

ROZ HLEDY

MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ

ČASOPIS PRO ZÁJEMCE O MATEMATIKU, FYZIKU A INFORMATIKU

ROČNÍK 98 (2023) • ČÍSLO 3

Hrajeme si s pravděpodobností

Jana Kopfová, MÚ SU Opava a Mendelovo gymnázium Opava

Abstrakt. Ukážeme si jednoduchou hru s pravděpodobností, která v sobě skrývá jednoduché, středně těžké až hodně náročné problémy. Ty poslední mohou být vhodným námětem pro práci SOČ. V následujícím příspěvku popíšu aktivitu, která vám může zpestřit hodiny matematiky, jste-li učitelé matematiky, nebo si úlohy můžete sami vyřešit a najít v nich potěšení, jste-li studenti.

Pravidla hry

Dva hráči hrají následující hru: Do pytlíku umístíme b bílých a m modrých kuliček. Hráči zavřou oči a každý si vytáhne z pytlíku jednu kuličku. První hráč vyhrává, pokud jsou obě kuličky stejné barvy, druhý hráč vyhrává, pokud jsou kuličky různé barvy. Které kombinace barev vytvoří férovou hru? Pro větší srozumitelnost dalšího textu označme hru s b bílými a m modrými kuličkami jako $h(b, m)$. První pozorování nám říká, že hra $h(b, m)$ je stejná jako hra $h(m, b)$, a proto v dalším budeme uvažovat jen $b \geq m$.

Trénink

Úloha je hodně komplexní, proto se nejdříve podíváme na jednodušší situace, které pomůžou lépe pochopit celé zadání.

Úloha 1. Je hra $h(6, 1)$ férová ve smyslu, že oba hráči mají stejnou šanci na výhru?

Podívejme se, v kolika situacích má šanci na výhru první hráč. Je to zřejmě jenom tehdy, když oba hráči vytáhnou dvě bílé kuličky, bílých kuliček je 6, a proto počet příznivých možností pro prvního hráče je 6×5 , tedy 30. Druhý hráč může vyhrát, jenom když jeden z hráčů vytáhne modrou kuličku, k ní je možné vytáhnout druhou kuličku 6 způsoby, dohromady je to tedy 12 možností.

Poměr vítězných her je $30 : 12 = 5 : 2$ ve prospěch prvního hráče. Poznamenejme, že pokud by někdo uvažoval nad tím, že nezáleží na tom, který z hráčů vytáhne jakou kuličku, tak možností by bylo v obou případech dvakrát méně, ale poměr by zůstal stejný. Toto může některé studenty zmást a je dobré si to vyjasnit již na začátku.

Tato hra není férová. Alternativně se dá spočítat pravděpodobnost výhry prvního hráče jako

$$\begin{aligned}\Pr(\text{stejné}) &= \Pr(\text{bb}) + \Pr(\text{mm}) \\ &= \frac{6}{7} \cdot \frac{5}{6} + 0 = \frac{5}{7}.\end{aligned}$$

(je 6 způsobů, jak vybrat první bílou kuličku, a 5 způsobů, jak vybrat druhou bílou kuličku) a pravděpodobnost výhry druhého hráče jako

$$\begin{aligned}\Pr(\text{různé}) &= \Pr(\text{bm}) + \Pr(\text{mb}) \\ &= \frac{6}{7} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{7} \cdot 1 = \frac{2}{7}.\end{aligned}$$

Hra $h(6, 1)$ je výhodná pro prvního hráče. Pro jaké b a m je hra férová? Ještě možná není ten správný čas tuto otázku zodpovědět, ale možná někoho napadne, že by mohla být pro $b = m$, tedy když je počet bílých a modrých kuliček stejný.

Úloha 2. Rozmyslete si řešení problému pro $b = m = 2$.

Podobným uvažováním jako v první úloze dojdeme tady k možná překvapivému závěru, že větší šanci na výhru má druhý hráč. Podrobněji je to $2 : 4 = 1 : 2$, ve prospěch druhého hráče, tady je snadné všechny situace i vypsat. Pokud si kuličky označíme jako m_1, m_2 a b_1, b_2 , první vyhraje jenom při výběru $\{m_1, m_2\}$ a $\{b_1, b_2\}$, druhý má možnosti, kdy vyhraje, více: $\{m_1, b_1\}$, $\{m_1, b_2\}$, $\{m_2, b_1\}$ a $\{m_2, b_2\}$. Kdybychom vypisovali možnosti, kde záleží na pořadí vytažených kuliček, tedy uspořádané dvojice, tak jich bude dvakrát tolik. Např. příznivé možnosti pro prvního hráče budou (m_1, m_2) , (m_2, m_1) , (b_1, b_2) , (b_2, b_1) . Tím se výsledný poměr nezmění.

Rozehřívací kolo

Podívejme se, kdy je hra $h(b, m)$ férová pro malý počet kuliček.

Úloha 3. Pro jaké b a m , obě menší než 7, je hra $h(b, m)$ férová?

Tady je pořád dobré dát si dostatečný prostor a čas pro experimentování. Možná se někomu povede přijít na to, že hra $h(3, 1)$ je férová. To jistě povzbudí k dalšímu objevování. Někteří možná začnou úlohu řešit hned obecně pomocí písmenek a pravděpodobností, ale taková cesta tak

brzy ke konkrétním konfiguracím nevede. Někomu možná bude stačit ověření, že hra $h(3, 1)$ je opravdu férová.

$$\begin{aligned} \Pr(\text{stejné}) &= \Pr(\text{bb}) + \Pr(\text{mm}) \\ &= \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \cdot 0 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

(jsou 3 způsoby, jak vybrat první bílou kuličku, a 2 způsoby, jak vybrat druhou bílou kuličku).

Pro kontrolu spočteme pravděpodobnost výběru různých kuliček.

$$\begin{aligned} \Pr(\text{různé}) &= \Pr(\text{bm}) + \Pr(\text{mb}) \\ &= \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Hra $h(3, 1)$ je opravdu férová.

Je ještě nějaká další férová hra pro b a m menší než 7? Ano je, a je to $h(6, 3)$. Tady necháme výpočet a ověření na čtenáři. Můžeme postupovat jakýmkoliv způsobem uvedeným výše. Můžeme počítat pravděpodobnosti pro každého hráče, nebo počítat možnosti, nebo si dokonce zkusit všechny možnosti vypsát.

Okresní přebor

Jak to bude pro obecné b a m ?

Úloha 4. Umíte najít všechna b a m taková, že hra $h(b, m)$ bude férová? Pokuste se svoji hypotézu i dokázat.

Možná někdo pomocí pokusů objeví celou řadu vyhovujících her $h(3, 1)$, $h(6, 3)$, $h(10, 6)$, $h(15, 10)$, $h(21, 15)$ atd. Další to možná dokážou zobecnit: Mohly by vyhovovat dvojice po sobě jdoucích tzv. trojúhelníkových čísel, tj. čísel ve tvaru $\frac{k(k-1)}{2}$ (více informací viz [1]). Někdo možná naopak zjistí, že pro férovou hru musí počty b bílých a m modrých kuliček splňovat vztah

$$\frac{b(b-1)}{2} + \frac{m(m-1)}{2} = m \cdot b. \quad (1)$$

K vztahu (1) můžeme dojít buď úvahou jako výše, že je $\frac{b(b-1)}{2}$ způsobů, jak vybrat dvě bílé kuličky, a $\frac{m(m-1)}{2}$ způsobů, jak vybrat dvě modré

kuličky, a $m \cdot b$ způsobů, jak vybrat jednu bílou a jednu modrou kuličku, nebo přes počítání pravděpodobností, což je o něco složitější:

$$\begin{aligned} \Pr(\text{stejné}) &= \Pr(\text{různé}) \\ \Pr(\text{bb}) + \Pr(\text{mm}) &= \Pr(\text{bm}) + \Pr(\text{mb}) \\ \frac{b}{b+m} \cdot \frac{b-1}{b+m-1} + \frac{m}{b+m} \cdot \frac{m-1}{b+m-1} &= \frac{b}{b+m} \cdot \frac{m}{b+m-1} + \frac{m}{b+m} \cdot \frac{b}{b+m-1}. \end{aligned}$$

Poznamenejme, že oba způsoby počítání vedou k stejné rovnici, ale v prvním případě počítáme neuspořádané dvojice, ve druhém uspořádané (uvažujeme, kterou kuličku vybíráme jako první). Z (1) se snadno po úpravě odvodí, že

$$(b - m)^2 = b + m. \quad (2)$$

Poměrně jednoduše se potom dá dosazením za $b = \frac{k(k+1)}{2}$ a $m = \frac{k(k-1)}{2}$ do (2) ověřit, že po sobě jdoucí trojúhelníková čísla skutečně vyhovují. Ale máme tím náš problém opravdu už vyřešený? Jak víme, že žádná další b a m nevyhovují? Dá se na to přijít například tak, že se podíváme na vztah (2) upravený do tvaru

$$b^2 - b(1 + 2m) + m^2 - m = 0$$

jako na kvadratickou rovnici v proměnné b a m bude parametr. My chceme, aby tato kvadratická rovnice měla celočíselná řešení. Její diskriminant je $1 + 8m$, což musí být druhá mocnina přirozeného čísla ℓ , aby odmocnina byla celočíselná, tj. $8m = \ell^2 - 1$. To bude platit jenom pro ℓ liché, tj. $\ell = 2k - 1$, kde k je přirozené, což nám již dává $m = \frac{k(k-1)}{2}$. Poté b dopočítáme snadno z kvadratické rovnice a bude ve tvaru $b = \frac{k(k+1)}{2}$, tj. opravdu jenom po sobě jdoucí trojúhelníková čísla dávají férovou hru. (Podrobněji řečeno: kvadratická rovnice bude mít ještě druhé řešení, které odpovídá ale b menšímu než m .)

Tato druhá část řešení je moc pěknou úlohou na řešení kvadratické rovnice s parametrem v kombinaci s hledáním celočíselných řešení.

Krajské kolo

A jak by vypadalo zobecnění úlohy pro více barev a případně i hráčů? Začneme s tím nejjednodušším. Uvažujme situaci ze začátku příspěvku. Tentokrát budeme mít kuličky tří různých barev a dva hráče. Hru zapíšeme jako $h(b, m, c)$.

Úloha 5. Umíte najít takový počet kuliček jednotlivých barev, aby hra byla pro 2 hráče férová?

Ač vybavení zkušeností z předchozích úloh brzy zjistíte, že úloha je příliš náročná. Buť i objevit jedinou možnou férovou hru dá docela dost práce a hledání. Možná vás napadne se pokusit najít vyhovující hru ve tvaru $h(1, 3, ?)$. Po dlouhém zkoušení a odhadování se vám možná povede najít hru $h(1, 3, 9)$. A možná i $h(1, 9, 18)$. Jak ale vypadají všechny férové hry $h(1, 3, ?)$. Podobně jako v jednodušší úloze se dá i tady sestavit rovnice

$$\frac{b(b-1)}{2} + \frac{m(m-1)}{2} + \frac{c(c-1)}{2} = m \cdot b + m \cdot c + b \cdot c,$$

kde c značí počet kuliček třetí barvy, třeba červené. Najít všechna řešení je složitý problém, ale můžete se pokusit najít alespoň některá řešení.

Úloha 6. Najděte všechny férové hry $h(b, m, ?)$, kde (b, m) tvoří dvojici po sobě jdoucích trojúhelníkových čísel, tj. dvojici, pro kterou je hra $h(b, m)$ pro dva hráče férová.

To vede k řešení $h(b, m, 2(b+m)+1)$, kde b a m jsou po sobě jdoucí trojúhelníková čísla.

Mnohem náročnější je najít všechny férové hry $h(b, m, c)$, pro které je hra pro dva hráče férová. Možná vás napadne napsat si program, který vám vypíše všechna řešení pro malé b , m a c . Z toho se dá vyzorovat, že každá dvojice z úlohy pro kuličky dvou barev, tj. dvojice po sobě jdoucích trojúhelníkových čísel, se dá doplnit na hledanou trojici třetím číslem c . Taky pro dané c lze řešit podobně jako v případě dvou barev kvadratickou rovnicí s parametrem a hledat její celočíselná řešení.

Národní liga

Můžeme se rovněž pokusit o zobecnění úlohy pro kuličky q barev a pro p hráčů. Hledání kompletního řešení zobecněného problému může být hezkým námětem na práci SOČ.

Literatura

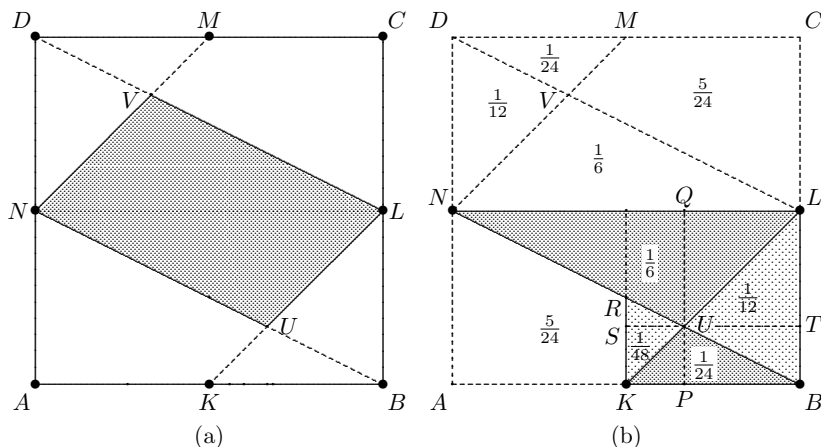
- [1] Sedláček, J.: *Faktoriály a kombinační čísla*. 6. kapitola, Trojúhelníková čísla, Mladá fronta, Praha, 1964, s. 60–71. <https://dml.cz/handle/10338.dmlcz/403521>.

Rovnoběžník ve čtverci

Vlastimil Dlab, Bzí u Železného Brodu

S touto úlohou jste se patrně už setkali:

Ve čtverci $ABCD$ označme písmeny K, L, M, N středy jeho stran. Dále označme písmenem U průsečík úseček KL a BN a písmenem V průsečík úseček MN a DL (viz obr. 1(a)). Úkolem je určit poměr obsahů rovnoběžníku $ULVN$ a daného čtverce $ABCD$.



Obr. 1: Úloha (a) a řešení (b)

Řešení je jednoduché, neboť obsah geometrických útvarů vyznačených na obr. 1(a) s výjimkou trojúhelníku KBU (a tedy i sousedních čtyřúhelníku $AKUN$ a trojúhelníku BLU) je snadné bezprostředně vyčíslit. Výpočet obsahů trojúhelníků KBU a BLU je vyznačen na obr. 1(b). Využívá podobnosti trojúhelníků KBU a LNU a trojúhelníků BLU a RKU s koeficientem podobnosti $\frac{1}{2}$. Tedy

$$|PU| = \frac{1}{2}|QU| = \frac{1}{3}|PQ| = \frac{1}{6}|AB|,$$

a podobně

$$|TU| = \frac{1}{3}|AB|.$$

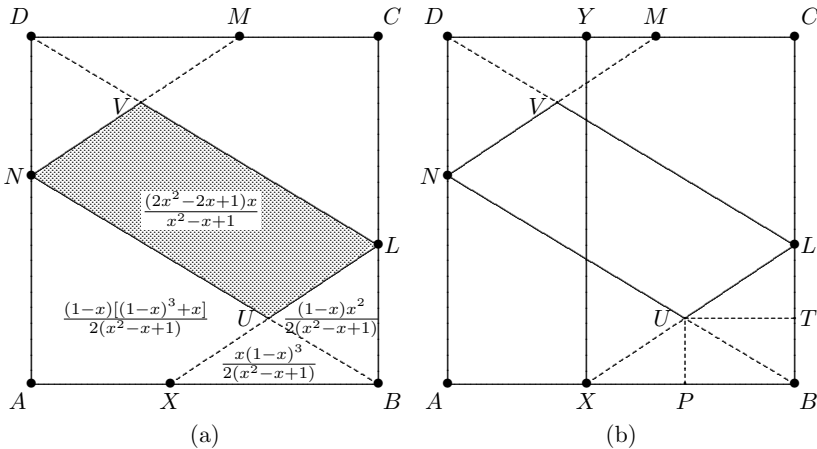
Nyní je snadné poměry všech vyznačených útvarů k obsahu čtverce $ABCD$ vyčíslit tak, jak je uvedeno na obr. 1(b). Označíme-li $|AB| = a$, je obsah rovnoběžníku $ULVN$

$$\mathbf{S}(ULVN) = \mathbf{S}(BLDN) - 2\mathbf{S}(BLU) = \frac{1}{2}a^2 - 2 \cdot \frac{1}{12}a^2 = \frac{1}{3}a^2.$$

Poměr obsahů rovnoběžníku $ULVN$ a čtverce $ABCD$ je tedy $\frac{1}{3}$.

Poznamenejme, že posloupnost obsahů trojúhelníků RKU , KBU , BLU a LNU tvoří geometrickou posloupnost.

Tato úloha nás vede k obecné otázce: *Jaký je poměr obsahů rovnoběžníku a čtverce v případě, že bod K je na straně AB zvolen libovolně (viz obr. 2, kde je tento bod označen písmenem X).*



Obr. 2: Obecná úloha

Označme opět $|AB| = a$ a (proměnnou) délku $|AX| = |BL| = |CM| = |DN| = xa$, $0 \leq x \leq 1$. Obsah $\mathbf{S}(BLDN)$ rovnoběžníku $BLDN$ je stejný jako obsah obdélníku o stranách DN a DC , který je shodný s obdélníkem $AXYD$, a tedy

$$\mathbf{S}(BLDN) = \mathbf{S}(AXYD) = xa^2.$$

Trojúhelníky BLU a DNV mají stejný obsah, a tudíž se obsah $\mathbf{S}(ULVN)$ rovná

$$\mathbf{S}(ULVN) = \mathbf{S}(BLDN) - 2\mathbf{S}(BLU).$$

MATEMATIKA

Označíme-li $|UT| = t$, je $\mathbf{S}(BLU) = \frac{1}{2}txa$. Délku t společně s délkou $|UP| = p$ určíme tím, že využijeme podobnosti trojúhelníků UPB a NAB a podobnosti trojúhelníků UPX a LBX :

$$\frac{|UP|}{|NA|} = \frac{|PB|}{|AB|},$$

tj.

$$p = (1 - x)t$$

a

$$\frac{|UP|}{|LB|} = \frac{|XP|}{|XB|},$$

tj.

$$p = \frac{(1 - x)xa - xt}{1 - x}.$$

Odtud dostáváme

$$(1 - x)^2t = (1 - x)xa - xt$$

a následně

$$t = \frac{(1 - x)x}{x^2 - x + 1}a,$$

a tedy

$$\mathbf{S}(BLU) = \frac{(1 - x)x^2}{2(x^2 - x + 1)}a^2.$$

Poměr obsahů rovnoběžníku $ULVN$ a čtverce $ABCD$ je tedy

$$\frac{\mathbf{S}(ULVN)}{\mathbf{S}(ABCD)} = \left(xa^2 - \frac{(1 - x)x^2}{x^2 - x + 1}a^2 \right) \frac{1}{a^2} = \frac{(2x^2 - 2x + 1)x}{x^2 - x + 1}.$$

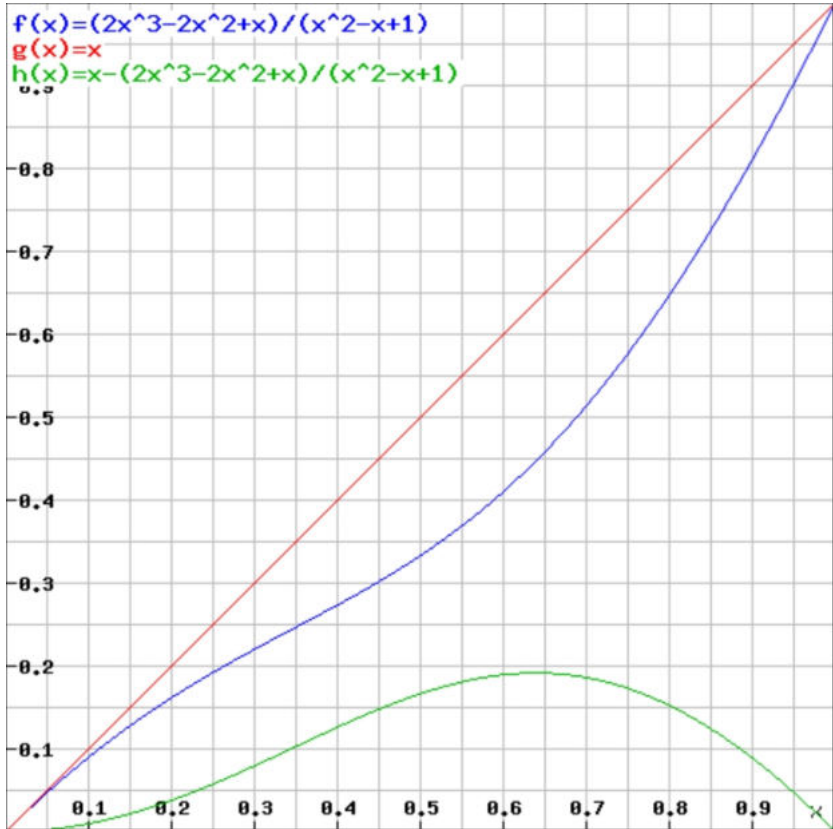
Pro $x = \frac{1}{2}$ je tento poměr, jak jsme už zjistili dříve, $\frac{1}{3}$. Snadno vyčíslíme, že pro

$$x = \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{10}, \frac{1}{5}, \frac{3}{10}, \frac{2}{5}, \frac{1}{11}, \frac{1}{100}, \dots$$

se poměr postupně rovná

$$\frac{5}{26}, \frac{5}{21}, \frac{10}{21}, \frac{15}{26}, \frac{41}{455}, \frac{17}{105}, \frac{87}{395}, \frac{26}{95}, \frac{101}{1221}, \frac{4901}{495050}, \dots$$

Následující graf ilustruje růst tohoto poměru v závislosti na růstu délky x :



Obr. 3: Grafy poměrů obsahů

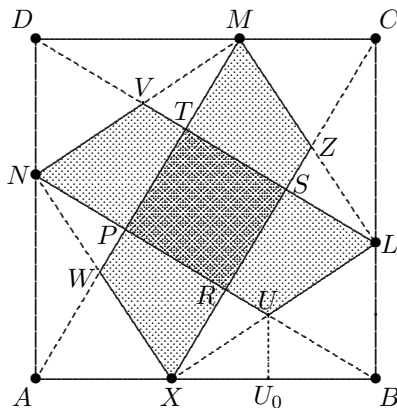
Ilhned vidíme, že tato závislost je podstatně odlišná od velmi jednoduché lineární závislosti poměru obsahů obdélníku $AXYD$ a čtverce $ABCD$ (který je x ; viz obr. 2(b)). Porovnání těchto poměrů je zobrazeno na obr. 3.

Zde můžeme připomenout velmi příbuznou úlohu týkající se čtverce $XLMN$ vepsaného do daného čtverce $ABCD$ a podobnou úlohu týkající se čtverce $PRST$ tak, jak naznačuje obr. 4.

Stejně jako dříve, položme $|AB| = a$ a $|AX| = |BL| = |CM| = |DN| = xa$. Trojúhelníky ABP a NAP jsou podobné a úsečky AM a BN jsou kolmé. Čtyřúhelník $PRST$ je tedy čtverec.

Jeho obsah splňuje

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(PRST) &= \mathbf{S}(ABCD) - \mathbf{S}(ABP) - \mathbf{S}(BCR) - \mathbf{S}(CDS) - \mathbf{S}(DAT) = \\ &= \mathbf{S}(ABCD) - 4 \times \mathbf{S}(ABP). \end{aligned}$$



Obr. 4: Vepsaný čtverec

K výpočtu obsahu trojúhelníku ABP využijeme jeho podobnosti s trojúhelníkem NBA s koeficientem podobnosti

$$\frac{|AB|}{|NB|} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + (1-x)^2 a^2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 2x + 2}}.$$

Tedy

$$\frac{\mathbf{S}(ABP)}{\mathbf{S}(NBA)} = \frac{1}{x^2 - 2x + 2},$$

a jelikož $\mathbf{S}(NBA) = \frac{1-x}{2} a^2$,

$$\mathbf{S}(ABP) = \frac{1-x}{2(x^2 - 2x + 2)} a^2,$$

$$\mathbf{S}(PRST) = a^2 - \frac{2(1-x)}{x^2 - 2x + 2} a^2 = \frac{x^2}{x^2 - 2x + 2} a^2 = \frac{x^2}{(1-x)^2 + 1} a^2.$$

Stejným způsobem využijeme podobnosti trojúhelníků XBR a NBA s koeficientem podobnosti

$$\frac{|XB|}{|NB|} = \frac{1-x}{\sqrt{x^2 - 2x + 2}}$$

k výpočtu

$$\mathbf{S}(XBR) = \frac{(1-x)^2}{x^2-2x+2} \cdot \frac{1-x}{2} a^2 = \frac{(1-x)^3}{2(x^2-2x+2)} a^2.$$

Odtud

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(AXRP) &= \mathbf{S}(ABP) - \mathbf{S}(XBR) = \\ &= \frac{(1-x) - (1-x)^3}{2(x^2-2x+2)} a^2 = \frac{x(1-x)(2-x)}{2(x^2-2x+2)} a^2. \end{aligned}$$

Poznamenejme, že výpočty obsahů útvarů na obr. 4 lze provést řadou způsobů; příkladem může být výpočet obsahu $\mathbf{S}(AXRP)$ s využitím rovnosti

$$\mathbf{S}(AXRP) = \mathbf{S}(ABN) - 2\mathbf{S}(XBR).$$

K výpočtu obsahu $\mathbf{S}(XBU)$ určíme nejprve délku jeho výšky UU_0 ; využijeme k tomu podobnosti trojúhelníků:

$$XLB \sim XU_0 \quad \text{a} \quad BNA \sim BUU_0.$$

Označíme-li $|XU_0| = u$ a $|UU_0| = v$, dostáváme

$$\frac{v}{xa} = \frac{u}{(1-x)a}$$

a

$$\frac{v}{(1-x)a} = \frac{(1-x)a - u}{a}.$$

Máme tedy postupně

$$\begin{aligned} u &= \frac{1-x}{x} v, \\ \frac{v}{1-x} &= (1-x)a - \frac{1-x}{x} v \\ xv &= x(1-x)^2 a - (1-x)^2 v, \end{aligned}$$

a tedy

$$v = \frac{x(1-x)^2}{x^2-x+1} a$$

a

$$\mathbf{S}(XBU) = \frac{x(1-x)^3}{2(x^2-x+1)} a^2.$$

Nyní je už snadné určit

$$\mathbf{S}(XUR) = \mathbf{S}(XBR) - \mathbf{S}(XBU) = \frac{(1-x)^6}{2(x^2-x+1)(x^2-2x+2)} a^2,$$

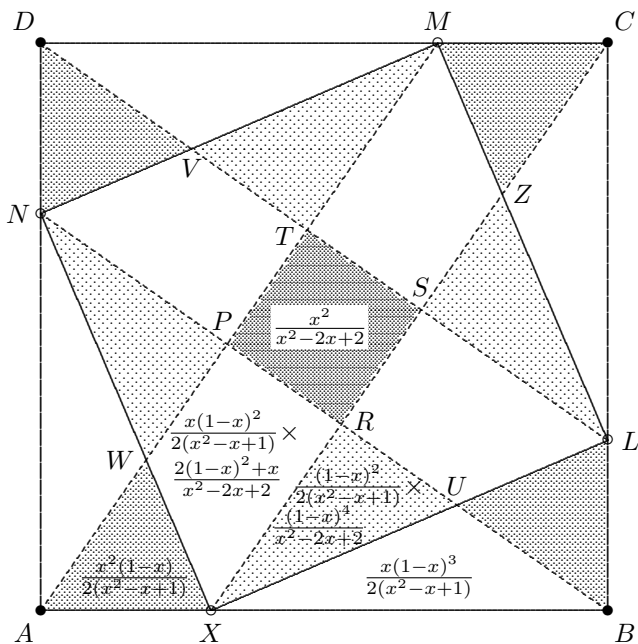
$$\mathbf{S}(AXW) = \mathbf{S}(XBL) - \mathbf{S}(XBU) = \frac{x^2(1-x)}{2(x^2-x+1)} a^2$$

a

$$\mathbf{S}(XRPW) = \mathbf{S}(AXRP) - \mathbf{S}(AXW) = \frac{x(1-x)^2[2(1-x)^2+x]}{2(x^2-x+1)(x^2-2x+2)} a^2.$$

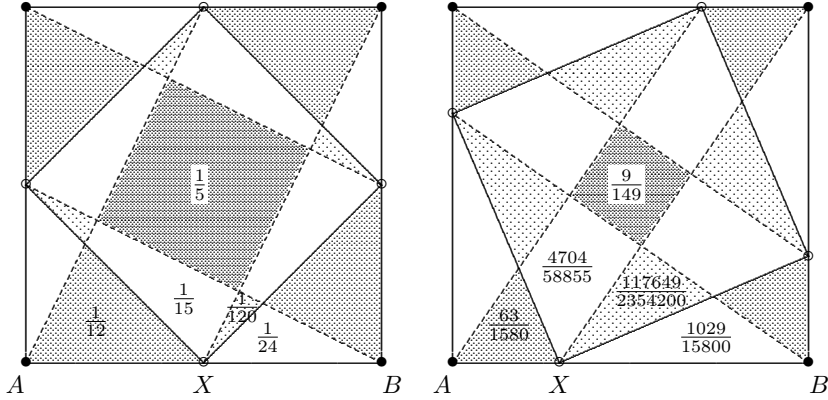
Obdržené výsledky jsou zaznamenány ve formě poměrů k obsahu daného čtverce na obr. 5. Dodejme ještě, že obsah čtverce

$$\mathbf{S}(XLMN) = a^2 - 4\mathbf{S}(AXN) = a^2 - 2x(1-x)a^2 = (2x^2 - 2x + 1)a^2.$$



Obr. 5: Vepsané čtverce ($|AX| = x$, $|AB| = 1$)

Pro $x = \frac{1}{2}$ (viz obr. 6) jsou poměry obsahů zmíněných útvarů k obsahu $\mathbf{S}(ABCD)$ daného čtverce $\mathbf{S}_0 = \mathbf{S}(PRST) = \frac{1}{5}$, $\mathbf{S}_1 = \mathbf{S}(AXW) = \frac{1}{12}$, $\mathbf{S}_2 = \mathbf{S}(XRPW) = \frac{1}{15}$, $\mathbf{S}_3 = \mathbf{S}(XUR) = \frac{1}{120}$, $\mathbf{S}_4 = \mathbf{S}(XBU) = \frac{1}{24}$ a $\mathbf{S}(XLMN) = \frac{1}{2}$.



Obr. 6: Vepsané čtverce ($x = \frac{1}{2}$ a $x = \frac{3}{10}$); $|AB| = 1$

Pro $x = \frac{1}{3}$ je $\mathbf{S}_0 = \frac{1}{13}$, $\mathbf{S}_1 = \frac{1}{21}$, $\mathbf{S}_2 = \frac{22}{273}$, $\mathbf{S}_3 = \frac{32}{819}$, $\mathbf{S}_4 = \frac{4}{63}$ a $\mathbf{S}(XLMN) = \frac{5}{9}$.

Pro $x = \frac{3}{10}$ (viz obr. 6) máme $\mathbf{S}_0 = \frac{9}{149}$, $\mathbf{S}_1 = \frac{63}{1580}$, $\mathbf{S}_2 = \frac{4704}{58855}$, $\mathbf{S}_3 = \frac{117649}{2354200}$, $\mathbf{S}_4 = \frac{1029}{15800}$ a $\mathbf{S}(XLMN) = \frac{29}{50}$.

Závislost růstu obsahu $\mathbf{S}(PRST)$ na růstu $x = |AX|$ je vyjádřena na obr. 7. Opět můžeme porovnat růst obsahů jednotlivých obrazců vepsaných do daného čtverce.

Článek ukončíme malou úlohou:

Dokažte, že pro $x = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ platí

$$\mathbf{S}(XBU) = \mathbf{S}(BLU) = \frac{\sqrt{5}-2}{4} a^2$$

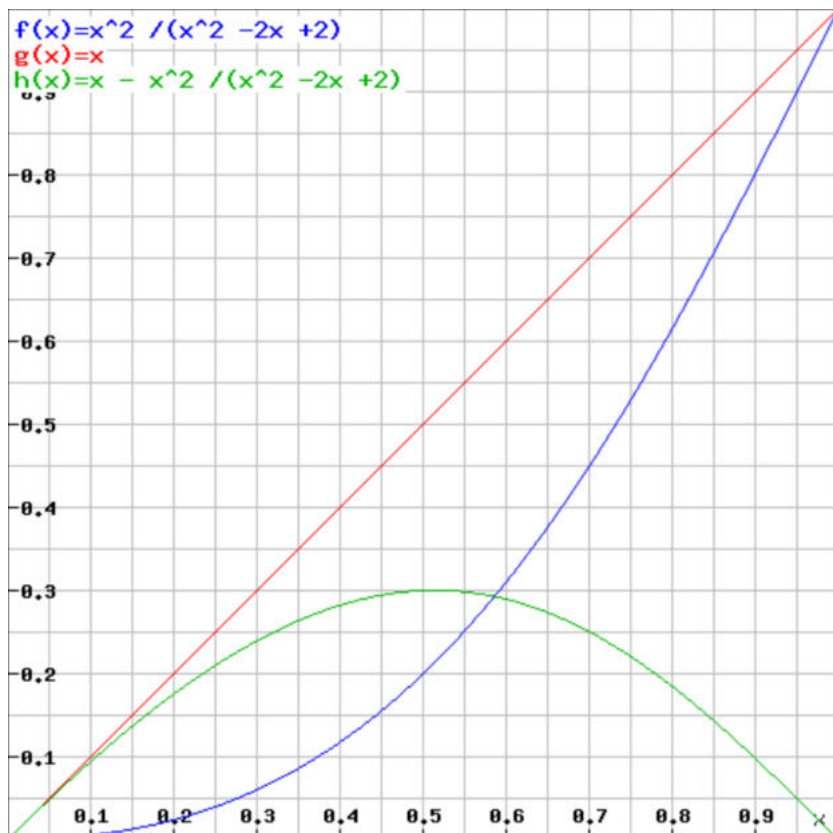
a že $x = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ je jedinou hodnotou, pro niž

$$\mathbf{S}(XBU) = \mathbf{S}(BLU).$$

MATEMATIKA

Přesvědčte se též, že obsah čtverce $PRST$ je v tomto případě roven

$$\frac{5 - 2\sqrt{5}}{5} a^2 = \left(1 - \frac{2\sqrt{5}}{5}\right) a^2.$$



Obr. 7: Další grafy poměrů obsahů

Literatura

- [1] mindyourdecisions.com/blog/2020/05/17/the-square-inside-the-square

Jak to vlastně je? Fraktály

Dalibor Martišek, Šlapanice

Fraktály jsou geometrické útvary objevené již před více než sto lety. Jméno těmto útvarům však dal až Benoit Mandelbrot v šedesátých letech minulého století. Dnes se tyto útvary těší velké oblibě a zabývá se jimi široké spektrum prací – od popularizačních textů určených pro širokou veřejnost až po špičkové matematické články určené jen velmi úzkému okruhu specialistů.

Již samotné vymezení pojmu fraktál je značně problematické a ani mezi matematiky nepanuje naprostá shoda v názoru, co to fraktál vlastně je. Nejuznávanější definice pochází od výše zmíněného Mandelbrota, který definoval fraktál jako množinu, jejíž Hausdorffova dimenze je ostře větší než dimenze topologická. Hausdorffova dimenze je však pojem značně obtížný a zabývají se jím až některé specializované vysokoškolské kurzy teorie míry. Na opačné straně širokého spektra nejrůznějších charakteristik stojí popularizační tvrzení, že fraktál je synonymem pro složitou či členitou množinu.

Fraktály mají celou řadu zajímavých vlastností, které lze využít mimo jiné i ve středoškolské matematice. Objevují se tedy i didaktické články s touto problematikou, ať již texty pojednávající speciálně o fraktálech a jejich přesné definici (viz např. Panešová, 2020), anebo práce zmiňující fraktály jen okrajově a velmi intuitivně, někdy ovšem bohužel špatně (viz např. [7, 8]).

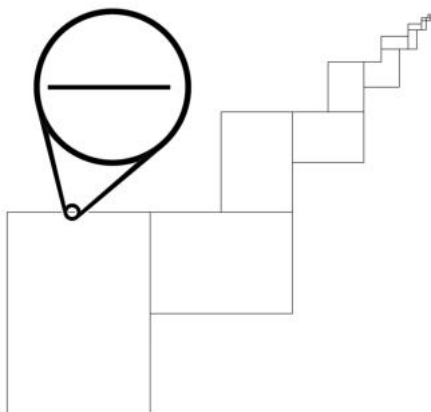
Fraktál. Jak je to špatně

Na obr. 1 vidíme „schodiště papírů formátů řady A“. Toto schodiště je v některých člancích vydáváno za fraktál (např. [7, s. 166], [8, s. 124]).

Tito autoři svůj názor podepírají citací zakladatele fraktální geometrie B. Mandelbrota, který píše, že fraktály jsou tvary, u nichž „detail reprodukuje část a část reprodukuje celek“ [11, s. 7].

Nejen matematik, ale asi každý poznal, že tato slova nejsou definicí fraktálu. Jsou pouhou jeho elegantní zjednodušenou konturou. Návnadou, která má nalákat čtenáře k dalšímu čtení (jsou to slova z úvodu dvousetstránkové populárně naučné knihy). Ovšem ani tuto zjednodušenou

charakteristiku schodiště na obr. 1 nesplňuje – jak by zakroužkovaná a zvětšená část měla „reprodukovat celek“?



Obr. 1: Schodiště papírů formátů řady A

Budeme-li chtít fraktály využít ve výuce na střední škole, máme několik možností, jak je studentům přiblížit. Od přístupu zcela intuitivního, až po jejich přesnou definici. Ovšem intuitivní přístup na jedné straně nesmí vést k chybným závěrům, snaha o přesnou definici na straně druhé by měla zůstat v možnostech středoškolské matematiky. V dalším textu se pokusíme přesvědčit čtenáře o tom, že obojího lze dosáhnout.

Fraktál. Jak je to intuitivně

Co asi myslel Benoit Mandelbrot slovy „detail reprodukuje část a část reprodukuje celek“? Jak již bylo řečeno, není to matematická definice, takže i k vysvětlení lze použít prostředek zcela nematematický, didakticky však velmi účinný – totiž vhodný obrázek. Domníváme se, že k intuitivnímu pochopení pojmu fraktál naprosto stačí například obr. 2.

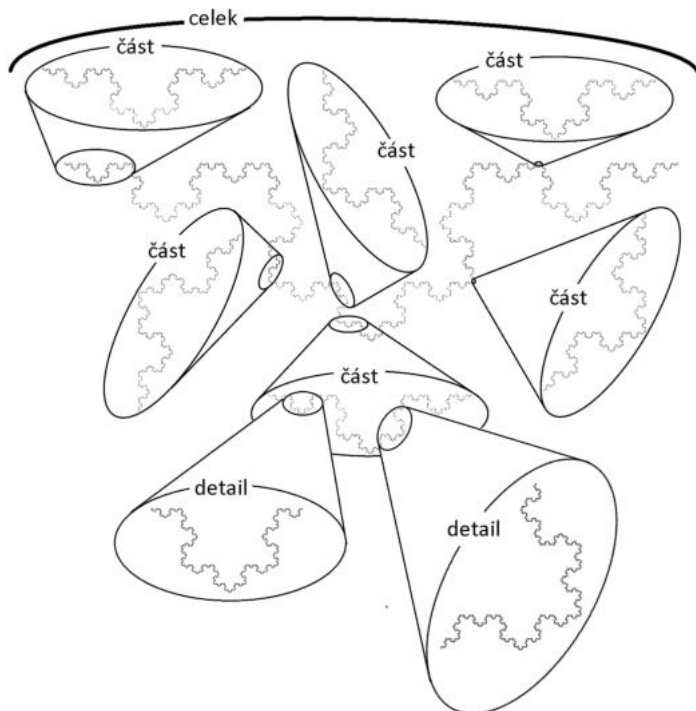
V následujícím textu pojem fraktál vysvětlíme matematicky zcela korektně, pouze s ohledem na středoškolskou přiměřenost matematického formalismu.

Délka, obsah, objem a míra

Délka, obsah a objem jsou na střední škole definovány jako kladná reálná čísla, která přiřazujeme jednotlivým útvarům tak, že

- a) délka, obsah resp. objem shodných útvarů jsou stejné

b) délka, obsah resp. objem útvaru složeného z nepřekrývajících se útvarů je roven součtu délek, obsahů, objemů těchto útvarů (viz např. [18, s. 451, 487]).



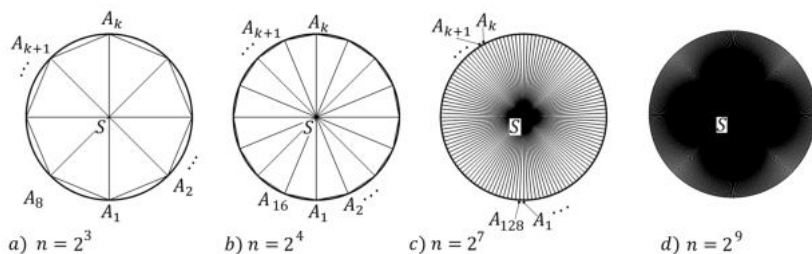
Obr. 2: Ilustrace fraktálu – útvaru, jehož „detail reprodukuje část a část reprodukuje celek“: v každé (seběmenší) části lze najít detail, který je (geometricky) podobný celému útvaru

Základem tohoto přiřazení je volba jednotkové úsečky, čtverce resp. krychle. V nejjednodušších případech pak můžeme obvod, obsah či objem daného útvaru přímo složit z těchto úseček, čtverců či krychlí. Obvody, obsahy resp. objemy mnohých dalších útvarů určíme dalším použitím pravidel a) a b). Délku určujeme jako součet délek úseček, na který lze studovaný útvar rozdělit. Podobně určíme obsah útvaru tak, že ho rozdělíme na nepřekrývající se útvary se známým obsahem (například trojúhelníky), a pak sečteme obsahy těchto útvarů. Tyto postupy lze chápat také tak, že najdeme množinu úseček resp. rovinných či prosto-

rových útvarů se známou délkou resp. obsahem či objemem, které se nepřekrývají a zkoumaný útvar přesně pokrývají.

V Polákově definici se ovšem skrývá problém. Již ze základní školy známe například vzoreček pro délku kružnice. Jak k němu dospějeme? Kružnici lze rozdělit jen na kruhové oblouky a určení délky kruhového oblouku není o nic jednodušší než určení délky celé kružnice. Bod b) lze v tomto případě splnit pouze tak, že sestrojíme n -tice nepřekrývajících se úseček (například obvodu vepsaných či opsaných n -úhelníků), které přesně pokryjí kružnici až ve své limitě pro $n \rightarrow \infty$. Obsah kruhu dostaneme analogicky jako limitu obsahů těchto n -úhelníků.

Na obr. 3 je ilustrována přibližná délka kružnice a přibližný obsah kruhu jako obvod a obsah pravidelného n -úhelníku pro $n = 2^m$, kde $m = 3$ (obr. 3a), $m = 4$ (obr. 3b), $m = 7$ (obr. 3c) a $m = 9$ (obr. 3d). Pro $m \rightarrow \infty$ přejde n -úhelník v kružnici a množina trojúhelníků v kruh. Přesnou délku kružnice můžeme tedy určit jako limitu součtů velikostí úseček $A_k A_{k+1}$ a obsah kruhu jako limitu součtů obsahů trojúhelníků $A_k S A_{k+1}$.



Obr. 3: K délce kružnice, obsahu kruhu a „délce kruhu“

V bodě b) Polákovy definice je tedy třeba výslovně připustit nekonečný počet útvarů a součet nekonečně mnoha délek, obsahů či objemů. V tom případě můžeme ovšem kruh dostat nejen jako limitu obsahů, ale i jako limitu délek vhodných křivek, či objemů vhodných těles. Podobně lze sestroit posloupnost obsahů či objemů, jejichž limitou je kružnice (nikoliv kruh či koule). Můžeme tedy hovořit o „délce“ či „objemu“ kruhu a o „obsahu“ či „objemu“ kružnice?

Abychom zjistili „délku kruhu“, musíme (stejně jako v případě délky kružnice) sestroit posloupnost množin úseček, které v limitě pokryjí celý kruh (nikoliv jen jeho hraniční kružnici). Sjednotíme postupně obvody trojúhelníků $A_k S A_{k+1}$ na obr. 3 a) b) c) d). Dostaneme množiny úseček,

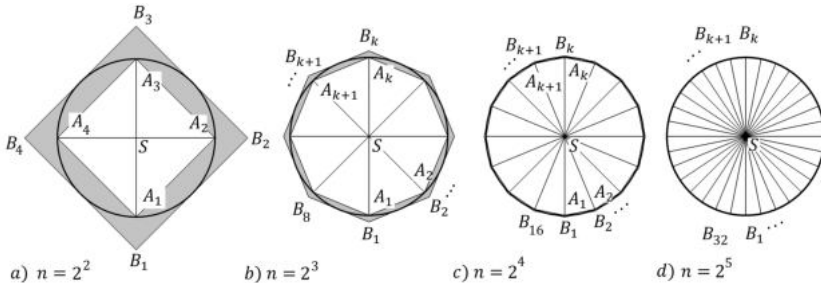
kteřé se nepřekřývají a jejich celková délka je

$$d = 2^m \cdot |A_k A_{k+1}| + 2^m \cdot r,$$

kde r je poloměr kružnice. Pro $m \rightarrow \infty$ tato množina úseček vyplní přesně celý kruh a délka všech jejich úseček je

$$d = \lim_{m \rightarrow \infty} (2^m \cdot |A_k A_{k+1}| + 2^m \cdot r) = \infty.$$

Abychom naopak zjistili „obsah kružnice“, sestrojíme (stejně jako v případě obsahu kruhu) posloupnost rovinných útvarů, které v limitě přesně pokryjí kružnici. Obsah pak zjistíme jako limitu posloupnosti obsahů těchto útvarů. Takovou posloupností může být např. posloupnost útvarů ohraničených obvodu $A_1 \dots A_k A_{k+1} \dots A_n$, $B_1 \dots B_k B_{k+1} \dots B_n$ pravidelných n -úhelníků kružnici vepsaných a opsaných. Na obr. 4 vidíme tyto útvary pro $n = 2^m$, $m = 2, 3, 4, 5$ vyznačené šedě. Pro $m \rightarrow \infty$ splyne tento útvar s kružnicí a limita posloupnosti příslušných obsahů je rovna nule (výpočet přenecháme čtenáři).



Obr. 4: K „obsahu kružnice“

Pojmy „délka kruhu“ a „obsah kružnice“ tedy smysl jistě mají. K tomu, aby byly zcela korektní, zbývá ještě maličkost. Musíme připustit, že délka, obsah a objem, které mohou být určovány jako limity, mohou stejně jako limity nabývat i nulových a nekonečných hodnot. Takto zobecněnou délku, obsah a objem budeme nazývat *míra*. Délka, obsah a objem jsou tedy speciální jedno-, dvoj- a trojrozměrné míry útvaru. Anebo naopak: jedno-, dvoj- a trojrozměrná míra je zobecněním délky, obsahu a objemu.¹⁾ Tím jsme ovšem otevřeli další problém.

¹⁾V dalším textu budeme místo pojmu „dvojrozměrná míra“ či „zobecněný obsah“ často hovořit stručně jen o obsahu, podobně o délce resp. objemu. U délky, obsahu i objemu budeme tedy v dalším textu připouštět nulové a nekonečné hodnoty.

Dimenze. Jak je to špatně

Pojem dimenze skrytě používáme úplně všichni. Běžně říkáme, že úsečka je jednorozměrná, čtverec dvojrozměrný, krychle trojrozměrná. Většinou si myslíme, že počet rozměrů je zcela jasný a že ho není potřeba vůbec vysvětlovat. Jakmile se však o nějaké vysvětlení pokusíme, dostaneme se nejspíš do velkých problémů.

Jak vysvětlíme „počet rozměrů“ či „dimenze“? V historii matematiky jsou známy dva neúspěšné pokusy o definici pojmu dimenze geometrického útvaru:

1) Je to počet údajů (čísel, souřadnic, parametrů), které jsou potřeba k určení polohy konkrétního bodu v daném útvaru. Kružnice je jednorozměrná, protože polohu jejího každého bodu určí jeden parametr v jejich parametrických rovnicích. Čtverec je dvojrozměrný, protože k určení polohy bodu ve čtverci jsou potřeba dvě souřadnice, krychle je z analogického důvodu trojrozměrná.

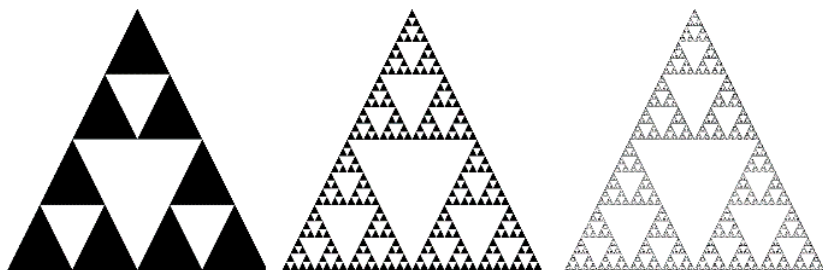
Tuto definici postavili na hlavu Georg Cantor, Ernst Schröder a Felix Bernstein, když sestrojili vzájemně jednoznačné zobrazení úsečky a čtverce (viz např. [12]). Tím mimo jiné ukázali, že k určení přesné polohy bodu ve čtverci stačí jedno jediné číslo. To znamená, že čtverec, který je přímo prototypem dvojrozměrnosti a podle kterého jsou pojmenovány dokonce jednotky obsahu, by měl být podle této definice jednorozměrný.

2) Dimenze (ohraničeného) útvaru se určí podle jeho délky, obsahu či objemu. Každý „běžný“ ohraničený geometrický útvar má totiž nenulovou a konečnou právě jednu z těchto měr. Kruh je dvojrozměrný, protože má nenulový a konečný právě jen obsah. Jeho délka je nekonečná, jeho objem je nulový. Kružnice je jednorozměrná, protože má nenulovou a konečnou právě jen délku. Její obsah a objem je roven nule. Kužel je z analogického důvodu trojrozměrný.

Takto zavedený počet rozměrů (dimenzi) však poslala do historie řada útvarů, které se postupně objevily na přelomu 19. a 20. století. Jako příklad uveďme konstrukci Wacława Franciszka Sierpińskiego ([21, s. 302–305]): sestroj libovolný trojúhelník a vyjmi z něho vnitřek trojúhelníku určeného jeho středními příčkami. Na tři zbývající trojúhelníky aplikuj tutéž konstrukci, s devíti následujícími trojúhelníky proved' totéž a takto pokračuj do nekonečna. Na obr. 5 jsme takto postupně odstraňovali bílé trojúhelníky z trojúhelníku černého).

Otázkou je, jaká je dimenze výsledného útvaru ve výše uvedeném smyslu. Je-li tato dimenze dvě, musí být jeho obsah nenulový a konečný,

jeho délka nekonečná. Je-li dimenze jedna, musí být nenulová a konečná délka a nulový obsah. Jestliže však délku a obsah spočítáme, zjistíme, že neplatí ani jedno, ani druhé. Jsou to jednoduchá cvičení na geometrickou řadu (u délky napovězme, že útvar obsahuje obvody všech vyjímáných trojúhelníků). Zájemce o výpočet můžeme odkázat na text Vlastimila Dlaba [1]. Délka je nekonečná, ale obsah už je nulový. Jako kdyby dimenze jedna byla málo a dimenze dvě už moc.



Obr. 5: Druhý, pátý a sedmý krok konstrukce rovnoramenného Sierpiňského trojúhelníku

Dimenze. Jak je to správně

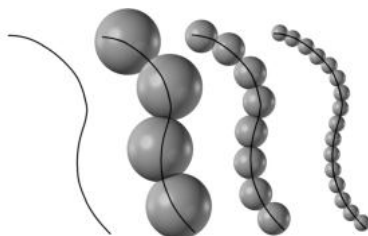
Počet rozměrů, dimenzi, je tedy třeba určovat jinak. Útvar na obr. 6 vlevo bychom rádi považovali za jednorozměrný, útvar na obr. 7 vlevo za dvojrozměrný. V zájmu jednotného postupu pro všechny tři možné dimenze umístíme tyto útvary do trojrozměrného prostoru²⁾ a pokrývejme je „co nejúsporněji“ otevřenými koulemi o poloměru r , který se neustále zmenšuje. Od jisté velikosti poloměru r se nám pokrytí nepodaří lépe než tak, že na obr. 6 se musejí překrývat vždy minimálně dvě koule, na obr. 7 minimálně koule tři. Kdybychom totéž provedli s útvarem, který běžně považujeme za trojrozměrný, musely by se překrývat minimálně koule čtyři. Dimenzí útvaru, počtem rozměrů tak, jak tyto pojmy běžně chápeme, bude tedy minimální počet překrývajících se koulí zmenšený o jedničku.

Při pokrývání hranice papírového schodiště z obr. 1 se překrývají vždy dvě koule – tato hranice je jednorozměrná (viz obr. 8).

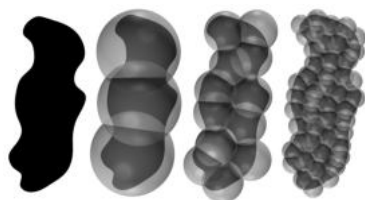
Otázkou zůstává, jaká je dimenze Sierpiňského trojúhelníku, kterou jsme nedokázali určit v předchozím textu. Odpověď poskytne obr. 9. Od

²⁾ Poznamenejme, že s dimenzí celé roviny a celého prostoru problémy nejsou. Dimenze je v tomto případě určena počtem navzájem kolmých přímek, které zde existují.

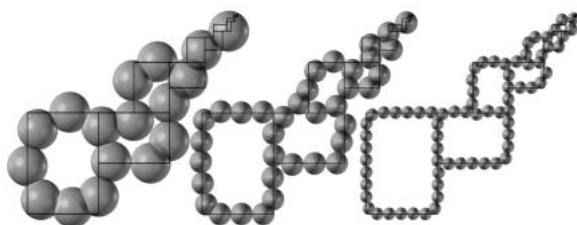
jistého poloměru r pokrývajících koulí se musejí překrývat vždy jen dvě. Tento útvar je jednorozměrný. Má dimenzi jedna – je to křivka.



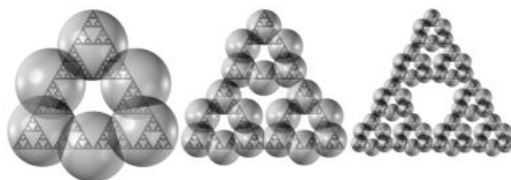
Obr. 6: Pokrývání jednorozměrného útvaru (vlevo) zmenšujícími se otevřenými koulemi



Obr. 7: Pokrývání dvojrozměrného útvaru (vlevo) zmenšujícími se otevřenými koulemi

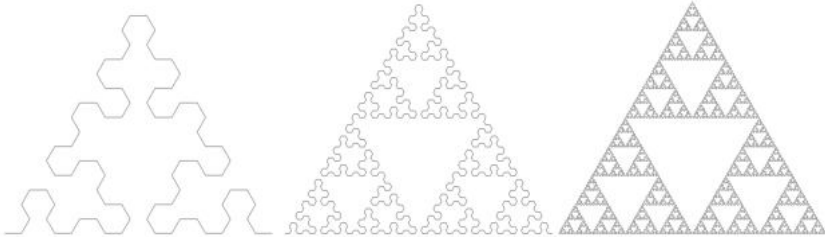


Obr. 8: Pokrývání schodiště papírů z obr. 1 zmenšujícími se otevřenými koulemi



Obr. 9: Pokrývání Sierpiňského trojúhelníku zmenšujícími se otevřenými koulemi

Ten, kdo tomu nevěří, se snad nechá přesvědčit konstrukcí, kterou objevil v šedesátých letech minulého století Aristid Lindenmayer [10] a která je naznačena na obr. 10.



Obr. 10: Čtvrtý, šestý a osmý člen posloupnosti křivek, jejíž limitou je Sierpiňského trojúhelník

Kam se poděla velikost?

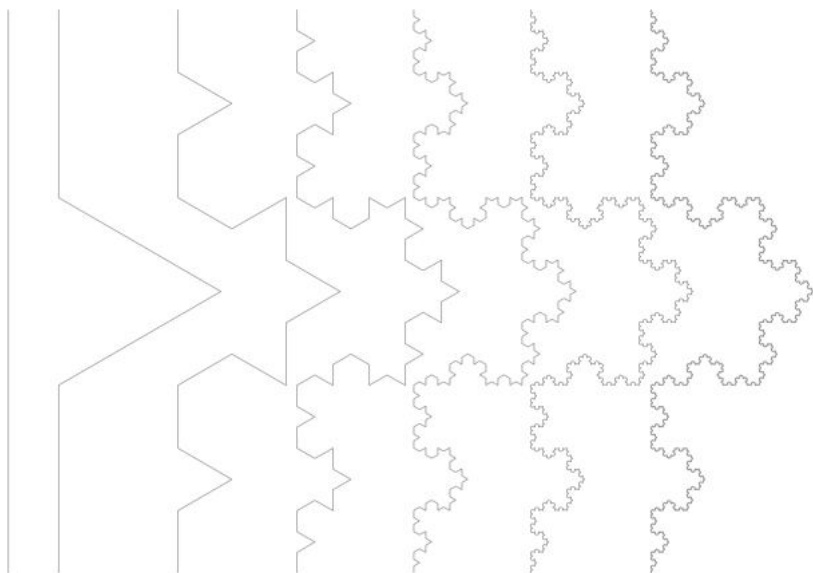
Dimenze tak, jak jsme ji zavedli v minulém oddílu, však nevyřešila jeden zásadní problém. U ohraničených geometrických útvarů jsme zvyklí měřit jejich „velikost“. Číslo opatřené jednotkou délky, obsahu či objemu podle toho, zda se jedná o útvar jedno-, dvo- či trojrozměrný. To nám umožňuje mimo jiné porovnávat útvary podle velikosti.

Takto můžeme určit například „velikost“ papírového schodiště, a to jak jeho hraniční křivky (tj. délku), tak „velikost“ plochy, která je touto křivkou ohraničena (tedy obsah). Ale „velikost“ Sierpiňského trojúhelníku takto určit nemůžeme. Útvar je ohraničený, jednorozměrný, ale jeho délka je nekonečná. Křivka na obr. 2 nazvaná podle Nielse Fabiana Helge von Kocha, který ji sestrojil v roce 1904, je na tom stejně. Je ohraničená, jednorozměrná, ale její délka je nekonečná. Snadno to plyne z její konstrukce (viz obr. 11): danou úsečku rozdělíme na třetiny, nad prostřední třetinou sestrojíme rovnostranný trojúhelník a původní třetinu vyjme. Na každé ze čtyř takto vzniklých úseček zopakujeme tutéž konstrukci a takto pokračujeme do nekonečna (von Koch, 1904). Každá následující aproximace je o třetinu delší než aproximace předcházející.

Který útvar je větší? Sierpiňského trojúhelník, anebo Kochova křivka? Tuto otázku nelze zodpovědět ani měřením délky (ta je nekonečná), ani měřením obsahu (ten je u obou útvarů nulový).

Otázku srovnávání „velikostí“ těchto útvarů vyřešil Felix Hausdorff [4, 5] tím, že zobecnil pojem dimenze. Dimenze, o které jsme dosud mluvili, připouští jen celočíselné hodnoty a budeme ji dále nazývat *di-*

menzí topologickou. Za příčinu neporovnatelnosti některých geometrických útvarů označil Hausdorff nedostatečnou „jemnost“ této dimenze. Nekonečná délka úvaru je dána tím, že útvar měříme v dimenzi, která je příliš nízká, nulový obsah naopak tím, že dimenze dvě je už příliš vysoká. Abychom mohli vyjádřit „velikost“ (míru) takového útvaru nenulovým a konečným číslem, je třeba měřit „správným metrem“. Měřit v dimenzi s neceločíselnou hodnotu v intervalu $(1, 2)$. Otázkou je, jak takovou dimenzi zavést.



Obr. 11: Prvních sedm aproximací Kochovy křivky

Mřížková dimenze a mřížková míra

Dimenzi, která připouští neceločíselné hodnoty, lze definovat mnoha způsoby. Známe dimenzi soběpodobnostní, dimenzi informační, dimenzi box-counting atd. Každou takovou dimenzi dnes nazýváme dimenzí fraktální. Nejstarší a nejobecnější z nich, *dimenze Hausdorffova*, není v silách středoškolské matematiky. Zájemce o tuto konstrukci lze odkázat na článek Kateřiny Panešové [17]. Zde uvedeme dimenzi poněkud speciálnější. Zaplatíme za to tím, že některé útvary, které Hausdorffova dimenze a

míra měřit umí, zůstanou pro nás neměřitelné. I s naší užší definicí dimenze však paletu měřitelných útvarů velmi významně rozšíříme.

Měřené útvary budeme rovněž pokrývat koulemi stejného poloměru, ale tentokrát nás bude zajímat, jak se mění počet koulí nutných k pokrytí, jestliže společný poloměr těchto koulí zmenšujeme.

Označme r_1 poloměr největších koulí na obr. 6 a jejich počet potřebný k pokrytí útvaru nechť je p_1 . Poloměr menších koulí analogicky r_2 , jejich počet p_2 a konečně pro poslední zobrazený případ r_3 , resp. p_3 . Pro zjednodušení můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že $r_1 = 1$. Prozradíme (a doufáme, že nám bude čtenář věřit), že v tom případě je $r_2 = 1/2$ a $r_3 = 1/4$. Snadno spočítáme, že počty koulí potřebných k příslušnému pokrytí jsou $p_1 = 4$, $p_2 = 8$, $p_3 = 16$. Jistě si všimneme, že v tomto případě je

$$p_1 \cdot r_1 = p_2 \cdot r_2 = p_3 \cdot r_3 = 4.$$

Na obr. 7 máme analogicky $r_1 = 1$, $r_2 = 1/2$, $r_3 = 1/4$, příslušné počty jsou $p_1 = 3$, $p_2 = 12$, $p_3 = 48$. Zde je tedy

$$p_1 \cdot r_1^2 = p_2 \cdot r_2^2 = p_3 \cdot r_3^2 = 3.$$

Není jistě těžké odhadnout, jak by něco podobného vypadalo pro topologicky trojrozměrný útvar.

Pro jiné „běžné útvary“ si tyto součiny nemusejí být vždy přesně rovny. Na obr. 8 je např. $r_1 = 1$, $r_2 = 1/2$, $r_3 = 1/4$ a $p_1 = 17$, $p_2 = 36$, $p_3 = 72$. V každém případě lze zvlášť pro dostatečně velká n psát

$$0 < p_n \cdot r_n^D \approx M < \infty, \tag{1}$$

kde M a D jsou konstanty. S rostoucím n jsou navíc aproximace konstant M , D stále přesnější, takže můžeme psát

$$M = \lim_{n \rightarrow \infty} p_n \cdot r_n^D. \tag{2}$$

Navíc snadno nahlédneme, že pro každé $d < D$ je

$$M = \lim_{n \rightarrow \infty} p_n \cdot r_n^d = \infty \tag{3}$$

a pro každé $d > D$ je

$$M = \lim_{n \rightarrow \infty} p_n \cdot r_n^d = 0. \tag{4}$$

Shrnuto: exponent D v limitě (2) je pro dosud známé útvary roven topologické dimenzi a konstanta M se chová stejně jako „velikost“ (míra) útvaru měřená v této dimenzi. V dimenzi D je tato míra nenulová a konečná, viz (1), v dimenzi nižší je nekonečná, viz (3), a v dimenzi vyšší nulová, viz (4). Míra M se tedy skutečně chová tak, jak očekáváme od délky, obsahu i objemu. Dimenzi D a míru M v limitě (2) nazýváme *mřížkovou dimenzí*, resp. *mřížkovou mírou* útvaru.

Na závěr tohoto oddílu několik poznámek. Jestliže čtenář očekává, že mřížková míra v příslušné dimenzi je přímo rovna délce, obsahu či objemu útvaru tak, jak to známe z mnoha vzorečků, musíme ho zklamat. Mřížková míra je totožná pouze s délkou. Mřížkové míry dvoj- resp. trojrozměrných útvarů v dimenzi dvě resp. tři jsou sice nenulové a konečné, ale nejsou přímo rovny obsahu resp. objemu, jsou jen jejich jistými nenulovými násobky. Rovnosti lze sice dosáhnout zobecněním naší definice, to však opět značně překračuje možnosti středoškolské matematiky. Zájemce o bližší informace je možné opět odkázat na článek [17], pro naše účely toto zobecnění není nutné.

Poslední poznámka v tomto oddílu se týká měřitelnosti útvarů mřížkovou mírou. Jak uvidíme dále, mřížkovou mírou resp. dimenzí budeme schopni změřit Sierpiňského trojúhelník, Kochovu křivku i mnohé další útvary, které „odolávají“ délce, obsahu i objemu. Přesto existují „útvary“ (řekněme raději množiny bodů), které Felix Hausdorff změřit uměl a mřížková míra to neumí. Takovou množinou je například racionální interval, tedy např. množina $\langle 0, 1 \rangle \cap \mathbb{Q}$. Neměřitelnost takových množin naším postupem je daná, kterou musíme zaplatit za naše zjednodušení.

Hledá se správný metr

Již dva oddíly slibujeme dimenzi, která může nabývat i neceločíselných hodnot, a zatím jsme s žádnou takovou hodnotou nepřišli. V příkladech z předchozího oddílu byla naopak mřížková dimenze vždy rovna celočíselné dimenzi topologické. Podívejme se však na mřížkovou dimenzi Sierpiňského trojúhelníku.

Na obr. 9 máme pro $r_1 = 1$, $r_2 = 1/2$, $r_3 = 1/4$ postupně tyto počty pokrývajících koulí: $p_1 = 6$, $p_2 = 18$, $p_3 = 54$, obecně zřejmě $r_n = 2^{1-n}$, $p_n = 2 \cdot 3^n$ takže dle (2) je míra v dimenzi jedna

$$M = \lim_{n \rightarrow \infty} p^n \cdot r_n^1 = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \cdot 3^n \cdot (2^{1-n})^1 = 4 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} 3^n \cdot 2^{-n} = \infty$$

a míra v dimenzi dvě

$$M = \lim_{n \rightarrow \infty} p^n \cdot r_n^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \cdot 3^n \cdot (2^{1-n})^2 = 8 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} 3^n \cdot 4^{-n} = 0.$$

To jen potvrzuje již dříve konstatovanou nekonečnou délku a nulový obsah. Nyní však již můžeme hledat neceločíselnou dimenzi D , ve které bude míra tohoto útvaru nenulová a konečná.

Označme D_n, M_n přibližné hodnoty hledané dimenze a míry zjištěné v n -tém kroku, tedy

$$M_n = p_n \cdot r_n^{D_n} = 2 \cdot 3^n \cdot (2^{1-n})^{D_n}. \quad (5)$$

Logaritmováním obdržíme

$$\begin{aligned} \ln M_n &= \ln 2 + n \cdot \ln 3 + (1 - n) \cdot D_n \cdot \ln 2 \\ D_n &= -\frac{\ln 2}{(1 - n) \cdot \ln 2} + \frac{\ln M_n}{(1 - n) \cdot \ln 2} + \frac{n}{(n - 1)} \cdot \frac{\ln 3}{\ln 2}. \end{aligned} \quad (6)$$

Hledanou dimenzi pak dostaneme jako limitu pro $n \rightarrow \infty$

$$D = \lim D_n = \lim \left(\frac{1}{n - 1} + \frac{\ln M_n}{(1 - n) \cdot \ln 2} + \frac{n}{n - 1} \cdot \frac{\ln 3}{\ln 2} \right). \quad (7)$$

Za předpokladu, že limity všech tří zlomků jsou vlastní, můžeme psát:

$$D = \lim D_n = \lim \frac{1}{n - 1} + \lim \frac{\ln M_n}{(1 - n) \cdot \ln 2} + \lim \frac{n}{n - 1} \cdot \frac{\ln 3}{\ln 2}. \quad (8)$$

První limita na pravé straně je zřejmě rovna nule. Dimenzi hledáme tak, aby $0 < \lim M_n < \infty$. Snadno tedy nahlédneme, že i druhá limita je nulová. Pak již jednoduše dostáváme

$$D = \lim D_n = \lim \frac{n}{n - 1} \cdot \frac{\ln 3}{\ln 2} = \frac{\ln 3}{\ln 2}. \quad (9)$$

Úprava (7) \Rightarrow (8) je tedy korektní a hodnota (9) je hledanou mřížkovou dimenzí.

Mřížková dimenze Sierpiňského trojúhelníku je tedy neceločíselná, dokonce iracionální. Pro Kochovu křivku bychom stejným postupem dostali dimenzi $D = \ln 4 / \ln 3$.

Kromě toho, že mřížková dimenze těchto útvarů je neceločíselná, je podstatná i skutečnost, že tato dimenze je vyšší než dimenze topologická. Právě takové útvary totiž nazýváme fraktály.

Kromě dimenze je možné určit i „velikost“ (míru) fraktálu v jeho dimenzi. Například mřížkovou míru Sierpiňského trojúhelníku z obr. 5 či 9 v dimenzi (9) obdržíme jako limitu výrazu (5), resp. (6) pro $D_n = D$, tedy:

$$\begin{aligned} \lim \ln M_n &= \lim (\ln 2 + n \cdot \ln 3 + (1 - n) \cdot D \cdot \ln 2) \\ \ln M &= \lim \left(\ln 2 + n \cdot \ln 3 + (1 - n) \cdot \frac{\ln 3}{\ln 2} \cdot \ln 2 \right) \\ \ln M &= \lim (\ln 2 + n \cdot \ln 3 + (1 - n) \cdot \ln 3) \\ \ln M &= \lim (\ln 2 + \ln 3) = \ln 2 + \ln 3 = \ln 6 \\ M &= 6. \end{aligned}$$

Míra našeho trojúhelníku je tedy rovna šesti.

Jak tomuto výsledku rozumět? Především je třeba si uvědomit, že celý výpočet jsme provedli dle obr. 9, kde jsme předpokládali, že poloměr největších koulí je roven jedné, dejme tomu jednomu metru. Pak strana rovnostranného trojúhelníku, ze kterého byla Sierpiňského konstrukce provedena (tzv. inicializačního trojúhelníku), je zhruba pět metrů (lze samozřejmě zadat přesnou polohu koulí a provést přesný výpočet, pro naši představu to však není nutné). Míra Sierpiňského trojúhelníku je pak šest. Ale šest čeho?

Kdybychom měřili obvod (resp. míru v dimenzi jedna), byl by jednotkou „délkový“ metr – metr umocněný na první ($m = m^1$). Kdybychom měřili obsah (resp. míru v dimenzi dva), museli bychom připsat metr umocněný na druhou (m^2). My jsme ovšem měřili míru v dimenzi $D = \ln 3 / \ln 2$. Míra Sierpiňského trojúhelníku na obr. 9 je tedy

$$6m^{\ln 3 / \ln 2} = 6m^{1,584962\dots}$$

Míra fraktálů se ovšem většinou hledat nemusí. U různých útvarů s neceločíselnou dimenzí se totiž většinou liší už tato dimenze, takže za větší můžeme vždy prohlásit útvar s větší dimenzí. Tedy například Sierpiňského trojúhelník s jakkoli malým inicializačním trojúhelníkem je vždycky větší než Kochova křivka s jakkoliv dlouhou inicializační úsečkou. Jednoduše proto, že Sierpiňského trojúhelník má větší mřížkovou dimenzi než Kochova křivka.

Poznámka: Jak jsme konstatovali výše, topologická dimenze hranice papírového schodiště z obr. 1 je rovna jedné. Konstatovali jsme rovněž, že

pro dostatečně velká n platí

$$0 < p_n \cdot r_n^1 \approx M < \infty.$$

Výpočtem můžeme snadno ověřit, že pro délku této hranice d (míru v dimenzi jedna) platí $0 < d < \infty$. To vše svědčí o tom, že i libovolná fraktální dimenze je rovna jedné a že tento útvar fraktálem není.

Když detail reprodukuje část a část reprodukuje celek

Pokusme se nyní dát Mandelbrotovu bonmotu, kterým jsme tento článek uváděli, matematický kabát. Tím kabátem jsou pojmy *soběpodobnost* a *soběpříbuznost*.

Geometrický útvar \mathcal{U} je soběpodobný právě tehdy, když existuje konečný počet podobných zobrazení (například stejnoolehlostí) f_1, f_2, \dots, f_n takových, že útvar je sjednocením svých vlastních obrazů v těchto zobrazeních, tedy

$$\mathcal{U} = f_1(\mathcal{U}) \cup f_2(\mathcal{U}) \cup \dots \cup f_n(\mathcal{U}), \quad (10)$$

a soběpříbuzný právě tehdy, když zobrazení f_1, f_2, \dots, f_n nejsou podobnosti, ale afinity.

Připomeňme, že zobrazení je podobnost právě tehdy, když zachovává měřítko, tj. když každou úsečku AB zobrazí na úsečku $A'B'$ tak, že $|A'B'| = |k| \cdot |AB|$, kde k je konstanta (měřítko nebo lépe koeficient podobnosti). Stejnoolehlost je speciální případ podobnosti, kdy bod A , jeho obraz A' a tzv. střed stejnoolehlosti S leží na téže přímce, přičemž $k < 0$ právě tehdy, když S je vnitřním bodem úsečky AA' . Zobrazení f je afinita právě tehdy, když zachovává dělicí poměr bodů, tj. když každou úsečku AB zobrazí na úsečku $A'B'$ a každý vnitřní bod C úsečky AB na vnitřní bod C' úsečky $A'B'$ tak, že $|A'C'| : |C'B'| = |AC| : |CB|$.

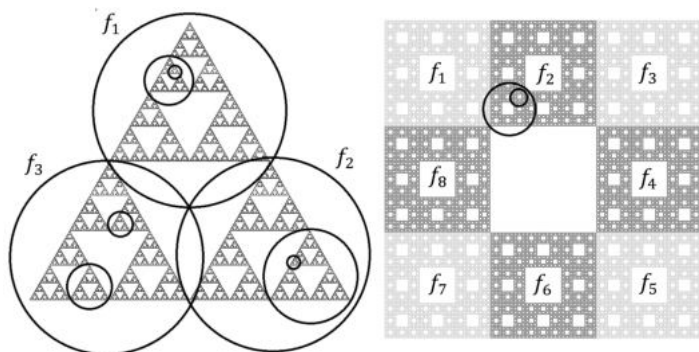
Fraktály, o kterých jsme se dosud zmiňovali, jsou soběpodobné. Sierpińského trojúhelník je sjednocením tří svých obrazů ve stejnoolehlostech se středy ve vrcholech inicializačního trojúhelníku a koeficientem $k = 1/2$ (viz obr. 12 vlevo). Stručně se říká, že je sjednocením tří svých kopií zmenšených na polovinu. Podobně Kochova křivka je sjednocením čtyř svých kopií zmenšených na třetinu. Sierpińského čtverec (obr. 12 vpravo) je sjednocením osmi svých kopií zmenšených na třetinu.

Právě tato vlastnost umožňuje „části útvaru reprodukovat jeho celek“ a „detailu reprodukovat část“. V každém kruhu, který obsahuje více než jeden bod soběpodobného útvaru, lze najít jeho část, která je (geometricky) podobná celému útvaru tak, jak je naznačeno na obr. 12.

Mezi soběpodobností a dimenzí je navíc zajímavý vztah. Jestliže koeficienty k , $0 < |k| < 1$, všech n podobností ve vztahu (10) jsou stejné, je dimenze útvaru rovna

$$D = \frac{\ln n}{\ln(1/|k|)}. \quad (11)$$

Dimenze Sierpiňského trojúhelníku je tedy skutečně $\ln 3 / \ln 2$ a Kochovy křivky $\ln 4 / \ln 3$, jak jsme konstatovali v předchozím oddílu, dimenze Sierpiňského čtverce je $\ln 8 / \ln 3$.

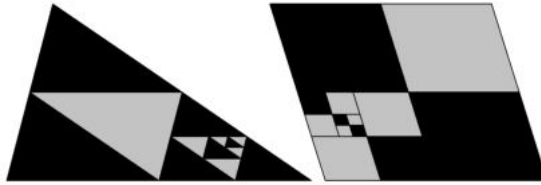


Obr. 12: V soběpodobných fraktálech detaily reprodukují části a části reprodukují celek

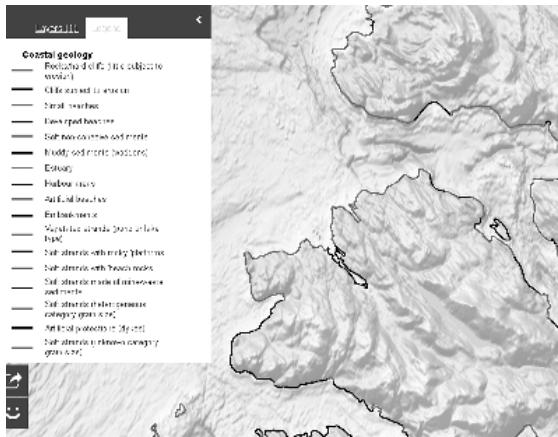
Na tomto místě je třeba vyvrátit rozšířený mýtus, že soběpodobnost a soběpříbuznost jsou vlastnosti, které fraktál definují, tj. že útvar je fraktálem právě tehdy, když je soběpodobný nebo soběpříbuzný. Není to pravda. Existují fraktály, které nejsou ani soběpodobné, ani soběpříbuzné (viz např. obr. 14 a [15]). Naopak existují soběpodobné útvary, které nejsou fraktály. Například „obyčejný“ trojúhelník či „obyčejný“ rovnoběžník. Ty jsou sjednocením čtyř svých kopií zmenšených na polovinu (nebo šestnácti kopií zmenšených na čtvrtinu atd.), viz obr. 13. I jejich část reprodukuje celek a jejich detail část. I pro jejich mřížkovou dimenzi platí vztah (11), neboť

$$\frac{\ln 4}{\ln 2} = \left(\frac{\ln 16}{\ln 4} \text{ atd.} \right) = \frac{\ln 2^2}{\ln 2} = \frac{2 \ln 2}{\ln 2} = 2.$$

Mřížková dimenze je však rovna dimenzi topologické, takže tyto útvary fraktály nejsou.



Obr. 13: I některé „běžné“ útvary jsou soběpodobné, i jejich detaily reprodukují části a části reprodukují celek – fraktály to však nejsou



Obr. 14: Část pobřežní linie Velké Británie v měřítku 1 : 100 000 (Ec.europa.eu)



Obr. 15: Fraktální kapradina sestavená kombinací soběpříbuznosti a náhodných procesů

Fraktály jsou velmi zajímavé útvary, které poskytují řadu příležitostí k zamyšlení, zobecňování a rozvoji abstraktního myšlení. Umožňují uplatnit a prohloubit znalosti mnohých partií středoškolské matematiky, zejména geometrických řad, vlastností logaritmů a limit. Díky možnostem současné výpočetní techniky mohou být hezkou ukázkou toho, že matematika může být nejen užitečná, ale i krásná (viz např. [15, 16, 18]).

Závěr

Útvary s neceločíselnou dimenzí byly v době svého vzniku na začátku minulého století považovány za matematická monstra, která nemají nic společného s realitou. O půl století později vyšlo najevo, že matematika vedla Sierpiňského, Kocha, Hausdorffa a mnohé další k realitě blíž, než oni sami tušili.

Řadou měření a experimentů bylo zjištěno, že některé přírodní útvary mají fraktální charakter a že neceločíselná dimenze je velmi vhodným měřítkem jejich členitosti. Jako příklad uveďme pobřežní linie kontinentů a ostrovů. Ty jsou velmi podrobně definovány v Úmluvě OSN o mořském právu z roku 1982 ([Wikipedia.org](https://www.wikipedia.org), [Psp.cz](https://www.psp.cz)). Geodetové a kartografové je dnes vytyčují pomocí kombinace GPS, pozemních monitorovacích stanic a speciálních metod zpracování dat, z nichž některé dosahují polohové přesnosti plus mínus několik milimetrů ([6, s. 18]). Na obr. 14 vidíme část geodeticky vytyčené pobřežní linie Velké Británie. „Téměř rovná“ pobřežní linie severní Afriky má dimenzi 1,05, linie Bretaně či Velké Británie 1,25 – to je téměř přesně dimenze Kochovy křivky, hranice pobřeží Norska, plného hlubokých a klikatých fjordů, se pyšní hodnotou 1,52, což je téměř dimenze Sierpiňského trojúhelníku ([Fractalfoundation.org](https://www.fractalfoundation.org)).

Přírodní útvary samozřejmě nemohou reprodukovat své části a detaily do nekonečna. Přesto jsou fraktály k popisu jejich morfologie daleko vhodnější než krychle, jehlany a koule. Platí to zvláště pro fraktály soběpříbuzné a tzv. statisticky soběpříbuzné, jejichž části a detaily jsou „mírně deformovány“ afinitami a náhodou (viz obr. 15 a Martišek 2022d). Právě to je totiž na přírodních útvarech krásné.

Literatura

- [1] Dlab, V.: Kouzlo Sierpiňského trojúhelníku. *Rozhledy matematicko-fyzikální*, 97 (2022), č. 2, s. 1–5.

- [2] https://ec.europa.eu/maritimeaffairs/atlas/maritime_atlas/#lang=EN;p=w;bkgd=1;theme=18:1.00;c=-661722.1482667197,7684861.447349561;z=11
- [3] <https://fractalfoundation.org/OFC/OFC-10-4.html>
- [4] Hausdorff, F.: *Grundzüge der Mengenlehre*. Veit & Comp., Lipsko, 1914.
- [5] Hausdorff, F.: Dimension und äußeres Maß. *Math. Ann.*, 79 (1919), s. 157–179.
- [6] Kratochvíl, V.: *Geodézie III*. FAST VUT, Brno, 2012.
- [7] Kuřina, F.: *Elementární matematika a kultura*. Gaudeamus, Hradec Králové, 2012.
- [8] Kuřina, F., Vondrová, N.: Jak to vlastně je? Nekonečno. *Učitel matematiky*, 29 (2021), č. 2, s. 111–127.
- [9] von Koch, H.: *Sur une courbe continue sans tangente, obtenue par une construction géométrique élémentaire*. P.A. Norstedt & Soner, Stockholm, 1904.
- [10] Lindenmayer, A.: Mathematical models for cellular interaction in development. I and II. *Journal of Theoretical Biology*, 18 (1968), č. 3, s. 280–315.
- [11] Mandelbrot, B.: *Fraktály, tvar, náhoda a dimenze*. Mladá fronta, Praha, 2003.
- [12] Martišek, D.: Krocení jedné bijekce aneb o zipu a tkaničkách. *Rozhledy matematicko-fyzikální*, 98 (2023), č. 2, s. 13–27.
- [13] Martišek, D.: *Journey around the Mandelbrot Set*. https://dmartisek.cz/Veda/Journey_around_the_Mandelbrot_Set.m4v, 2022.
- [14] Martišek, D.: *RayTracing*. https://dmartisek.cz/Veda/Ray_Tracing.m4v, 2022.
- [15] Martišek, D.: *Barnsley–Martišek Fern*. <https://dmartisek.cz/Veda/Fern.m4v>, 2022.
- [16] Martišek, D.: *Journey into the Mandelbrot Set*. https://dmartisek.cz/Veda/Mandelbrot_Short.m4v, 2022.
- [17] Panešová, K.: Hausdorffova dimenze fraktálních množin. *Rozhledy matematicko-fyzikální*, 95 (2020), č. 3, s. 1–7.
- [18] Polák, J.: *Přehled středoškolské matematiky*. Prometheus, Praha, 1998.
- [19] <https://www.psp.cz/sqw/sbirka.sqw?cz=240&r=1996>
- [20] <https://www.zakonyprolidi.cz/cs/1996-240>
- [21] Sierpiński, W.: Sur une courbe dont tout point est un point de ramification. *Compt. Rend. Acad. Sci.*, 160 (1915), s. 302–305.
- [22] https://cs.wikipedia.org/wiki/Úmluva_Organizace_spojených_národů_o_mořském_právu

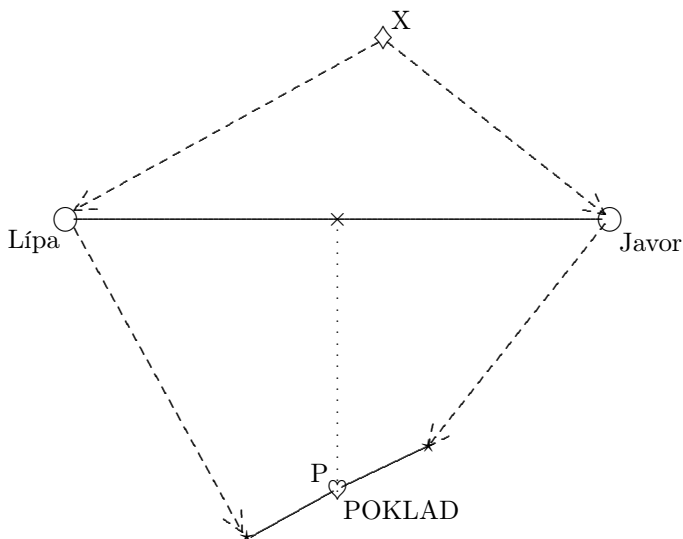
MATEMATICKÉ OŘÍŠKY

Hledání pokladu

Dnes máme pro čtenáře geometrickou hru. Na louce je lípa a javor, vzdálené od sebe 30 metrů. Instrukce jsou následující (viz obrázek níže):

- Zaujmi libovolné místo.
- Z tohoto místa vykroč přímo k lípě.
- Tam se otoč doleva o 90° a přímočaře pokračuj v chůzi, až dosáhneš vzdálenosti rovné vzdálenosti výchozího místa od lípy.
- Toto místo označ kolíkem.
- Vrať se do výchozího místa.
- Odtud vykroč přímo k javoru.
- Tam se otoč doprava o 90° a pokračuj v chůzi, až dosáhneš vzdálenosti rovné vzdálenosti výchozího místa od javoru.
- Toto místo označ kolíkem.
- Poklad nalezněš na půlicím bodě úsečky spojující oba kolíky.

Jeníček a Mařenka si vybrali dva různé výchozí body. Přesto našli poklad oba dva. *Jak je to možné?*



Nyní se vraťme k úloze o bijekci mezi čtvercem a úsečkou a představme elegantní řešení Adama Blažka, studenta 3. ročníku Jaderné fakulty ČVUT. Nejprve připomeňme znění úlohy.

Úloha: Zkonstruujte vlastní co nejjednodušší bijekci: $\langle 0; 1 \rangle^2 \rightarrow \langle 0; 1 \rangle$.

Řešení: Nejprve si uvědomíme, že zápis čísel v desítkové soustavě není jednoznačný. Např. $0,235 = 0,234\ 999\ 999\ 99\dots$. Udělejme tedy úmluvu, že zápisy končící nekonečně mnoha devítkami nepovolujeme. Definujme pomocnou funkci g , jejímž definičním oborem jsou nekonečné posloupnosti čísel z množiny $\{0, 1, \dots, 9\}$, následujícím způsobem:

$$g: \{0, 1, \dots, 9\}^\omega \rightarrow \langle 0; 1 \rangle:$$

$$g(a_1, a_2, \dots) := \begin{cases} 0, & \text{pokud } (\forall i)(a_i = 0), \\ \frac{0, a_1 \dots a_k}{2}, & \text{pokud } a_k \neq 0 \wedge (\forall i > k)(a_i = 0), \\ \frac{1}{2}, & \text{pokud } (\forall i)(a_i = 9), \\ \frac{1, (9-a_1) \dots (9-a_k)}{2}, & \text{pokud } a_k \neq 9 \wedge (\forall i > k)(a_i = 9), \\ 0, a_1 a_2 \dots & \text{jinak.} \end{cases}$$

Snadno ověříme, že g je bijekce: stačí si rozmyslet, že druhý případ pokryje čísla s konečným desetinným rozvojem v intervalu $(0; \frac{1}{2})$, čtvrtý případ čísla s konečným desetinným rozvojem v intervalu $(\frac{1}{2}; 1)$ a pátý případ čísla s nekonečným desetinným rozvojem.

Pomocí g již můžeme snadno definovat bijekci využívající „proplétání cifer“ $f: \langle 0; 1 \rangle^2 \rightarrow \langle 0; 1 \rangle$:

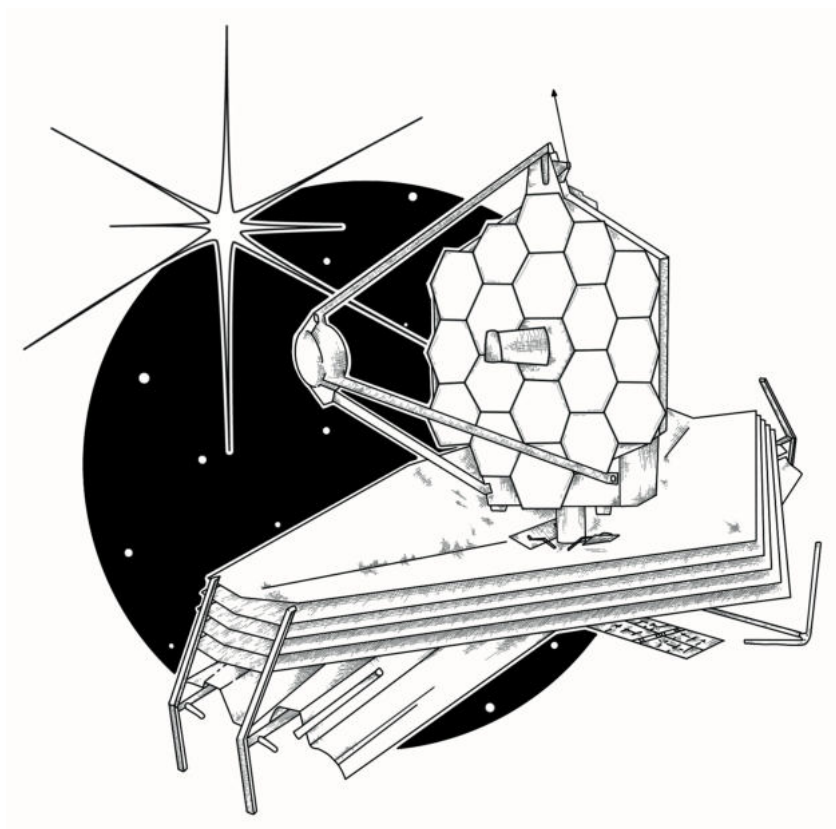
$$f(x, y) := g(a_1, b_1, a_2, b_2, \dots),$$

kde

$$(a_1, a_2, \dots) := g^{-1}(x), \quad (b_1, b_2, \dots) := g^{-1}(y).$$

Proč mají hvězdy na fotografiích z vesmírného teleskopu Jamese Webba osm cípů?

Eduard Šubert, Praha



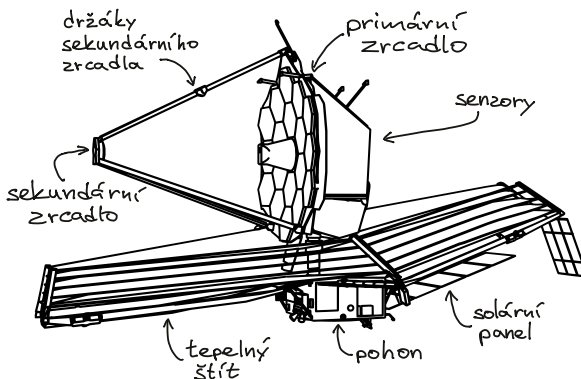
Experiment

Určitě jste už viděli alespoň jednu z úžasných fotografií z Vesmírného teleskopu Jamese Webba (JWST).¹⁾ Všimli jste si, že hvězdy na těchto fotografiích mají osm cípů? Ale proč? To si ukážeme v tomto experimentu! Nejen že společně vytvoříme takovou osmicípou hvězdu z pohodlí domova²⁾, ale navíc přitom zjistíme, *jak* taková hvězda v obraze teleskopu vznikne.

Nejdříve něco málo o teleskopech. Většina dnešních teleskopů má dvě hlavní zrcadla. Světlo se nejdříve odrazí od prvního zrcadla, tomuhle zrcadlu říkáme *primární*, dále světlo dopadne na druhé výrazně menší zrcadlo, tomu se říká *sekundární*. Od sekundárního zrcadla se světlo odrazí na systém senzorů³⁾, který obraz zachytí.

Teď zkusme přijít na to, *odkud* se osm cípů hvězdy vezme. Když se z povrchu Země podíváme na noční oblohu, uvidíme na hvězdách osm cípů? Neuvídíme! Stejně tak, kdybychom se koukali na oblohu přímo z teleskopu, žádné cípy bychom na hvězdách neviděli.⁴⁾ Ale po tom, co se světelné paprsky odrazí od primárního a od sekundárního zrcadla, tak senzor zachytí osm cípů. Někde mezi primárním zrcadlem a senzorem každá hvězda dostane osm cípů.

Podívejte se na tento náčrtek a zakroužkujte, které části teleskopu podezříváte, že by mohly hrát roli ve tvorbě hvězdných cípů.



¹⁾<https://jwst.nasa.gov>



²⁾Alespoň se o to pokusíme.

³⁾Ten může obsahovat další zrcadla.

⁴⁾Měli bychom ale velký problém s návratem zpět na Zem.

Než začneme modelovat teleskop, potřebujeme ještě vhodné světlo. Paprsky od velmi vzdálených hvězd dopadají na teleskop téměř rovnoběžně. To je výrazně odlišné od světla z obyčejné lampy, ze které se paprsky šíří do všech směrů. Kde bychom na Zemi mohli najít zdroj světla s rovnoběžnými paprsky? Laser! Paprsky laseru jsou rovnoběžné.



Co budeme dělat

Nečtete napřed! Čeká nás série experimentů, ze kterých se dozvíme něco nového o světle a o teleskopech. Každý experiment obsahuje otázku napsanou *kurzívou*. Na tuhle otázku si vždy hned odpovězte, svou odpověď si můžete i zapsat. Až pak proveďte experiment.

A přečtete si odpověď uvedenou obráceně a **tučně**. Potom pokračujte dalším experimentem.

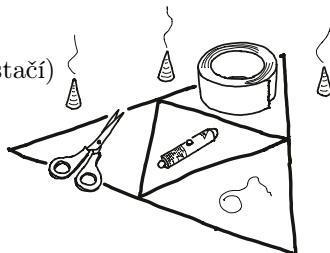
Nakonec nám napíšte
zpětnou vazbu →



Tohle si teď přečtete

Co budeme potřebovat

- Laser⁵⁾ (malé laserové ukazovátko stačí)
- Nůžky
- Lepicí páska
- Vlasy⁶⁾

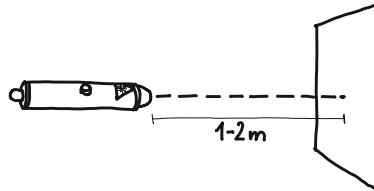


⁵⁾ Podívejte se do obchodu pro zvířata.

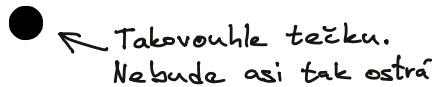
⁶⁾ Svoje vlastní nebo obstarané se svolením!

Experiment 1

Co si myslíte, že uvidíte na stěně, když na ni posvítíte laserovým ukazovátkem? ⁷⁾



Měli byste vidět malou tečku. To asi není nic překvapivého, překvapení totiž teprve přijde.

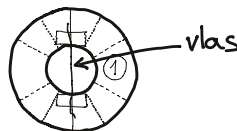


Jestli tečku nevidíte, ujistěte se, že je laser zapnutý.⁸⁾

Experiment 2

Na straně 50 najdete díl ①. Měli byste vystříhnout kroužek, kterému chybí střed. Připravte si také lepicí pásku a vlasy. Místo vlasu by šel použít i velmi slabý drátek, ale já jsem takový neměl k dispozici.

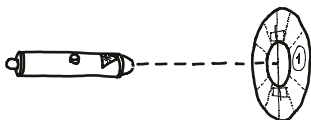
Podél plné čáry přilepte páskou na obou stranách kolečka jeden vlas. Postačí kousek vlasu tak, aby sahal přes celé kolečko. Pokuste se, aby vlas byl napnutý a aby byl rovně přes prostředek kolečka. Pásku lepte jen přes papír, ne do díry uprostřed, tam bude jen vlas.



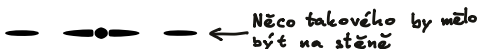
Co byste řekli, že uvidíte na stěně, když laserem posvítíte přes natažený vlas?

⁷⁾Laserem nesvíte nikomu do očí!

⁸⁾Nesvíte laserem do očí ani sobě!



Měli byste místo tečky vidět čárku! Ba co víc, ta čárka by měla být přerušovaná. Je to to, co jste čekali? Čárka bude na stěně kolmo na vlas.



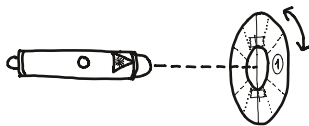
Když budete od stěny dál, čárka bude delší, ale méně jasná. Musíte tedy najít vhodnou vzdálenost. Vzdálenost mezi jedním a dvěma metry by měla být akorát, ale nebojte se experimentovat.

Pokud čárku na stěně nevidíte vůbec, ujistěte se, že paprsek laseru skutečně protne natažený vlas. Další experimenty se vám nepovedou, pokud nepřijdete na to, jak udělat tenhle.

Jevu, který jste právě viděli, se říká *difrakce*. Jeho řádné vysvětlení ani na vlnách na vodě není jednoduché a pro difrakci částic musíme přidat i kvantovou fyziku. Jinak řečeno, v tomto experimentu se nebudeme zabývat tím, *jak* difrakce funguje, ale jen tím, jak vytvoří osm cípů hvězdy na fotografii z teleskopu.

Experiment 3

Co si myslíte, že se stane s čárkou na stěně, když budete kroužkem ① otáčet?



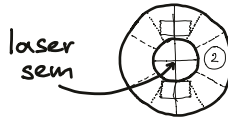
Čárka na stěně se bude také otáčet, bude vždy kolmo na natažený vlas.

Pomocí vlasu a difrakce dokážeme kulatý laserový paprsek přeměnit na čárku. Dá se říci, že tahle čárka je hvězda, která má jen dva cípy.^a A jak z dvoucípé hvězdy uděláme osmicípou? Jak bychom mohli hvězdě přidat další cípy? Zkuste se nad tím zamyslet!

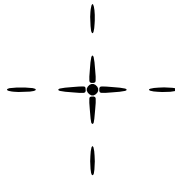
^aJak by vypadala hvězda s jedním cípem?

Experiment 4

Vystříhnete díl ② a nalepte na něj kus vlasu stejně jako předtím na díl ①. Měli byste nyní mít dva podobné díly. Obě kolečka dejte přes sebe tak, aby vlasy byly na sebe kolmo. *Co si myslíte, že uvidíte na stěně, když posvítíte laserem na průsečík vlasů?*

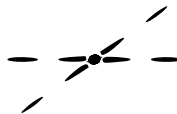


Na stěně byste měli vidět křížek.



Nyní zkuste změnit úhel mezi vlasy tak, aby na sebe nebyly kolmo. *Co si myslíte, že uvidíte na stěně?*

Podle úhlu mezi vlasy se mění i úhel mezi čárkami na stěně. Všimněte si, že obě čárky jsou stále kolmé na natažené vlasy, každá čárka kolmá na jeden vlas.

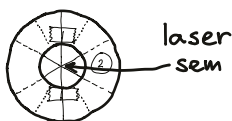


Experiment 5

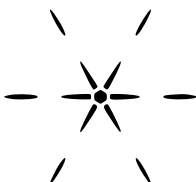
Teď už možná chápete, kde se berou paprsky hvězd v obraze teleskopu. *Jak bychom mohli dostat šesticípou hvězdu? Zastavte se na chvíli a zkuste se zamyslet!*

Stačí když vyrobíme ještě jeden kroužek. Vystříhnete díl ③ a připravte ho stejně jako dva předchozí. Nyní dejte všechny tři kroužky přes sebe tak, aby úhel mezi nataženými vlasy byl 120° . Na kroužcích jsou čárkované čáry, které vám je pomohou nastavit ve správném úhlu. Dejte

si záležet, aby se vlasy protínaly v jednom bodě. Do průsečíku vlasů namířte paprsek laseru.

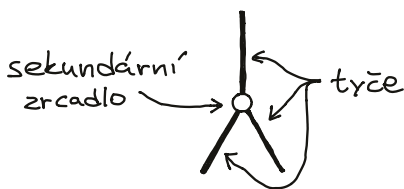


Na stěně byste měli vidět šestícípou hvězdu.



Podářilo se nám podobnému světlu, jako teleskop snímá z dalekých hvězd, přidat šest cípů! Předpokládejme tedy, že na teleskopu musí být něco podobného jako naše natažené vlasy. Podívejte se na diagram teleskopu na straně 37. Najdete v diagramu něco, co by mohlo fungovat jako vlasy v našich experimentech?

Tyče držící sekundární zrcadlo!

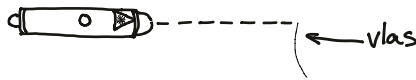


Tyto tyče vedou ale jen od kraje primárního zrcadla do jeho středu, nikoliv přes celý paprsek jako v našich experimentech. Změní to něco?

Experiment 6

Co si myslíte, že se stane, když posvítíte na konec vlasu? Jinými slovy, když vlas nebude sahat přes celý paprsek laseru, ale jen přes jeho část?⁹⁾

⁹⁾ Když je koneček roztřepený, tak ho zastříhněte.



Měli byste vidět podobnou difrakci, jako když je vlas přes celý paprsek!



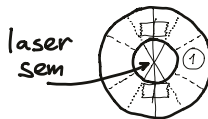
Teď už víme, že tenká překážka, jako například vlas, v paprsku laseru způsobí difrakci. Dokonce tahle překážka ani nemusí sahat napříč celým paprskem.

Na teleskopu takovou překážku tvoří tyče držící sekundární zrcadlo. Jak asi vypadá difrakce, kterou tvoří tyhle tyče?

Experiment 7

Vezměte všechny tři kolečka. Tečkované čáry vám je pomohou uspořádat přes sebe tak, aby měly vlasy mezi sebou stejné úhly jako mají tyče na teleskopu. Opět si dejte záležet, aby se vlasy protínaly v jednom bodě.

Co si myslíte, že uvidíte na stěně, až posvítíte na průsečík vlasů laserem?



Měli byste vidět šestičípou hvězdu. Hvězda ale bude trochu zpljoštělá, nebude úplně rovnoměrná.

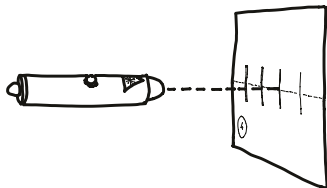


Podívejte se na titulní stranu. Tahle naše hvězda vypadá skoro jako ta na titulní straně, akorát jí chybí dva svislé cípy. Odkud se vezmou ty dva cípy? Na to budeme muset prozkoumat trochu jinou formu difrakce.

Experiment 8

Ze strany 50 vystříhnete díl ④, přehnete ho napůl podél čárkované čáry a na přehybu vystříhejte naznačené obdélníky. Po rozložení papíru byste měli dostat několik úzkých štěrbin.

Co si myslíte, že na stěně uvidíte, když vložíte laseru do cesty jednu za štěrbin?



Uvidíte podobný obraz jako předtím. Na stěně se objeví další přerušovaná čárka.



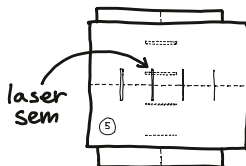
Pokud čárku na stěně nevidíte vůbec, zkuste jinak širokou štěrbinu. Další experimenty se vám také nepovedou, pokud nepřijdete na to, jak udělat tenhle.

Prozkoumejte, jak se čárka mění, když posvítíte skrz různé široké štěrbiny.

I tento jev se nazývá difrakce, funguje sice trochu jinak, ale princip je stejný. Tedy stejně složitý. Dokázali byste vytvořit hvězdu i pomocí karet se štěrbinami?

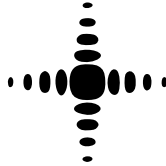
Experiment 9

Vystříhnete díl ⑤ ze strany 50 stejně, jako jste vystříhli díl ④. Najděte štěrbinu o vhodné šířce a obě karty dejte přes sebe tak, aby se štěrbiny křížily a aby na sebe byly kolmo.



Co byste čekali, že uvidíte na stěně potom, co do průsečíku posvítíte laserem?

Měli byste vidět křížek.



Nyní zkuste změnit úhel mezi štěrbinami tak, aby na sebe nebyly kolmo. Co si myslíte, že uvidíte na stěně?

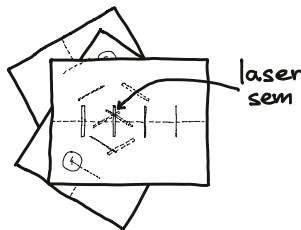
Podle úhlu mezi štěrbinami se mění i úhel mezi čárkami na stěně. Všimněte si, že obě čárky jsou stále kolmé na štěrbinu, každá čárka kolmá na jednu štěrbinu.



Experiment 10

Jak bychom mohli dostat šesticípou hvězdu? Zastavte se na chvíli a zkuste se zamyslet!

Stačí, když vyrobíme ještě jednu kartu. Vystříhnete díl ⑥ stejně jako dva předchozí. Nyní dejte všechny tři karty přes sebe tak, aby úhel mezi kartami byl 120° . Na kartách jsou tečkované čáry, které vám je pomohou nastavit ve správném úhlu. Do průsečíku naniřte paprsek laseru.



Na stěně byste měli vidět šesticípou hvězdu.



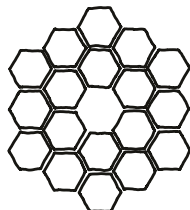
Dokážete umístit karty tak, aby byl jeden paprsek hvězdy svísele? A co vodorovně?

Pak vypněte laser a podívejte se z blízka na průsečík štěrbin. *Jaký tvar uvidíte?*

Šestiúhelník!

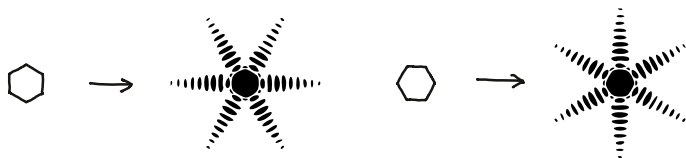
Šestiúhelníková štěrbinina přemění laserový paprsek na hvězdu se šesti cípy. Teď se podívejte na diagram teleskopu na straně 37, najdete na teleskopu nějaké šestiúhelníky?

Přeci šestiúhelníkové díly primárního zrcadla!



Pouze světlo, které se odrazí od těchto jednotlivých zrcadel, se dostane až na senzor teleskopu. Podobně pouze světlo, které projde naší šestiúhelníkovou štěrbinou, se dostane až na stěnu. Primární zrcadlo tedy v podstatě funguje jako naše šestiúhelníková štěrbinina!

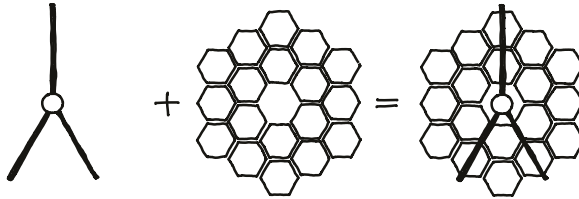
Možná vás napadlo, že celé primární zrcadlo vypadá skoro jako šestiúhelník. Jak si ověříme, jestli šest cípů vytvoří primární zrcadlo jako celek a nebo jeho jednotlivé díly? Nejlepší by samozřejmě bylo vyrobit kartu s maličkatými šestiúhelníkovými dírkami a otázku experimentálně ověřit, ale mně se tak malé šestiúhelníky vystříhnout nepodařilo. Přesto můžeme na otázku odpovědět. Přijďte na to sami!



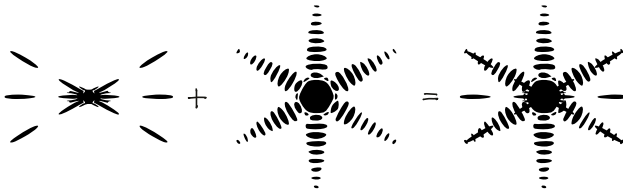
Z předchozího experimentu víme něco o orientaci čárky na stěně a šterbiny, která čárku vytvořila. Jsou na sebe kolmé! Stejně tak bude šest cípů hvězdy kolmých na strany šestiúhelníku.

Na fotografiích z JWST vidíme šest cípů, jako má hvězda vpravo, to odpovídá orientaci šestiúhelníku, jako mají díly primárního zrcadla. Paprsky hvězdy tedy tvoří jednotlivé díly, ne zrcadlo jako celek.

Teď už máme všechny základní stavební díly pro osmicípou hvězdu. Nejdříve světlu stojí v cestě tři tyče, které drží sekundární zrcadlo. Tyto tyče my simulujeme pomocí vlasů. Dále se světlo odrazí od šestiúhelníkových dílů primárního zrcadla. To je podobné, jako když my posvítíme skrz šestiúhelníkovou šterbinu.



Čtyři ze šesti cípů druhé hvězdy se překrývají se čtyřmi cípy první hvězdy, a tak má výsledná kombinace cípů osm.^a



^aJak byste upravili konstrukci teleskopu, aby měla výsledná kombinace jen šest cípů?

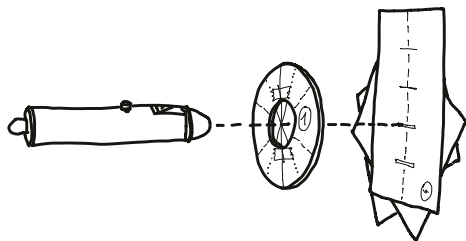
Experiment 11

Poslední experiment je opravdu náročný, protože musíte udržet všechny díly v paprsku laseru a navíc ještě pod správným úhlem. Teoreticky je ale možný.¹⁰⁾ *Co si myslíte, že uvidíte na stěně, když dáte laseru do cesty*

¹⁰⁾Mně se podařil! ©



všechny díly najednou?



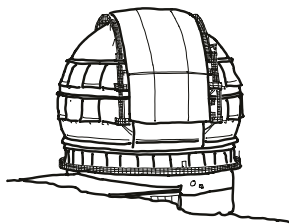
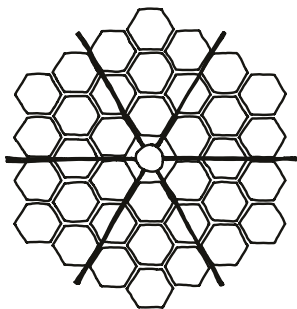
Pokud všechno udržíte správně, na stěně uvidíte stejnou hvězdu jako na fotografiích z **Webbova vesmírného teleskopu**. Nic si z toho ale nedělejte, když se vám poslední experiment nepovede. Teď už rozumíte, jak na fotografiích osmicpá hvězda vznikne, a to je alespoň stejně důležité.

Další experimenty

Proč mají hvězdy na fotografiích z JWST osm cípů už víme. Co ale ostatní teleskopy? Navrhněte vlastní experimenty a zkuste přijít na to, kolik a jakých cípů budou mít hvězdy na obrázcích z těchto teleskopů.

Gran Telescopio Canarias

Gran Telescopio Canarias je pozemní teleskop na Kanárských ostrovech. Je to jeden z největších teleskopů na světě. Primární zrcadlo je také složeno ze šestiúhelníkových dílů, má jich ale 36. Zatímco JWST má průměr primárního zrcadla 6,5 metru, Gran Telescopio Canarias má zrcadlo o průměru 10,4 metru! Sekundární zrcadlo drží šest tyčí.

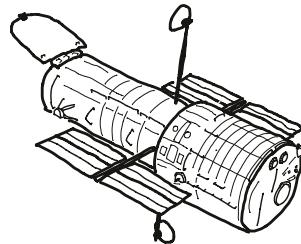
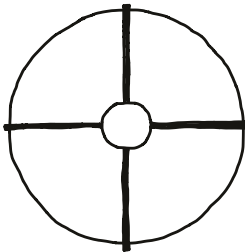


Nejdříve si načrtněte svůj odhad, jak budou vypadat difrakční hvězdy ve fotografiích z Gran Telescopio Canarias, pak si vyzkoušejte potřebné experimenty, a až pak se podívejte na skutečné fotografie.

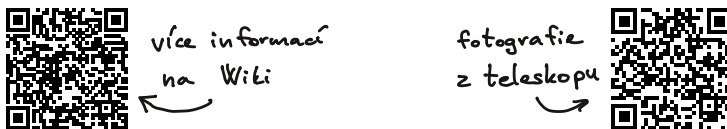


Hubbleův vesmírný dalekohled

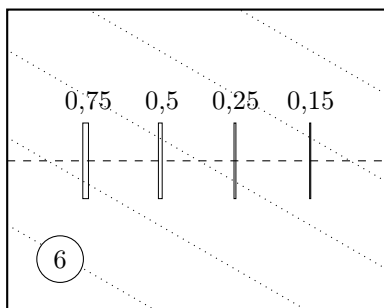
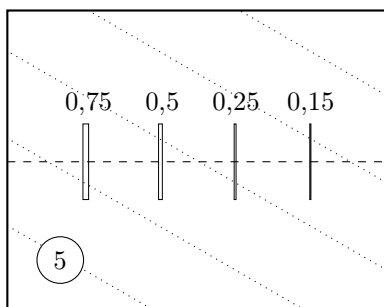
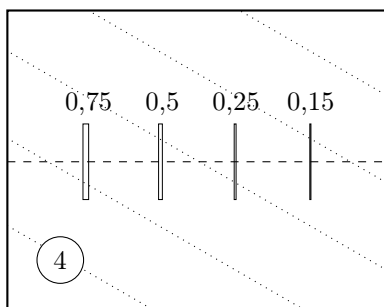
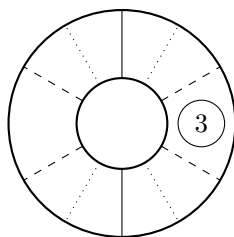
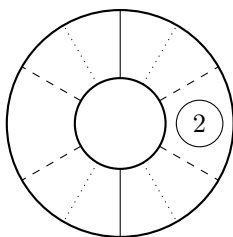
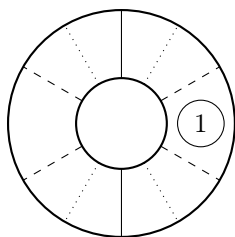
Hubbleův vesmírný dalekohled je na oběžné dráze Země už od roku 1990. Je to v podstatě předchůdce teleskopu Jamese Webba. Primární zrcadlo má v porovnání maličké, jen 2,4 metru! Přesto Hubbleův teleskop pořídil obrovské množství úžasných snímků, mnoho z nich jste již určitě viděli. Primární zrcadlo je v tomto případě z jednoho kusu a je kruhové. Jakou difrakci způsobí kruhové zrcadlo? Vyzkoušejte to! Možná vám přitom pomůže špendlík. U tohoto teleskopu drží sekundární zrcadlo tyče čtyři.



Načrtněte svůj odhad difrakční hvězdy ve fotografiích z Hubbleova teleskopu, pak si vyzkoušejte potřebné experimenty, a až pak se podívejte na skutečné fotografie z teleskopu.



DÍLY



Stránka A4 s díly ke stažení je k dispozici na:



*Základ je, abyste neošálili sami sebe,
a sami sebe ošálíte nejsnadněji.*

Richard Feynman

Co si o experimentu myslíte?



Dejte nám zpětnou vazbu

Text	Eduard Šubert
Ilustrace na titulní straně	Klára Kvardová
Diagramy a ilustrace	Eduard Šubert
Korektura	Vendula Šubert, Anežka Smutná a Lubomíra Dvořáková
Testování	Vendula Šubert a Šimon Mauler
JWST	NASA, ESA a CSA



Uveďte původ-Neužívejte dílo komerčně-Zachovejte licenci 4.0
Mezinárodní (CC BY-NC-SA 4.0)

verze 2.0

 MALÉ PSÍ

Keplerovy zákony v historických souvislostech

Leontýna Šlégrová, Jan Šlégr

Přírodovědecká fakulta Univerzity Hradec Králové

Abstrakt. Ve středoškolské fyzice se obvykle nejdříve vykládá Newtonův gravitační zákon, na který posléze navazují zákony Keplerovy, které v zásadě (téměř doslova) padají z nebe. V učebnicích je uvedeno, že zákony odvodil Johannes Kepler na základě pozorování a že z nich vyšel Isaac Newton při konstrukci zákona gravitačního, ale už není vysvětleno, jak postupoval. V tomto článku je popsána myšlenková cesta od Keplerových zákonů k Newtonovu gravitačnímu zákonu obdobně, jako byla představena v Newtonových Principiích.

Úvod

Johannes Kepler (1571–1630) byl německý matematik, astrolog a astronom, který několik let působil v Praze na dvoře císaře Rudolfa II. V Praze se také setkal s Tychonem Brahe, přičemž každý z nich měl jiné představy o podobě planetárního modelu: Brahe předpokládal, že Slunce obíhá kolem Země, avšak ostatní planety obíhají kolem Slunce. Kepler byl přesvědčen, že všechny planety obíhají kolem Slunce. Na základě porovnání svých a Braheových pozorování (Kepler mnoho pozorování sám neprováděl, protože měl slabý zrak, a spoléhal zejména na pozorování provedená Brahem) sepsal Kepler dílo *Astronomia nova*, které je považováno za základ nebeské mechaniky a obsahuje většinu důležitých Keplerových objevů.

1. Keplerovy zákony

Během tvorby modelu Sluneční soustavy Kepler dospěl k závěru, že střed oběžných drah nemůže ležet ve středu předpokládané kruhové dráhy. Kružnice tak podle něho musely být excentrické. Objevil také, že i Země obíhá kolem stejného středu jako další planety a i v průběhu oběhu kolem Slunce se chová obdobně jako ostatní planety. Prvním Keplerovým objevem tak bylo, že Země je řadovou planetou.

Z výpočtů a z Braheových pozorování také zjistil, že rychlost planet včetně Země se během oběhu kolem Slunce mění. Planety se pohybují rychleji, když jsou Slunci blíže, a pomaleji, pokud se na oběžné dráze nacházejí od Slunce dál. Po množství peripetií Kepler dospěl k závěru,

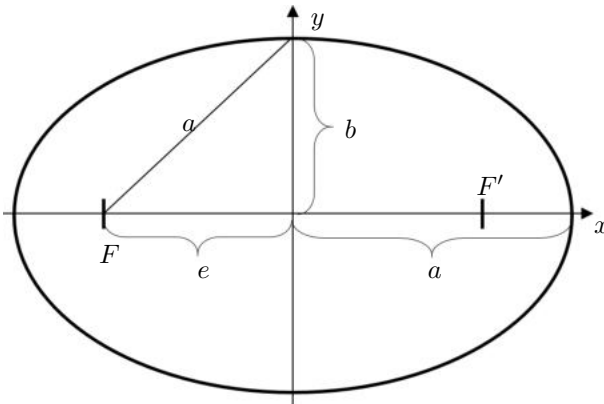
že úsečka spojující planetu a Slunce vždy za stejný čas opíše stejnou plochu. To je znění zákona, který dnes označujeme jako druhý:

Druhý Keplerův zákon: Obsahy ploch opsaných průvodičem¹⁾ planety za jednotku času jsou konstantní.

Když zkusil toto pravidlo aplikovat na oběžnou dráhu Země, fungovalo. Při použití pravidla na oběžnou dráhu Marsu však zjistil, že v některých částech oběžné dráhy pravidlo funguje, ale v jiných ne. Začal proto pochybovat, zda je dráha planety skutečně kruhová. Uvažoval tedy o dráze oválné a později, s počáteční nelibostí, o dráze eliptické. S eliptickou dráhou se spokojil ve chvíli, kdy zjistil, že Slunce leží v jednom z ohnisek elipsy.²⁾ Tak vznikl první Keplerův zákon:

První Keplerův zákon: Planety se pohybují kolem Slunce po elipsách málo odlišných od kružnic, v jejichž společném ohnisku je Slunce.

Elipsa se matematicky definuje jako množina všech bodů, které mají od dvou daných bodů F , F' (ohnisek elipsy) stálý součet vzdáleností. Vzdálenost ohniska a středu elipsy se označuje jako lineární excentricita e vzdálenost středu elipsy a nejvzdálenějšího bodu se pak označuje jako velká poloosa a . Jejich podíl udává výstřednost elipsy. Vzdálenost středu elipsy a nejbližšího bodu na elipse se označuje malá poloosa b , viz obr. 1.



Obr. 1: Význačné vlastnosti elipsy

¹⁾Průvodič je spojnice středu planety se středem Slunce.

²⁾Někteří fyzikové to tak mají. Např. Paul Dirac prohlásil, že „fyzikální zákon by měl být i matematicky krásný“.

Oba tyto zákony byly publikovány v Keplerově díle *Astronomia nova* (*Nová astronomie*). Historicky byl tedy nejdříve objeven druhý zákon a až později první. Kepler se totiž dlouho nechtěl vzdát kruhové trajektorie planety.

I v následných dílech se Kepler zabíral pohyby planet. Ve svém díle *Harmonices Mundi* (*Harmonie světů*) mimo jiné popsal třetí zákon planetárního pohybu:

Třetí Keplerův zákon: Poměr druhých mocnin oběžných dob dvou planet se rovná poměru třetích mocnin hlavních poloos jejich trajektorií:

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}.$$

Po úpravě třetího Keplerova zákona můžeme získat tvar

$$\frac{a_1^3}{T_1^2} = \frac{a_2^3}{T_2^2}.$$

Platí tedy, že poměr třetí mocniny délky hlavní poloosy a druhé mocniny oběžné doby je pro danou planetu konstantní:

$$\frac{a^3}{T^2} = \text{konst.}$$

Johannes Kepler nebyl posledním vědcem, který se zabýval výzkumem postavení planet ve Sluneční soustavě a silami, které jejich pohyb způsobují. Kepler měl mnoho následovníků, mezi ty nejvýznamnější se řadí například Isaac Newton.

2. Od Keplera k Newtonovi

Isaac Newton (1643–1727) byl anglický fyzik, matematik, astronom a alchymista, který přispěl k rozvoji matematiky a mnoha oblastí fyziky. Stejně jako jeho mnozí předchůdci si uvědomil, že musí existovat síla, která způsobuje, že jsou tělesa přitahována k Zemi. Již Johannes Kepler o téměř století dříve předpokládal existenci síly, která způsobuje, že se padající kámen pohybuje k Zemi a Země naopak k němu. Byl však toho názoru, že taková síla je nepřímou úměrná první mocnině vzdálenosti (viz dále). Newton tuto sílu zkoumal, předpokládal však, že je nepřímou úměrná druhé mocnině vzdálenosti těles.

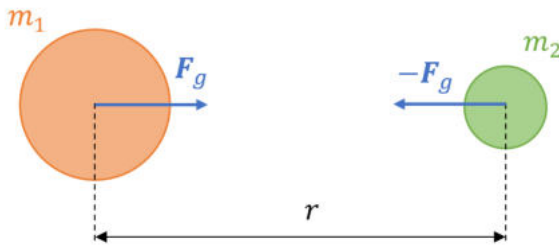
Dnes tuto sílu nazýváme silou gravitační a víme, že působí mezi kterýmkoliv dvěma tělesy a je vždy přitažlivá. Gravitační působení je, stejně

jako u jiných sil, vždy vzájemné: Síly, které působí na dvě tělesa, tak mají stejnou velikost, ale opačný směr. Účinky na těleso jsou však různé – můžeme vidět kámen padající k Zemi, ne však Zemi letící ke kameni.

Newtonův gravitační zákon: Každá dvě tělesa na sebe vzájemně působí stejně velkými přitažlivými gravitačními silami opačného směru F_g , $-F_g$. Pro dvě tělesa o hmotnostech m_1 a m_2 ve vzájemné vzdálenosti r platí

$$F_g = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2},$$

kde $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$ je gravitační konstanta³⁾.



Obr. 2: Znázornění gravitační síly působící mezi dvěma tělesy

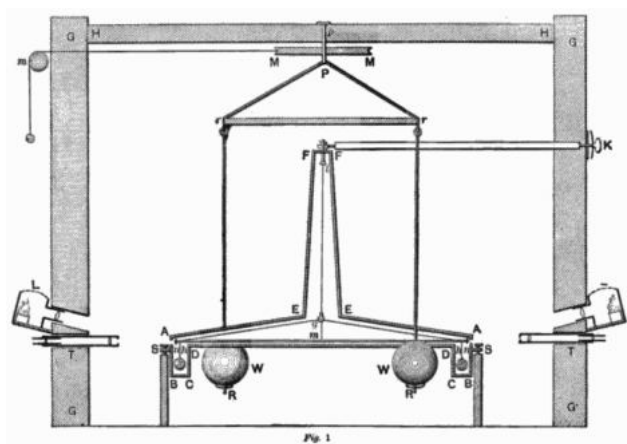
Gravitační konstanta G je jednou ze základních fyzikálních konstant, její přesnost je ze všech těchto základních konstant nejnižší. Je to způsobeno tím, že gravitační působení mezi tělesy je velmi slabé a přesná hodnota gravitační konstanty se tak určuje velmi obtížně.

Pokud chceme, aby se mezi tělesy gravitační působení nějak výrazněji projevilo, musí být alespoň jedno z těles velmi hmotné. To si uvědomovali i fyzikové, kteří se rozhodli hodnotu gravitační konstanty experimentálně určit. Pokud totiž chtěli určit hmotnost a průměrnou hustotu Země, o což se snažili především, bylo nutné, aby znali hodnotu gravitační konstanty. Již Newton navrhoval určit hodnotu gravitační konstanty tak, že se určí gravitační síla mezi malým tělesem a velkým geologickým útvarem, například horou, jejíž hmotnost je možné odhadnout. Tímto způsobem se hodnotu gravitační konstanty pokusil určit francouzský geofyzik Pierre Bouguer v roce 1738. Postupoval tak, že určil úhel, o který se odchýlí olovnice od svislého směru v případě, že se nachází v blízkosti

³⁾Dříve byla gravitační konstanta v českých zemích značena symbolem κ . V novějších učebnicích již nalezneme celosvětově přijímané označení G .

hory. Obdobný, i když mírně zdokonalený, postup experimentu zvolili i Nevil Maskelyne a Charles Hutton roku 1774. Ukázalo se však, že není možné určit hmotnost geologického objektu s dostatečnou přesností, aby šlo hodnotu gravitační konstanty použít k přesnějším výpočtům.

S novým přístupem přišel John Michell, který sestavil torzní váhy. Tento přístroj využívá poznatku, že čím menší je průměr vlákna, na němž je zavěšena tyč s dvojicí závaží, tím menší síla stačí k zkroucení vlákna o určitý úhel. Sám Michell již nestihl během svého života toto zařízení použít na určení hodnoty gravitační konstanty, využil ho však britský fyzik Henry Cavendish v roce 1798. Jeho torzní váhy se skládaly ze dvou olověných kuliček o hmotnosti 730 g, upevněných na vodorovném dřevěném rameni, které bylo zavěšeno na tenkém vlákně (viz obr. 3).



Obr. 3: Cavendishovy torzní váhy

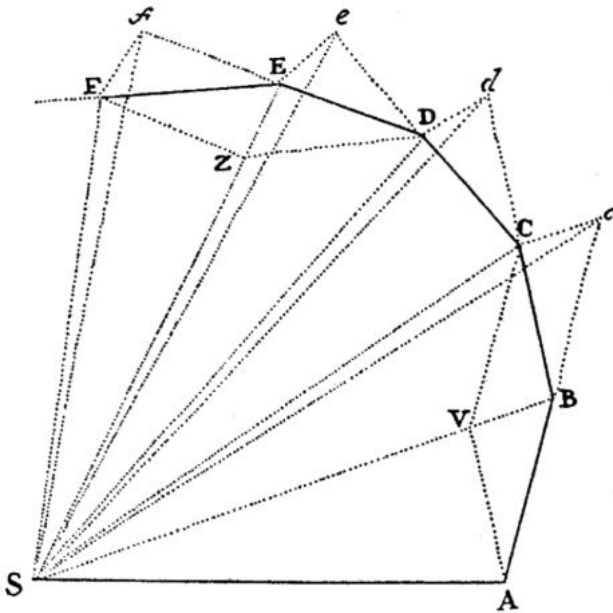
Ke kuličkám Cavendish z obou stran přibližoval dvojice větších olověných koulí o hmotnosti 158 kg. Váhy pak byly opatřeny zrcátkem, od něhož se odrážel paprsek světla, který indikoval výchylku ramene, která byla měřena dalekohledem. Podobně jako jeho předchůdci i Cavendish původně plánoval tímto experimentem určit hmotnost a hustotu Země, jím naměřená hodnota gravitační konstanty, přibližně $6,74 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$, se od dnešní hodnoty liší pouze o 1 % a dosáhl tak na dlouhou dobu nejpřesnější hodnoty.

Později byly hodnoty zpřesňovány s použitím podobných experimentů. Za jedno z nejpřesnějších měření je považován výsledek, kterého dosáhli

američtí fyzici G. G. Luther a W. R. Towler v roce 1981. Ti hodnotu gravitační konstanty stanovili na $6,672 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$. V současnosti je její hodnota

$$G = (6,674\,30 \pm 0,000\,15) \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}.$$

Newtonův gravitační zákon a také jeho souvislost s Keplerovými zákony poprvé Newton publikoval v krátkém pojednání *De motu corporum in gyrum* (*O pohybu těles po oběžných drahách*). Úplné znění pohybových zákonů a gravitačního zákona je poté obsahem Newtonova slavného díla *Philosophiæ naturalis principia mathematica* (*Matematické základy přírodní filosofie*), často označovaného jako *Principia*.



Obr. 4: Originální obrázek pohybu planety z Newtonových Principií

Newtonova fyzikálně-geometrická cesta od Keplerových zákonů k zákonu gravitačnímu zaujala v průběhu let mnoho fyziků, včetně významného fyzika 20. století a nositele Nobelovy ceny Richarda Feynmana. Ten na toto téma publikoval přednášku, která byla dlouhou dobu pokládána za ztracenou, ale později vydána knižně. Mírně upravenou cestu

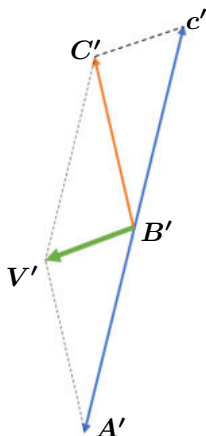
Richarda Feynmana, která se velmi blížila Newtonovu historickému postupu, si nyní představíme.

3. Od druhého Keplerova zákona k dostřednosti gravitační síly

Nejdříve ukážeme, že z platnosti Newtonových pohybových zákonů a druhého Keplerova zákona plyne skutečnost, že gravitační síla působí vždy směrem ke Slunci.

Na obr. 4 je v bodě S umístěno Slunce a na začátku je planeta v bodě A . Trajektorie planety kolem Slunce je aproximována na sebe navazujícími úsečkami, které planeta opíše za stejné časové intervaly Δt .

V případě, že by planeta nebyla při svém pohybu přitahována ke Slunci, pohybovala by se podle zákona setrvačnosti, tedy podle prvního Newtonova pohybového zákona rovnoměrně přímočaře z bodu A do bodu B a dále pak za stejný čas z bodu B do bodu c . Z výsledků pozorování je však zřejmé, že za čas Δt se planeta nenachází v bodě c , ale v bodě C . Pokud odečteme vzniklé vektory rychlostí $B'C'$ a $B'c'$ (tedy sečteme vektory $B'C'$ a opačný vektor k $B'c'$, tj. vektor $B'A'$) získáme výsledný vektor $B'V'$, viz obr. 5. Vektor změny rychlosti $B'V'$ tedy míří do bodu S , to znamená, že i vektor zrychlení a konečně, podle druhého Newtonova pohybového zákona, i vektor síly míří do bodu S . Dokázali jsme tedy, že je gravitační síla, kterou Slunce přitahuje planetu v bodě B , dostředivá a míří do bodu S .



Obr. 5: Skládání vektorů rychlostí

3.1. Od dostředivosti gravitační síly k druhému Keplerovu zákonu

Nyní se podíváme, jestli je možné naopak z dostředivosti gravitační síly dokázat druhý Keplerův zákon. V případě, že by opět planeta nebyla přitahována ke Slunci, pohybovala by se z bodu A do bodu B a následně za stejný čas z bodu B do bodu c . Gravitační síla však působí směrem ke Slunci, tedy k bodu S . Vzhledem k dostředivosti gravitační síly můžeme podle druhého Newtonova pohybového zákona tvrdit, že i zrychlení planety bude mířit do bodu S , a tedy i změna rychlosti působí do bodu S . Složením rychlostí zjistíme, že se v čase $t + \Delta t$ planeta nebude nacházet v bodě c , ale v bodě C .

Vzhledem k tomu, že úsečka Cc je rovnoběžná s úsečkou SB , můžeme usuzovat, že trojúhelníky ABS a BcS mají stejnou plochu. Trojúhelníky mají totiž stejně dlouhou základnu AB , resp. Bc , a protože mají společný bod S , mají i stejnou výšku. Dále můžeme z rovnoběžnosti úseček SB a Cc usoudit, že i trojúhelníky BSc a BSC mají stejnou plochu, protože mají společnou základnu SB a stejnou výšku. Z toho plyne, že i trojúhelníky ABS a BCS mají stejnou plochu. Tím jsme z dostředivosti gravitační síly dokázali druhý Keplerův zákon.

4. Od třetího Keplerova zákona k ubývání gravitační síly s r^2

Jak již bylo řečeno výše, Kepler během pozorování zjistil, že planeta při pohybu kolem Slunce mění svou rychlost, resp. mění se velikost i směr okamžité rychlosti planety.

Pro zjednodušení budeme předpokládat, že se planeta pohybuje po kružnici o poloměru r stálou rychlostí v . Dále uvažujeme, že planeta oběhne Slunce právě jednou za čas T . Pro velikost rychlosti rovnoměrného pohybu po kružnici platí:

$$v = \frac{s}{T},$$

kde s je obvod kružnice $s = 2\pi r$. Po dosazení získáme

$$v = \frac{2\pi r}{T},$$

$$a_d = \frac{v^2}{r}.$$

Po dosazení rychlosti do vztahu pro dostředivé zrychlení dostaneme

$$a_d = \frac{4\pi^2 r^2}{T^2 r},$$

po zkrácení poloměru kružnice

$$a_d = \frac{4\pi^2 r}{T^2}.$$

Využitím třetího Keplerova zákona

$$T^2 \sim r^3,$$

dostaneme

$$a_d \sim \frac{r}{r^3} = \frac{1}{r^2}.$$

Z druhého Newtonova pohybového zákona víme, že je síla \mathbf{F} přímo úměrná zrychlení \mathbf{a} . Můžeme tak usoudit, že velikost gravitační síly ubývá s druhou mocninou vzdálenosti planety od Slunce, tedy

$$F_g \sim \frac{1}{r^2}.$$

4.1. Od gravitační síly k třetímu Keplerovu zákonu

Opět můžeme zvolit i opačný postup. Budeme vycházet ze vztahu

$$F_g = G \frac{Mm}{r^2},$$

kde G je gravitační konstanta, M je hmotnost Slunce, m je hmotnost planety, která kolem Slunce obíhá a r je vzájemná vzdálenost středů planety a Slunce. Jak již víme, gravitační síla je silou dostředivou a je příčinou kruhového pohybu planety. Svou velikostí a směrem je rovna síle dostředivé

$$F_d = \frac{mv^2}{r},$$

kde m je opět hmotnost planety, v je oběžná rychlost planety a r je vzájemná vzdálenost středů planety a Slunce. Získáme tedy

$$G \frac{Mm}{r^2} = \frac{mv^2}{r}.$$

Dosadíme-li za oběžnou rychlost

$$v = \frac{2\pi r}{T},$$

dostaneme

$$G \frac{M}{r} = \frac{4\pi^2 r^2}{T^2}.$$

Rovnici upravíme tak, aby na levé straně rovnice byly pouze konstanty, což je gravitační konstanta G , hmotnost Slunce M a samozřejmě $4\pi^2$ a na pravé straně neznámé r a T :

$$\frac{GM}{4\pi^2} = \frac{r^3}{T^2}.$$

Výsledkem je, že podíl třetí mocniny vzdálenosti středů planety a Slunce a druhé mocniny oběžné doby $\frac{r^3}{T^2}$ je roven konstantě, což je znění třetího Keplerova zákona v případě, že uvažujeme kruhovou oběžnou dráhu, kde je hlavní poloosa rovna poloměru kružnice.

Literatura

- [1] Štoll, I.: *Dějiny fyziky*. 2. vyd., Prometheus, Praha, 2009.
- [2] Šolcová, A.: *Johannes Kepler: zakladatel nebeské mechaniky*. Velké postavy vědeckého nebe, Prometheus, Praha, 2004.
- [3] Ferguson, K.: *Tycho a Kepler: nesourodá dvojice, jež jednou provždy změnila náš pohled na vesmír*. Galileo, Academia, Praha, 2009.
- [4] Goodstein, D. L., Goodstein, J. R.: *Feynman's lost lecture: the motion of planets around the sun*. Norton, New York, 1996.

Recenze knihy J. Tomsy *Norimberský trychtýř* aneb *Průvodce přemýšlivého studenta* *středoškolskou fyzikou*

Vladimír Wagner

I v češtině existuje řada učebnic, přehledů a knih věnovaných středoškolské fyzice. Proč psát další? Jedním z důvodů může být zacílení na různé skupiny učitelů a studentů. Dalším pak, že každému studentovi i pedagogovi může vyhovovat jiná forma výkladu, a tedy i učebnice. Proto je rozmanitost v nabídce učebnic a knih věnovaných středoškolské fyzice velmi důležitá. Pestrost je důležitá i pro ty, kteří se chtějí k celkovému přehledu základů fyziky na středoškolské úrovni vrátit i v pozdějším věku. To je důvod, proč jsem si s potěšením přečetl novou knihu Jana Tomsy „*Norimberský trychtýř aneb Průvodce přemýšlivého studenta středoškolskou fyzikou*“ (Novela Bohemica, 2022).¹⁾

Pokud jde o cílovou skupinu, tak učebnice není zaměřena na běžného studenta, ale hlavně na ty, kteří se o fyziku a její pochopení a poznání zajímají. Na druhé straně ovšem není jen pro ty, kteří by se chtěli v budoucnu zaměřit na obory potřebující fyziku. Je pro všechny, kteří chtějí porozumět fungování našeho světa, což bez znalosti logiky fyzikálních základů nejde. Proto se snaží spíše o složitější postupnou cestu samostatného pochopení dané problematiky studentem, než o „pouhé“ její naučení se. Hodně staví na pochopení metodiky vědeckého poznávání a postupného logického budování porozumění fyzice. I to je důvodem, proč nejde o pouhý přehled současných poznatků, ale velmi intenzivně se v ní využívají příklady z historie fyziky ukazující, jak se k těmto poznatkům postupně dospělo. Zároveň se tak dokumentuje, že fyzika není soubor uzavřených znalostí, na které sedá prach, ale jde o živoucí stále se rozvíjející nástroj, který umožňuje poznávat a popisovat svět okolo nás. Předkládaný přehled znalostí tak není ukončený. Lze to dokumentovat i na systému definic fyzikálních jednotek, fundamentu chrámu fyziky. Ten

¹⁾ Recenze knihy Jana Tomsy „*Norimberský trychtýř aneb Průvodce přemýšlivého studenta středoškolskou fyzikou*“ od V. Wagnera vyšla pod názvem „*Fyzika a porozumění světu*“ též v časopise *Vesmír* 102, 456, 2023/7, <https://vesmir.cz/cz/casopis/archiv-casopisu/2023/cislo-7/fyzika-porozumeni-svetu.html>.

se vyvíjel a ustavoval i v průběhu psaní knihy a autor o tom s nadhledem informuje.

Právě proto je rozsáhlá úvodní část věnována tomu, co fyzika je, jak se vyčlenila v prostoru ostatních vědních oborů a jakou má na ně návaznost. Ukazuje, jaké jsou metodiky zkoumání využívané ve fyzice a jejich podobnosti i odlišnosti od těch, které jsou využívány příbuznými obory. Ukazuje nepostradatelnost matematiky pro fyziku a úlohu fyzikálního modelu a odpovídajícího zjednodušení, zanedbání a zaokrouhlení ve fyzice. Matematika a fyzika se proplétaly a vzájemně posilovaly po celou dobu rozvoje vědeckého poznání lidstva.

Další část se věnuje tomu, jak nejen k fyzice přistupovat a jak se jí učit. Ukazuje, že za jazyk fyziky je možno považovat právě zmíněnou matematiku. Proto je pro osvojení fyziky důležité znát na potřebné úrovni matematiku základní a střední školy. Bez úsilí nebude v tomto oboru úspěšný ani velmi talentovaný student, a odpovídající snahu tak vyžaduje i popisovaná kniha. I když je v ní velký důraz kladen na logické postupy a odvozování, nelze se obejít bez naučení se a zapamatování potřebných klíčových pojmů a potřebných metodik a postupů. Na závěr této části je přehled desatera základních doporučení pro adepta, který se s využitím knihy vydal na cestu fyzikálního poznání.

Mezi nejdůležitější pojmy patří základní fyzikální veličiny a jejich jednotky. Právě na historii vývoje definice jednotek je soustředěna velká pozornost. Je to dáno i tím, že právě v současné době se téměř dokončila cesta k jejich definování pomocí fundamentálních fyzikálních konstant. Dá se tak předpokládat, že nyní nejspíše na relativně dlouhou dobu zůstane jejich zavedení a definice neměnná. Popisu a osvětlení rozdílů mezi fundamentálními konstantami a těmi ostatními je také oprávněně věnována značná pozornost. Že vývoj v této oblasti probíhá a dokončuje se i nyní, v době psaní učebnice, ukazuje i to, že bylo potřeba se k tomuto tématu vrátit k dodatku.

Ukázka z knihy J. Tomsy, s. 92

(A) Slovo konstanta pochází z latinského *constans*, což znamená *stálý, neměnný*. Označuje tedy veličinu, o níž předpokládáme, že se její hodnota nemění, a to především v čase. Věříme například (a nemáme důvod o tom pochybovat), že světlo ve vakuu se vždy v minulosti šířilo stejně rychle jako dnes a že i v budoucnu bude tato rychlost vždy stejná. Předpokládáme i její neměnnost v prostoru, tedy že rychlost světla je stejná v celém vesmíru. Těmito vlastnostmi se řadí do kategorie tzv. konstant *univerzálních*, to jest nepodmíněných tím, že žijeme na Zemi, ani ničím jiným.

Mezi fyzikálními veličinami platí různé vztahy a při jejich využití při popisu fyzikálních dějů a řešení úloh musíme znát příslušný fyzikální „pravopis“ a metodologii manipulace s nimi. Důležitý je i způsob využití příslušných matematických postupů. Seznámíme se tak s vektory, ba dokonce tenzory a derivacemi i integrály. A to přesně na takové úrovni, která je srozumitelná středoškolákovi a pomůže mu při osvojování fyzikálních problémů. Zároveň je užitečná i pro ty, kteří si chtějí připomenout středoškolské základy fyziky v konkrétních oborech, které jsou jim vzdálenější, a to v celkovém kontextu. Pokud lze doposud popsané části považovat za úvodní, které nás naučí se pohybovat ve fyzikálním prostoru a umožní nám pochopit metodologii odpovídajícího vědeckého přístupu, tak zabírají třetinu této knihy, a i tím se kniha odlišuje od jiných středoškolských učebnic. Čtenář se k této části může vracet a zvýrazněná shrnutí i vypíchnutá základní pravidla mu umožňují přistoupit ke konkrétním oblastem fyziky velice dobře vyzbrojen.

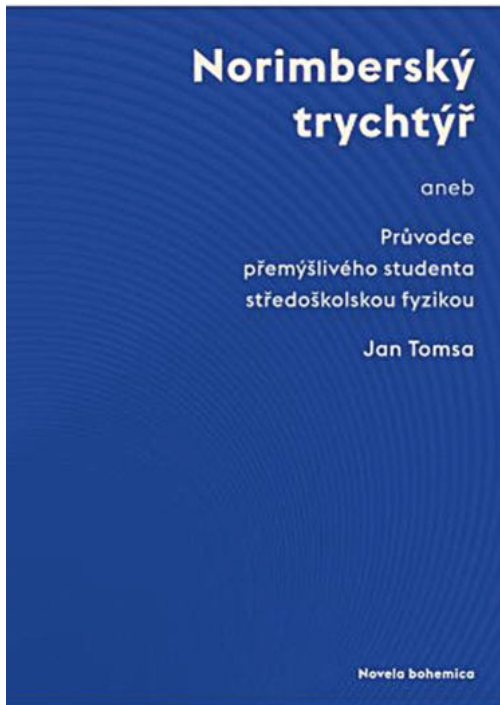
První konkrétní oblastí je mechanika a z ní to, co je opravdu tím fundamentem fyziky – tři Newtonovy pohybové zákony. V současné době, kdy se jedná o vyřazování výkladu Newtonových zákonů z vzdělávacích plánů základních škol, je jejich vysvětlení pro středoškoláka ještě důležitější. Zavádí se pojem síly a postupně se přes popis gravitační interakce a jejich silových účinků dostáváme k interakci elektromagnetické. Jak už bylo zmíněno, výklad neprobíhá po oborech, ale snaží se postupně budovat strukturovanou stavbu fyziky jako nástroje poznávání. Daří se tak osvětlit řadu souvislostí, které by při jiném typu výkladu unikly.

Důraz se klade i na to, že základním kritériem správnosti fyzikálních (i všech vědeckých) hypotéz a teorií jsou výsledky pozorování a experimentu. V závěrečné části knihy je tak velká pozornost věnována experimentu, měření a určování nejistot (chyb) měření. Studentům osvětluje, jak se realizuje měření a zjišťují hodnoty měřených veličin a jednotlivé typy nejistot měření. Je zde i návod, jak referovat o výsledcích měření a experimentu.

I když pochopitelně, ostatně jako každý přehled či učebnice, nevyloží knižní průvodce fyzikou Jana Tomsy detailně vše a řadu věcí si zájemce bude muset najít jinde, je nádherným otevřeným obrazem celé šíře fyziky až po tu nejmodernější spojenou s hledáním popisu struktury hmoty na úrovni mikrosvěta. Zde se snaží o osvětlení prvků, které přináší teorie relativity i kvantová fyzika a její specifika a dopady na proces měření a pochopení jeho výsledků. Svě znalosti si ve všech částech může čtenář ověřit na řadě cvičení.

Za extrémně důležité považuji to, že hlavní důraz je zde kladen na logiku a pochopení principů. Bez porozumění fyzikálním zákonitostem nelze pochopit řadu základních výzev, které stojí před naší společností, jako jsou například příčiny a dopady klimatických změn i možnosti transformace energetiky a dalších oblastí do nízkoemisní podoby. K těmto otázkám se v současné době řada mladých lidí intenzivně vyslovuje a zasazuje se za konkrétní výběr řešení. Je tak důležité, aby to bylo s plným pochopením dané problematiky a dopadů toho, za co se vyslovují.

Nepochybuji, že si specifickým přístupem získá kniha řadu příznivců, ke kterým jsem se přiřadil i já. Proto ji doporučuji nejen pedagogům, ale i studentům. Věřím, že díky ní propadne kouzlu fyzikálního poznání řada dalších zájemců, kteří se na cestu k němu vydají. A nepochybuji, že se k ní i v budoucnosti budou moc rádi vracet a v knihovnách bude patřit mezi ty nejobtatanější.



Vydává Jednota českých matematiků a fyziků
tel.: 222 090 708-9, e-mail: jcmf@math.cas.cz
za podpory MFF UK Praha a FJFI ČVUT Praha



Vycházejí 4 čísla v kalendářním roce

Obálku navrhl Bohuslav Šír

Sazbu programem \TeX připravil RNDr. Miloslav Závodný

Adresa redakce: MFF UK, V Holešovičkách 2, 182 00 Praha 8–Troja
e-mail: rozhledy@jcmf.cz

Internetové stránky časopisu: <https://rozhledy.jcmf.cz/>

Vytiskla Tiskárna Pohline, Zálesí 1126/88, 142 00 Praha 4

Distribuci pro předplatitele provádí v zastoupení vydavatele
MediaCall, s. r. o.

Vídeňská 546/55, 639 00 Brno

tel.: +420 532 165 165, e-mail: export@mediacall.cz

web: www.zahranicnitisk.com

ISSN 0035-9343

MK ČR E4691

© Jednota českých matematiků a fyziků, Praha 2023

Redakční rada

Vedoucí redaktorka:

doc. Ing. Lubomíra Dvořáková, Ph.D., FJFI ČVUT Praha

Redaktorka pro matematiku:

doc. Ing. Lubomíra Dvořáková, Ph.D., FJFI ČVUT Praha

Redaktor pro fyziku:

Mgr. Matěj Ryston, Ph.D., MFF UK Praha

Členové redakční rady:

prof. RNDr. Vlastimil Dlab, DrSc., F.R.S.C., Praha

doc. RNDr. Zdeněk Drozd, Ph.D., MFF UK Praha

RNDr. Petr Hanuš, FSv ČVUT Praha

doc. RNDr. Jaroslav Hora, CSc., FPE ZČU Plzeň

prof. RNDr. Ivo Kraus, DrSc., FJFI ČVUT Praha

doc. RNDr. Jan Kříž, Ph.D., PřF UHK Hradec Králové

prof. RNDr. Miroslav Lávička, Ph.D., FAV ZČU Plzeň

RNDr. Pavel Pokorný, Ph.D., VŠCHT Praha

RNDr. Miroslav Randa, Ph.D., PdF ZČU Plzeň

RNDr. Filip Studnička, Ph.D., PřF UHK Hradec Králové

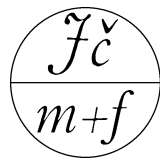
doc. RNDr. Jan Šlégr, Ph.D., PřF UHK Hradec Králové

prof. RNDr. Pavel Tlustý, CSc., PedF JU České Budějovice

doc. RNDr. Pavel Töpfer, CSc., MFF UK Praha

RNDr. Vladimír Wagner, CSc., ÚJF AV ČR Řež

ROZHLEDY matematicko-fyzikální Ročník 98 (2023), číslo 3



OBSAH

J. Kopfová: Hrajeme si s pravděpodobností	1
V. Dlab: Rovnoběžník ve čtverci	6
D. Martišek: Jak to vlastně je? Fraktály	15
Matematické oříšky: Hledání pokladu	34
E. Šubert: Proč mají hvězdy na fotografiích z vesmírného teleskopu Jamese Webba osm cípů?	36
L. Šlégrová, J. Šlégr: Keplerovy zákony v historických souvislostech	52
V. Wagner: <i>Recenze knihy J. Tomsy Norimberský trychtýř aneb Průvodce přemýšlivého studenta středoškolskou fyzikou</i>	62

Pokyny pro autory

Příspěvky dodávejte na adresu redakce v elektronické podobě. Nejlépe napsané ve formátu \LaTeX , přijatelný je i formát Plain \TeX , je akceptovatelný i text připravený editorem Word či podobným.

Pokud jde o obrázky, je žádoucí, aby byly připraveny v reprodukovatelné podobě. Každý obrázek nechť je v samostatném souboru, nejlépe ve formátu eps nebo pdf. Přípustná je též bitmapa v dostatečném rozlišení.

Ke každému zasílanému příspěvku (ne u soutěží, zpráv a recenzí) přiložte krátkou anotaci v českém jazyce. Dále je žádoucí, aby u každého příspěvku byla uvedena literatura, na kterou je v textu odkazováno.