ROZHLEDY

MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ

ČASOPIS PRO ZÁJEMCE O MATEMATIKU, FYZIKU A INFORMATIKU

ROČNÍK 98 (2023) • ČÍSLO 2

Vydává Jednota českých matematiků a fyziků
tel.: 222 090 708-9, e-mail: jcmf@math.cas.cz
za podpory MFF UK Praha a FJFI ČVUT Praha

Vycházejí 4 čísla v kalendářním roce

Obálku navrhl Bohuslav Šír

Sazbu programem TEX připravil RNDr. Miloslav Závodný

Adresa redakce: MFF UK, V Holešovičkách 2, 182 00 Praha 8 – Troja
e-mail: rozhledy@jcmf.cz

Internetové stránky časopisu: https://rozhledy.jcmf.cz/

Vytiskla Tiskárna Pohlline, Zálesí 1126/88, 142 00 Praha 4

Distribuci pro předplatitele provádí v zastoupení vydavatele
MediaCall, s. r. o.
Vídeňská 546/55, 639 00 Brno
tel.: +420 532 165 165, e-mail: export@mediacall.cz
web: www.zahranicnitisk.com

ISSN 0035-9343 MK ČR E4691

Nepárne čísla v zlomkoch

Viera Čerňanová, Pedagogická fakulta Trnavskej univerzity, Trnava

Predložený príspevok patrí k tým, ktoré potvrdzujú význam jedného zo základných rysov matematiky: *Schopnosť zovšeobecňovať a nezastavovať sa pri konkrétnych prípadoch. Všeobecné riešenie je totiž často názornejšie, prináša hlbšie porozumenie a vysvetľuje špeciálne prípady.*[1]

Nepárne čísla ako generátor

Pozrime sa na racionálne číslo $\frac{1}{3}$. Vieme, že ho môžeme napísať tiež v tvare ekvivalentného zlomku, napríklad:

$$\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{5}{15} = \cdots$$

Toto číslo však môžeme vyjadriť aj iným, prekvapivým spôsobom (1), ako sme sa dozvedeli na stránke [2]. Tak vznikol podnet k napísaniu tohto článku.

$$\frac{1}{3} = \frac{1+3}{5+7} = \frac{1+3+5}{7+9+11} = \cdots \tag{1}$$

Vo všeobecnosti pre každé prirodzené číslo n platí

$$\frac{1+3+\cdots+(2n-1)}{(2n+1)+(2n+3)+\cdots+(2n+(2n-1))} = \frac{1}{3}, \tag{2}$$

skrátene

$$\frac{\sum_{k=1}^{n}(2k-1)}{\sum_{k=n+1}^{2n}(2k-1)} = \frac{1}{3},$$

čo sformulujeme nasledovne.

Tvrdenie 1. *Nech $n \in \mathbb{N}$. Ak je čitateľ zlomku súčtom prvých n nepárnych prirodzených čísel a menovateľ súčtom n bezprostredne za nimi nasledujúcich nepárnych čísel, tak hodnota zlomku je $\frac{1}{3}$.*

V dôkaze využijeme pomocné tvrdenie, ktoré je v učebniciach zvyčajne uvádzané pri metóde matematickej indukcie. Štandardný algebrický dôkaz dopĺňame kvôli názornosti geometrickým dôkazom bez slov.

Lemma 1. *Nech $n \in \mathbb{N}$. Súčet prvých n po sebe nasledujúcich nepárnych prirodzených čísel je n^2, čiže*

$$1 + 3 + \cdots + (2n - 1) = n^2. \tag{3}$$

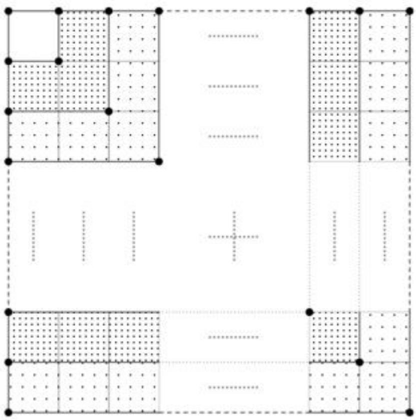
Dôkaz.

1. Pre $n = 1$ sa ľavá strana v identite (3) rovná 1, pravá je 1^2, čo je tiež 1. Pre $n = 1$ je teda rovnosť overená.
2. Predpokladajme, že (3) platí pre nejaké $n \in \mathbb{N}$. Potom

   $$\mathbf{1} + \mathbf{3} + \cdots + (\mathbf{2n} - \mathbf{1}) + (2n + 1) = \mathbf{n^2} + 2n + 1 = (n + 1)^2.$$

   Teda z indukčného predpokladu vyplýva rovnosť ľavej a pravej strany (3) aj pre $n + 1$.

Overili sme platnosť identity (3) pre najmenšie prirodzené číslo, a z platnosti pre n sme odvodili platnosť identity pre $n+1$. Lemma je dokázaná.



Obr. 1: Dôkaz identity (3)

Dôkaz tvrdenia 1. V ľavej strane vzťahu (2) použijeme (3), dostaneme

$$\frac{1 + 3 + \cdots + (2n - 1)}{(\underline{2n} + 1) + (\underline{2n} + 3) + \cdots + (\underline{2n} + (2n - 1))} = \frac{n^2}{\underline{2n} \cdot n + n^2} = \frac{1}{3}.$$

S použitím nerovnakého počtu sčítancov v čitateli a v menovateli je možné získať podobné výsledky.

Príklad 1.

$$\frac{1}{3+5}=\frac{1+3}{5+7+9+11}=\frac{1+3+5}{7+9+11+13+15+17}=\frac{1}{8}.$$

Všimnime si, že nepárne čísla zapisujeme v každom zlomku systematicky od 1, pričom v menovateli ich je dvakrát toľko ako v čitateli. Dokážme, že pre každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\frac{\sum_{k=1}^{n}(2k-1)}{\sum_{k=n+1}^{3n}(2k-1)}=\frac{1}{8}.$$

Ľavú stranu upravíme, využijeme (3) a dostaneme

$$\frac{\sum_{k=1}^{n}(2k-1)}{\sum_{k=n+1}^{3n}(2k-1)}=\frac{\sum_{k=1}^{n}(2k-1)}{\sum_{k=1}^{3n}(2k-1)-\sum_{k=1}^{n}(2k-1)}=\frac{n^2}{(3n)^2-(n)^2}=\frac{1}{8}.$$

Príklad 2.

$$\frac{1}{3+5+7}=\frac{1+3}{5+7+9+11+13+15}=\frac{1+3+5}{7+9+\cdots+21+23}=\frac{1}{15}.$$

Tentokrát je v menovateli trikrát toľko sčítancov ako v čitateli. Pre každé $n \in \mathbb{N}$ máme

$$\frac{\sum_{k=1}^{n}(2k-1)}{\sum_{k=n+1}^{4n}(2k-1)}=\frac{n^2}{(4n)^2-n^2}=\frac{1}{15}.$$

Hĺbavý čítateľ nepochybne postrehol, že identita (2), ako aj tie v príkladoch 1 a 2, sú špeciálne prípady všeobecnejšieho tvrdenia, ktoré sformulujeme ako vetu. Princíp dôkazu je rovnaký ako v uvedených príkladoch, preto ho ponecháme pre čitateľa ako cvičenie.

Veta 1. *Pre každé dve prirodzené čísla $n \geq 1$, $m \geq 2$ platí*

$$\frac{\sum_{k=1}^{n}(2k-1)}{\sum_{k=n+1}^{mn}(2k-1)}=\frac{1+3+\cdots+(2n-1)}{(2n+1)+(2n+3)+\cdots+(2mn-1)}=\frac{1}{m^2-1}.$$

Veta 1 upresňuje jednu triedu racionálnych čísel, ktoré je možné generovať ako podiely istých konečných súčtov po sebe nasledujúcich nepárnych čísel. Vďaka dodatočným požiadavkám na použité konečné postupnosti nepárnych čísel môžeme nájsť ďalšie triedy. Pre čitateľov predkladáme ako otvorený problém otázku: *Ktoré kladné racionálne čísla je/nie je možné generovať takýmto spôsobom?* Ako inšpiráciu a na povzbudenie uvádzame nasledujúce príklady.

Príklad 3.

$$\frac{1+3}{5} = \frac{1+3+5+7}{9+11} = \frac{1+3+5+7+9+11}{13+15+17} = \frac{4}{5}.$$

Nepárne čísla zapisujeme od jednotky, pričom v čitateli ich je dvakrát toľko ako v menovateli. Všeobecne

$$\frac{\sum_{k=1}^{2n}(2k-1)}{\sum_{k=2n+1}^{3n}(2k-1)} = \frac{(2n)^2}{(3n)^2-(2n)^2} = \frac{4}{5}.$$

Je možné vytvoriť aj racionálne číslo väčšie ako 1. Prirodzene, v čitateli bude musieť byť ešte viac členov než v menovateli.

Príklad 4. Zvoľme pomer počtu členov v čitateli a v menovateli 5 : 2, začnime od jednotky:

$$\frac{1+3+5+7+9}{11+13} = \frac{1+3+\cdots+19}{21+23+25+27} = \frac{25}{24}.$$

Všeobecný zlomok bude mať tvar

$$\frac{\sum_{k=1}^{5n}(2k-1)}{\sum_{k=5n+1}^{7n}(2k-1)} = \frac{(5n)^2}{(7n)^2-(5n)^2} = \frac{25}{24}.$$

Príklad 5. Tentokrát nebudeme začínať od jednotky. Budeme však dodržiavať isté pravidlá, ktoré vyjadríme aj všeobecne.

$$\frac{3}{5+7} = \frac{5+7}{9+11+13+15} = \frac{7+9+11}{13+15+17+19+21+23} = \frac{1}{4}.$$

Nepárne čísla naďalej zapisujeme vzostupne, v menovateli ich je dvakrát toľko ako v čitateli. Všimnime si, že druhé nepárne číslo 3 je v čitateli zlomku samo. V zlomku, kde začíname tretím nepárnym číslom 5, sú v čitateli dva sčítance. Analogicky je tomu pri sedmičke (7 je štvrté nepárne číslo, prvé tri v zlomku nepoužijeme, v čitateli sú tri sčítance) a pri každom ďalšom nepárnom čísle. Pre $n \geq 2$ dostávame

$$\frac{\sum_{k=n}^{2n-2}(2k-1)}{\sum_{k=2n-1}^{4n-4}(2k-1)} = \frac{(2n-2)^2-(n-1)^2}{(4n-4)^2-(2n-2)^2} = \frac{3(n-1)^2}{12(n-1)^2} = \frac{1}{4}.$$

Aritmetický priemer, aritmetická postupnosť

Cieľom všeobecných zápisov v príkladoch bolo pochopiť princíp, precvičiť si prácu s formálnymi výrazmi a potvrdiť platnosť výsledku.

Pozrime sa ešte na jedno zjednodušenie, ktoré sa nám v prípade po sebe nasledujúcich nepárnych čísel ponúka.

1. Najskôr si uvedomme, že súčet ľubovoľného konečného počtu čísel je ich aritmetickým priemerom, ktorý je vynásobený počtom týchto čísel. Preto je súčet v každom čitateli i menovateli hociktorého zo zlomkov z predchádzajúcej časti príslušným násobkom ich aritmetického priemeru.
2. V čitateli aj v menovateli každého zlomku je súčet konečnej aritmetickej postupnosti so spoločnou diferenciou 2. Preto je aritmetický priemer sčítancov v čitateli (aj v menovateli) aritmetickým priemerom prvého a posledného čísla v súčte.

Pre názornosť využime uvedené skutočnosti na alternatívny dôkaz vzťahu (2) a na rýchly výpočet "najrozťahanejších" zlomkov z jednotlivých príkladov, prípadne priamo vo všeobecnom tvare.

Alternatívny dôkaz vzťahu (2).

$$\frac{1+3+\cdots+(2n-1)}{(2n+1)+\cdots+(4n-1)} = \frac{n\cdot(1+2n-1)/2}{n\cdot(2n+1+4n-1)/2} = \frac{n^2}{3n^2} = \frac{1}{3}.$$

Príklady

1.
$$\frac{1+3+5}{7+9+11+13+15+17} = \frac{3\cdot(1+5)/2}{6\cdot(7+17)/2} = \frac{3\cdot 3}{6\cdot 12} = \frac{1}{8}$$

2.
$$\frac{\sum_{k=1}^{n}(2k-1)}{\sum_{k=n+1}^{4n}(2k-1)} = \frac{n\cdot(1+2n-1)/2}{3n\cdot(2n+1+8n-1)/2} = \frac{n^2}{15n^2} = \frac{1}{15}$$

3.
$$\frac{1+3+5+7+9+11}{13+15+17} = \frac{6\cdot(1+11)/2}{3\cdot(13+17)/2} = \frac{6\cdot 6}{3\cdot 15} = \frac{4}{5}$$

4.
$$\frac{1+3+\cdots+19}{21+23+25+27} = \frac{10\cdot(1+19)/2}{4\cdot(21+27)/2} = \frac{10\cdot 10}{4\cdot 24} = \frac{25}{24}$$

5.

$$\frac{7+9+11}{13+15+17+19+21+23} = \frac{3\cdot(7+11)/2}{6\cdot(13+23)/2} = \frac{3\cdot 9}{6\cdot 18} = \frac{1}{4}$$

Poďakovanie

Ďakujem anonymnému recenzentovi za pozorné prečítanie rukopisu a konštruktívne pripomienky, ktoré prispeli ku zvýšeniu kvality článku. Tento príspevok vznikol s podporou grantu KEGA 001UMB-4/2023.

Literatúra

[1] Dlab, V.: Pravoúhlý trojúhelník v pravoúhlém trojúhelníku. *Rozhledy matematicko-fyzikální*, 97 (2022), č. 4, s. 24–31.

[2] `https://math1089.in/fractions-are-beautiful/16/`.

Problém s potrubím

Šárka Gergelitsová, Tomáš Holan, MFF UK, Praha

V tomto textu bychom chtěli představit jeden problém a ukázat různé možnosti jeho řešení.

Představte si, že v domě nebo na zahradě máme otvor, ze kterého bude vytékat voda, a někde jinde druhý otvor, do kterého bychom chtěli vodu přivést. Oba otvory mají svoji polohu a svůj směr (ten si můžeme představovat jako směr, kterým poteče voda) a k vedení vody máme neomezenou zásobu kolen – trubek zahnutých uprostřed o 90 stupňů.

Předpokládejme, že délka každého ramene zahnuté trubky je 1, že trubky povedou vždy ve směru osy x nebo osy y nebo osy z a že voda vytéká z otvoru (profilu) na souřadnicích (0,0,0) ve směru osy y.

Otázka: Do jakých souřadnic a z jakých všech směrů dokážeme vodu potrubím složeným z kolen dopravit?

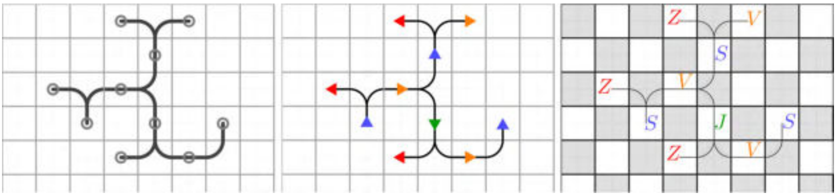
Tento text bude o hledání odpovědi: pokud se nechcete připravit o zábavu, tak ho teď odložte a zkuste odpověď najít sami!

První cesta – tužka a papír

Zjednodušení na rovinu

Zkusme nejdříve vyřešit jednodušší úlohu a zjistit, jaká by byla odpověď, kdyby se celé potrubí mohlo nacházet jen v rovině – třeba kdyby muselo ležet na zemi.

Abychom získali nějakou představu, nakreslíme si obrázek; vlastně tři obrázky, využijeme je postupně všechny:



Obr. 1: Znázornění potrubí a směrů toku vody

Každé připojené koleno nás posune o jednu pozici vodorovně a o jednu pozici svisle, můžeme se tedy dostat jen do takových pozic, které se od startovní pozice ve vodorovném a svislém směru liší buďto obě o lichý, nebo obě o sudý počet kroků.

Když si ke koncům kolen přikreslíme šipky znázorňující tok vody či písmena označující směry (jako na mapě) nebo když si plochu „šachovnicově obarvíme“, zdá se, že platí:

Postřeh 1. Dostaneme se pouze do „bílých polí šachovnice“.

Důkaz. Pokud vyjdeme z bodu (0,0), pak nás první koleno dovede do bodu s oběma souřadnicemi lichými a další koleno do bodu s oběma souřadnicemi sudými, parita se v každém kroku střídá.

Postřeh 2. Do pozic v sudých řádcích (počítáno od výchozí pozice) se můžeme dostat jenom svisle, do pozic v lichých řádcích jenom vodorovně. Totéž platí pro sloupce.

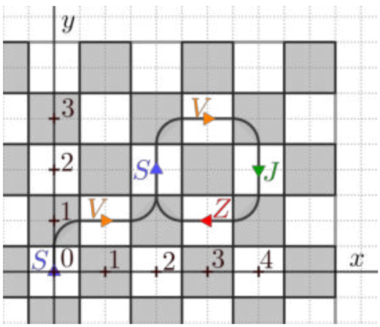
Důkaz. Stejně jako parita souřadnic se střídají směry: po směru svislém (rovnoběžně s osou y) musí následovat směr vodorovný (rovnoběžně s osou x). Vyjdeme-li svislým směrem, pak poté, co urazíme cestu sudé délky (projdeme sudý počet kolen), budeme mířit směrem S nebo J. Na konci cest liché délky budeme mířit směrem V nebo Z.

Postřeh 3. Do každé dostupné pozice se můžeme dostat pouze v jednom ze čtyř možných směrů.

Postřeh 4. V každém řádku nebo sloupci se střídají vždy dva navzájem opačné směry.

Důkaz. Už víme, že vyjdeme-li z bodu (0,0) ve směru osy y, pak body se sudými souřadnicemi procházíme ve směrech S nebo J, body s lichými souřadnicemi ve směrech V nebo Z. Tím jsme ale zatím nevyloučili, že některým bodem, kterým jsme prošli směrem S, bychom při jiné volbě cesty mohli projít směrem J. Podobně pro směry V a Z. To dokážeme dále tím, že jednoznačně určíme směr pohybu v uzlu s danými souřadnicemi.

Zapišme si pomocí směrů jednu možnou cestu, která vyjde z počátku. Například pro cestu ze 6 kolen: SV, VS, SV, VJ, JZ, ZS cílovou pozici snadno určíme i bez obrázku 2: Ve svislém směru jdeme čtyřikrát o 1 jednotku severně a dvakrát na jih, celkově jsme se tedy posunuli o 2 jednotky severně. Podobně určíme posun v ose x: čtyři jednotky doprava (V) a dvě doleva (Z) nás celkově posunou o 2 jednotky doprava. Jsme v bodě o souřadnicích (2,2). Pro počty p_S, p_J, p_V, p_Z znaků S, J, V, Z v zápisu cesty jsou souřadnice cíle $(p_\mathrm{V} - p_\mathrm{Z}, p_\mathrm{S} - p_\mathrm{J})$.



Obr. 2: Cesta ze šesti kolen SV–VS–SV–VJ–JZ–ZS

A teď se zeptejme obráceně: jak vede cesta, která vychází z počátku směrem na sever a prochází bodem (2,2)?

Souřadnice bodu jsou sudé, víme tedy, že každá cesta, která v něm končí, sestává ze sudého počtu kolen, a tedy končí buď znakem S, nebo znakem J.

Který z nich to je, poznáme podle součtu souřadnic cílového bodu: Kolena se napojují rameny téhož směru, uvnitř cesty se proto posouváme o 2 (nebo -2) jednotky střídavě vodorovně a svisle. V cestě sudé délky je počet napojení kolen lichý.

Součet lichého počtu hodnot 2 nebo -2 můžeme vyjádřit jako $4k+2$. K tomuto součtu posunutí přičteme $+1$ pro posunutí prvním ramenem cesty směrem S. Nakonec přičteme $+1$ pro poslední rameno cesty ve směru S, nebo -1 pro poslední rameno cesty ve směru J. Tudíž každá cesta sudé délky končící v bodě, pro nějž je součet jeho souřadnic násobkem 4, vstupuje do tohoto bodu směrem S. Je-li součet souřadnic cílového bodu lichý násobek 2, vstupuje do něho směrem J.

Každá cesta, vedoucí do bodu (2,2) jím tedy prochází směrem S: Má sudou délku a $2+2=4$. Takovou cestou je například také cesta SV, VS. Stejně odvodíme jednoznačnost směru v cílovém uzlu pro cesty liché délky. Ty končí body s lichými souřadnicemi, kterými procházíme směry V, nebo Z podle toho, je-li součet obou souřadnic násobek 4 (směr Z), nebo lichý násobek 2 (směr V).

Odvození: V cestě liché délky je sudý počet napojení ramen a součet posunů těmito rameny je tedy násobek 4. K tomuto součtu přičteme $+1$ za posun S na začátku cesty a $+1$, nebo -1 za poslední posun směrem V, nebo Z.

Závěr: V rovině os x, y můžeme za uvedených předpokladů projít právě všechny body, jejichž souřadnice mají stejnou paritu, a to každý právě jedním směrem. Tento směr je jednoznačně určen paritou a součtem souřadnic (modulo 4) procházeného bodu.

Zpátky do třetího rozměru

Co získáme, když budeme moci opustit rovinu?

Dosud jsme se pohybovali v rovině os x a y, tedy v souřadnicích v rovině $z=0$. Libovolným kolenem směřujícím kolmo z ní směrem vzhůru přejdeme do bodu se souřadnicí $z=1$. Z něj ale další navazující koleno pokračuje do roviny $z=2$.

Postřeh 5. Do všech bodů roviny $z=1$, kam se dokážeme dostat, se dokážeme dostat pouze zdola (nebo při dalším pohybu shora), a pokud zde vedení neskončí, můžeme na ně navázat pouze tak, že budeme pokračovat do roviny $z=2$ (nebo $z=0$). V této rovině však můžeme pokračovat kterýmkoliv směrem. Pokud máme dodržet vzájemnou kolmost (či rovnoběžnost) mezi rameny potrubí, bude to kterýkoliv směr rovnoběžný s osami x, y. Můžeme tedy pokračovat jak ve směru (či proti směru), kterým vedl poslední krok v rovině $z = 0$, a otočit tak směr pohybu oproti směru ve výchozí rovině, tak ve směru kolmém a směr zachovat.

Postřeh 6. Přechod do jiné úrovně nám dovolí po návratu do základní roviny změnit směr průchodu profilem na směr opačný. Pokud bychom například v základní rovině procházeli profil směrem S (třeba kolenem VS), v prostoru se do stejného profilu dostaneme také čtveřicí kolen V↑, ↑S, S↓, ↓J. Proto ve třírozměrném prostoru dokážeme do každého bodu, kam dokážeme přijít nějakým směrem, přijít i směrem opačným.

Postřeh 7. Body, do nichž se dokážeme dostat ve vyšší úrovni (o násobky 2 vyšší z-souřadnice, než ze které jsme vyšli), jsou právě nad body, do kterých se dokážeme dostat v úrovni, ze které jsme vyšli. Naopak body, kterými procházíme při cestě vzhůru, jsou právě body nad ohybem kolene ve vodorovné rovině, tedy body na souřadnicích (x, y), do kterých se v původní úrovni dostat nemůžeme (body nad „černými poli šachovnice“).

Postřeh 8. Přechod do jiné roviny a zpět nám neumožní dostat se do žádného bodu základní roviny, do něhož se neumíme dostat pohybem v této rovině.

Odpověď na původní otázku je tedy následující:

Za uvedených podmínek *(vycházíme z bodu (0,0,0) a pohybujeme se pomocí „kolen“, jejichž ústí svírají pravý úhel a každé rameno má délku* 1 *a je rovnoběžné se souřadnicovou osou)* je možné se dostat pouze do bodů, u kterých platí

$$(\mathrm{d}x + \mathrm{d}y + \mathrm{d}z) \bmod 2 = 0$$

(součet jejich souřadnic je sudé číslo).

Do některých bodů je možné se dostat *pouze ve směru osy* x (z obou směrů), do dalších *pouze ve směru osy* y (z obou směrů) a do ostatních *pouze ve směru osy* z (z obou směrů).

Druhá cesta – prohledávání a program

Pokud se nám nechce takhle složitě přemýšlet a chceme získat nějaký názor na to, jak a kam může potrubí vodu dovést, můžeme začít prohledávat všechny možnosti, jak kolena napojit. A něco takového dokáže počítač rychleji než člověk – tak si na to můžeme napsat program!

Zkusíme prohledat všechny polohy a směry, do nichž se dokážeme dostat v nějakém omezeném prostoru, a potom je vypsat setříděné podle polohy. Snadno to půjde třeba v jazyku Python (pozor, pro jednoduchost nekontrolujeme, jestli si kolena vzájemně nepřekážejí, a hledání je omezeno na určitou vzdálenost od počátku, protože jinak by nikdy neskončilo):

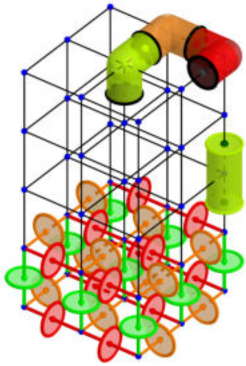
```
def posun( a, b ):
    return ( a[0]+b[0], a[1]+b[1], a[2]+b[2] )

MAX = 5
def omezeni( vektor ):
    for i in range(3):
        if vektor[i]<0 or vektor[i]>MAX:
            return False
    return True

def kolmySmer( smer1, smer2 ):
    return smer1[0]*smer2[0] + smer1[1]*smer2[1] + smer1[2]*smer2[2] == 0

vsechnySmery = [(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1),(0,0,-1),(0,-1,0),(-1,0,0)]
prozkoumat = [ ( (0,0,0),(0,1,0) ) ]  # (pozice,smer)
nalezeno = { prozkoumat[0] }
while prozkoumat != []:
    (pozice,smer) = prozkoumat.pop(0)
    for novySmer in vsechnySmery:
        if kolmySmer( smer, novySmer ): # nesmime rovne ani se otocit zpet
            novaPozice = posun( posun(pozice,smer), novySmer )
            novaPoziceASmer = (novaPozice,novySmer)
            if omezeni(novaPozice) and not novaPoziceASmer in nalezeno:
                prozkoumat.append( novaPoziceASmer)
                nalezeno.add( novaPoziceASmer )

print( *sorted(nalezeno),sep="\n" )
```

Kvůli tomu do bodů na okrajích nenajdeme cestu z poloh mimo toto omezení, ale když se podíváme na seznam pozic nalezených kolem středu povoleného rozsahu, vždy ve tvaru (poloha, směr), vypadá to (i když to není žádný důkaz!), že podporuje závěr, k němuž jsme došli první cestou (otiskujeme pouze část výpisu):

```
((2, 2, 0), (0, -1, 0))
((2, 2, 0), (0, 1, 0))
((2, 2, 2), (0, -1, 0))
((2, 2, 2), (0, 1, 0))
((2, 2, 4), (0, -1, 0))
((2, 2, 4), (0, 1, 0))
((2, 3, 1), (0, 0, -1))
((2, 3, 1), (0, 0, 1))
((2, 3, 3), (0, 0, -1))
((2, 3, 3), (0, 0, 1))
((2, 3, 5), (0, 0, 1))
((2, 4, 0), (0, -1, 0))
((2, 4, 0), (0, 1, 0))
```

Třetí cesta – najít správný pohled na věc

K vyřešení problému často stačí podívat se na něj „z jiné strany“. Kruhovou výpusť a směr, kterým proudí voda, můžeme znázornit jako kružnici a přímku vedenou jejím středem kolmo na její rovinu. Rameno kolena pak jako úsečku délky 1 na této přímce a druhé rameno jako úsečku k ní kolmou. Celé potrubí si pak lze představit jako cestu po hranách krychlové sítě s hranou délky 2, kde uzlové body (tedy procházené profily potrubí) jsou reprezentovány kružnicemi kolmo „navlečenými“ vždy uprostřed na hranách krychlí, kde každá hrana má délku 2.



Obr. 3: Potrubí v krychlové síti

Pro snazší představu o poloze bodů posuňme soustavu oproti poloze z výše uvedené úvahy o 1 ve směru libovolné souřadnicové osy. Potom budou vrcholy krychlové sítě body s vesměs sudými souřadnicemi a průtokové profily budou mít vždy jednu souřadnici svého středu lichou, a to v ose, na niž je rovina profilu kolmá.

Pokud bychom požadovali, aby se potrubí nekřížilo a kolena si nepřekážela, pak v prostoru, kde nejsou překážky, dokážeme požadovanými směry spojit libovolné dva z výše uvedených profilů s jedinou výjimkou: dva profily na bezprostředně navazujících hranách téhož směru při zadaných směrech od výchozího k cílovému profilu bychom dokázali spojit jedině válcovou plochou výšky 2. Dvě kolena se tam nevejdou.

Závěr

Ukázali jsme tři možnosti, jak se dá k danému problému přistupovat, i to, že se někdy podaří najít takový pohled na věc, při němž je řešení snadno viditelné.

Krocení jedné bijekce aneb o zipu a tkaničkách

Dalibor Martišek, Šlapanice

Abstrakt. Tento text pojednává o jednom pozoruhodném vzájemně jednoznačném zobrazení mezi množinou všech bodů jednotkového čtverce a množinou všech bodů jednotkové úsečky. Existence tohoto zobrazení (bijekce) zaručuje (laicky řečeno) „stejně velká nekonečna“, řečeno matematicky – stejnou mohutnost dvou nekonečných množin.

Člověk uvažující jen v mezích své běžné zkušenosti často nechápe již sám pojem nekonečna, natož většinu bijekcí, které jsou pro současnou matematiku již zcela samozřejmé. Jak by na úsečce mohl být stejný počet bodů jako ve čtverci, když čtverec kromě jedné strany obsahuje ještě další tři a navíc celý vnitřek? To přece odporuje zdravému selskému rozumu! Jenže zdravému selskému rozumu kdysi odporoval i součet dvou čísel, který byl menší než oba sčítanci, a dokonce i fakt, že Země je kulatá.

„Cantorův zip“ Petera Zamarovského

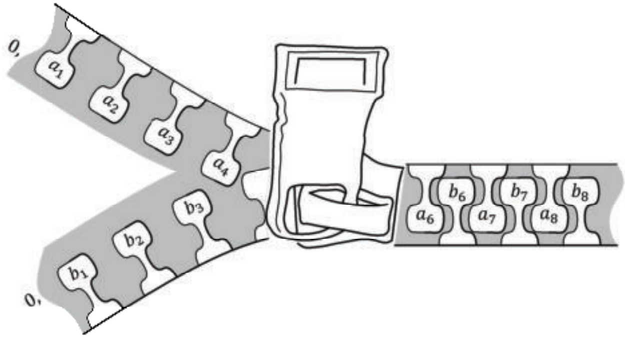
Jednu z bijekcí čtverce a úsečky popisuje P. Zamarovský ve své knize [7] a uvádí ji i na svých přednáškách [8, 9]. Lze se o ní dočíst i v článku F. Kuřiny a N. Vondrové [4], kde se píše: „Přirozeně se naskýtá otázka, zda mají stejnou mohutnost množiny J a kartézský součin $J \times J$. I zde je odpověď kladná“ ([4, s. 119]).

Dodejme, že tato věta platí jen pro nekonečné množiny, a podívejme se nejdříve na argumenty, kterými toto tvrzení konkrétně pro interval $(0;1)$ podepřel Zamarovský.

Každý bod čtverce $\mathcal{C} = (0;1) \times (0;1)$ lze zapsat jako uspořádanou dvojici $[a;b]$ reálných čísel $a = 0{,}a_1a_2a_3a_4\ldots$, resp. $b = 0{,}b_1b_2b_3b_4\ldots$, kde $a_i, b_i \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ jsou cifry dekadického rozvoje čísel a, b. Tento bod zobrazil Zamarovský do bodu x na úsečce $\mathcal{U} = (0;1)$ jednoduchým trikem: v desetinném zápise čísla x se pravidelně střídaly desetinné cifry čísel a, b, tj.

$$x = 0{,}a_1b_1a_2b_2a_3b_3a_4b_4\ldots$$

Toto zobrazení, které objevil Georg Cantor, připomnělo Zamarovskému zip, proto ho nazval Cantorovým zipem ([7, s. 148], [4, s. 119, 120], [8, 9]), viz obr. 1.



Obr. 1: „Cantorův zip“ Petera Zamarovského

Příklad 1. Ve svých přednáškách [8, 9] uvádí Zamarovský následující příklady fungování zipu:

a) $\left.\begin{aligned} a &= 0{,}3 \\ b &= 0{,}7 \end{aligned}\right\} \leftrightarrow x = 0{,}37$

b) $\left.\begin{aligned} a &= 0{,}34 \\ b &= 0{,}72 \end{aligned}\right\} \leftrightarrow x = 0{,}3742$

c) $\left.\begin{aligned} a &= 0{,}345 \\ b &= 0{,}721 \end{aligned}\right\} \leftrightarrow x = 0{,}374251$

Tvrdí, že tímto způsobem je každému bodu ve čtverci přiřazen právě jeden bod úsečky a naopak každý bod úsečky lze jednoznačně „rozkódovat“ do původních dvou souřadnic bodu čtverce. Řečeno matematicky, množina všech takových zipů je hledanou bijekcí.

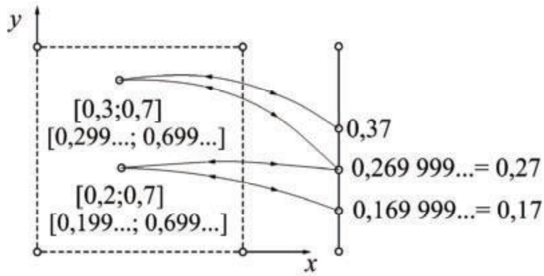
Bohužel tomu tak není. Množina všech takových zipů nejenže není bijekcí, ale dokonce není ani zobrazením. Je pouhou relací mezi množinou všech bodů čtverce a množinou všech bodů úsečky. Důvod, který byl naznačen již v [5], zde rozeberme poněkud podrobněji.

Je známo, že každé číslo s konečným dekadickým rozvojem lze chápat jako číslo s rozvojem nekonečným, a to buď s nekonečnou posloupností nul, anebo devítek, např.

$$0{,}3 = 0{,}300\,000\cdots = 0{,}299999\ldots; \quad 0{,}7 = 0{,}700\,000\cdots = 0{,}699\,999\ldots$$

Takže zápis $[a;b] = [0{,}3;0{,}7]$ zazipujeme do čísla $x = 0{,}37$, ale zápis $[a;b] = [0{,}299\,99\ldots;0{,}699\,999\ldots]$ téhož bodu do čísla $y = 0{,}269\,999\ldots$

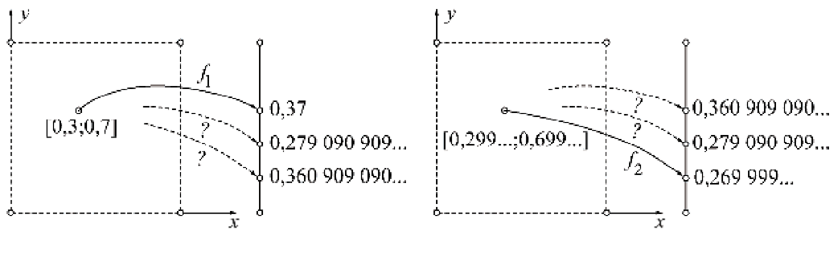
Evidentně $x \neq y$, takže Zamarovského zipy přiřazujeme jednomu a témuž bodu ve čtverci dva různé body úsečky. Navíc $y = 0,269\,999\cdots = 0{,}27$ dostaneme rovněž zazipováním bodu $[0{,}2; 0{,}7] \neq [0{,}3; 0{,}7]$ (viz obr. 2).



Obr. 2: Zipování Petera Zamarovského není bijekce a dokonce ani zobrazení

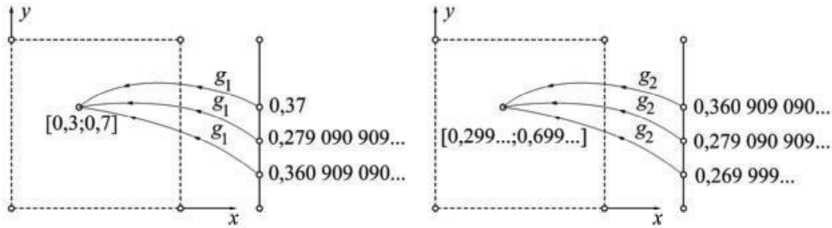
Oprava takového zipování je na první pohled jednoduchá. „Přebytečné“ šipky zřejmě generují nejednoznačné zápisy čísel. Jestliže zakážeme zápisy s periodickou devítkou, tyto šipky zmizí. Takto problém řešili Kuřina s Vondrovou v článku ([4, s. 119, 120]). Bod $[0{,}3; 0{,}7]$ je pak jednoznačně spojen do čísla 0,37, bod $[0{,}2; 0{,}7]$ do 0,27.

To je sice pravda, problém tím však bohužel vyřešen není. Nyní sice skutečně dostáváme zobrazení, dokonce zobrazení prosté, ale není to zobrazení *na* (celou) *úsečku*, ale pouze *do úsečky*. Není to *bijekce*, ale pouze *injekce*. Například body 0,279 090 909…; 0,360 909 090… na úsečce mají povolený zápis (neobsahují periodu $\overline{9}$), pokus o jejich „rozepnutí“ však vede do nepovolených zápisů bodu $[0{,}3; 0{,}7]$, který má již jiný obraz (obr. 3 vlevo). Tyto body tak nejsou obrazem žádného bodu čtverce. Problém neřeší ani opačná volba, tj. povolení periodické devítky a zákaz periodické nuly (obr. 3 vpravo).



Obr. 3: „Zapínání zipu“ Petera Zamarovského není bijektivní, ale pouze injektivní

Kdybychom podobným způsobem chtěli definovat „rozepínání zipu“, tj. $g\colon (0;1) \to (0;1)^2$, opět bychom samozřejmě nedostali bijekci. Tímto způsobem by sice bylo možné dostat zobrazení *úsečky* $(0;1)$ *na (celý) čtverec* $(0;1)^2$, ovšem *nebylo by prosté*, byla by to pouze *surjekce*. Zákaz periodické devítky vede k surjekci g_1 ilustrované na obr. 4 vlevo, zákazem periodické nuly obdržíme surjekci zobrazení g_2 na obr. 4 vpravo.



Obr. 4: „Rozepínání zipu“ není bijektivní, ale pouze surjektivní

Problém ilustrovaný na obr. 3 a 4 nastane vždy, když se v desetinném rozvoji čísla $x = 0{,}a_1b_1a_2b_2a_3b_3a_4b_4\ldots$ nachází nekonečná posloupnost cifer $a_k9a_{k+1}9a_{k+2}9\ldots$, resp. posloupnost cifer $9b_k9b_{k+1}9b_{k+2}\ldots$ pro nějaké $k \in \mathbb{N}$. Takových posloupností je nespočetně mnoho, jak lze dokázat mírnou modifikací Cantorovy diagonální metody, viz např. [5].

Konstrukce zobrazení pomocí prostého „míchání cifer“, které je ilustrováno na obr. 1 jako spínání zipu, se poprvé objevila v dopisu Georga Cantora Richardu Dedekindovi ze dne 20. června 1877. Dedekind však obratem odpověděl, že toto zobrazení nefunguje a důvodem jsou právě nejednoznačné zápisy racionálních čísel (viz např. [2]).

Cantor v odpovědi Dedekindovi sice navrhl důmyslné řešení, avšak že je to řešení korektní, bylo dokázáno až mnohem později. Zobecnění tohoto problému je dnes známo jako **Cantorova–Schröderova–Bernsteinova věta**: *Nechť $f\colon A \to B$, $g\colon B \to A$ jsou injektivní zobrazení. Pak existuje bijektivní zobrazení $b\colon A \leftrightarrow B$.*

Původní Zamarovského zip není ani zobrazením. S vyloučením duplicitních zápisů dle [4] je pak pouze injekcí f.

Cantorovu–Schröderovu–Bernsteinovu větu lze dokázat mnoha způsoby. Některé z důkazů lze nalézt např. v [6], zajímavý důkaz je uveden v [1]. Zde se na konkrétním příkladu pokusíme přiblížit originální myšlenku Gyuly (Julia) Königa. Zatímco první důkaz evokoval opravu zipu, Königův nápad [3] připomíná podstatně starší lidský vynález, a sice šněrovací boty.

Zpátky ke tkaničkám

Budeme pracovat s množinami uzavřenými, tj. $\langle 0;1\rangle$, resp. $\langle 0;1\rangle^2$, v souřadnicích tedy připustíme i hodnoty nula resp. jedna (jedničku budeme zásadně zapisovat ve tvaru 0,999...). Pro otevřené množiny (0;1), resp. $(0;1)^2$, by tato konstrukce vyžadovala ještě dodatečné modifikace.

Naše dvě množiny nebudeme spojovat zipem, ale budeme je sešněrovávat tkaničkami. Jedna část boty bude představovat čtverec $\mathcal{C} = \langle 0;1\rangle^2$ (na obr. 5, 6 vlevo), ta druhá úsečku $\mathcal{U} = \langle 0;1\rangle$ (na obr. 5, 6 vpravo).

Zobrazení nebude jen jedno, ale budou dvě. První z nich, označme ho f, bude zobrazení čtverce do úsečky, tedy $f\colon \mathcal{C} \to \mathcal{U}$, a bude nasazeno, když navlékáme tkaničku ze čtverce do úsečky (na obr. 5 zleva doprava). Bude to původní Cantorovo

$$f([0{,}x_1x_2\dots x_n\dots; 0, y_1y_2\dots y_n\dots]) = 0{,}x_1y_1x_2y_2\dots x_ny_n\dots,$$

kde $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jsou cifry desetinného rozvoje.

Druhé zobrazení bude zobrazení úsečky do čtverce, označme toto zobrazení g, $g\colon \mathcal{U} \to \mathcal{C}$, a budeme ho modelovat navlékáním tkaničky zprava doleva. Definujeme ho takto:

$$g(0{,}x_1x_2\dots x_n\dots) = [0{,}x_1x_2\dots x_n\dots; 0].$$

Tkanička začíná

Příklad 2. Uvažujme bod čtverce o souřadnicích

$$\left[\pi - 3; \frac{1}{3}\right] = [0{,}14\,15\,92\dots; 0, 33\,33\,33\dots]$$

a začněme navlékat tkaničku (sledujte obr. 5).

Tuto tkaničku můžeme schematicky zapsat jako řadu zobrazení

$$[0{,}14\,15\,92\dots; 0{,}33\,33\,33\dots] \xrightarrow{f} 0{,}13\,43\,13\,53\,93\,23\dots \xrightarrow{g}$$
$$\xrightarrow{g} [0{,}13\,43\,13\,53\,93\,23\dots; 0] \xrightarrow{f} 0{,}10\,30\,40\,30\,10\,30\,50\,30\,90\,30\,20\,30\dots \xrightarrow{g}$$
$$\xrightarrow{g} [0{,}10\,30\,40\,30\,10\,30\,50\,30\dots; 0]\dots$$

Toto navlékání může zřejmě pokračovat do nekonečna. Ale v botě jen nahoru a v řadě jen doprava. Nelze jít od bodu $[0{,}141592\dots; 0, 333333\dots]$ doleva

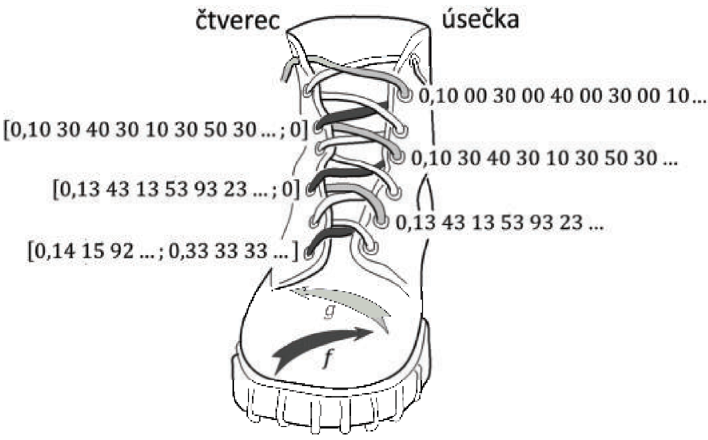
$$?? \xrightarrow{g} [0{,}14\,15\,92\dots; 0{,}33\,33\,33\dots] \xrightarrow{f} 0{,}13\,43\,13\,53\,93\,23\dots \xrightarrow{g} \dots$$

ani v botě na obr. 5 dolů.

Každé číslo v této řadě má jednoznačný desetinný zápis, každý předcházející člen jednoznačně určuje člen následující a naopak – každý následovník má jednoznačného předchůdce (každý „kousek“ tkaničky spojuje právě jednu dírku na levé a právě jednu dírku na pravé straně boty). Do hledané bijekce použijeme jen šněrování zleva doprava tmavou částí tkaničky, ve výše uvedené řadě tedy jen zobrazení f. Bod $[\pi - 3; \frac{1}{3}]$ tak vygeneruje vzájemně jednoznačná přiřazení

$$[0{,}14\,15\,92\ldots; 0,33\,33\,33\ldots] \leftrightarrow 0{,}13\,43\,13\,53\,93\,23\ldots$$
$$[0{,}13\,43\,13\,53\,93\,23\ldots; 0] \leftrightarrow 0{,}10\,30\,40\,30\,10\,30\,50\,30\,90\,30\,20\,30\ldots$$
$$[0{,}1030403010305030\ldots; 0] \leftrightarrow 0{,}1000300040003000100030005000\ldots$$

Množina $\mathcal{L}_1$ všech přiřazení, kterou tkanička takto vygeneruje, je nekonečná a je podmnožinou hledané bijekce.



Obr. 5: Šněrování bodu $[\pi - 3; \frac{1}{3}]$

Poznámka 1. Termín „tkanička“ se nám může zdát poněkud nepřesný. Z obr. 5 je zřejmé, že k „zašněrování“ řady stačila jen polovina „běžné tkaničky“, její bílá část se šněrování neúčastnila. Můžeme si ovšem představit, že do vysoké boty nemáme originální tkaničku, ale pouze dvě tkaničky kratší. Na jednom konci každé z nich můžeme udělat uzel tak, aby neprošel spodní dírkou boty. Místo jedné „běžné“ tkaničky tak máme dvě tkaničky kratší a každá z nich obstará polovinu obvyklého šněrování.

Příklad 3. Najděme tkaničku bodu

$$[0{,}6; 0{,}44\,44\ldots] = [0{,}60\,00\ldots; 0{,}44\,44\ldots].$$

Tato tkanička zapsaná jako řada zobrazení f, g (říkejme jí stručně $f - g$ řada) tentokrát vypadá takto:

$$?? \xrightarrow{g} [0{,}60\,00\ldots; 0{,}44\,44\ldots] \xrightarrow{f} 0{,}64\,04\,04\ldots \xrightarrow{g}$$
$$\xrightarrow{g} [0{,}64\,04\,04\ldots; 0] \xrightarrow{f} 0{,}60\,40\,00\,40\,00\,40\ldots \xrightarrow{g}$$
$$\xrightarrow{g} [0{,}60\,40\,00\,40\,00\,40\ldots; 0] \xrightarrow{f} 0{,}60\,00\,40\,00\,00\,00\,40\,00\,00\,00\,40\,00\ldots \xrightarrow{g} \ldots$$

Ani zde nemůžeme od zadaného bodu v posloupnosti doleva, ani v botě dolů. Zobrazení f i tentokrát generuje vzájemně jednoznačná přiřazení (další podmnožinu hledané bijekce), a to

$$[0{,}6; 0{,}44\,44\ldots] \leftrightarrow 0{,}64\,04\,04\ldots$$
$$[0{,}64\,04\,04\ldots; 0] \leftrightarrow 0{,}60\,40\,00\,40\,00\,40\ldots$$
$$[0{,}60\,40\,00\,40\,00\,40\ldots; 0] \leftrightarrow 0{,}60\,00\,40\,00\,00\,00\,40\,00\,00\,00\,40\,00\ldots$$

Bod $[0{,}6; 0{,}4444\ldots]$ ovšem nemá jednoznačný zápis. Jeho druhý reprezentant $[0{,}5999\ldots; 0{,}4444\ldots]$ vygeneruje jinou $f - g$ řadu

$$?? \xrightarrow{g} [0{,}59\,99\ldots; 0{,}44\,44\ldots] \xrightarrow{f} 0{,}54\,94\,94\ldots \xrightarrow{g} [0{,}54\,94\,94\ldots; 0] \xrightarrow{f}$$
$$\xrightarrow{f} 0{,}50\,40\,90\,40\,90\,40\ldots \xrightarrow{g} \ldots$$

a tím také jinou tkaničku. Do naší bijekce však nemůžeme připsat začátek této $f - g$ řady

$$[0{,}59\,99\ldots; 0{,}44\,44\ldots] \leftrightarrow 0{,}54\,94\,94\ldots,$$

protože bod

$$[0{,}59\,99\ldots; 0{,}44\,44\ldots] = [0{,}6; 0{,}44\,44\ldots]$$

má již jiný obraz (viz první přiřazení výše v tomto příkladu). Tento problém vyřeší následující (důležitá) úmluva.

Úmluva. Tkanička nesmí obsahovat zápisy s periodickou devítkou. Jedinou výjimku tvoří zápis $0{,}999\,999\ldots$, který tkanička obsahovat může.

$f-g$ řada bodu $[0{,}59\,99\ldots;0{,}44\,44\ldots]$ začíná zápisem obsahujícím periodickou devítku, ale tkanička dle úmluvy tímto bodem začínat nemůže. Bude začínat až prvním členem $f-g$ řady, který periodu $\overline{9}$ neobsahuje, tedy číslem $0{,}54\,94\,94\ldots$ Tkaničku tedy „startujeme“ až na úsečce (v botě začínáme ve spodní dírce vpravo), do naší bijekce bude tentokrát přispívat zobrazení g těmito dvojicemi:

$$[0{,}54\,94\,94\ldots;0] \leftrightarrow 0{,}54\,94\,94\ldots$$
$$[0{,}50\,40\,90\,00\,90\ldots;0] \leftrightarrow 0{,}50\,40\,90\,00\,90\ldots$$
$$[0{,}50\,00\,40\,00\,90\,00\,40\,00\,90\,00\ldots;0] \leftrightarrow 0{,}50\,00\,40\,00\,90\,00\,40\,00\,90\,00\ldots$$

Technická poznámka. V příkladu 2 do naší bijekce přispělo pouze zobrazení $f\colon \mathcal{C} \to \mathcal{U}$, tedy zobrazení čtverce do úsečky, nyní přispívá i zobrazení $g\colon \mathcal{U} \to \mathcal{C}$ úsečky do čtverce. Sestrojovaná bijekce je zobrazení vzájemně jednoznačné. Není tedy podstatné, zda ji budeme chápat jako zobrazení $\mathcal{C} \to \mathcal{U}$, anebo $\mathcal{U} \to \mathcal{C}$, proto dvojšipky ve výše uvedených zápisech jednoznačného přiřazení. V zájmu zachování pořadí, se kterým jsme začali v příkladu 2, budeme i příspěvky zobrazení g zapisovat v pořadí [čtverec] $\leftrightarrow$ úsečka.

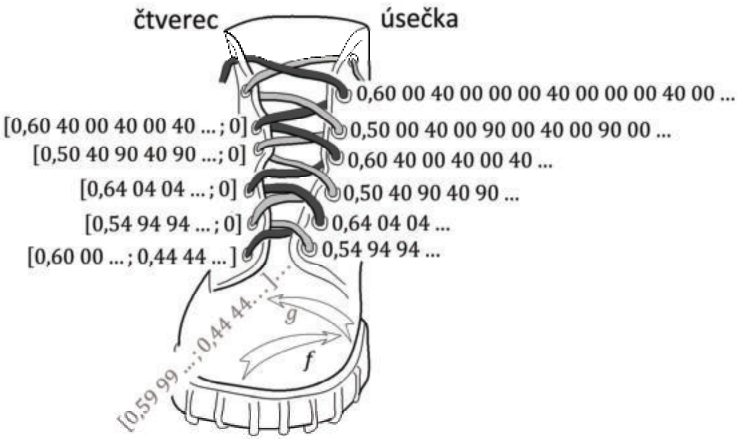
Tkanička reprezentanta $[0{,}59\,99\ldots;0{,}44\,44\ldots]$ (který podle úmluvy v tkaničce samotné být nesmí) tedy do naší bijekce vygeneruje tato (rovněž vzájemně jednoznačná) přiřazení:

$$[0{,}54\,94\,94\ldots;0] \leftrightarrow 0{,}54\,94\,94\ldots$$
$$[0{,}50\,40\,90\,00\,90\ldots;0] \leftrightarrow 0{,}50\,40\,90\,00\,90\ldots$$
$$[0{,}50\,00\,40\,00\,90\,00\,40\,00\,90\,00\ldots;0] \leftrightarrow 0{,}50\,00\,40\,00\,90\,00\,40\,00\,90\,00\ldots$$

Všimněte si: bod čtverce, jehož obě souřadnice mají jednoznačný desetinný rozvoj (viz př. 2), potřebuje jen jednu naši tkaničku a obstará tak jenom polovinu šněrování boty (viz obr. 6). Bod, jehož první souřadnice nemá jednoznačný desetinný rozvoj a druhá ano, „sestrojí“ dvě tkaničky. Zobrazení f modeluje tmavá tkanička, je-li provlékána zleva doprava. Začíná stejně jako tkanička z př. 2 vlevo. Zobrazení g modeluje světlá tkanička při provlékání zprava doleva (viz obr. 6), která začíná vpravo. Šněrování naší modelové boty je tak kompletní.

Příklad 4. Najděme tkaničku bodu

$$[0{,}44\,44\ldots;0{,}6] = [0{,}44\,44\ldots;0{,}60\,00\ldots].$$



Obr. 6: Šněrování bodu s nejednoznačným zápisem první souřadnice (viz příklad 3)

Zcela analogicky předchozímu příkladu $f-g$ řada vypadá následovně:

$$?? \xrightarrow{g} [0{,}44\,44\ldots; 0{,}60\,00\ldots] \xrightarrow{f} 0{,}46\,40\,40\ldots \xrightarrow{g}$$

$$\xrightarrow{g} [0{,}46\,40\,40\ldots; 0] \xrightarrow{f} 0{,}40\,60\,40\,00\,40\,00\ldots \xrightarrow{g}$$

$$\xrightarrow{g} [0{,}40\,60\,40\,00\,40\,00\ldots; 0] \xrightarrow{f}$$

$$\xrightarrow{f} 0{,}40\,00\,60\,00\,40\,00\,00\,00\,40\,00\,00\,00\ldots \xrightarrow{g} \ldots$$

Tkanička začíná hned prvním bodem.

$f-g$ řada duplicitního reprezentanta $[0{,}44\,44\ldots; 0{,}59\,99\ldots]$ je tvaru

$$?? \xrightarrow{g} [0{,}44\,44\ldots; 0{,}59\,99\ldots] \xrightarrow{f} \mathbf{0{,}45\,49\,49}\ldots \xrightarrow{g}$$

$$\xrightarrow{g} [0{,}45\,49\,49\ldots; 0] \xrightarrow{f} 0{,}40\,50\,40\,90\,40\,90\ldots \xrightarrow{g} \ldots$$

První zápis v tkaničce duplicitního reprezentanta být nesmí, takže tato tkanička začíná až v tučném $\mathbf{0{,}45\,\overline{49}}$ (v botě ve spodní dírce vpravo) a šněruje ji až zobrazení g.

Kde je začátek?

V minulé kapitole začínala tkanička vždy od začátku – od nejspodnější dírky. Ale co když zvolíme bod, který na začátku tkaničky není? A jak to vůbec poznáme?

V předchozích příkladech jsme poznali začátek tak, že jsme od daného bodu nemohli jít v $f-g$ řadě doleva. V případě jiných bodů ale doleva jít můžeme.

Příklad 5. Sestrojme tkaničky
bodů čtverce a) $[0{,}604;0]$ b) $[0{,}50\,40\,90\,00\,90\,00\dots;0]$
a bodů úsečky c) $0{,}60\,30\,90\,00\,90\,00\dots$ d) $0{,}50\,30\,90\,90\,90\,90\dots$.

Příslušné $f-g$ řady jsou:
a)

$$\overbrace{\mathbf{[0{,}6;\,0{,}4]}}^{\text{začátek tkaničky}} \xrightarrow{f} 0{,}64 \xrightarrow{g} [0{,}64;0] \xrightarrow{f} 0{,}604 \xrightarrow{g} \overbrace{\mathbf{[0{,}604;\,0]}}^{\text{zadaný bod}} \xrightarrow{f}$$

$$\xrightarrow{f} 0{,}60004 \xrightarrow{g} [0{,}60004;0] \xrightarrow{f} \dots$$

b)

$$\overbrace{[0{,}5\overline{9};0{,}4]}^{\text{zakázáno}} \xrightarrow{f} \overbrace{\mathbf{0{,}54\overline{90}}}^{\text{začátek}} \xrightarrow{g} [0{,}54\overline{90};0] \xrightarrow{f} 0{,}50\,40\,90\,00\,90\,00\dots \xrightarrow{g}$$

$$\xrightarrow{g} \overbrace{\mathbf{[0{,}50\,40\,90\,00\,90\dots;\,0]}}^{\text{zadaný bod}} \xrightarrow{f}$$

$$\xrightarrow{f} 0{,}50\,00\,40\,00\,90\,00\,00\,00\,90\,00\,00\,00\dots \xrightarrow{g} \dots$$

c)

$$\overbrace{[0{,}6\overline{9};0{,}3]}^{\text{zakázáno}} \xrightarrow{f} \overbrace{\mathbf{0{,}63\overline{90}}}^{\text{začátek}} \xrightarrow{g} [0{,}63\overline{90};0] \xrightarrow{f} \overbrace{\mathbf{0{,}60\,30\,90\,00\,90\,00\dots}}^{\text{zadaný bod}} \xrightarrow{g}$$

$$\xrightarrow{g} [0{,}60\,30\,90\,00\,90\dots;0] \xrightarrow{f} \dots$$

d)

$$\overbrace{[0{,}5\overline{9};0{,}3\overline{9}]}^{\text{zakázáno}} \xrightarrow{f} \overbrace{0{,}53\overline{9}}^{\text{zakázáno}} \xrightarrow{g} \overbrace{[0{,}53\overline{9};0]}^{\text{zakázáno}} \xrightarrow{f} \overbrace{\mathbf{0{,}50\,30\,90\,90\,90\,90\dots}}^{\text{začátek tkaničky, zadaný bod}} \xrightarrow{g}$$

$$\xrightarrow{g} [0{,}50\,30\,90\,90\,90\,90\dots;0] \xrightarrow{f}$$

$$\xrightarrow{f} 0{,}50\,00\,30\,00\,90\,00\,90\,00\,90\,00\,90\,00\dots \xrightarrow{g} \dots$$

Tkaničky k těmto řadám, tedy i další dvojice [vzor; obraz] hledané bijekce, si čtenář podle předchozích příkladů již jistě sestrojí sám.

Obecný postup konstrukce tkaniček

Předcházející text vede k tomuto obecnému postupu:

1. Pro daný zápis bodu (nezáleží na tom, zda jde o bod čtverce či úsečky, ani na tom, zda je zápis povolený či zakázaný úmluvou) najdeme začátek jeho $f-g$ řady dle příkladů 4, 5.
2. Každý možný zápis začátku $f-g$ řady (včetně zakázaných) bude mít vlastní tkaničku.
3. Pro každý možný zápis (včetně zakázaných) sestrojíme $f-g$ řadu s počátkem v tomto zápisu.
4. Každá $f-g$ řada má svoji vlastní tkaničku, která začíná vždy v prvním povoleném zápisu.

Příklad 6. Sestrojme tkaničky bodu [0;0,89].

Zadaný bod je na začátku svojí $f-g$ řady (bod 1 obecného postupu) a má dva možné zápisy, takže dle bodu 2 budou tkaničky dvě. Dle bodu 3 sestrojíme jejich $f-g$ řady:

$$[\mathbf{0{,}00\,00\ldots;0{,}89\,00\ldots}] \xrightarrow{f} 0{,}08\,09\,00\ldots \xrightarrow{g} [0{,}08\,09\,00\ldots;0] \xrightarrow{f}$$
$$\xrightarrow{f} 0{,}00\,80\,00\,90\,00\,00\ldots \xrightarrow{g} \ldots$$

Dle bodu 4 začíná tkanička prvním bodem $f-g$ řady, tedy ve čtverci, šněruje ji zobrazení f.

$$[0{,}00\,00\ldots;0{,}88\,99\ldots] \xrightarrow{f} \mathbf{0{,}08\,08\,09\,09\ldots} \xrightarrow{g} [0{,}08\,08\,09\,09\ldots;0] \xrightarrow{f}$$
$$\xrightarrow{f} 0{,}00\,80\,00\,80\ldots \xrightarrow{g} \ldots$$

Tato tkanička dle 4 začíná bodem $0{,}08\,08\,09\,09\ldots$, tedy v úsečce, šněruje ji zobrazení g.

Všimněte si: Bod $[a;b] \in \mathcal{C}$, kde $b=0$ (viz př. 5 a, b), leží na spodní straně čtverce. Je-li $a=0$, leží bod na levé straně čtverce. Je nyní otázkou, zda jsme postupem uvedeným v příkladu 5 zobrazili celou spodní stranu čtverce a postupem v příkladu 6 celou stranu levou. Bohužel tomu tak zatím není.

Příklad 7. Sestrojme tkaničku bodu [0;0].

Příslušná $f-g$ řada vypadá následovně:

$$\ldots \xrightarrow{g} [0;0] \xrightarrow{f} 0 \xrightarrow{g} [0;0] \xrightarrow{f} 0 \xrightarrow{g} [0;0] \xrightarrow{f} 0 \xrightarrow{g} [0;0] \xrightarrow{f} \ldots$$

Tato řada nemá začátek, ani žádný zápis s periodickou devítkou. S touto tkaničkou bychom si botu příliš nezavázali (spojujeme stále jen dvě spodní dírky boty), pro naši bijekci je však velmi důležitá, neboť zobrazí levý spodní vrchol čtverce na jeden z krajních bodů úsečky:

$$[0;0] \leftrightarrow 0.$$

Zcela analogicky dopadnou $f-g$ řady bodů tvaru $[a;0]$, kde souřadnice a má jedno desetinné místo. Každý tento bod má však alternativní zápis, a tak sestrojí ještě jednu tkaničku (viz př. 3, 4).

Výjimka potvrzuje pravidlo

Příklad 8. Sestrojme tkaničku bodu $[0{,}60\,\overline{90\,00};0]$.

Tento bod leží na spodní straně čtverce a z příkladu 5 víme, že není na začátku své $f-g$ řady. Tu sestrojíme již známým postupem:

$$?? \xrightarrow{g} \overbrace{\mathbf{[0{,}6;\,0{,}\overline{9}]}}^{\text{začátek tkaničky}} \xrightarrow{f} 0{,}69\,\overline{09} \xrightarrow{g} [0{,}69\,\overline{09};0] \xrightarrow{f}$$
$$\xrightarrow{f} 0{,}60\,\overline{90\,00} \xrightarrow{g} \overbrace{\mathbf{[0{,}60\,\overline{90\,00};\,0]}}^{\text{zadaný bod}} \xrightarrow{f} \ldots$$

$f-g$ řada začíná zápisem obsahujícím periodu $\overline{9}$, tímto zápisem však tentokrát začíná i tkanička, a to díky naší smluvené výjimce.

I když to zadání příkladu 8 přímo nevyžaduje, dodejme pro úplnost, že první bod $f-g$ řady má alternativního reprezentanta $[0{,}5\overline{9};0{,}\overline{9}]$. Jeho $f-g$ řada a tkanička vypadá následovně:

$$?? \xrightarrow{g} [0{,}59\,99\ldots;0{,}99\,99\ldots] \xrightarrow{f} 0{,}59\,99\ldots \xrightarrow{g} [0{,}59\,99\ldots;0] \xrightarrow{f}$$
$$\xrightarrow{f} \overbrace{\mathbf{0{,}50\,90\,90\,90}}^{\text{začátek tkaničky}} \xrightarrow{g} [0{,}50\,90\,90\,90\ldots;0] \xrightarrow{f}$$
$$\xrightarrow{f} 0{,}50\,00\,90\,00\,90\,00\,90\,00\ldots \xrightarrow{f} \ldots$$

Tkanička tentokrát nemůže začínat prvním bodem této řady. Zápis $0{,}59\,99\ldots$ totiž výjimku nemá. Tkanička tak musí přeskočit první tři členy a začít až v bodě $0{,}50\,\overline{90}$.

Všimněte si: Bod $[0{,}6; 0{,}\overline{9}]$ leží na horní straně čtverce. Jeho dvě tkaničky vygenerují obraz nejen tomuto bodu (převlečením tkaničky ze spodní levé dírky doprava nahoru dle obr. 6), ale i nekonečně mnoha bodům spodní strany (převlečením tkaničky z vyšších dírek vždy zleva doprava nahoru opět dle obr. 6).

Podobně bychom sestrojili tkaničky zbývajících vrcholů čtverce, tj. bodů $[0; 0{,}\overline{9}]$, $[0{,}\overline{9}; 0{,}\overline{9}]$, $[0{,}\overline{9}; 0]$ (připomeňme, že levý spodní vrchol jsme již zobrazili na nulu úsečky – viz příklad 7). Všechny body v těchto třech $f-g$ řadách mají povolený zápis, každá tkanička tedy začíná prvním členem své $f-g$ řady. Zápisy všech tří zadaných bodů jsou díky naší výjimce jednoznačné, takže každý bod vygeneruje jen jednu tkaničku. Konstrukci těchto tkaniček opět přenecháme čtenáři. Napovězme, že dvojice [vzor-obraz] bude ve všech těchto případech generovat zobrazení f.

Trocha terminologie a formalismu

Každý bod čtverce $\mathcal{C}$ je jednoznačně určen uspořádanou dvojicí reálných čísel. Každé reálné číslo buď má, anebo nemá jednoznačný desetinný rozvoj. Třetí možnost neexistuje. To znamená, že každý bod čtverce patří do jedné z množin $\mathcal{M}_{jj}$ (obě složky mají jednoznačný rozvoj), $\mathcal{M}_{jn}$ (první složka má jednoznačný rozvoj, druhá ne), podobně $\mathcal{M}_{nj}$, $\mathcal{M}_{nn}$. Pátá možnost neexistuje. Konstrukci obrazů bodů množin $\mathcal{M}_{jj}, \mathcal{M}_{jn}, \mathcal{M}_{nj}, \mathcal{M}_{nn}$ jsme popsali v obecném postupu a demonstrovali na konkrétních příkladech: obraz bodu $A \in \mathcal{M}_{nj}$ – viz první přiřazení v př. 3, obraz bodu $B \in \mathcal{M}_{jn}$ – viz první přiřazení v př. 4, obraz bodu $D \in \mathcal{M}_{nn}$ – viz první přiřazení v příkladu 5a, obrazy bodů množiny $\mathcal{M}_{jj}$ – viz všechna ostatní přiřazení.

Platí

$$\mathcal{C} = \mathcal{M}_{jj} \cup \mathcal{M}_{jn} \cup \mathcal{M}_{nj} \cup \mathcal{M}_{nn},$$

přičemž tyto čtyři množiny jsou neprázdné a po dvou disjunktní (tvoří tzv. rozklad čtverce). Zobrazení $\mathcal{C} \to \mathcal{U}$ je tedy zobrazení *celého* čtverce *do* množiny $\mathcal{U}$. Každý bod čtverce je do úsečky zobrazován zobrazením f, které je prosté. Každý bod čtverce i každý bod úsečky leží na jediné tkaničce a v jediné dírce boty, takže i zobrazení $\mathcal{C} \to \mathcal{U}$ je *prosté.* Každému bodu na úsečce (číslu z intervalu $\langle 0, 1\rangle$) lze najít jeho vzor ve čtverci viz příklady 5c), d), 7 a 8. Zobrazení $\mathcal{C} \to \mathcal{U}$ tedy není pouze prostým zobrazením (celého) čtverce *do* úsečky, ale *prostým zobrazením* (celého) *čtverce na úsečku.* Je tedy *bijekcí mezi čtvercem a úsečkou.*

K nalezení této bijekce (označme ji b) jsme použili dvě zobrazení: zobrazení f zobrazuje jistou podmnožinu bodů čtverce (označme ji $\mathcal{C}_f$) na jistou podmnožinu bodů úsečky (označme ji $\mathcal{U}_f$). Je tedy $f\colon \mathcal{C}_f \to \mathcal{U}_f$. Zobrazení g zobrazuje jistou podmnožinu bodů úsečky (označme ji $\mathcal{U}_g$)) na jistou podmnožinu bodů čtverce (označme ji $\mathcal{C}_g$). Je tedy $g\colon \mathcal{U}_g \to \mathcal{C}_g$.

Bijekce je zobrazením celého čtverce na celou úsečku. Musí tedy platit

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}_f \cup \mathcal{C}_g, \quad \mathcal{U} = \mathcal{U}_f \cup \mathcal{U}_g.$$

Každé zobrazení je množinou – množinou uspořádaných dvojic [vzor; obraz], takže zobrazení lze sjednocovat. Je-li

$$f\colon \mathcal{C}_f \to \mathcal{U}_f, \quad g\colon \mathcal{U}_g \to \mathcal{C}_g \quad \mathcal{C} = \mathcal{C}_f \cup \mathcal{C}_g, \quad \mathcal{U} = \mathcal{U}_f \cup \mathcal{U}_g,$$

lze naší bijekci b zapsat pomocí sjednocení zobrazení f, g. Ovšem pozor, nelze psát $b = f \cup g$, protože zobrazení g zobrazuje v „opačném směru“ než zobrazení f. Upozornili jsme na to technickou poznámkou v př. 3 a situaci vyřešili „přehozením pořadí dvojic [vzor; obraz]“ u zobrazení g. Tyto sice názorné, ale značně nematematické formulace nyní přeložíme do jazyka matematiky: do bijekce b nepřispívá zobrazení g, ale zobrazení g^{-1} k němu inverzní. Bijekci lze tedy zapsat jako sjednocení

$$b = f \cup g^{-1}.$$

Takto byla zobrazení f, g použita k důkazu Cantorovy–Schröderovy–Bernsteinovy věty v [1, str. 25].

Zobrazení b je zobrazení čtverce na úsečku, zobrazení úsečky na čtverec je zobrazení inverzní k b, tedy $b^{-1} = f^{-1} \cup g$.

Tkaničku z příkladu 2 jsme označili $\mathcal{L}_1$ („první tkanička začínající vlevo“), podobně můžeme první tkaničku v našem textu, která začíná vpravo, označit $\mathcal{P}_1$, všechny další začínající vlevo pak postupně $\mathcal{L}_2$, $\mathcal{L}_3$, … Další tkaničky začínající vpravo podobně $\mathcal{P}_2$, $\mathcal{P}_3$, … Zobrazení f je pak sjednocení všech množin $\mathcal{L}_i$ uspořádaných dvojic [vzor; obraz], které vygenerují všechny tkaničky začínající v botě vlevo, podobně zobrazení g^{-1} je sjednocení všech množin $\mathcal{P}_j$ uspořádaných dvojic [vzor; obraz], které vygenerují všechny tkaničky začínající v botě vpravo. Je tedy

$$f = \bigcup_{i\in I} \mathcal{L}_i, \quad g^{-1} = \bigcup_{j\in J} \mathcal{P}_j \quad \text{a} \quad b = \bigcup_{i\in I} \mathcal{L}_i \cup \bigcup_{j\in J} \mathcal{P}_j.$$

Závěr

Na konkrétním a snad i zajímavém případě jsme demonstrovali myšlenku, jejíž matematické zpracování a formální zápis je méně známým důkazem jedné z nejdůležitějších vět teorie množin, jehož autorem je maďarský matematik Gyula (Julius) König. Tento článek tak může být cenným materiálem pro všechny zájemce o studium matematiky, ale nejen pro ně. Pochopení prezentované myšlenky totiž vyžaduje jistou úroveň logického myšlení, kterou potřebují nejen budoucí matematici, ale které by měli dosáhnout i uchazeči o vysokoškolské studium jiných oborů, a to nejen přírodovědných, ale i technických.

Literatura

[1] Dlab, V., Bečvář, J.: *Od aritmetiky k abstraktní algebře.* 2. vyd., ČVUT, Praha, 2022.

[2] Gouvea, F. Q.: Was Cantor Surprised? *Amer. Math. Monthly*, 118 (2011), č. 3, s. 198–209.

[3] *Julius König's proof of Schröder–Bernstein theorem.* `https://math.stackexchange.com/questions/2749527/julius-k'onigs-proof-of-schröder-bernstein-theorem`

[4] Kuřina, F., Vondrová, N.: Jak to vlastně je? Nekonečno. *Učitel matematiky*, 29 (2021), č. 2, s. 111–127.

[5] Martišek, D.: Několik poznámek k mohutnosti množin. *Učitel matematiky*, 30 (2022), č. 2, s. 92–103.

[6] Sieg, W.: *The Cantor–Bernstein theorem: how many proofs?* `https://royalsocietypublishing.org/doi/10.1098/rsta.2018.0031`.

[7] Zamarovský, P.: *Mýtus nekonečno.* 2. vyd., Karolinum, Praha, 2018.

[8] Zamarovský, P.: *Mýtus nekonečno.* Přednáška na Fakultě elektrotechnické ČVUT, 8. 11. 2018, ČVUT, Praha, 2018, `https://www.youtube.com/watch?v=dVh0-wuVQZs`.

[9] Zamarovský, P.: *Mýtus nekonečno.* Přednáška na Fakultě elektrotechnické ČVUT, 10. 11. 2022, ČVUT, Praha, 2022, `https://www.youtube.com/watch?v=KPk5YWhc-6Y`.

Česká matematická společnost

Luboš Pick, Ľubomíra Dvořáková, Světlana Tomiczková
Hana Turčinová

Znáte *Českou matematickou společnost* (dále *ČMS*)? Víte, čím se zabývá? Pokud jste odpověděli ano, nebo dokonce s naší společností spolupracujete, pak jsme velice potěšeni a doufáme, že i pro vás je a bude ČMS přínosem. Jestliže si nejste jisti, jak odpovědět, ale zajímá vás matematika a chcete se dozvědět o nás a naší činnosti více, pak jsou následující řádky určeny právě vám.

Možná jste se již setkali s činností *Jednoty českých matematiků a fyziků (JČMF)*, například v souvislosti s řešením matematické či fyzikální olympiády a dalších soutěží, nebo při odborných setkáních, která JČMF pořádá. Kromě regionálních poboček zahrnuje Jednota čtyři odborné sekce, přičemž jednou z nich je právě Česká matematická společnost. Ta vznikla v roce 1972 pod názvem Matematická vědecká sekce a od roku 2004 nese svůj současný název. Historie je ovšem mnohem delší, Jednota vznikla již v roce 1862 jako *Spolek pro volné přednášky z mathematiky a fysiky*, a je tak jednou z nejstarších stále fungujících učených společností u nás.

Česká matematická společnost je organizace sdružující ty, kterým záleží na rozvoji matematiky v České republice. Jejími členy jsou nejen lidé, kteří posunují hranice poznání v matematice a příbuzných oborech, ale také učitelé, jejichž posláním je zprostředkovat mladým lidem půvab matematiky, a také ti, kdo jakýmkoli způsobem šíří dobré jméno této výjimečné oblasti lidského vědění. Naším cílem tedy je podporovat matematický výzkum, zvyšovat kvalitu výuky matematiky na školách všech stupňů a ukázat, že matematika je nejen krásná, ale i užitečná.

Česká matematická společnost každoročně vyhlašuje *Soutěž pro mladé*. Posláním této aktivity je umožnit pořadatelům seminářů, soutěží, letních soustředění a podobných akcí pro studenty požádat o finanční příspěvek. Tradičně spolupracujeme s organizátory akcí, jakými jsou například Náboj, MaSo, PraSe a další, jejichž organizátory jsou často též studenti.

Od roku 2000 každoročně pořádáme *soutěž vysokoškoláků ve vědecké a odborné činnosti SVOČ* ve spolupráci se Slovenskou matematickou společností. Jde o rozsáhlou a velmi oblíbenou akci, přičemž místo jejího konání putuje po českých a slovenských vysokých školách. V roce 2023 se SVOČka konala na Technické univerzitě v Liberci. Studenti zde prezentují své vědecké výsledky, často dosažené v rámci jejich bakalářských či magisterských prací. Nejlepší práce jsou oceněny. Součástí setkání je i pestrý doprovodný program.

Nepořádáme ale jen soutěže. Součástí našeho poslání je také všemi možnými způsoby *popularizovat matematiku.* Připravujeme přednášky vztahující se k zajímavým matematickým tématům a spoluorganizujeme cykly přednášek, jakými jsou například Matematika pro život nebo Matematické problémy nematematiků. Pro širokou veřejnost pořádáme již po několik let nepravidelný cyklus popularizačních přednášek pod souhrnným názvem „Matematika a …“, přičemž za tečky si můžete dosadit například hudbu, architekturu, nebo také třeba podvodníky. Naši členové pravidelně přispívají do časopisů Pokroky matematiky, fyziky a astronomie (určenému široké veřejnosti) a samozřejmě i do Rozhledů matematicko-fyzikálních.

Česká matematická společnost pravidelně oceňuje významné české i zahraniční matematiky prostřednictvím *oborové matematické medaile JČMF*. Jednou za čtyři roky v rámci naší pravidelné Konference českých matematiků udělujeme *Cenu ČMS pro mladé matematiky*, jejímž prostřednictvím podporujeme kvalitní vědeckou činnost mladých kolegů.

Obr. 1: Matematika pro život

Ve spolupráci s Matematickým ústavem Akademie věd ČR, v. v. i., zajišťuje Česká matematická společnost rozvoj *České digitální matematické knihovny DML-CZ* a *Evropské digitální matematické knihovny EuDML.*

Česká matematická společnost také pomáhá organizovat řadu konferencí a setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol. Její zástupci působí v důležitých orgánech ministerstva školství, jakým je například terminologická komise pro středoškolskou matematiku. Vyjadřujeme se také k aktuálním tématům souvisejícím s výzkumem v matematice.

Naše činnost se ale neomezuje jen na domácí aktivity. Česká matematická společnost reprezentuje českou matematickou obec v mezinárodních matematických organizacích. Je členem Evropské matematické společnosti (EMS) a přidruženým členem Mezinárodní rady pro průmyslovou a aplikovanou matematiku (ICIAM). Jsme zřizovatelem Českého národního komitétu pro matematiku a ve spolupráci s ním věcně zajišťujeme reprezentaci České republiky v Mezinárodní matematické unii.

Podrobnější informace najdete na webových stránkách České matematické společnosti `http://jcmf.cz/frontpagecms` a rovněž na facebooku ČMS `https://www.facebook.com/JCMF.CMS/`. Přijďte posílit společnost nadšených lidí milujících matematiku, těšíme se na vás!

Bijekce

V tomto čísle jsme se v článku Dalibora Martiška: *Krocení jedné bijekce aneb o zipu a tkaničkách* (str. 13) seznámili s bijekcí mezi čtvercem $\langle 0;1\rangle^2$ a úsečkou $\langle 0;1\rangle$. Autor pomocí tkaniček bot ilustroval Königův důkaz. Ovšem Königova konstrukce funguje i pro důkaz mnohem obecnějšího tvrzení, slavné Cantorovy–Schröderovy–Bernsteinovy věty. Proto není divu, že existují jednodušší bijekce mezi čtvercem a úsečkou. Náš dnešní úkol pro čtenáře zní:

Úloha: Zkonstruujte vlastní co nejjednodušší bijekci

$$\langle 0;1)^2 \to \langle 0;1) \text{ nebo } \langle 0;1\rangle^2 \to \langle 0;1\rangle$$
$$\text{nebo } (0;1)^2 \to (0;1) \text{ nebo } (0;1\rangle^2 \to (0;1\rangle.$$

Nejelegantnější řešení příště otiskneme.

Nyní se pojďme vrátit k úloze o nudném profesorovi z minulého čísla a představit elegantní řešení Adama Blažka, studenta 2. ročníku Jaderné fakulty ČVUT. Nejprve připomeňme znění úlohy:

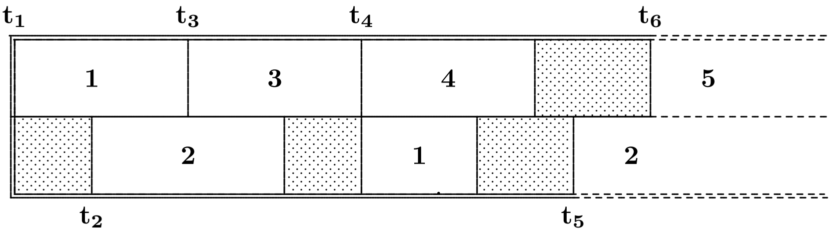
Úloha z minula: Nudný profesor vede tak nudnou přednášku, že studentům se chce spát už od jejího začátku. Téměř neustále alespoň jeden posluchač spí. Profesor ovšem dodržuje následující pravidlo: jestliže v některém okamžiku usne více než polovina přítomných studentů, bude se příště psát obzvlášť zapeklitá písemka. V inkriminovaný den přišlo na přednášku pět studentů. Přednáška byla tak strašlivě nudná, že každý student usnul právě dvakrát (ve dvou různých intervalech). Navíc, a tuto informaci prosím interpretujte správně, každý spal s každým. Otázka zní: *Bude se příště psát písemka?*

Řešení: Odpověď je *ano*. Tvrzení si dokážeme sporem. Předpokládejme, že na přednášce v inkriminovaný den spí v každém okamžiku nejvýše dva studenti. Označme jako J množinu okamžiků, kdy usnul alespoň jeden student. Jako D označme množinu okamžiků, kdy začali spát dva studenti zároveň, nebo se ke spícímu studentovi přidal druhý spáč. Na následujícím obrázku jsme takové okamžiky vyznačili. Studenty jsme pojmenovali 1, 2, 3, 4, 5.

Zřejmě je $D \subset J$.

Pro začátek přednášky vyznačený na obrázku platí

$$\{\mathbf{t_1}, \mathbf{t_2}, \mathbf{t_3}, \mathbf{t_4}, \mathbf{t_5}, \mathbf{t_6}\} \subset J \quad \text{a} \quad \{\mathbf{t_2}, \mathbf{t_3}, \mathbf{t_4}, \mathbf{t_6}\} \subset D.$$



Počet prvků množiny J je nejvýše 10, protože každý z pěti studentů usnul právě dvakrát během přednášky, což dá nejvýše 10 různých začátků spánků. A rovnost $\#J = 10$ nastává, právě když žádní dva studenti neusínají ve stejném okamžiku.

Zároveň je ale počet prvků množiny D alespoň 10. Každý student spí s každým, proto pro každou z dvojic

$$\begin{aligned}&\{1,2\},\ \{1,3\},\ \{1,4\},\ \{1,5\},\\ &\{2,3\},\ \{2,4\},\ \{2,5\},\\ &\{3,4\},\ \{3,5\},\ \{4,5\}\end{aligned}$$

existuje okamžik, kdy začínají oba z dvojice spát naráz, nebo se jeden z dvojice připojuje k již spícímu kolegovi z dvojice.

Zjistili jsme, že

$$D \subset J \quad \text{a} \quad \#D = \#J = 10.$$

To znamená, že $D = J$.

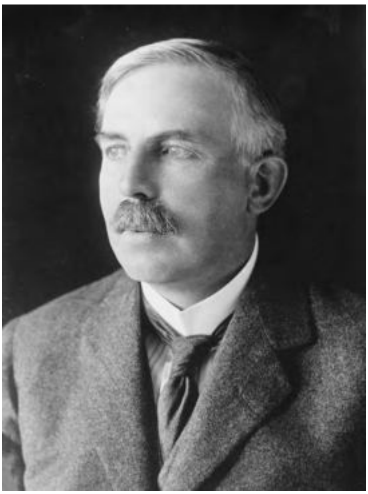
Podívejme se na okamžik, kdy začíná spát první student. Tento prvek patří do J, tedy i do D. Tudíž v daný okamžik nutně začínají spát dva studenti naráz. To je ale spor s tím, že $\#J = 10$, protože jak jsme výše vysvětlili, J má 10 prvků jen v případě, kdy žádní dva studenti neusínají ve stejném okamžiku.

Ernest Rutherford (1871–1937) – otevřel cestu do nitra atomu

František Jáchim, Základní škola Dukelská, Strakonice

Abstrakt. V článku je uvedena základní experimentální metodika novozélandského fyzika Ernesta Rutherfoda vedoucí k jeho objevu jádra atomu. Text je doplněn stručným životopisem vědce včetně jeho působení na významných fyzikálních pracovištích.

Cesta do nitra hmoty může být stejně dobrodružná jako putování do dalekých krajin pozemských nebo odhalování tajemství končin vesmírných. Slovo atom je starořeckého původu, jím byla označovaná nejmenší možná částečka látky, kterou údajně již dále nelze dělit. Teprve na počátku 20. století se fyzikům podařilo do nitra této částečky nahlédnout a popřít její elementárnost. Jejich zájem o zkoumání atomu podnítil především objev přirozené radioaktivity roku 1896 Antoinem Henrim Becquerelem (1852–1908). Rozhodující práci při poznávání nitra atomu odvedl Novozélanďan Ernest Rutherford (obr. 1).



Obr. 1: Ernest Rutherford (1871–1937)

Z Nového Zélandu do Anglie

Titulek této části článku tentokrát nevěští cestopis. Ve zkratce pouze uvádí pojednání o studijních začátcích jednoho z nejvýznamnějších fyziků v oblasti zkoumání stavby atomu. Budoucí nositel Nobelovy ceny Ernest Rutherford se narodil na novozélandské vesnici Spring Grove, kterou bychom jako turisté na severu Jižního ostrova sotva hledali. Jisté spojení rodiny s Evropou tu ale bylo. Ernestův děda totiž pocházel ze Skotska a od roku 1843 žil s rodinou právě v této novozélandské zapomenuté vesnici. Ernestovi rodiče – James a Martha – farmařili, přičemž matka se přitom vzdala svého učitelského povolání, neboť starost o rodinu, do níž se po čtvrtém Ernestovi narodilo ještě osm dětí, ji zcela zaměstnávala.

Ernest se už v základní škole projevoval jako bystrý a zvídavý chlapec. Jeho způsob hraní spočíval v tom, že si hračky vyráběl, upravoval a technicky zdokonaloval. Svoji fantazii rozvíjel bohatou četbou. Nebýt poskytnutého stipendia, nikdy by nemohl nastoupit na chlapeckou střední školu v Nelsonu, která byla pro další orientaci jeho studia rozhodující. Tam byl totiž vynikajícím žákem především v matematice a dobré jméno školy šířil i jako hráč ragby.

Obr. 2: Ernest Rutherford jako školák, památník v Brightwateru (Nový Zéland)

Budoucí významný fyzik ve svých školních letech nadále rozvíjel různé technické zájmy – rád zkoumal různé mechanizmy, občas si některý vyrobil, upravil nebo nenávratně rozebral. A protože pomůcek kolem nebylo mnoho, řadu z nich si sám zhotovoval. Svůj důmysl dokázal uplatnit v konstrukční jednoduchosti. Dále uvidíme, jak byly později i jeho stěžejní pokusy prováděny s neuvěřitelně jednoduchými prostředky.[1)]

Z důvodu nedostatku peněz v rodině se o přijetí na univerzitu ucházel opět prostřednictvím stipendia, což se mu podařilo až napodruhé. Na mladé University of New Zealand byl teprve 338. studentem. V roce 1892 ukončil bakalářské studium a jako pocty se mu dostalo opět stipendia – tentokrát jediného pro celý Nový Zéland – určeného k podpoře dalšího studia matematiky a fyziky. K metodice vědecké práce ho na univerzitě dovedli vděčně jím vzpomínaní profesoři chemie A. Bickerton a matematiky Ch. Cook. Když Rutherford poznal, co věda obnáší a jak se v ní postupuje, začal provádět pokusy s elektromagnetickými vlnami, na konci 19. století velmi atraktivní a tajemnou oblastí fyziky. Zde již plně uplatnil kromě nápaditosti i své vlastnosti, jakými byly preciznost, přesnost, trpělivost a důslednost. Když v roce 1894 ukončil univerzitní studia prací na tomto tématu, věděl o elektromagnetických vlnách prakticky všechno to, co objevili v Evropě Rus Alexandr Stepanovič Popov (1859–1906) a Ital Guglielmo Marconi (1874–1937). Jak už to ve vědě v této době bývalo, žádný z této trojice o pracích ostatních dvou nevěděl. Na základě publikovaných článků a také z důvodu nemožnosti nalézt na Novém Zélandu odpovídající práci, si Rutherford zažádal o anglické stipendium založené roku 1851 princem Albertem. Mezi zájemci byl druhý, takže zklamán, ale když vítězný stipendista James Maclaurin odstoupil, mohl do Cambridge opravdu jet.

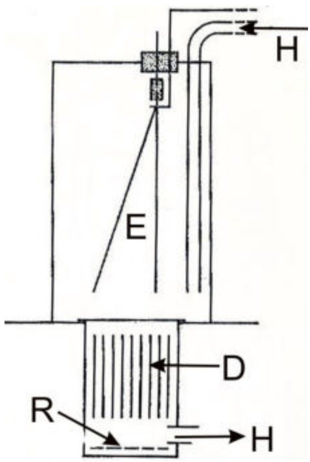
Co to je radioaktivní záření alfa

V roce 1894 nastoupil do Cavendishovy laboratoře v Cambridge vedené tehdy Josephem Johnem Thomsonem (1856–1940). Práci laboratoře nemohly minout takové oblasti zkoumání, jakými byly výboje v plynech v trubicích za vysokého napětí. Z pokusů, ke kterým byl přizváván, vzešel roku 1897 Thomsonův objev elektronu, první známé atomární částice. Velmi zručný Rutherford si brzy osvojil dostupné experimentální techniky a při pokusech začíná jít vlastní cestou. Zkoumáním nevidi-

[1)] Později už jako významný vědec s humorem poznamenával, že „pokusy lze dělat jen za pomoci provázku a pečetního vosku“.

telného záření vydávaného uranovými rudami odhalil jeho dvě složky, lišící se pronikavostí. Měkčí záření, tzn. méně pronikavé, avšak se silně ionizačními účinky, nazval α, pronikavější záření s malými ionizačními účinky pojmenoval β. Zatímco β záření bylo identifikováno jako proud elektronů, podstata záření α zůstávala tajemná.

Rutherfordovy pokusy odhalující toto tajemno zde popíšeme trochu podrobněji, a to proto, abychom čtenáři ukázali, že i při jejich jednoduchosti (která ovšem vyžadovala rozhodující nápad) se jimi podařil zásadní objev. K nabitému elektroskopu E na obr. 3 přivedl přes silné magnetické pole mezi rovnoběžnými deskami D záření α z radioaktivní soli R. Pro vyloučení ionizace v prostoru elektroskopu bylo zařízení profukováno vodíkem (H). Na horních koncích desek Rutherford střídavě překrýval pravé a levé poloviny mezer a z poklesu výchylek elektroskopu usoudil, že záření jsou ionizované atomy dvakrát těžší než atomy vodíku.



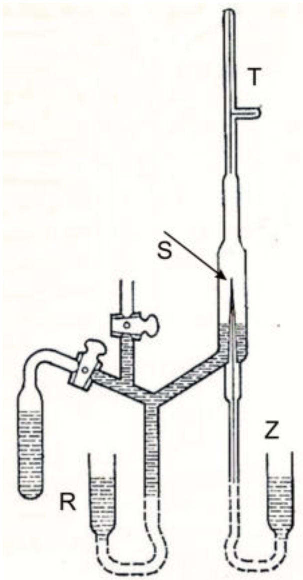
Obr. 3: Schéma aparatury ke zkoumání záření alfa

Důkaz, že jde o ionty hélia, provedl pokusem, pro který navrhl jinou aparaturu podle obr. 4.

V části Z byl umístěn zdroj záření (radiová emanace). To pronikalo tenkostěnnou trubičkou S (její stěny měly tloušťku 0,01 mm)[2] do prostoru zespodu uzavřeného rtutí napouštěnou ze zásobníku R. Částice α

[2] Je nutno zmínit neobyčejnou zručnost skláře Otto Baumbacha, který celé zařízení pro Rutherforda vyrobil.

pronikly až do výbojové trubice T, kde při vysokém napětí došlo k výboji a pozorovatelnému svitu jejího obsahu. Spektrum tohoto záření bylo zaznamenáno. Rutherford pak provedl obdobný pokus, jen místo zdroje α záření užil hélium. Opět získal spektrum světla při výboji. Porovnáním spekter zjistil jejich identitu, tudíž záření α bylo ionizované héliové, resp. tvořily ho kladné ionty hélia.[3)]



Obr. 4: Tímto zařízením Rutherford dokázal, že záření alfa jsou ionty hélia

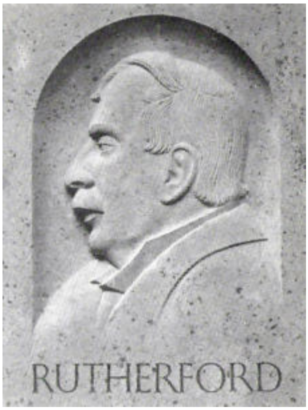
Jak jsme již uvedli, Rutherford byl v Anglii na stipendijním pobytu a k jeho konci si hledal nějaké stabilní zaměstnání. Velmi vhod mu přišla nabídka z univerzity v Montrealu, jejíž zástupci hledali u J. J. Thomsona nějaké vhodné kandidáty na profesuru. Ačkoli Rutherfordův pobyt v Cambridgi byl velmi plodný, rozhodl se v roce 1898 přijmout nabídku McGillovy univerzity v Kanadě nabízející špičkově vybavenou laboratoř.

Po stopách radioaktivity

V MacDonaldově univerzitní laboratoři Rutherford se svým nejvýznamnějším spolupracovníkem Frederickem Soddym (1877–1966) zjis-

[3)] Zde autor článku úmyslně vynechává pojem jádra atomu hélia, neboť k objevu jádra atomu Rutherford dospěl později.

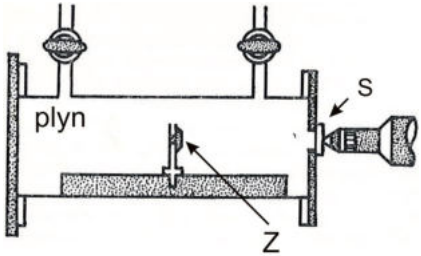
til, že radioaktivita je atomárním jevem, jehož podstatou je nestabilita atomů určitých prvků. Nalezl souvislost po sobě následujících rozpadů původního vzorku. Dnes se jim říká rozpadové řady, jejichž výsledkem je vždy stabilní, již nezářící prvek. Co bylo ale nejpodstatnějším zjištěním? Během samovolného rozpadu původního prvku došlo k jeho přeměně na prvek jiný. Vzpomeňme jen – toho přece chtěli dosáhnout před staletími alchymisté! Zajímavá také byla doba rozpadu – pro každý prvek jiná, ale – co bylo důležité – z konečného stavu se dalo zjistit, s jakým předstihem k rozpadu došlo. Poznatek byl později využit v metodě radioaktivního datování.



Obr. 5: Pamětní reliéf na chodbě MacDonaldovy laboratoře na McGillově univerzitě v Montrealu

V době kanadského působení se E. Rutherfordovi dostává postupně významnějších ocenění. Roku 1903 je zvolen členem londýnské Royal Society a následně dostává Rumfordovu medaili, udílenou každý sudý rok právě touto společností. Vrcholem uznání jeho práce je Nobelova cena za chemii (!) pro rok 1908 za „výzkum rozpadu prvků a chemii radioaktivních látek". Zřejmě nejvýznamnější Rutherfordův objev se ale teprve odehraje, a to opět v Evropě. Uvítal nabídku od profesora Arthura Schustera na jím vybudovanou laboratoř vynikající úrovně na univerzitě v Manchesteru. V roce 1907 se tedy E. Rutherford stává profesorem tamní Viktoriiny univerzity.

I zde se zabýval dalšími vlastnostmi alfa částic. Podívejme se, k čemu ho dovedl následující – opět velmi jednoduchý – pokus (obr. 6).



Obr. 6: Schéma pokusu, kterým dokázal, že částice alfa dokážou přeměnit atom dusíku na atom kyslíku

Ve válci s dusíkem, jehož tlak mohl měnit, byl umístěn zdroj záření α. V místě S bylo umístěné stínítko a ze strany ke zdroji záření bylo přikryto tenkou stříbrnou destičkou pohlcující větší část energie dopadajících částic. Záblesky (scintilace) na stínítku byly pozorovány mikroskopem. Když zvětšil tlak plynu, počet scintilací klesl, ale částice, které prolétly, měly větší energii. Z toho usoudil, že prolétnuvší částice nemohou mít původ v dusíku, nýbrž v jiném plynném prvku – ukázalo se, že jde o kyslík. Tím dokázal, že záření α dokáže přeměnit jeden prvek v jiný. Předpověděl, že patrně dojde k objevu prvků stojících v periodické tabulce za uranem.[4)]

Objev atomového jádra

Podle J. J. Thomsona měl atom tvar koule o průměru řádu 10^{-10} metru, v níž byly rovnoměrně promíchané kladné a záporné částice. Takový model s drobnými elektrony mezi většími a těžšími kladnými částicemi dostal příhodný název pudingový podle chutného dezertu s promíchanými rozinkami.

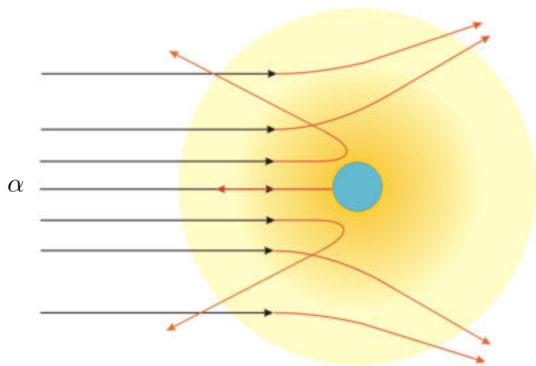
Po zkušenostech z Kanady, kde sledoval průchod alfa částic plyny, zamýšlel Rutherford užít stejnou metodu na pevné látky. Zpočátku to nemuselo být ani nijak zajímavé, neboť se očekávalo, že záření α látkami projde, patrně zeslabené, nebo při silnější překážce jimi bude zcela pohlceno. Pokud atomy vypadají, jak si představoval J. J. Thomson, mělo tomu tak být. V Manchesteru měl Rutherford dva vynikající spolupracovníky – Wilhelma Geigera (1882–1945) a šikovného studenta Ernesta Marsdena (1889–1970). Jelikož Geiger vyrobil přístroj detekující velmi

4) Když byl v roce 1964 izolován nestabilní prvek s atomovým číslem 104, byl nazván rutherfordium.

slabé ionizační záření a Marsden rád velmi pečlivě prováděl nejrůznější pokusy, Rutherford jim připravil experiment, který se později ukázal jako základní pro rozvoj atomové fyziky.

Na kovové fólie ze zlata, hliníku a jiných látek, tenké až 4 desetitisíciny milimetru (tedy několik vrstev atomů) byl směrován proud částic α a dále měl být sledován jejich průchod látkou. Velice překvapivé však bylo, že většina částic prošla bez změny směru, avšak nalezly se i takové, které se odchylovaly o velký úhel a dokonce některé odražené zpět (obr. 7).

Rutherford si uvědomil, že překvapivý výsledek pokusu svědčí o zcela jiném uspořádání vnitřku atomu: Téměř veškerá kladná hmota je soustředěna v jeho středu (zavedl název jádro) a zbylý atomární prostor vyplňují lehké elektrony obíhající kolem jádra. Ve fyzice se model ustálil pod názvem planetární pro svoji miniaturní podobnost se sluneční soustavou.

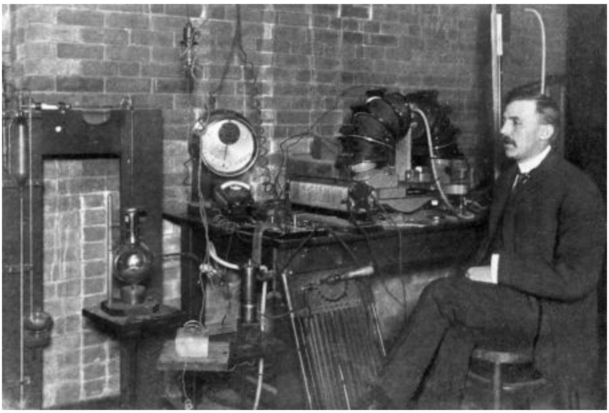


Obr. 7: Pokus vedoucí k objevu atomového jádra

Odvození vzorce pro rozptyl paprsků dopadajících na atom Rutherford přednesl roku 1911 na zasedání Manchesterské literární a filozofické společnosti. V roce 1914 pak doplňuje průměr jádra v závislosti na atomovém číslu prvku. Ukázalo se, že hmotnost těchto jader je přibližně dvojnásobná, než by odpovídalo počtu kladných jader vodíku. K vysvětlení této zvláštnosti došlo o mnoho let později. Když Rutherford přešel v roce 1919 na místo ředitele Cavendishovy laboratoře (po J. J. Thomsonovi), měl jako svého zástupce mladého fyzika Jamese Chadwicka (1891–1974). A právě Chadwick v roce 1932 další „průzkum atomu“ na čas završil objevem elektricky neutrální částice – neutronu. Následovala pro něj Nobelova cena za rok 1935.

Ředitelem Cavendishovy laboratoře

Vraťme se ještě do roku 1919, kdy E. Rutherford nastoupil na místo ředitele Cavendishovy laboratoře. Stalo se tak po odchodu J. J. Thomsona, zvoleného v roce 1918 do čela Trinity College cambridžské univerzity. Rutherford měl obavy, že J. J. Thomson si přece jen vymíní určitý vliv na toto špičkové pracoviště, ale když Rutherforda přátelsky ujistil, že „bude mít volné ruce pro jakýkoli záměr“, Rutherford jako hlavní program stanovil zkoumání atomů. Podařilo se mu získat dva vynikající spolupracovníky – doktorandy Johna Douglase Cockrofta (1897–1967) a Thomase Sintona Waltona (1903–1995), kteří se „blýskli“ sestavením prvního lineárního urychlovače částic. Urychlené protony svojí zvětšenou energií dokázaly rozštěpit jádro lithia na dvě jádra hélia, přičemž se ještě uvolnila další energie. Tak se v Cavendishově laboratoři uskutečnila první umělá jaderná přeměna – jaderné štěpení.



Obr. 8: Ernest Rutherford ve své laboratoři

Pocty

Nobelova cena již byla zmíněna výše. Rutherford obdržel také nejvyšší vyznamenání od Royal Society, kterým byla Copleyova medaile[5)], Záslužný řád (Order of Merit) a povýšení do šlechtického stavu s titulem Baron Rutherford of Nelson. Zprávu o jeho udělení psal s úctou matce: „. . . Je to víc Tvoje zásluha než moje“.

[5)] Udělovaná od roku 1731, do zavedení Nobelovy ceny nejvyšší vědecké vyznamenání.

Obr. 9: Rutherfordův šlechtický erb

K jeho blízkým spolupracovníkům a přátelům patřil i sovětský fyzik Pjotr Leondovič Kapica (1894–1984). Právě on nám podává o Rutherfordovi poslední svědectví. Deset dní před smrtí Rutherford psal Kapicovi: „…jsem rád, že mohu napsat, že fyzicky se cítím dobře, ale přál bych si, aby semestry nebyly tak únavné…“

Ernest Rutherford zemřel po nezdařené operaci kýly 19. října 1937. Jeho popel je uložen pod dlažbou katedrály Westminsterského opatství v Londýně.

Obr. 10: Pod touto deskou ve Westminsterském opatství v Londýně je uložen Rutherfordův popel

Literatura

[1] Kapica, P. L.: Vzpomínky na lorda Rutherforda. *Čs. Čas. Fyz.*, A20 (1970), s. 59–65, s. 181–185.

[2] Lacina, A.: Ernest Rutherford – Newton atomové fyziky. *Čs. Čas. Fyz*, 62 (2012), s. 448–458.

[3] Kapica, P. L.: *Experiment, teorie, praxe.* Mladá fronta, Praha, 1982.

České stopy v Nobelových cenách za fyziku

Ivo Kraus, FJFI ČVUT, Praha

Na otázku, kolik máme laureátů Nobelovy ceny, by bezpochyby většina dospělé české populace vzpomněla na chemika Jaroslava Heyrovského[1] a básníka Jaroslava Seiferta[2]. Naši fyzikové se této vědecké pocty sice zatím nedočkali, mezi cizinci, kteří cenu za fyziku už převzali, jsou však tři – Wolfgang Pauli[3], Felix Bloch a Peter Andreas Grünberg – s českými kořeny.

Wolfgang Ernst Pauli (*25. 4. 1900 Vídeň, Rakousko; †15. 12. 1958 Curych, Švýcarsko) pocházel z intelektuální židovské rodiny, jeho otec Wolfgang Josef Pascheles (1869–1965), syn pražského knihkupce Jacoba Wolfa Paschelese (1830–1897), studoval v Praze na německé Karlo-Ferdinandově univerzitě medicínu (1887–1893), poté působil ve Vídni (od 1919 jako řádný profesor biofyzikální chemie na univerzitě) a později (od 1938) v Curychu. V roce 1898 konvertoval ke křesťanství, změnil své příjmení na Pauli a uzavřel sňatek s novinářkou (rovněž s židovskými kořeny) Berthou Camillou Schützeovou[4] (1878–1927). V tomto manželství se narodil syn Wolfgang Ernst[5] a dcera Hertha (1906–1973)[6].

Do osmnácti let Wolfganga vychovávali domácí učitelé a profesoři vídeňského humanitního gymnázia. První článek poslal do tisku v září 1918 – téhož roku kdy maturoval, další dva už jako student Ludwig-Maximilians-Universität München.

[1] Jaroslav Heyrovský (1890–1967) byl vyznamenán Nobelovou cenou za chemii v roce 1959 *za objev a rozpracování analytické polarografické metody.*

[2] Jaroslav Seifert (1901–1986) převzal Nobelovu cenu za literaturu v roce 1984 *za poezii, která svěží smyslovostí a mimořádnou vynalézavostí podává osvobozující obraz lidské nezdolnosti a mnohotvárnosti.*

[3] Wolfgang Pauli je uváděn jako rakouský teoretický fyzik, švýcarský fyzik, americký fyzik, rakousko-americko-švýcarský fyzik, švýcarský fyzik rakouského (z většiny židovského) původu, rakousko-švýcarský fyzik židovského původu aj.

[4] Za rok po její smrti se oženil se sochařkou Marií Rottlerovou. Pauli byl ženatý dvakrát, první manželství (1929) s berlínskou tanečnicí Käthe Margarethe Deppnerovou se po roce rozpadlo, s druhou manželkou Franziskou Bertramovou (1900–1987) žil (od r. 1934) až své smrti. Obě manželství zůstala bezdětná.

[5] Při Pauliho křtu byl jeho kmotrem otcův přítel fyzik Ernst Mach, rodák z Chrlic u Brna (1838–1916).

[6] Herečka, novinářka a spisovatelka.

Pauliho znalosti z teorie relativity považovali za mimořádné nejen redaktoři vědeckých časopisů, např. *Zeitschrift für Physik*, ale dobře si je uvědomoval i vedoucí jeho doktorské disertace o ionizovaném molekulárním vodíku Arnold Sommerfeld (1868–1951). Proto svému doktorandovi nabídl, aby o této nové oblasti teoretické fyziky napsal kapitolu do *Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften* (1921). Pauliho práce o rozsahu 237 stran se setkala s všeobecným uznáním. Pochválil ji i Albert Einstein a jako *Relativitätstheorie* byla několikrát vydána jako samostatná monografie.

Wolfgang Pauli (1900–1958)

Po obhajobě disertace dostal Pauli od Sommerfelda doporučení na stáž u Maxe Borna (1882–1970) v Göttingenu a Niels Bohr (1885–1962) ho pozval na rok do Kodaně. Další vědeckou kariéru Paulimu umožnila univerzita v Hamburku. V roce 1924 se na ní habilitoval a zanedlouho získal i řádnou profesuru.

Od konce 90. let byl dějištěm Pauliho života (s výjimkou 2. světové války) Curych a jeho proslulá Spolková vysoká technická škola (ETH – Eidgenössische Technische Hochschule), na které se zjara 1928 stal profesorem teoretické fyziky. Během svého předválečného curyšského období uskutečnil řadu zahraničních cest po Evropě i do USA. Teoretické fyzice se mohl věnovat i po roce 1940, kdy ze Švýcarska emigroval. Díky americkým kolegům pokračoval ve vědecké i pedagogické práci v Princetonu a na univerzitách v Michiganu a v Indianě; byl snad jediný z významných fyziků, kteří odmítli spolupracovat na projektu Manhattan. Výjimečnou událostí, k níž koncem Pauliho pobytu v USA došlo, bylo udělení Nobelovy ceny v roce 1945 *za objev vylučovacího principu nazývaného také Pauliho princip* (*for the discovery of the Exclusion Principle, also called Pauli principle*).

Po válce se ze Spojených států vrátil natrvalo do Evropy. Také druhé curyšské období Wolfganga Pauliho trvalo dvanáct let, od dubna 1946 do 15. prosince 1958. A podobně jako ve třicátých letech nepřednášel jenom na ETH, ale několikrát také v Princetonu, na univerzitách v Indii aj. Své aktivity navíc rozšířil o spolupráci při zakládání Evropské organizace pro jaderný výzkum CERN (Conseil Européen pour la Recherche Nucléaire) a k odborným zájmům přidal dějiny a filozofii vědy. Naposled přednášel 5. prosince 1958. O deset dnů později (15. 12.) ve věku padesáti osmi let zemřel na zhoubný nádor slinivky břišní.

Pauliho přínos teoretické fyzice je fenomenální:

• Při studiu struktury spektrálních čar objevil v první polovině dvacátých let tzv. vylučovací princip, podle něhož žádné dva elektrony nemohou být ve stejném kvantovém stavu, tj. musí se lišit alespoň jedním kvantovým číslem n, l, m, s. Kvantovými čísly jsou definovány atomové orbity (orbitaly) – oblasti nejpravděpodobnějšího výskytu elektronu. Hlavní kvantové číslo n je funkcí vzdálenosti elektronu od jádra, vedlejší kvantové číslo l rozhoduje o tvaru orbitu, magnetické kvantové číslo m charakterizuje jeho prostorovou orientaci, spinové kvantové číslo s popisuje vnitřní moment hybnosti elektronu. Podle Pauliho je spin klasicky nepopsatelná kvantová vlastnost. Vložíme-li elektron do magnetického pole, může jeho spinový magnetický moment mít pouze dvě orientace.

• Vysvětlil podstatu *paramagnetismu elektronového plynu v kovech* (1927).

• Roku 1928 předpověděl Paul Dirac existenci částice s jedním kladným nábojem, která byla později Carlem Davidem Andersonem nazvána pozitron. Dva roky po Diracovi (v prosinci 1930) považoval za potřebné zavést další částici zase Wolfgang Pauli. Měl pro to vážný důvod: Při radioaktivním rozpadu beta byly kromě elektronů s energií odpovídající rozdílu energetických hladin jádra pozorovány ještě elektrony s nejrůznějšími energiemi menšími. To znamenalo, že buď neplatí zákon zachování energie, nebo chybějící energii odnáší nějaký dosud neznámý objekt s nulovým nábojem a velmi malou, ne-li nulovou, klidovou hmotností. Nová částice, později Fermim nazvaná neutrino, se hodila i k výkladu dalších procesů, např. při rozpadu neutronu na proton a elektron, kdy součet energií produktů byl vždy poněkud jiný; část energie, v různých případech různá, jako by se někam ztrácela. Experimentálně byla existence neutrin potvrzena v roce 1956.

• Společně s Wernerem Heisenbergem (1901–1976) navrhli (1929) nový způsob popisu fyzikálních procesů, tzv. *kvantovou teorii pole*, která spojuje kvantovou mechaniku s Einsteinovou speciální teorií relativity. Kvantová teorie pole je univerzální teorií popisující chování elementárních částic a jejich vzájemné interakce. Podle ní lze všechny částice považovat za kvanta fyzikálních polí. Jednotlivé částice se jako excitace kvantového pole mohou navzájem přeměňovat, vznikat i zanikat.

Za dílo, které vytvořil, byl kromě Nobelovy ceny vyznamenán Lorentzovou medailí (1931) a Medailí Maxe Plancka (1958), svým členem ho zvolily Royal Society of London, Swiss Physical Society, American Physical Society, American Association for the Advancement of Science a řada dalších vědeckých společností.

Felix Bloch (*23. 10. 1905 Curych, Švýcarsko; †10. 9. 1983 Zollikon, Švýcarsko) pocházel ze židovské rodiny obchodníka s obilím Gustava Blocha a Agnes Blochové. Gustav Bloch (*1868 Meclov, okr. Domažlice, †1947 San Francisco, Kalifornie, USA) odešel jako dvaadvacetiletý ke svému strýci do Švýcarska. V manželství, které tam později uzavřel s Agnes Mayerovou, se narodily dvě děti, dcera Hedy (1901–1912) a syn Felix. Agnes Blochová Mayerová (*1878 Vídeň, Rakousko, †1970 San Francisco, Kalifornie, USA) měla 6 sourozenců; její otec Leopold Mayer (1837–1915) pocházel z Chodové Plané (okres Tachov), matka Marie Amalie Mayerová (1850–1941) z Tachova.

Jako absolvent curyšského reálného gymnázia (1924) se Felix Bloch přihlásil na tamní Spolkovou vysokou technickou školu (ETH). Po roce studia strojního inženýrství přestoupil na obor matematika-fyzika. Jeho učiteli byli např. Peter Debye (1884–1966), Paul Scherrer (1890–1969), Hermann Weyl (1885–1955) a Erwin Schrödinger (1887–1961). V listopadu 1927 přešel z Curychu do Lipska a stal se prvním doktorandem jen o čtyři roky staršího Wernera Heisenberga (1901–1976). Po obhajobě disertace *Über die Quantenmechanik der Elektronen in Kristallgittern* se koncem roku 1928 vrátil do Curychu. Jeden rok byl asistentem Wolfganga Pauliho, poté působil v Nizozemsku u Hendrika Kramerse (1894–1952) a další tři roky (1930–1933) spolupracoval znovu s Heisenbergem na univerzitě v Lipsku. Tam se prací *Zur Theorie des Austauschproblems und der Remanenzerscheinung der Ferromagnetica* habilititoval. Během svého druhého lipského pobytu byl také na pracovních pobytech v kodaňském ústavu Nielse Bohra.

Velmi plodnou spolupráci s Heisenbergem ukončily události po Hitlerově nástupu k moci zjara 1933. V květnu Bloch odešel z Lipska do Švýcarska a po několika měsících emigroval do USA, kde získal místo profesora fyziky na Stanfordově univerzitě v Kalifornii.[7)] Změna pracoviště znamenala však i změnu odborného zaměření. Místo teorie se musel přeorientovat na experimentální fyziku, především na magnetismus a nukleony (protony a neutrony).

Felix Bloch (1905–1983)

Za druhé světové války spolupracoval několik měsíců (od jara do podzimu 1943) v Los Alamos na projektu Manhattan, později (až do roku 1945) se zabýval na Harvardově univerzitě vývojem radaru. Po válce pokračoval v Kalifornii na svých nedokončených experimentech. Jejich výsledkem byla velmi přesná metoda měření magnetického momentu atomových jader, která vedla k objevu (1946) jaderné magnetické rezonance

[7)] V roce 1940 se oženil s německou emigrantkou, fyzičkou Leonorou Mischovou (1911–1996). Během let 1941–1949 se jim narodily 4 děti, synové Georg Jacob, Daniel Arthur a Frank Samuel a dcera Ruth Hedy.

v pevných látkách a za šest let (1952) i k udělení Nobelovy ceny za fyziku (spolu s americkým fyzikem Edwardem Millsem Purcelem, 1912–1997) *za rozvoj nových metod pro přesná měření jaderného magnetismu a s tím spojené objevy* (*for their development of new methods for nuclear magnetic precision measurements and discoveries in connection therewith*).

V letech 1954–1955 byl prvním generálním ředitelem Evropské organizace pro jaderný výzkum (CERN) v Ženevě. Z pracovních a pravděpodobně i z osobních důvodů se však brzy vrátil do Kalifornie a tam na Stanfordově univerzitě působil až do svého penzionování.

Kromě objevu jaderné magnetické rezonance se významně zapsal i do řady dalších oblastí fyziky. S Léonem Brillouinem (1889–1969) vypracovali pásovou teorii pevných látek, zavedl spinové vlny, teoreticky objevil (1930) teplotní závislost spontánní magnetizace feromagnetik v oblasti pod Curieho bodem, vypracoval teorii částečné polarizace neutronů při průchodu zmagnetovaným feromagnetikem aj.

Byl členem americké Národní akademie věd (1948), Americké akademie umění a věd (1957), Královské nizozemské akademie umění a věd (1964) a laureátem mnoha prestižních řádů a vyznamenání.

Peter Andreas Grünberg (*18. 5. 1939 Plzeň, Protektorát Čechy a Morava, †7. 4. 2018 Jülich, Německo) vyrůstal v rodině, která patřila v meziválečném Československu k německé menšině (sudetským Němcům). Matka Anna (1902–2002) byla dcerou truhláře Petra Petermanna z Dolních Sekyřan (v letech 1938–1945 okr. Stříbro, nyní okr. Plzeň-sever), otec Fjodor Grünberg, ruský emigrant německé národnosti (bývalý carský důstojník) pracoval od roku 1928 jako strojní inženýr v plzeňské Škodovce.[8] Rodina se dvěma dětmi (synem Petrem a o dva roky starší dcerou) bydlela za války v obci Dýšina (nyní okr. Plzeň-město.)

Když válka skončila, byli všichni Němci na Plzeňsku internováni. Anna Grünbergová po propuštění z internačního tábora pracovala v zemědělství ve vesnici u rodičů, Fjodor Grünberg v táboře 27. listopadu 1945 zemřel. Peter se sestrou žili nějaký čas u své české tety, později u matky, po odsunu do Německa v roce 1946 se usídlili v hesenském Frischbornu[9]. Tam Peter navštěvoval základní školu (1946–1952), do gymnázia chodil v nedalekém Lauterbachu. Po maturitě (1959) studoval fyziku ve Frankfurtu nad Mohanem (Univerzita J. W. Goetha, bakalář-

[8] Koncem roku 1939 přijal německé státní občanství a své příjmení Grinberg změnil na Grünberg.

[9] Od 1972 městská část Lauterbachu.

ský diplom 1966)[10] a v Darmstadtu (Technická univerzita, magisterský diplom 1969, doktorát filozofie 1969). Další tři roky absolvoval postdoktorandské studium v Kanadě (Carleton University, Ottawa), poté (od 1972) pracoval v Jülichu (Forschungszentrum), a to i po svém penzionování v roce 2004. Působil také jako vysokoškolský pedagog (Univerzität zu Köln) a hostující vědecký pracovník v USA (Argonne National Laboratory, Illionis), Japonsku (University of Sendai, Tsukuba Research Centre) aj.

Peter Andreas Grünberg (1939–2018)

V roce 2007 dostal spolu s Francouzem Albertem Fertem (*7. 3. 1938 Carcassonne, Francie) Nobelovu cenu za fyziku *za objev obří magnetorezistence*[11] (*for the discovery of giant magnetoresistance*) , který umožnil výrobu pevných disků s kapacitou řádu gigabytů. Kromě Nobelovy ceny byl vyznamenán členstvím významných vědeckých institucí, čestnými doktoráty německých i světových univerzit aj.

[10] Během studia ve Frankfurtu se seznámil s Marries Helmou Prauserovou, pozdější učitelkou. V manželství, které uzavřeli v roce 1966, se narodily tři děti, syn Andreas (1973) a dcery Sylvie (1974) a Katharina (1981).

[11] Magnetorezistence (Giant Magnetoresistance, GMR) je kvantově mechanický jev, kdy velmi slabé magnetické změny vyvolávají velké rozdíly v elektrickém odporu materiálů (např. v ultratenkých vrstvách železa a chromu).

O Alfredu Nobelovi a ceně, která dostala jeho jméno

Dne 27. listopadu 1895, rok před svou smrtí, podepsal dvaašedesátiletý švédský průmyslník a vynálezce Alfred Bernhard Filip Nobel (21. 10. 1833 – 10. 12. 1896) za přítomnosti dvou nejbližších asistentů, Ragnara Sohlmana a Rudolfa Lilljeqvista poslední vůli, jíž povýšil dobročinnost na ušlechtilý čin hodný největších velikánů lidských dějin.

„S celým mým zbylým realizovaným majetkem bude naloženo takto: Kapitál vložený vykonavatelem mé závěti do bezpečných cenných papírů dá základ fondu, z jehož úroků budou každoročně odměňováni ti, kteří v uplynulém roce prokázali lidstvu největší užitek. Úroky ať jsou rozdělovány na pět stejných částí, z nichž jedna připadne tomu, kdo udělal nejdůležitější vynález nebo objev v oblasti fyziky; jedna část tomu, kdo udělal nejdůležitější chemický objev nebo zdokonalení; jedna část tomu, kdo udělal nejdůležitější objev v oblasti fyziologie nebo medicíny; jedna část tomu, kdo vytvořil v literatuře vynikající dílo s ušlechtilou myšlenkou; a jedna část tomu, kdo učinil nejvíce pro sbratření národů a zrušení či zmenšení armád nebo se zasloužil o uspořádání a podporu mírových kongresů. Ceny za fyziku a chemii budou udíleny Královskou švédskou akademií věd (Kungliga Vetenskapsakademien), ceny za fyziologické nebo lékařské práce Karolinským institutem (Karolinska institutet) ve Stockholmu, za literaturu Švédskou akademií (Svenska akademien) ve Stockholmu a ceny předním obhájcům míru pětičlenným výborem norského parlamentu.[12] *Je mou výslovnou vůlí, aby při udílení cen nebyl brán žádný zřetel na národnost a cenu obdržel ten nejzasloužilejší, nehledě na to, zda je Skandinávec nebo ne.“*

Závěť byla sice otevřena v lednu 1897, vyřízení pozůstalosti se však protáhlo až do roku 1900.

Založení Nobelovy nadace a předpisy pro instituce oprávněné udělovat ceny byly schváleny ve Stockholmu 29. června 1900, obdobná norská ustanovení mají platnost dokonce až od 10. dubna 1905.[13]

Statutem Nobelovy nadace je přesně určeno, kdo může laureáty cen

[12] V roce 1968, při oslavách 300 let svého trvání, založila Švédská národní banka (Sveriges Rigsbank) Cenu za rozvoj ekonomické vědy na paměť Alfréda Nobela. Banka dává Nobelově nadaci k dispozici peněžní obnos ve výši Nobelovy ceny daného roku a 65 % nákladů spojených s volbou laureáta. Úlohu instituce oprávněné udělovat tuto cenu plní Královská švédská akademie věd.

[13] Rozhodnutím Vídeňského kongresu (1814–1815) bylo Norsko spojeno se Švédskem. Samostatným královstvím se stalo až po referendu v roce 1905.

navrhovat.[14] Navrhovatelé jsou rozděleni do dvou skupin: stálí (v oblasti fyziky a chemie mají oprávnění švédští a zahraniční členové Švédské akademie věd; členové Nobelových výborů pro fyziku a chemii; nositelé Nobelovy ceny za fyziku a chemii; řádní profesoři fyziky a chemie na univerzitách a technických vysokých školách ve Švédsku, Dánsku, Finsku, Norsku, na Islandu a na Karolinském institutu) a pouze pro daný rok (vedoucí příslušných kateder na nejméně šesti univerzitách nebo vysokých školách stanovených Švédskou akademií věd tak, aby bylo dosaženo přiměřeného zastoupení různých zemí a jejich univerzit a vysokých škol; další vědci, které Akademie požádá podle svého uvážení o návrhy). Nikdo nesmí navrhovat cenu sám sobě.

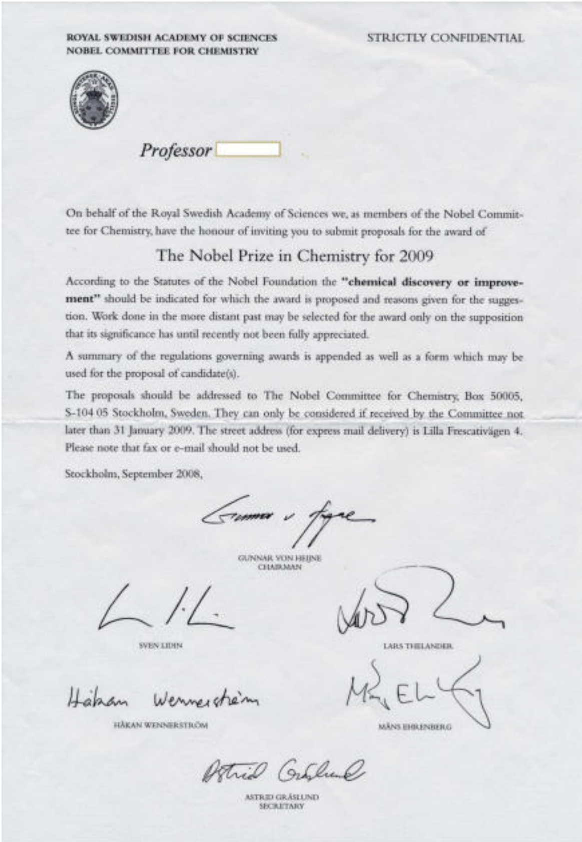
Avers Nobelovy medaile za fyziku, chemii, fyziologii nebo medicínu a za literaturu

Nobelovy výbory (složené výhradně ze Švédů) rozesílají koncem léta vybraným navrhovatelům dopisy, v nichž jménem Švédské královské akademie věd adresáta vyzývají, aby navrhl vhodné kandidáty. Návrhy s odůvodněním a přílohami musí být doručeny do 1. února příštího roku.

Ceny (zlatá medaile, diplom a finanční částka, jejíž výše je dána výsledky hospodaření s fondem a mírou inflace švédské koruny) se předávají 10. prosince, v úmrtní den Alfréda Nobela, a to zároveň ve Stockholmu i v Oslu.[15] Podle stanov jsou nominace, hodnocení kandidátů a zprávy komitétů tajné; odtajňují se až po 50 letech.

[14] U cen za fyziku, za chemii a za medicínu může být navrhovatelem pouze náležitě kvalifikovaný vědec.

[15] Nobelova cena za fyziku byla v letech 1901–2022 udělována 116krát. Převzalo ji celkem 221 osobností (Američan John Bardeen dostal cenu dvakrát, 1956, 1972), z toho 4 ženy.



ROYAL SWEDISH ACADEMY OF SCIENCES
NOBEL COMMITTEE FOR CHEMISTRY

STRICTLY CONFIDENTIAL

Professor

On behalf of the Royal Swedish Academy of Sciences we, as members of the Nobel Committee for Chemistry, have the honour of inviting you to submit proposals for the award of

The Nobel Prize in Chemistry for 2009

According to the Statutes of the Nobel Foundation the **"chemical discovery or improvement"** should be indicated for which the award is proposed and reasons given for the suggestion. Work done in the more distant past may be selected for the award only on the supposition that its significance has until recently not been fully appreciated.

A summary of the regulations governing awards is appended as well as a form which may be used for the proposal of candidate(s).

The proposals should be addressed to The Nobel Committee for Chemistry, Box 50005, S-104 05 Stockholm, Sweden. They can only be considered if received by the Committee not later than 31 January 2009. The street address (for express mail delivery) is Lilla Frescativägen 4. Please note that fax or e-mail should not be used.

Stockholm, September 2008,

GUNNAR VON HEIJNE
CHAIRMAN

SVEN LIDIN

LARS THELANDER

HÅKAN WENNERSTRÖM

MÅNS EHRENBERG

ASTRID GRÄSLUND
SECRETARY

Výzva Nobelova komitétu pro chemii vybranému navrhovateli

Literatura

[1] *Felix Bloch, Nobel Prize in Physics*. 1952. `https://www.geni.com/people/Felix-Bloch-Nobel-Prize-in-Physics`.

[2] Peter Grünberg; `https://en.wikipedia.org/wiki/Peter_Grünberg`.

[3] Kraus, I.: Fyzika v kulturních dějinách Evropy (Století elektřiny). Nakl. ČVUT, Praha, 2008.

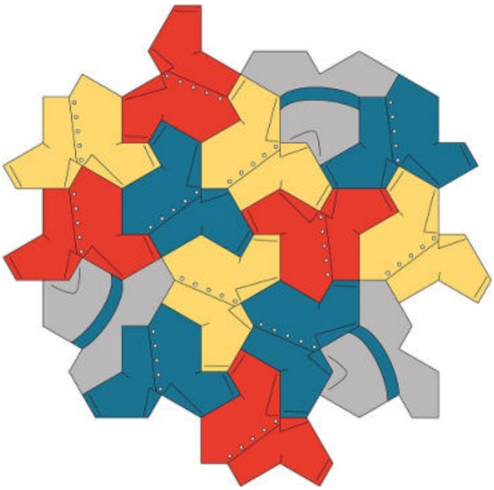
[4] Kraus, I.: Fyzika v kulturních dějinách Evropy (Atomový věk). Nakl. ČVUT, Praha, 2010.

Ne Einstein, ale einstein

Nedávno byla zodpovězena slavná geometrická otázka: *Existuje dlaždice, kterou se dá vydláždit rovina (tedy pokrýt bez překryvů a mezer), ale jedině aperiodicky?*

Pro takovou dlaždici se ujal název *einstein*, což je slovní hříčka, která neodkazuje na Alberta Einsteina, nýbrž na *ein Stein*, což německy znamená *jeden kámen*.

V roce 2022 našel amatérský matematik David Smith takovou dlaždici, viz obrázek. Požádal o pomoc s důkazem profesionální matematiky a v březnu 2023 zveřejnili převratný článek [1]. Článek je v recenzním řízení, a čeká tedy na definitivní potvrzení korektnosti.



Obr. 1: Připomíná vám dlaždice klobouk nebo tričko? Je to pořád stejný tvar! Jenom jinak vybarvený. Zdroj: Twitter: RobFathauerArt

Naši čtenáři se mohou v příštím čísle těšit na podrobnější článek o postupném řešení problémů aperiodického dláždění.

Literatura

[1] Myers, J. S., Kaplan, C. S., Goodman-Strauss, Ch.: An aperiodic monotile. *arXiv*, 2303 (2023), č. 10798.

ZPRÁVY

FYKOS a jeho aktivity pro středoškoláky

Marie Lausová, MFF UK, Praha

Co je to FYKOS

Slovo „FYKOS“ má všeho všudy dva velmi úzce spjaté významy. Zaprvé se jedná o soutěž (celým jménem *Fyzikální korespondenční seminář*), která probíhá po většinu školního roku a může se jí zúčastnit kterýkoliv fyzikální nadšenec nebo nadšenkyně studující střední školu. FYKOS je ale zároveň název skupiny vysokoškolských studentů (převážně z MFF UK), která organizuje nejen tento seminář, ale i mnoho dalších akcí zaměřených na vzdělávání středoškoláků ve fyzice, o kterých se můžete dočíst níže. Každý rok jsou řady organizátorů FYKOSu obohaceny nejen o bývalé řešitele semináře, ale také o mnoho zcela „nových“ organizátorů, které spojuje především touha předat středoškolákům nové znalosti a příležitosti se dál rozvíjet.

Jak soutěžit

Každý rok je v rámci FYKOSu vypsáno šest sad úloh po osmi příkladech a na vyřešení jedné takové sady máte k dispozici zhruba jeden měsíc. V každé sadě je možné najít dvě jednodušší úlohy, tři o něco náročnější výpočetní úlohy, jednu úlohu na zamyšlení, jednu experimentální a nakonec seriálovou, jejíž řešení se odvíjí od informací, které lze najít v textu seriálu pravidelně vydávaném společně s každou další sadou úloh. Každý z vás si tedy může při řešení FYKOSu přijít na své. Ročník oficiálně začíná s akademickým rokem v září, ale zapojit se můžete kdykoliv v průběhu roku. Při zapojení během první nebo čtvrté série ale máte největší šanci být vybraní na jarní nebo podzimní soustředění ☺

Soustředění pro řešitele

Dvakrát ročně organizátoři FYKOSu pořádají pro nejlepší řešitele posledních tří sérií soustředění konající se v nějakém pěkném koutku naší vlasti. A tak se na týden vždy dvakrát do roka, jednou na jaře a jednou na podzim, můžete někde uprostřed malebné přírody sejít spolu se zhruba třiceti účastníky připravenými si následující dny naplno užít společně s lidmi podobného zaměření.

Na místě jsou každý den připraveny zajímavé přednášky z oblasti fyziky, matematiky nebo informatiky i dalších. Můžete se také těšit na spoustu zajímavých her a výletů. S přehledem se dá tvrdit, že během soustředění, ze kterého si navíc můžete odnést hromadu nově nabytých vědomostí, se nudit rozhodně nebudete.

Soustředění pro řešitele

Každé takové soustředění má nějaké ústřední téma (tzv. legendu), a tak se v minulosti účastníci podívali například do Školy čar a kouzel v Bradavicích, mezi mafiány, nebo například do nelítostného diktátorského režimu.

Fyziklání

Fyzikálním korespondenčním seminářem ovšem nabídka soutěží rozhodně nekončí. Na *Fyziklání* je možné si přijít týmově zasoutěžit společně až se čtyřmi dalšími nadšenci do fyziky (přičemž váš tým může být složen ze studentů maximálně dvou různých škol). Od roku 2018 je možné soutěžit rovněž v anglickém jazyce – Fyziklání, které se tento rok konalo již po sedmnácté, je tak otevřeno i pro zahraniční žáky. Soutěž trvá celkem tři hodiny a funguje na principu výměny správně vyřešeného příkladu za nový, pravděpodobně o něco složitější příklad. Na začátku jich každý tým dostává celkem sedm, takže nemusíte mít v žádném případě strach, že soutěž nebude dostatečně pestrá!

Fyziklání je ale více než jen samotná tříhodinová soutěž – mimo ni je vždy nachystaný i doprovodný program. Jako soutěžící si můžete přijít prohlédnout špičkové laboratoře v Praze a okolí či se zúčastnit diskuze s českými vědci o fyzice a jejich práci. Den před samotnou soutěží také letos proběhla akce Jeden den s fyzikou – událost plná zábavných přednášek naplněných matematicko-fyzikální tématikou. Na Fyziklání vás rádi uvidíme zase příští rok v únoru.

Fyziklání Online

Jestliže se nemůžete zúčastnit Fyziklání prezenčně, pak je tu pro vás *Fyziklání Online*. Pravidla online soutěže jsou velmi podobná pravidlům klasického Fyziklání – tříhodinový časový limit, pět členů týmu a sedm startovních úloh. Hodinu po startu online soutěže je navíc zveřejněna takzvaná Hurry-up! série s tematicky propojenými úlohami, za které můžete získat významné množství bonusových bodů. V posledním ročníku soutěžilo přes 900 týmů ze skoro 60 zemí světa, což byla opět rekordní účast.

DSEF

Den s experimentální fyzikou neboli DSEF je, jak již napovídá název, jednodenní akce, při které můžete podniknout řadu zajímavých exkurzí. Při přihlašování na událost si zvolíte jednu ze skupin – tu si vybíráte podle toho, jakých exkurzí (pro danou skupinu určených) byste se zúčastnili nejraději. Při posledním DSEFu, který se konal 7. 11. 2022, si tak bylo možné projít například Astronomický ústav, Ústav jaderného výzkumu, podívat se na urychlovač elektronů v akci, prohlédnout si vybrané laboratoře Fyzikálního ústavu AV ČR a další.

DSEF

Přejeme všem středoškolákům hodně úspěchů do nového školního roku, a ať už se rozhodnete zapojit se do kterékoli soutěže FYKOSu, budeme se na vás těšit!

ROZHLEDY
matematicko-fyzikální
Ročník 98 (2023), číslo 2

OBSAH

Pokyny pro autory

Příspěvky dodávejte na adresu redakce v elektronické podobě. Nejlépe napsané ve formátu LaTeX, přijatelný je i formát PlainTeX, je akceptovatelný i text připravený editorem Word či podobným.

Pokud jde o obrázky, je žádoucí, aby byly připraveny v reprodukovatelné podobě. Každý obrázek nechť je v samostatném souboru, nejlépe ve formátu eps nebo pdf. Přípustná je též bitmapa v dostatečném rozlišení.

Ke každému zasílanému příspěvku (ne u soutěží, zpráv a recenzí) přiložte krátkou anotaci v českém jazyce. Dále je žádoucí, aby u každého příspěvku byla uvedena literatura, na kterou je v textu odkazováno.