměr formátu JPEG v závislosti na obsahu snímku s rozlišením 5792×4344 pixelů

Fotografie venkovské krajiny se strništěm (obr. 7a), kde je k rozeznání

každé stéblo, má ve formátu JPEG s nastavením kvality na 80 % cca 5 MB, což je 1/15 původního objemu. Ovšem snímek městské zástavby (obr. 7b) má jen necelé 3 MB, což je dokonce 1/25 původního objemu dat.

V případě fotografií je obvykle nastavení kvality na 80 % dostatečné, neboť neumožňuje pouhým okem rozeznat jakýkoli rozdíl oproti nekomprimovanému obrazu. Abychom v tomto článku dokázali demonstrovat viditelné snížení kvality, uložili jsme výřez ze zmíněné fotografie krajiny s nastavením kvality na pouhých 5 %. Výsledek na obr. 8 ukazuje⁶⁾, že v mnoha případech (zejména na obloze) jsou bloky 8×8 vykresleny konstantní barvou. To znamená, že po zaokrouhlení koeficientů DCT zůstala v každém z těchto bloků jediná nenulová hodnota. Zároveň je značně redukován i počet barev.



(a) kvalita 98% (orig.), velikost 1100 kB



(b) kvalita 5%, velikost 64 kB

Obr. 8: Viditelná degradace fotografie venkovské krajiny při uložení JPEG s velmi nízkou kvalitou. Jedná se o výřez z fotografie na obr. 7a

Ve skutečnosti jsou však rozdíly oproti originálu přítomné pro jakékoliv nastavení kvality, což jsme se pokusili názorně ověřit pomocí volně dostupného grafického editoru GIMP⁷⁾. Uložili jsme fotografii na obr. 7a ve formátu JPEG s různým nastavením kvality a výsledek pak odečetli od originálu, což je rovněž JPEG s 98% kvalitou. Aby byly rozdíly lépe

⁶⁾ Zobrazuje-li si čtenář tento článek v prohlížeči PDF souborů na obrazovce počítače, tabletu či mobilu, doporučujeme zvětšit si obr. 8 (a stejně tak i demonstrace na obr. 9, 11 a 12) a pozorně si prohlédnout detaily.

⁷⁾ <https://www.gimp.org/>

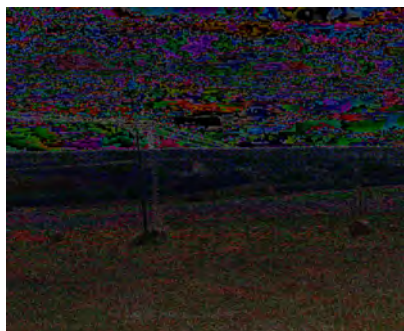
viditelné, zvýraznili jsme je úpravou jasu a kontrastu (ve všech případech stejnou, aby bylo možné rozdíly porovnávat). Několik takto zpracovaných „rozdílových obrazů“ je vidět na obr. 9, který ukazuje, že se zvyšováním kvality dochází nejen ke zmenšování rozdílů, ale také k zjemňování struktury artefaktů ztrátové komprese.



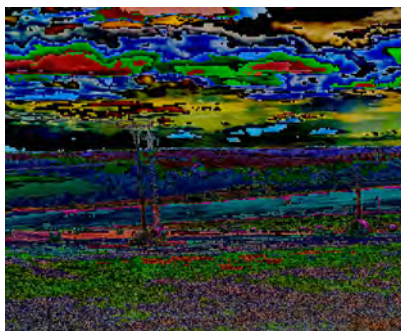
(a) kvalita 85%



(b) kvalita 50%



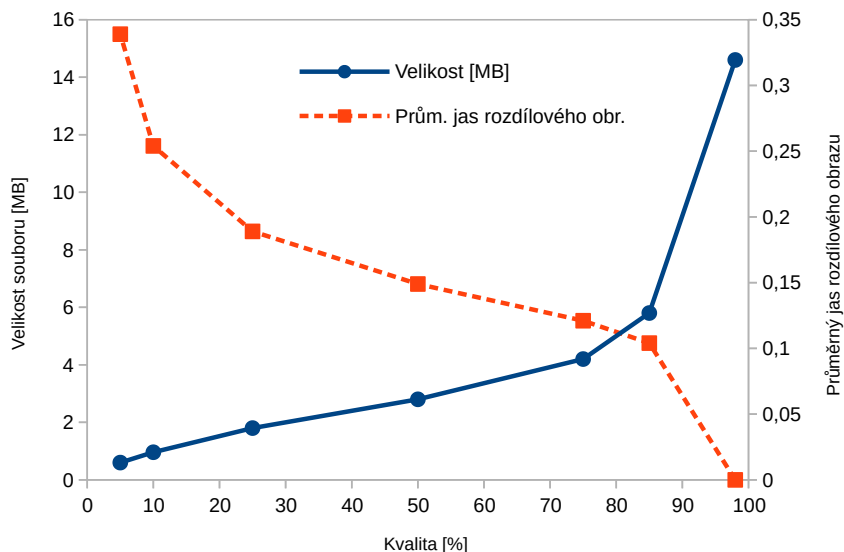
(c) kvalita 25%



(d) kvalita 5%

Obr. 9: Zvýrazněný rozdíl originálního obrazu a obrazu uloženého se ztrátovou kompresí JPEG pro různá nastavení kvality. Originální fotografie je na obr. 8a

Průměrná intenzita rozdílových obrazů společně s velikostí výsledných JPEG souborů je zanesena do grafu na obr. 10. Ten potvrzuje, že artefakty se zvyšující se kvalitou slábnou (ale jsou stále přítomny), zatímco velikost souboru roste. Pro nastavení kvality blížící se 100 % je nárůst velikosti souboru již velmi strmý.

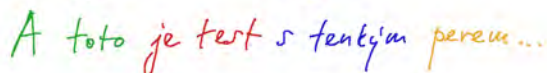


Obr. 10: Závislost výskytu artefaktů ztrátové komprese (vyjádřeného průměrným jasnem rozdílového obrazu – viz obr. 9) a velikosti výsledného souboru na nastavení kvality JPEG. Referenčním obrazem je fotografie na obr. 7a, stažená z fotoaparátu ve formátu JPEG s kvalitou 98%

Jestliže se pokusíme do JPEGu uložit obraz obsahující ostré barevné přechody a velké jednobarevné plochy (např. kresbu na obr. 11), je možné artefakty ztrátové komprese pozorovat pouhým okem i při nastavení kvality na více než 75 %. Jak je vidět na obr. 12, rozdíly zcela nezmizí ani při kvalitě 98 %. Pro tento typ obrazu jsou vhodnější bezztrátové formáty, jako je PNG [6].



Ahoj, toto je test JPEG!

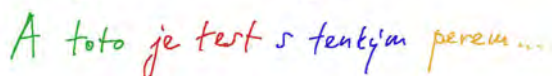


A toto je test s tentým perem...

(a) Originál (nekomprimovaný)



Ahoj, toto je test JPEG!

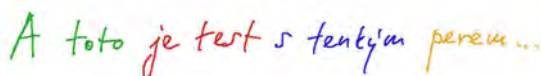


A toto je test s tentým perem...

(b) kvalita 50%



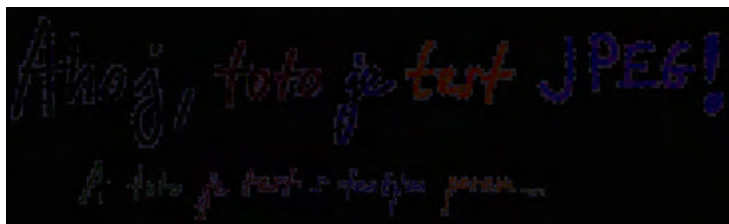
Ahoj, toto je test JPEG!



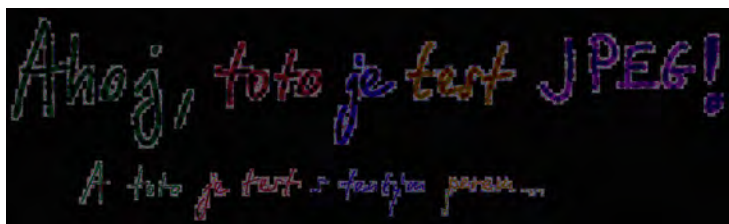
A toto je test s tentým perem...

(c) kvalita 10%

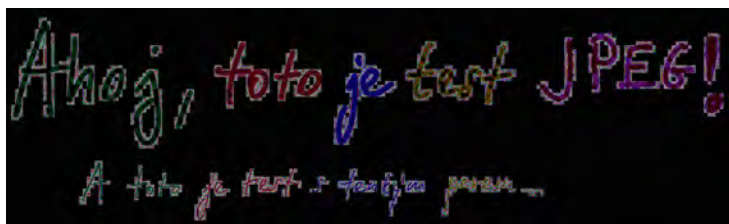
Obr. 11: Degradace obrazu s ostrými barevnými přechody při uložení do formátu JPEG



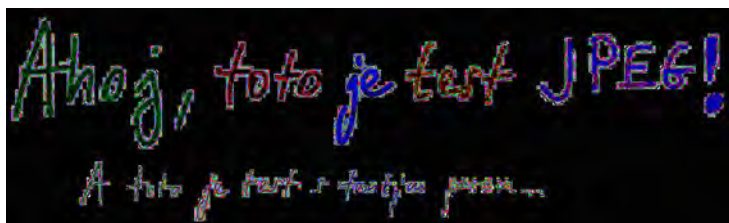
(a) kvalita 98%



(b) kvalita 85%



(c) kvalita 50%



(d) kvalita 10%

Obr. 12: Zvýrazněný rozdíl originálního obrazu a obrazu uloženého se ztrátovou kompresí JPEG pro různá nastavení kvality. Originální obraz s ostrými hranami je na obr. 11a

Snaha o ještě efektivnější kompresi zůstává aktuální i přes neustálé zvyšování rychlosti internetového připojení a kapacity úložišť, neboť zároveň roste i rozlišení snímků z digitálních fotoaparátů. Poslední dobou se objevily nové formáty ukládání obrazu, například formát HEIF, který využívá algoritmy komprese obrazu z video kodeku HEVC (H.265) [7], nebo WebP [8], který je zase spjatý s video kodekem VP9. I v nich však zůstává převod obrazu do frekvenční oblasti klíčovým krokem k efektivní ztrátové kompresi a stejně jako v JPEG se obraz zpracovává po čtvercových blocích, pro které se vžil název *makrobloky*.

Závěr

Matematické metody převodu dat do frekvenční oblasti založené na Fourierově transformaci a dalších příbuzných transformacích mají nezastupitelné místo nejen při zpracování obrazu a při ztrátové kompresi obrazu, videa a zvuku, ale též v telekomunikacích, při rekonstrukci třírozměrných dat z magnetické rezonance nebo v rentgenové a elektronové krystalografii. Svoje využití nalézají i v samotné matematice, například při hledání řešení parciálních diferenciálních rovnic. Cílem našeho článku bylo detailně představit jednu konkrétní metodu, tedy DFT, a to i zvidavým čtenářům se znalostmi matematiky na úrovni střední školy. Snažili jsme se proto vést výklad od základů a důsledně se vyhýbat konceptům matematické analýzy, jako jsou limity, nekonečné řady a integrály. Kdo se však těchto pojmů nebojí a zajímají ho širší souvislosti, může si prostudovat např. zdroje [9, 10], které jsou dostupné online. Kromě teoretického výkladu v článku nechybí ani vizuálně atraktivní praktické ukázky použití DFT a demonstrace následků ztrátové komprese obrazu.

Dodatek – diskrétní kosinová transformace

Pro čtenáře, kterým se zalíbila manipulace se sumami v kapitole o DFT, nabídneme jako bonus i odvození vzorce pro DCT, která je na DFT založená. V kompresi JPEG je použita dvourozměrná DCT typu II [1]. My odvodíme tvar příslušné jednorozměrné transformace, od níž lze ke dvojrozměrné variantě přejít stejným postupem jako v (12).

Z původní posloupnosti $f_0, \dots, f_{N-1}$ připravíme celkem $4N$ hodnot $x_0, \dots, x_{4N-1}$ tak, že za ni nejprve připojíme stejnou posloupnost v opačném pořadí, tj. $f_{N-1}, f_{N-2}, \dots, f_1, f_0$, a následně před každou původní hodnotu vložíme nulu, aby byly nenulové hodnoty pouze na lichých indexech. Pro výslednou posloupnost platí $x_{2k} = 0$, $x_{2k+1} = f_k$ pro

$k = 0, 1, \dots, N-1$, $x_{2N} = 0$ a

$$x_\ell = x_{4N-\ell} \quad \text{pro } \ell = 2N+1, 2N+2, \dots, 4N-1. \quad (13)$$

Na tyto hodnoty nyní aplikujeme DFT a postupnými úpravami dostaneme

$$\begin{aligned}
 X_n &= \sum_{k=0}^{4N-1} x_k e^{-2\pi i k n / (4N)} = \sum_{\substack{\text{jen přes} \\ \text{liché}}}^{2N-1} x_{2k+1} e^{-2\pi i (2k+1)n / (4N)} \\
 &\stackrel{\text{úprava exponentu}}{=} \sum_{k=0}^{2N-1} x_{2k+1} e^{-\pi i (k + \frac{1}{2}) n / N} \\
 &\stackrel{\text{první a druhá polovina zvlášť}}{=} \sum_{k=0}^{N-1} x_{2k+1} e^{-\pi i (k + \frac{1}{2}) n / N} + \sum_{k=N}^{2N-1} x_{2k+1} e^{-\pi i (k + \frac{1}{2}) n / N} \\
 &\stackrel{\text{druhá suma pozpátku}}{=} \sum_{k=0}^{N-1} x_{2k+1} e^{-\pi i (k + \frac{1}{2}) n / N} + \sum_{k=0}^{N-1} \underbrace{x_{2(2N-1-k)+1}}_{=x_{4N-(2k+1)}} e^{-\pi i ((2N-1-k) + \frac{1}{2}) n / N} \\
 &\stackrel{\text{využití (13) a sloučení}}{=} \sum_{k=0}^{N-1} x_{2k+1} \left[e^{-\pi i (k + \frac{1}{2}) n / N} + e^{-\pi i ((2N-1-k) + \frac{1}{2}) n / N} \right] \\
 &\stackrel{\substack{\text{úprava} \\ \text{a def. } x_{2k+1}}}{=} \sum_{k=0}^{N-1} f_k \left[e^{-\pi i (k + \frac{1}{2}) n / N} + \underbrace{e^{-2\pi i n}}_{=1} e^{+\pi i (k + \frac{1}{2}) n / N} \right] \\
 &\stackrel{\substack{\text{Eulerův} \\ \text{vzorec(4)}}}{=} 2 \sum_{k=0}^{N-1} f_k \cos \left(\left(k + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi n}{N} \right) = 2 \sum_{k=0}^{N-1} f_k \cos \left(\frac{(2k+1) \pi n}{2N} \right) \quad (14)
 \end{aligned}$$

pro $n = 0, 1, \dots, 4N-1$. Protože X_n jsou zřejmě reálná čísla a zároveň platí (11), dostáváme

$$X_{4N-n} = X_n,$$

což umožňuje dopočítat $X_{2N+1}, \dots, X_{4N-1}$ z $X_1, \dots, X_{2N-1}$. Navíc využitím součtového vzorce $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$ lze snadno ukázat, že

$$X_{2N-n} = -X_n, \quad (15)$$

což umožňuje získat $X_{N+1}, \dots, X_{2N}$ z $X_0, \dots, X_{N-1}$. Nakonec z (15) plyne ještě $X_N = 0$. Celkem tedy z (14) získáváme nezávislé hodnoty X_n pouze pro $n = 0, 1, \dots, N-1$. Za výsledek DCT posloupnosti $f_0, \dots, f_{N-1}$ se proto považuje posloupnost N čísel $X_0, \dots, X_{N-1}$.

Literatura

- [1] Pennebaker, W. B., Mitchell, J. L.: *JPEG Still Image Data Compression Standard*. Springer, New York, 1993.
- [2] Hacker, S.: *MP3: The Definitive Guide*. O'Reilly Media, 2000.
- [3] Wootton, C.: *A Practical Guide to Video and Audio Compression: From Sprockets and Rasters to Macro Blocks*. Routledge, 2005.
- [4] Zolfagharifard, E.: *Who do YOU see: Albert or Marilyn? Optical illusion could reveal if you need glasses*. *Daily Mail Online*, č. 3. dubna 2015, Dostupné na: <https://www.dailymail.co.uk/sciencetech/article-3024005/Do-Albert-Einstein-Marilyn-Monroe-Hybrid-optical-illusion-reveal-need-wear-glasses.html> [cit. 16.8.2022].
- [5] Tišnovský, P.: *Programujeme JPEG: diskrétní kosinová transformace (DCT)*. *ROOT.cz*, č. 4. ledna 2007, Dostupné na: <https://www.root.cz/clanky/programujeme-jpeg-diskretni-kosinova-transformace-dct/> [cit. 16.8.2022].
- [6] Roelofs, G.: *PNG—The Definitive Guide*. O'Reilly, 1999.
- [7] Elemental Technologies: *HEVC Demystified—A Primer on the H.265 Video Codec*. The Broadcast Bridge, 2014.
- [8] Google: *An Image Format for the Web*. Dostupné na: <https://developers.google.com/speed/webp> [cit. 16.8.2022].
- [9] Horák, D.: *Diskrétní transformace*. ZČU, Plzeň, 2012, učební text. Dostupné na https://mi21.vsb.cz/sites/mi21.vsb.cz/files/unit/diskretni_transformace.pdf [cit. 16.8.2022].
- [10] Hlaváč, V.: *Fourierova transformace v 1D a 2D*. ČIRK ČVUT, Praha, dostupné na: <https://people.ciirc.cvut.cz/~hlavac/TeachPresCz/11DigZpr0br/12FourierTxCz.pdf> [cit. 16.8.2022].

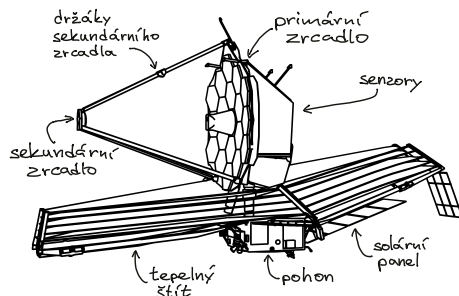
Proč mají hvězdy na fotografiích z Webbova vesmírného teleskopu osm cípů?

Eduard Šubert, Praha

Určitě jste už viděli alespoň jednu z úžasných fotografií z Vesmírného teleskopu Jamese Webba.

Všimli jste si, že hvězdy na těchto fotografiích mají osm cípů? *Ale proč?* Když se z povrchu Země podíváme na noční oblohu, uvidíme na hvězdách osm cípů? Neuvidíme! Stejně tak, kdybychom se koukali na oblohu přímo z teleskopu, žádné cípy bychom na hvězdách neviděli. Ale po tom, co se světelné paprsky odrazí od prvního a druhého zrcadla, tak sensor osm cípů zachytí.

Podívejte se na tento náčrtek, které části teleskopu podezříváte, že by mohly hrát roli ve tvorbě hvězdných cípů?



Jestli chcete v hledání odpovědi na otázku: „Kde se vezme osm cípů hvězd na fotografiích z Vesmírného teleskopu Jamese Webba?“ pokračovat, zdarma si stáhněte a vytiskněte sešit, který vás hledáním provede: eduardsubert.com/experiment-jwst



Jeden středoškolák svůj zážitek okomentoval: „A celou dobu mě to fakt bavilo. Bylo to super. Tohle říkám málokdy, ale opravdu zábavné. Za mě 9/10.“

v letošním školním roce se uskuteční

45. ročník

soutěže Středoškolská odborná činnost (SOČ)

pro zájemce o přírodovědné, technické a humanitní obory



Garantem soutěže je Národní pedagogický institut České republiky. Celostátní přehlídka prací se koná ve spolupráci s Plzeňským krajem, Středním odborným učilištěm elektrotechnickým v Plzni a Gymnáziem Ludka Píka v Plzni.

harmonogram

Školní přehlídka:

únor – březen 2023, dle pokynů střední školy

Okresní přehlídka:

březen – duben 2023

Krajská přehlídka:

duben – 14. květen 2023

Celostátní přehlídka:

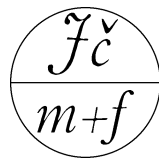
16. – 18. červen 2023, SOU elektrotechnické v Plzni



Bližší informace o SOČ najdete na: www.soc.cz

ROZHLEDY matematicko-fyzikální

Ročník 98 (2023), číslo 1



OBSAH

E. Dvořáková: Slovo úvodem	1
V. Čerňanová: Tri definície elipsy a ich názorné prepojenie	2
P. Pokorný: Přelévání vody mezi nádobami, teorie grafů a modulární aritmetika	9
M. Makešová, M. Valentová: Proč si Češi pořizují solární panely? .	25
Matematické oříšky: Nudný profesor	34
P. Strachota: Transformace obrazu do frekvenční oblasti a jejich aplikace	35
E. Šubert: Proč mají hvězdy na fotografiích z Webbova vesmírného teleskopu osm cípů?	56

Pokyny pro autory

Příspěvky dodávejte na adresu redakce v elektronické podobě. Nejlépe napsané ve formátu $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$, přijatelný je i formát $\text{PlainT}_{\text{E}}\text{X}$, je akceptovatelný i text připravený editorem Word či podobným.

Pokud jde o obrázky, je žádoucí, aby byly připraveny v reprodukovatelné podobě. Každý obrázek nechte v samostatném souboru, nejlépe ve formátu eps nebo pdf. Přípustná je též bitmapa v dostatečném rozlišení.

Ke každému zasílanému příspěvku (ne u soutěží, zpráv a recenzí) přiložte krátkou anotaci v českém jazyce. Dále je žádoucí, aby u každého příspěvku byla uvedena literatura, na kterou je v textu odkazováno.