

# ROZ HLEDY

**MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ**

ČASOPIS PRO ZÁJEMCE O MATEMATIKU, FYZIKU A INFORMATIKU

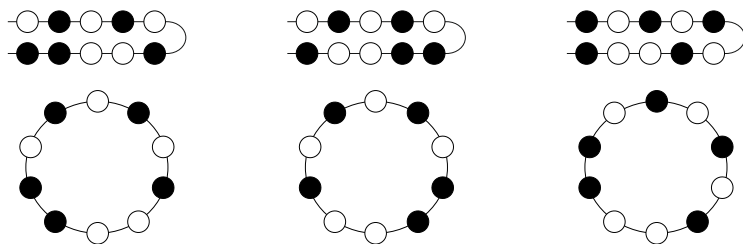
ROČNÍK 98 (2023) • ČÍSLO 4

Burnsideovo lemma aneb proč se starat o teorii grup

Vojtěch David, student MFF UK, Praha

Úvod a motivace

Uvažme následující situaci. Máme 5 černých a 5 bílých korálek, které navlékáme na provázek a chceme si vyrobit náramek. Kolik takových náramků můžeme vytvořit? Již při prvotním zamyšlení tato otázka není úplně snadná, při počítání možností nemůžeme uvažovat jen pořadí, v jakém korálky navlékáme, neboť mohou různá pořadí jejich navlečení vést ke stejným náramkům jako na obr. 1.



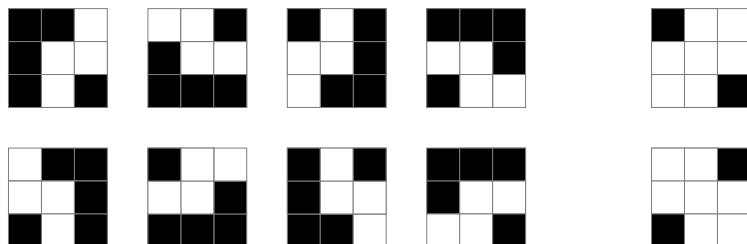
Obr. 1:

Tento problém má zřejmě jakousi symetrii, která nám jeho řešení komplikuje. Než se pustíme do snažení o práci s touto symetrií, uvedeme ještě jeden příklad.

Máme tabulku  $3 \times 3$ . Kolik různých obarvení políček černou nebo bílou barvou existuje? Při takto prvoplánovém dotazu můžeme odpovědět téměř okamžitě – pro každé z devíti políček máme právě 2 možnosti obarvení, proto je zjevně celkový počet možností  $2^9 = 512$ . Co když do hry ale opět přidáme symetrie problému? Co když budeme chtít jen obarvení, která jsou různá, i když tabulku budeme libovolně otáčet nebo překlápat? V tomto případě nám zřejmě zbyde méně možností, ale není jisté, kolik jich bude, protože některé tabulky získáme z jiného počtu původních možností než jiné, jak ukazuje obr. 2.

Je tedy zřejmé, že budeme předvedené problémy muset zkoumat nepřímo – přes přímočaré počítání „objektů“ se k výsledku dostaneme

jen s velkými obtížemi.<sup>1)</sup> Pojdme tedy zabřednout do teorie grup, která nabízí naprosto přirozený způsob, jak nahlížet na symetrie různých matematických objektů.



Obr. 2:

## Grupy

Nejprve uvedeme formální definici.

**Definice 1.** Grupa je množina  $G$  vybavená binární operací, řekněme  $\cdot : G \times G \rightarrow G$ , pro kterou platí následující.

- **Operace je asociativní:**  $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$  pro všechna  $a, b, c \in G$ .
- **Grupa obsahuje neutrální prvek:** existuje prvek  $1 \in G$  takový, že  $a \cdot 1 = a = 1 \cdot a$  pro všechna  $a \in G$ .
- **Ke každému prvku existuje inverzní prvek:** pro všechna  $a \in G$  existuje prvek  $a^{-1} \in G$  takový, že  $a \cdot a^{-1} = 1 = a^{-1} \cdot a$ .

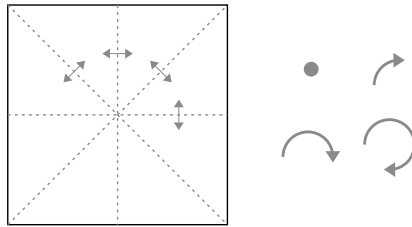
Nakolik abstraktní se může tato definice zpočátku zdát, tvrdí vlastně něco poměrně přirozeného a očekávaného.

Jako jednoduchý příklad grupy můžeme uvést celá čísla s operací sčítání. Sčítání je zřejmě asociativní, existuje číslo, které když přičtete k libovolnému jinému číslu, nic se nezmění (mluvíme o nule) a ke každému celému číslu existuje jiné celé číslo, jejichž součet dává nulu (např. k 5 je to  $-5$ ) – jedná se tedy skutečně o grupu. Dále můžeme uvést třeba racionální čísla bez nuly spolu s násobením nebo reálná čísla se sčítáním – že se jedná o grupy, ověříme úplně stejně.

---

<sup>1)</sup>Tato myšlenka je dokonce klíčová při důkazu Burnsideova lemmatu, který bude uvedený později.

Také ale existují další příklady grup – pro nás budou užitečné tzv. dihedralní grupy. Vezměme si například čtverec a uvažme množinu všech zobrazení, která jej převedou na sebe sama – chceme-li, jeho symetrie. Co vše bude tato množina obsahovat? Zjevně identické zobrazení, tedy zobrazení, které se čtvercem „neudělá nic“, dále rotace o  $90^\circ$ ,  $180^\circ$  a  $270^\circ$  a nakonec osové symetrie – dvě podle os stran a dvě podle úhlopříček. Můžeme si rozmyslet, že žádné další symetrie čtverec nemá.<sup>2)</sup>



Obr. 3: Grupa symetrií čtverce

Máme tedy množinu a ještě potřebujeme operaci. Touto operací pro nás bude poměrně přirozeně skládání zobrazení. Všimněme si, že když například nejprve čtverec otočíme o  $90^\circ$  a následně překloupíme podle osy „horní strany“ čtverce, bude to mít stejný efekt, jako kdybychom čtverec rovnou překloupili podle úhlopříčky. Budeme-li tuto operaci značit  $\circ$  a doprava umístíme zobrazení, které provádíme jako první, můžeme pak neformálně psát

$$\leftrightarrow \circ \curvearrowright = \nearrow$$

Vidíme tedy, že složením dvou symetrií čtverce je opět symetrie čtverce. Můžeme také ověřit, že je tato operace asociativní, že existuje neutrální prvek (je jím zobrazení „neudělej nic“) a že ke každému zobrazení existuje inverzní zobrazení, které jej „vyruší“. Tato množina bude tedy skutečně grupou.

Podobnou grupu můžeme zavést pro libovolný pravidelný  $n$ -úhelník. Budeme ji nazývat dihedralní grupou (nebo prostě grupou symetrií  $n$ -úhelníku) a dá se ukázat, že bude mít pokaždé  $2n$  prvků (identitu,  $n - 1$  netriviálních rotací a  $n$  osových symetrií).

<sup>2)</sup>Též to můžeme precizněji dokázat, očíslováme-li si vrcholy čtverce a budeme-li uvažovat všechny možnosti, jak čtverec přechíslovat, abychom zachovali sousednost, tj. abychom jej nijak nedeformovali.

Nyní si uvědomme dvě věci. Zaprvé poukažme na sílu definice grupy – ukázali jsme, že jak např. celá čísla, tak množina „věcí, co můžeme dělat se čtvercem“ mají strukturu grupy, existuje mezi nimi tedy nějaká vnitřní podobnost. Pokud tedy dokážeme nějaké tvrzení obecně pro grupu, bude toto tvrzení platit pro všechny její „realizace“ – a takových tvrzení není vůbec málo! Grupami se zabývá celý obor matematiky, který v tomto článku nelze pomalu ani přiblížit.

Zadruhé se vraťme k původním motivačním příkladům. Nyní jsme totiž popsali docela dobře symetrie, které obtěžkávají naše situace. Hledáme počet různých náramků až na *působení* grupy symetrií desetiúhelníku nebo (poněkud intuitivněji) počet různých čtverců až na *působení* grupy symetrií čtverce (kterou jsme si dokonce popsali explicitně). Co je to ale ono působení grupy?

### Působení grupy na množinu a Burnsideovo lemma

Na dvou motivačních příkladech jsme poměrně intuitivně přiblížili, co to znamená, že grupa působí na nějakou množinu, tento koncept nyní můžeme trochu formalizovat.

**Definice 2.** Grupa  $G$  působí na množinu  $X$ , pokud pro každé  $g \in G$  a každé  $x \in X$  existuje prvek  $gx \in X$  a platí

1.  $h(gx) = (hg)x$  pro všechna  $g, h \in G, x \in X$  (tedy nezáleží, jestli nejprve působil prvkem  $g$  a pak až  $h$  nebo jestli působil rovnou prvkem  $hg$ ),
2.  $1 \cdot x = x$  pro všechna  $x \in X$  (působení neutrálního prvku nic nedělá).

Vybaveni touto definicí můžeme s působením grupy pracovat trochu abstraktněji. Zlatým grálem našeho sražení bude Burnsideovo lemma – tvrzení, které nám umožní pouhým dosazením vyřešit prezentované problémy. Ještě předtím ale musíme definovat pár pojmů a odvodit pro ně nějaká snadná tvrzení.

**Definice 3.** Necht' grupa  $G$  působí na množinu  $X$ . Orbitou prvku  $x$  budeme rozumět množinu

$$G_x = \{gx \mid g \in G\}.$$

Pro daný prvek  $x \in X$  budeme tedy orbitou rozumět množinu všech možných prvků, které můžeme dostat působením grupy  $G$ . V našem

příkladu se čtvercem, kdy množinou  $X$  rozumíme všechna vybarvení čtverce a grupou  $G$  grupu symetrií čtverce, tedy budeme moct s trochou nadsázky psát:

$$G_{\blacksquare} = \left\{ \begin{array}{cc} \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare \end{array} \right\} \quad G_{\square} = \left\{ \begin{array}{cc} \square & \square \\ \square & \square \end{array} \right\}$$

Je tedy vidět, že nás v tomto problému zajímá pouze počet různých orbit. Za tímto účelem uveďme ještě jednu definici.

**Definice 4.**  $X/G$  značí množinu všech orbit při působení grupy  $G$  na množinu  $X$ , tedy

$$X/G = \{G_x \mid x \in X\}.$$

V tuto chvíli jsme již celé zadání úlohy převedli do abstraktního jazyka, protože nás zřejmě bude zajímat velikost této množiny, tedy  $|X/G|$ . Máme před sebou ale ještě poněkud zdlouhavou cestu, než budeme umět tento počet přímo určit. Zavedeme nyní dva v jistém smyslu podobné pojmy.

**Definice 5.** Množinou fixních bodů pro  $g \in G$  budeme nazývat

$$\text{Fix } g = \{x \in X \mid gx = x\}.$$

**Definice 6.** Stabilizátorem prvku  $x \in X$  při působení grupy  $G$  na množinu  $X$  budeme rozumět

$$\text{St } x = \{g \in G \mid gx = x\}.$$

Zatímco množina fixních bodů obsahuje takové prvky množiny  $X$ , které jsou zachované působením specifického prvku grupy  $g$ , stabilizátor prvku  $x$  obsahuje právě ty prvky grupy  $G$ , jejichž působením je zachován. Znovu to ilustrujeme na zkoumaném příkladu:

$$\text{Fix}(\curvearrowright) = \left\{ \begin{array}{cc} \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare \end{array} \right\} \quad \text{St}(\blacksquare) = \{e, \curvearrowright, \curvearrowleft, \curvearrowright\}$$

Tyto koncepty nám stále ještě o hodnotě  $|X/G|$  nic neřeknou, můžeme ale učinit velmi důležité pozorování o jejich velikostech.

**Pozorování 1.**

$$\sum_{x \in X} |\text{St } x| = \sum_{g \in G} |\text{Fix } g|.$$

*Důkaz.* Označíme  $S = \{[x, g] \mid gx = x\}$ , tedy množinu všech dvojic  $[x, g]$ , které splňují  $gx = x$ . Počet takovýchto dvojic pak můžeme spočítat dvojným způsobem.

## MATEMATIKA

- Nejprve pro každé  $x$  spočteme, kolik prvků  $g$  je zachovává, a následně tuto hodnotu sečteme pro každé  $x$ , tedy

$$|S| = \sum_{x \in X} |\text{St } x|.$$

- Nejprve pro každé  $g$  spočteme, kolik prvků množiny  $x$  toto  $g$  nezmění, následně tuto hodnotu sečteme pro všechna  $g$ .

$$|S| = \sum_{g \in G} |\text{Fix } g|.$$

Odsud triviálně plyne chtěná rovnost

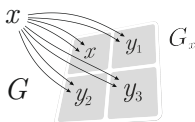
$$\sum_{x \in X} |\text{St } x| = |S| = \sum_{g \in G} |\text{Fix } g|.$$

Toto pozorování nám umožňuje místo počítání velikostí stabilizátorů, počítat velikosti množin fixních bodů – to je snazší, protože symetrií máme zpravidla méně a kladou nám jasný požadavek na to, jak musí prvek množiny  $X$  vypadat, aby byl danou symetrií zachován. Nyní už jsme téměř připraveni, jen potřebujeme učinit ještě jedno pozorování.

### Pozorování 2.

$$|\text{St } x| \cdot |G_x| = |G|.$$

*Důkaz.* Standardně by důkaz tvrzení vyplynul z Lagrangeovy věty. Ta ale není předmětem tohoto článku, proto nastíníme důkaz trochu jiný, o něco intuitivnější.



Obr. 4: Znázornění Pozorování 2; šipky reprezentují působení unikátními prvky grupy  $G$

Zvolme pevně nějaký prvek  $x \in X$ . Budeme-li na něj působit postupně všemi prvky grupy  $G$ , získáme postupně z definice všechny prvky orbity  $G_x$ . Klíčovým pozorováním (které dále dokážeme) bude, že se z  $x$  na

libovolný prvek  $y \in G_x$  dostaneme pomocí právě  $|\text{St } x|$  prvků grupy  $G$ . Pak totiž tímto způsobem rozdělíme prvky  $G$  do  $|G_x|$  množin po  $|\text{St } x|$  prvcích, čímž dokážeme požadované tvrzení.

Nechť tedy  $y = gx$  pro nějaké pevně zvolené  $g \in G$  a  $y \in G_x$ . Chceme ukázat

$$|\{g' \in G \mid g'x = y = gx\}| = |\text{St } x|.$$

Všimněme si, že existuje jednoznačná korespondence mezi prvky stabilizátoru a prvky množiny  $M = \{g' \in G \mid g'x = y = gx\}$ . Totiž platí

$$g' \in M \iff gx = y = g'x = (gg^{-1})g'x = ghx \iff g^{-1}g' = h \in \text{St } x.$$

Z každého prvku stabilizátoru  $h$  tedy vyrobíme prvek  $g' \in M$  tak, že položíme  $g' = gh$ . Naopak, z každého  $g' \in M$  dostaneme  $h \in \text{St } x$  jako  $h = g^{-1}g'$ , což skutečně náleží stabilizátoru, neboť

$$gx = g'x \iff g^{-1}g'x = x.$$

Nakonec pozorujme, že  $g'_1 = g'_2 \in M$ , právě když  $h_1 = h_2 \in \text{St } x$ , tedy ze dvou různých prvků  $M$  vyrobíme dva různé prvky  $\text{St } x$  a naopak. To je ale snadné, protože platí

$$g'_1 = g'_2 \iff g^{-1}g'_1 = g^{-1}g'_2 \iff h_1 = h_2.$$

Tímto jsme tedy skutečně vytvořili jednoznačné párování mezi prvky stabilizátoru a prvky grupy, kterými se z  $x$  dostaneme na  $y$ . Ukázali jsme tedy, co jsme chtěli, a požadované tvrzení

$$|\text{St } x| \cdot |G_x| = |G|$$

je tímto dokázáno.

Po tomto techničtějším důkazu se již konečně dostáváme k Burnside-ovu lemmatu.

**Lemma 1** (Burnsideovo lemma).

$$|X/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\text{Fix } g|.$$



*Důkaz.* Nejprve provedeme pár zdánlivě zbytečných a triviálních kroků.

$$|X/G| = |\{G_x \mid x \in X\}| = \sum_{G_x \in X/G} 1 = \sum_{G_x \in X/G} \sum_{y \in G_x} \frac{1}{|G_x|} = \sum_{x \in X} \frac{1}{|G_x|}.$$

Zpočátku jsme po rozepsání definice za každou orbitu v množině  $X/G$  přičetli 1. To jsme dále pro každou orbitu rozepsali jako součet převrácených hodnot velikosti orbity za každý její prvek. Nakonec jsme si všimli, že tímto způsobem vlastně sčítáme přes všechny prvky množiny  $x$ .

Tyto úpravy si můžeme poměrně jednoduše představit – mějme před sebou několik krabiček, každou s několika kuličkami. Počet těchto krabiček pak (zdánlivě zbytečně složitě) určíme tak, že se budeme dívat na jednotlivé kuličky a pro každou z nich přičteme převrácenou hodnotu počtu kuliček v krabičce, v níž se nachází.

Nyní již stačí vytknout z celého součtu  $1/|G|$ , použít učiněná pozorování a dojdeme k požadovanému výsledku.

$$|X/G| = \sum_{x \in X} \frac{1}{|G_x|} = \frac{1}{|G|} \sum_{x \in X} \frac{|G|}{|G_x|} \stackrel{2}{=} \frac{1}{|G|} \sum_{x \in X} |\text{St } x| \stackrel{1}{=} \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\text{Fix } g|.$$

## Užití

Nyní jsme se vybavili Burnsideovým lemmatem a můžeme se konečně vrátit zpět k původním příkladům; začněme tím se čtvercem.

Burnsideovo lemma říká, že pro spočtení množství všech orbit při působení grupy na množinu, stačí spočíst velikost grupy a pro každý její prvek velikost množiny fixních bodů. To je – jak nyní ukážeme – velmi snadné. V příkladu nám figuruje grupa symetrií čtverce, ta má, jak jsme odvodili, 8 prvků. Nyní pro každý z nich určíme, kolik konfigurací zachovává – tedy která vybarvení budou vypadat stejně, když provedeme danou symetrii.

- **Identita:** při identickém zobrazení jsou všechny prvky fixní, proto má množina fixních bodů velikost  $2^9 = 512$ .
- **Rotace o  $90^\circ$ :** dříve jsme všechny konfigurace zachované rotací o  $90^\circ$  dokonce vypsali, víme tedy, že jich je 8. Kdybychom na to ale chtěli jít systematicky, můžeme si uvědomit, že vybarvení políčka v levém horním rohu určuje nutně vybarvení políčka v pravém horním rohu, to zase jednoznačně určuje vybarvení políčka v pravém dolním rohu, což

nakonec zase určuje vybarvení políčka vlevo dole. Obdobně můžeme říci pro políčka ve středech stran, dostaneme tedy, že máme 2 možnosti pro vybarvení rohů, 2 možnosti pro vybarvení středů stran a nakonec 2 možnosti vybarvení středu čtverce, celkem tedy skutečně  $2^3 = 8$  možností.

- **Rotace o  $180^\circ$ :** nyní každé políčko jednoznačně určuje vybarvení toho přesně „naproti“ němu, obdobně jako výše je tedy vybarvení celé čtverce určeno vybarvením 4 políček na okraji a jednoho uprostřed. Celkem tedy máme  $2^5 = 32$  možností.
- **Rotace o  $270^\circ$ :** stejně jako u rotace o  $90^\circ$ , máme 8 možností.
- **Překlopení podle svislé osy:** políčka vlevo určují, jak budou vypadat políčka vpravo, políčka uprostřed můžeme obarvit libovolně. Celkem tedy máme 6 stupňů volnosti, což nám dává  $2^6 = 64$  možností.
- **Překlopení podle vodorovné osy:** totéž co svislá osa, 64 možností.
- **Překlopení podle hlavní diagonály:** totéž co svislá osa, 64 možností.
- **Překlopení podle vedlejší diagonály:** totéž co svislá osa, 64 možností.

Nyní již stačí dosadit a získáme, že odpovědí na úlohu je číslo

$$\frac{1}{8}(512 + 8 + 32 + 8 + 64 + 64 + 64 + 64) = 102.$$

Obdobně můžeme přistupovat k náramkům, nebudeme počítat každou symetrii zvlášť, ale rovnou si například rozmyslíme, že symetrické rotace (tedy například rotace o  $36^\circ$  a  $324^\circ$ ) budou dávat stejný výsledek, stejně tak všech 5 symetrií podle os stran dá stejný výsledek a všech 5 symetrií podle os úhlů dá stejný výsledek. Počítejme tedy po těchto skupinách.

- **Identita:** Máme celkem  $\binom{10}{5} = 252$  možností, jak vybrat pozice pro černé korálky, zbylé pozice zaplníme bílými.
- **Rotace o  $36^\circ$  a  $324^\circ$ :** každý korálek musí mít stejnou barvu jako korálek následující, to ale nejde. Tyto rotace tedy nezachovávají žádnou možnost.
- **Rotace o  $72^\circ$  a  $288^\circ$ :** každý druhý korálek musí mít stejnou barvu, to nám dává pouze dvě možnosti (pokud bude jedna takto vzniklá pětice černá, druhá musí být nutně bílá).

- **Rotace o  $108^\circ$  a  $252^\circ$ :** každý třetí korálek musí mít stejnou barvu – to ale znamená (po „oběhnutí pár koleček“), že musí mít stejnou barvu všechny korálky, nula možností.
- **Rotace o  $144^\circ$  a  $216^\circ$ :** každý čtvrtý korálek musí mít stejnou barvu – to ale znamená (znovu „po oběhnutí kolečka“), že každý druhý korálek musí mít stejnou barvu, což nás znovu nechává s dvěma možnostmi.
- **Rotace o  $180^\circ$ :** každý korálek musí mít stejnou barvu jako korálek naproti – to by ale znamenalo, že korálky tvoří páry podle své barevnosti, museli bychom tedy mít sudý počet černých i sudý počet bílých korálků. To ale nejde, proto zde máme nula možností.
- **Symetrie podle os stran:** každý korálek musí mít stejnou barvu jako korálek, který je s ním souměrně sdružený podle osy zvolené strany – to ale dle stejného argumentu jako výše nejde, proto tady nemáme žádnou validní možnost.
- **Symetrie podle os úhlů:** na každé straně od osy máme 4 korálky, které musí mít stejnou barvu jako jejich protějšky. Abychom se vyvarovali předchozím situacím, musí mít korálky ležící na ose nutně každý jinou barvu, což můžeme provést dvěma možnostmi, a ke každé z těchto dvou možností máme  $\binom{4}{2} = 6$  možností, jak zvolit barvu korálků ležících mimo osu (na každé straně od osy musí být právě dva černé korálky, máme čtyři možnosti, kam je umístit). Celkem nám tyto osové symetrie dávají 12 možností.

Dohromady tedy dosazením do vzorce dostáváme překvapivě malý počet

$$\frac{1}{20}(252 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 5 \cdot 12) = 16.$$

Všechny tyto možnosti jsou znázorněny na konci textu (obr.5).

## Dodatky

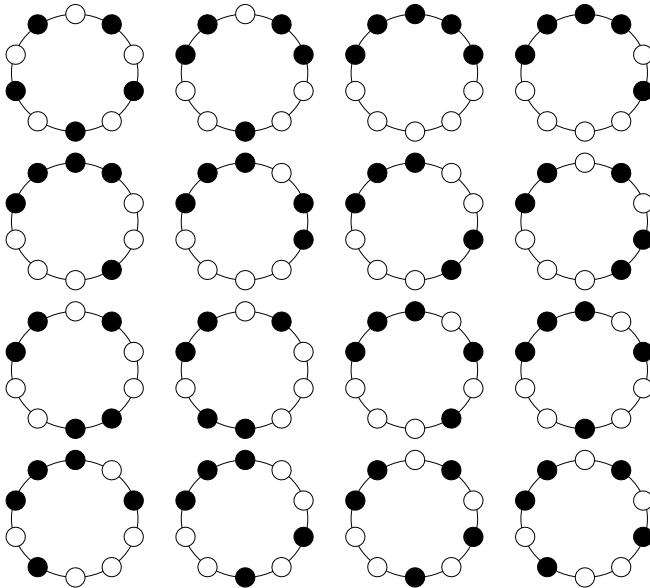
Burnsideovo lemma nachází využití nejen v elementární kombinatorice, umožňuje ale nalézt odpovědi na zajímavější problémy z různých oblastí matematiky. Uvedeme třeba (jen pro ilustraci!) jeden příklad z univerzální algebry, který můžeme užitím Burnsideova lemmatu vyřešit poměrně efektivně.

Nalezněte počet čtyřprvkových množin vybavených jednou 3-nární operací (zobrazením  $X \times X \times X \rightarrow X$ ) až na isomorfismus.<sup>3)</sup>

**Poznámka 1.** Množiny  $X$  a  $X'$  vybavené operacemi  $f$  a  $f'$  jsou izomorfní, existuje-li bijekce  $g: X \rightarrow X'$  taková, že pro každá  $x_1, x_2, x_3 \in X$  platí  $g(f(x_1, x_2, x_3)) = f'(g(x_1), g(x_2), g(x_3))$ .

Toto využití také více zdůrazňuje sílu teorie grup. Všimněme si, že jsme v jistém kroku všechna tvrzení odvodili plně abstraktně, kdykoliv proto v našem problému vystupuje objekt mající grupovou strukturu, můžeme na něj aplikovat všechna obecně dokázaná tvrzení – nezáleží na problému jako takovém, pouze na jeho struktuře.

Tyto myšlenky jsou ale jen malými střípky ukazujícími pár myšlenek abstraktní algebry. Ta sama o sobě nabízí plno krásných tvrzení, a je-li o tom v této fázi čtenář alespoň trochu přesvědčen, splnil tento text svůj účel.



Obr. 5: Řešení motivační úlohy s náramky

<sup>3)</sup>Výsledek: 14178431955039102651224805804387336192, viz posloupnost A091510 na [oeis.org](http://oeis.org)

## Barevné Výhonky

*Terezie Kladivová, studentka Gymnázia Aloise Jiráska, Litomyšl*

**Abstrakt.** V tomto článku se pokusím co nejlépe nastínit problematiku hry Výhonky a představit novou variantu této hry. Ta je obohacena o barvy a další pravidla, čímž se mění její původní vlastnosti. Zaměříme se především na spodní hranici počtu tahů, jež je potřebná k ukončení hry.

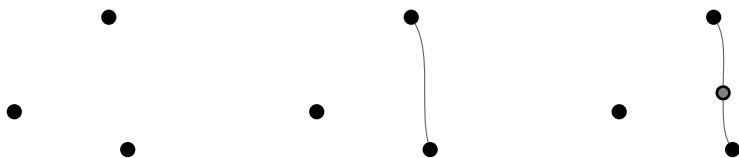
Abychom mohli správně pochopit rozšířenou variantu, musíme nejdříve vysvětlit, jak se hraje a chová původní hra.

### Originální hra Výhonky

V roce 1967 vymysleli dva matematici z Cambridžské univerzity, John H. Conway a Michael S. Paterson, hru na grafech pro dva hráče [1]. Její výhodou je, že k ní potřebujete pouze tužku a papír. To však jistě nebylo jediným důvodem, proč se hra stala mezi matematickou společností populární. Její povaha totiž nabízí i mnoho prostoru pro zkoumání.

Na pravidlech není třeba hledat nic těžkého. Na začátku hry nakreslí dva hráči na papír předem domluvený počet puntíků (tedy vrcholů). Domluví se, kdo z nich začne, a poté se již střídají ve svých tazích, dokud hra neskončí.

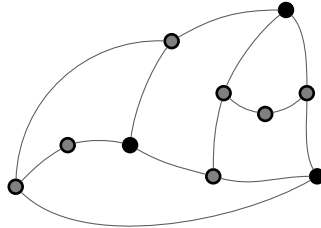
Tah spočívá ve spojení dvou vrcholů souvislou čarou (tedy hranou) a to tak, aby tato nebyla incidentní s žádným jiným vrcholem (nezasahovala do něj) nebo nekřížila jiné hrany (ani sama sebe). Přitom může být libovolně zakřivená. Není zakázáno hranu započít a ukončit ve stejném vrcholu. Hráč svůj tah uzavře nakreslením nového vrcholu kamkoli na právě vzniklou hranu.



Obr. 1: Hráčův tah

Je důležité poznamenat, že z každého vrcholu mohou vycházet vždy nejvýše tři hrany, nebo chcete-li, každý vrchol může být nejvýše stupně

tři. Hra končí, když už není možné provést další tah, a vítězem je ten, kdo hrál jako poslední. Příklad hry, ve které již nelze provést další tah, můžeme vidět na obrázku 2. V ní vyhrává hráč, jenž začínal. Pravidla byla převzata z [1].



Obr. 2: Ukončená hra na třech původních vrcholech

### Konec hry a maximální počet tahů

Nabízí se otázka, zda hra musí vždy skončit. Odpověď zní ano a lze podpořit jednoduchou myšlenkou. Označme počet vrcholů na začátku hry  $n$  a řekněme, že v tu chvíli je ve hře  $3n$  možných připojení. To proto, že každý vrchol může být až stupně tři.

Postupně odhalíme, že s každým tahem se tento počet sníží o jedna, jak ilustruje obrázek 3. Dvě připojení ubudou napojením nové hrany, zato jedno nové přibude nakreslením nového vrcholu. Pokud například zbývá jedno možné připojení, není možné provést další tah a hra skončí. Počet zbývajících připojení v jakémkoli okamžiku hry můžeme vyjádřit jako  $3n - t$ , kde  $t$  značí počet tahů.



Obr. 3: Možná připojení po provedení tahu

Přidání nového vrcholu na konci každého tahu znamená, že vždy bude existovat alespoň jedno možné připojení, neboli  $3n - t \geq 1$ . Přeskládáním se dostaneme ke vztahu  $t \leq 3n - 1$ , jenž určuje nejvyšší možný počet tahů v závislosti na  $n$ . Maximálního počtu tahů lze vždy dosáhnout, vyvarujeme-li se uzavírání různých vrcholů stupně dva do různých oblastí.

### Minimální počet tahů

Pro účely důkazu spodní hranice počtu tahů si rozdělíme vrcholy na konci hry na tři kategorie. První budou *přeživší* (jejich počet označíme  $p$ ), jež jsou vrcholy, které zůstaly stupně dva. Druhou skupinu nazveme *strážci* ( $s$ ) – vrcholy, které sousedí s přeživšími. Není složité si představit, že každý strážce musí na konci hry příslušet pouze jednomu přeživšímu vrcholu, a proto platí  $s = 2p$ . Poslední skupinu tvoří *farizejové* ( $f$ ) a jedná se o vrcholy, které nesplňují podmínky první ani druhé skupiny.

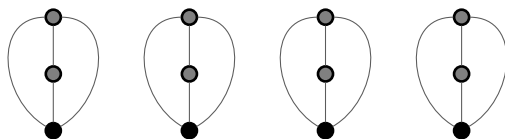
Zapišme rovnici pro počet vrcholů

$$\begin{aligned} n + t &= p + s + f \\ n + t &= 3p + f. \end{aligned} \tag{1}$$

Mluvili jsme o možném počtu zbývajících připojení. Na konci hry odpovídá počet zbývajících připojení počtu přeživších vrcholů. Dosazením vztahu  $p = 3n - t$  do rovnice 1 dostaneme

$$\begin{aligned} n + t &= 3(3n - t) + f \\ 4t &= 8n + f \\ t &= 2n + \frac{f}{4}. \end{aligned}$$

Víme, že počet farizejů nemůže být záporné číslo, a tak dostáváme nerovnici omezující počet tahů zespodu,  $t \geq 2n$ . Hru s takovým počtem tahů lze hrát pro jakýkoli počáteční počet vrcholů ( $n$ ), jak ukazuje univerzální postup na obrázku 4.

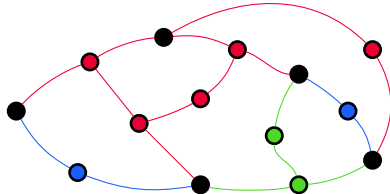


Obr. 4: Hra ukončená pomocí  $2n$  tahů

### Pravidla barevné hry

Podívejme se nyní, jak se hraje barevná varianta Výhonků. K nakreslení nové hrany si hráč zvolí vždy jednu ze tří barev: červenou, modrou nebo zelenou. Zároveň musí dodržet pravidlo, že z každého vrcholu mohou vycházet buď hrany pouze stejné barvy, nebo vzájemně různých

barev. Nemůže se tedy stát, že by z jednoho vrcholu vycházely dvě hrany stejné barvy a jedna hrana barvy odlišné. Mimo to platí v barevné hře stejná pravidla jako v původní verzi.



Obr. 5: Příklad ukončené barevné hry

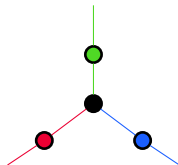
### Druhy vrcholů a maximální počet tahů

Rozdělme si vrcholy v barevné hře na dva druhy. *Monochromatickým* nazveme vrchol, ze kterého vychází hrany stejné barvy, a *duhovým* zase vrchol, ze kterého vychází hrany různých barev. K určení druhu vrcholu stačí, aby byl stupně dva, jediná možná barva třetí hrany je v takovém okamžiku již určena. Není na škodu si uvědomit, že každý nově vzniklý vrchol v barevné hře je nutně monochromatický, jelikož z něho vychází dvě hrany stejné barvy.

Maximální počet tahů není třeba nijak odvozovat. Stačí se při kreslení hran omezit na jednu barvu a pak je maximum stejné jako v klasické hře.

### Minimální počet tahů

Jak jsme naznačili na začátku, spodní hranice počtu tahů potřebná k ukončení hry se díky novým pravidlům v barevné hře sníží. Vzpomeňme si na přeživší vrcholy a jejich strážce na konci hry. V klasické hře jeden strážce sousedil výlučně s jedním přeživším. V nové variantě však může jeden strážce příslušet až třem přeživším vrcholům (tzv. *ideální strážce*), kdy u každého přeživšího chybí hrana jiné barvy jako na obr. 6.



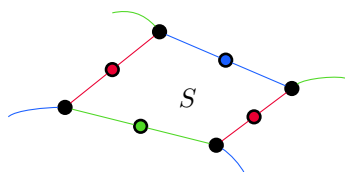
Obr. 6: Ideální strážce v barevné hře



Z toho, co jsme již uvedli, platí  $p \leq \frac{3s}{2}$ , neboť každý přeživší vrchol má vždy dva strážce. Pokud budeme chtít minimum tahů, bude naším cílem mít na konci hry co nejvíce přeživších vrcholů, a tedy i co nejvíce ideálních strážců. Dosaďme ekvivalentní nerovnost  $s \geq \frac{2p}{3}$  do rovnice

$$\begin{aligned} n + t &= p + s + f \\ n + t &\geq p + \frac{2p}{3} + f \wedge p = 3n - t \\ 8t &\geq 12n + 3f \\ t &\geq \frac{3n}{2} + \frac{3f}{8}. \end{aligned}$$

Za předpokladu, že se ve hře nevyskytnou žádní farizejové a že všichni strážci budou ideální, můžeme dospět k rovnosti  $t = \frac{3n}{2}$ . Kdy je toto ale možné? Mějme na paměti, že na konci takové hry se vyskytují pouze dva typy vrcholů: ideální strážci a přeživší vrcholy. Pro tuto hru nelze vytvořit oblast, jejíž hranici by tvořilo více než šest vrcholů a šest hran. Pokud bychom takovou oblast našli (obr. 7), mohli bychom pokračovat dalším tahem, a tím bychom porušili podmínky pro vrcholy ve hře s  $\frac{3n}{2}$  tahy, neboť by se ve hře už vyskytovali i jiní než ideální strážci.

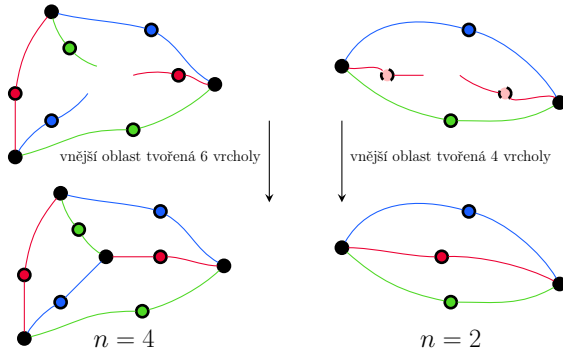


Obr. 7: Oblast  $S$ , ve které lze provést další tah

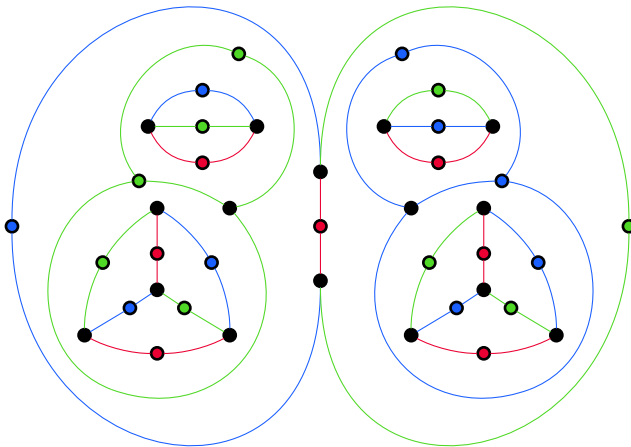
Toto musí platit i pro vnější oblast a pro nás to znamená, že existují pouze dvě možnosti pro hru hranou  $\frac{3n}{2}$  tahy: hra na dvou nebo na čtyřech původních vrcholech (obr. 8). Vzhledem k požadavku na hranice vnější oblasti a ke skutečnosti, že původní vrcholy musí zůstat ideálními strážci stejně jako že každý nově vzniklý vrchol musí zůstat přeživším, jsou tato dvě řešení jediná možná.

Z toho vyplývá, že pro jakékoli jiné  $n$  nebude možné ukončit hru méně než  $\lfloor \frac{3n}{2} \rfloor + 1$  tahy, tedy  $t \geq \lfloor \frac{3n}{2} \rfloor + 1$  pro  $t \notin \{2; 4\}$ . Můžeme ale s jistotou tvrdit, že pro libovolné  $n$  zvládneme sestavit graf ukončené hry pomocí  $\lfloor \frac{3n}{2} \rfloor + 1$  tahů? Na to bohužel zatím odpovědět nedokážeme. Nejvýše se mi to podařilo pro  $n = 16$ , kde byl k ukončení skutečně užít nejnižší možný

počet tahů (obr. 9). Mimo to umím zkonstruovat grafy her s minimálním počtem tahů pro všechna  $n \leq 16$  vyjma  $n = 11, 13$  a  $15$ .



Obr. 8: Jediné dvě možnosti pro hru ukončenou  $\frac{3n}{2}$  tahy



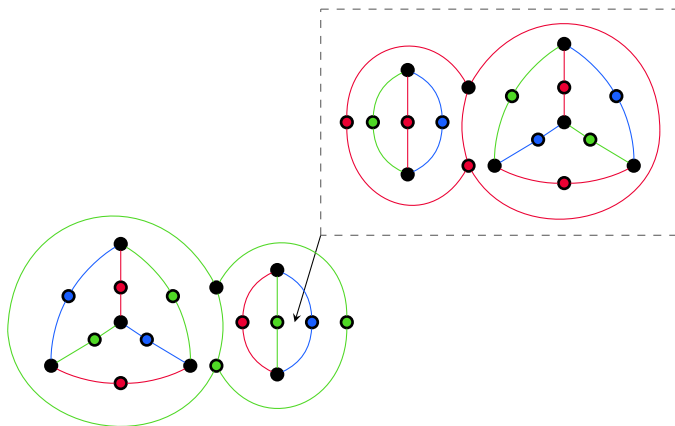
Obr. 9: Graf hry ukončené pomocí  $\frac{3n}{2}$  tahů pro  $n = 16$

Není bez zajímavosti, že odebráním vhodných component<sup>1)</sup> z grafu na obr. 9 můžeme dostat grafy her ukončených minimálními počty tahů také pro všechna  $n \leq 16$  mimo  $n = 1, 11, 13$  a  $15$ , jak si čtenář může sám vyzkoušet.

<sup>1)</sup>Komponenta grafu  $G$  je takový jeho podgraf, který je souvislý a zároveň z něj neexistuje cesta do jiného disjunkčního podgrafu (komponenty) grafu  $G$ . Souvislý graf má jednu komponentu.

### Nízké počty tahů

Sice znám postupy, kterými lze dosahovat nízkých počtů tahů, ale nevím, zda jsou tyto počty nejnižší možné či nikoli. Jedním takovým postupem je rekurzivní vkládání konstrukce na sedmi původních vrcholech (pojmenujme ji  $K$ ) samu do sebe, které se vzhledem k počtu tahů jeví jako výhodné. Její vnější oblast totiž obsahuje pouze jeden přeživší vrchol a zároveň v ní najdeme oblast, na jejíž hranici jsou dva přeživší vrcholy. Můžeme tedy do nekonečna vkládat její kopie do těchto jejích oblastí a tím dosahovat nízkých počtů tahů. V každém okamžiku je však nutné dbát na správné rozložení barev, aby bylo možné rekurzi provést.



Obr. 10: Rekurzivní vkládání za účelem nízkých počtů tahů

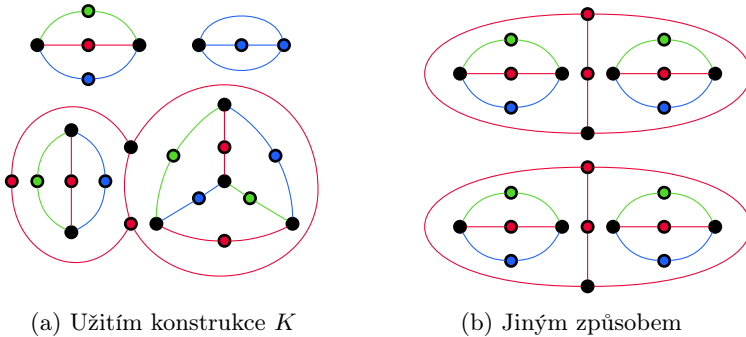
Jestliže známe graf hry ukončené pomocí  $t_1$  tahů na  $n_1$  původních vrcholech, který obsahuje alespoň jednu oblast, na jejíž hranici jsou nejvýše dva přeživší vrcholy, pak můžeme pro jakékoli  $n \equiv n_1 \pmod{7}$  sestavit pomocí výše uvedené rekurze graf ukončené hry pomocí  $t = \frac{n-n_1}{7} \cdot 11 + t_1$  tahů.

**Příklad 1.** Pokuste se sestavit graf ukončené hry na 10 původních vrcholech pomocí co nejnižšího počtu tahů.

*Řešení.* Nejnižší možný počet tahů je v tomto případě  $\lfloor \frac{3 \cdot 10}{2} \rfloor + 1 = 16$ . To znamená, že jestliže realizujeme graf ukončené hry 16 tahy, dosáhneme minimálního počtu. Snad nejjednodušší je užít zmiňovanou konstrukci  $K$ . K jejímu sestavení „spotřebujeme“ 11 tahů. Pokud pak zvládneme sestavit graf na třech původních vrcholech pomocí 5 tahů, jenž

bude obsahovat alespoň jednu vyhovující oblast pro vložení naší konstrukce  $K$ , máme vyhráno. Nalézt příklad takového grafu není náročné, jak se čtenář může přesvědčit na obr. 11a. Ten ukazuje hru ukončenou minimálním počtem tahů – konstrukci  $K$  vloženou do vnější oblasti grafu na třech původních vrcholech.

Další řešení ukazuje obr. 11b. Jiné řešení by zahrnovalo například odstranění dvou komponent z grafu na obr. 9 – jedné na čtyřech a druhé na dvou původních vrcholech. Možností je skutečně mnoho.



Obr. 11: Sestrojení grafů ukončených her na 10 původních vrcholech

## Závěr

Doufám, že vám tento úvod do světa Výhonků přinesl něco nového, byť třeba jen potěšení. Jistě je z článku cítit, že mé zkoumání minimálních počtů tahů v nové hře není kompletní a že celé téma nabízí mnohem více. Níže je k nalezení odkaz na mou práci SOČ, ve které téma Výhonků a jejich barevné varianty rozebírám podrobněji. Dále lze například zkoumat i minimálními počty tahů pro 1-souvislé a 2-souvislé grafy. Chci tím říci, že otázka obecného řešení zůstává otevřena a představuje výzvu pro kohokoli se zájmem o teorii grafů.

## Literatura

- [1] Piggott, J. Scholten, J.: Sprouts Explained. NRICH [online], University of Cambridge, Cambridge, 2021, <https://nrich.maths.org/2413>.
- [2] Berlekamp, E. R. Conway, J. H. Guy, R. K.: Winning Ways for Your Mathematical Plays. Academic Press, New York, 1982.
- [3] <https://socv2.nidv.cz/archiv45/getWork/hash/4e659b71-c648-11ed-acaf-005056bd6e49>

## Aproximace čísla $\pi$ pomocí zlatého řezu a kovových průměrů

*Luděk Spíchal, Česká lesnická akademie, Trutnov*

Stanovení hodnoty čísla  $\pi$  poutá pozornost matematiků již od starověku. Prvotní postupy stanovení hodnoty čísla  $\pi$  vycházely ze znalostí starořeckých matematiků. Výpočet navržený Archimédem a dále rozvíjený v následujících generacích je založen na použití opsaných a vepsaných mnohoúhelníků a současném využití exhaustivní (vyčerpávající) metody. Archimédes ve své práci začal s šestiúhelníkem a nakonec sestrojil pravidelný mnohoúhelník s 96 stranami a získal tak odhad hodnoty čísla  $\pi$  odpovídající nerovnosti

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$$

nebo

$$3,14084 < \pi < 3,14289,$$

tedy s přesností na dvě desetinná místa. Daný postup lze považovat z geometrického pohledu za velmi intuitivní a to zejména zjevným spojením výpočtu hodnoty čísla  $\pi$  a délky kružnice. Nevýhodou je značně omezená možnost získání většího počtu desetinných pozic. Ludolph van Ceulen (1540–1610) dokázal v roce 1596 pomocí mnohoúhelníku o  $60 \times 2^{29}$  stranách vypočítat z dnešního pohledu „pouhých“ 20 desetinných míst. Později dokázal výpočet ještě zpřesnit na 35 desetinných míst, a to použitím pravidelného mnohoúhelníku o  $2^{62}$  stranách.

Další výrazný pokrok v dané oblasti nastal v 17. století. Objev kalkulu a další rozvoj matematiky přinesl mnohem výkonnější metody umožňující stanovit větší počet desetinných míst než dříve používané geometrické metody. Velkou roli sehrály zejména nekonečné řady konvergující k číslu  $\pi$ , jako například řada

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} \dots,$$

dnes připisovaná skotskému matematikovi Jamesi Gregorymu (1638–1675) a Gottfriedu Wilhelmu Leibnizovi (1646–1716), která byla ovšem

známa již v období před nástupem kalkulu díky práci indického matematika Mádhavy ze Sangamagrámy (asi 1350–1425). Tato řada se ovšem pro praktický výpočet čísla  $\pi$  příliš nehodí, neboť se hodnotě čísla  $\pi$  blíží (konverguje) velmi pomalu. Museli bychom sečíst zhruba 4 000 členů řady tak, aby byl výsledek přesnější než Archimédův. Na druhou stranu platí, že nejen tato řada, ale i další postupně objevované nekonečné řady konvergující k číslu  $\pi$  naznačují, že za zdánlivým chaosem se patrně ukrývá jistý řád.

Významné postavení mezi nekonečnými řadami využívanými pro výpočty desetinných pozic čísla  $\pi$  představuje rozvoj funkce arkus tangens<sup>1)</sup>

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots, \tag{1}$$

objevený již zmíněným J. Gregorym. Jeho objev tak např. již v roce 1705 mohl využít společně s nedávno objeveným kalkulem anglický astronom a matematik Abraham Sharp (1651–1742) k sestavení řady

$$\pi = 2 \left( \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{27} + \frac{\sqrt{3}}{45} - \dots \right),$$

---

<sup>1)</sup>Funkce arkus tangens je inverzní k funkci tangens, jejíž definiční obor je omezen na interval  $(-\pi/2; \pi/2)$ . Arkus tangens zapisujeme v matematických výrazech ve tvaru  $\operatorname{arctg}$  nebo  $\operatorname{tg}^{-1}$ . Platí, že tangens daného úhlu udává číslo, jehož arkus tangens je opět daný úhel, např.

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \sqrt{3} \iff \operatorname{arctg} \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}.$$

Dále naznačíme postup odvození uvedeného rozvoje funkce arkus tangens, který ovšem k úplnému porozumění vyžaduje znalosti z vyšší matematiky. Platí, že

$$\operatorname{arctg} x = \int \frac{1}{1+x^2} dx.$$

Jestliže  $|x| < 1$ , pak lze lomený výraz zapsat ve tvaru nekonečné řady

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots,$$

kde dále integraci člen po členu dostáváme

$$\operatorname{arctg} x = \int \frac{1}{1+x^2} dx = \int (1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots) dx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

kde uplatnil rovnost<sup>2)</sup>

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3} \iff \frac{\pi}{6} = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{3},$$

a dokázal správně určit 72 desetinných pozic čísla  $\pi$ .

Použití řady pro rozvoj funkce arkus tangens se stalo základem pro celou řadu dalších vzorců. Pro účely našeho článku dále zmíníme práci anglického astronoma Johna Machina (asi 1686–1751), který v roce 1706 (tedy pouhý jeden rok po A. Sharpovi) publikoval vzorec<sup>3)</sup>

$$\frac{\pi}{4} = 4 \operatorname{arctg} \frac{1}{5} - \operatorname{arctg} \frac{1}{239}. \quad (2)$$

Uvedený vzorec v kombinaci s řadou pro rozvoj funkce arkus tangens poskytuje rychle konvergující řadu, s jejíž pomocí Machin dokázal určit hodnotu  $\pi$  s přesností na 100 desetinných pozic. Machinovy vzorce se následně staly zavedeným nástrojem, který postupně rozpracovaly další generace matematiků (např. [1]). Zmínit na tomto místě můžeme vzorec

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \operatorname{arctg} \frac{1}{3}, \quad (3)$$

označovaný podle geniálního švýcarského matematika Leonharda Eulera (1707–1783) nebo následující vzorec, který tvoří tři členy

$$\frac{\pi}{4} = 12 \operatorname{arctg} \frac{1}{18} + 8 \operatorname{arctg} \frac{1}{57} - 5 \operatorname{arctg} \frac{1}{239}$$

a který je nazýván podle slavného německého matematika Carla Friedricha Gausse (1777–1855).

Záměrem článku je ukázat příklad odvození vzorce pro výpočet čísla  $\pi$  zahrnující:

- konstrukci převrácené hodnoty *zlatého řezu* na jednotkové parabole,
- odvození vztahu pro výpočet čísla  $\pi$  pomocí zlatého řezu, jeho převrácené hodnoty a funkce tangens,

---

<sup>2)</sup>Objev rovnosti je připisován slavnému anglickému astronomovi, matematikovi a fyzikovi Edmundu Halleyovi (1656–1742).

<sup>3)</sup>Postup odvození vzorce např. v [7].

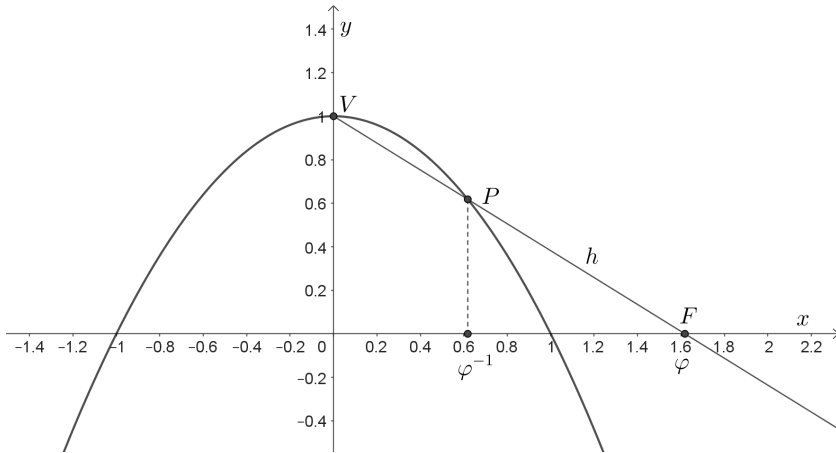
- určení hodnoty čísla  $\pi$  využitím nekonečné řady pro rozvoj funkce arkus tangens,
- zařazení zlatého řezu mezi tzv. *kovové průměry* a následné porovnání výkonnosti vzorců pro výpočet  $\pi$  pomocí prvních tří kovových průměrů.

### Jednotková parabola, zlatý řez a konstrukce převrácené hodnoty

Za jednotkovou parabolu budeme považovat křivku určenou rovnicí

$$x^2 + y = 1.$$

Jednotkovou parabolu použijeme jednak k určení převrácené hodnoty zlatého řezu, jednak k nalezení rovnice pro aproximaci čísla  $\pi$ .



Obr. 1: Určení převrácené hodnoty zlatého řezu  $\varphi^{-1}$  pomocí jednotkové paraboly

Připomeňme, že zlatý řez je číslo, které označuje poměr, kdy se úsečka dělí do dvou částí takovým způsobem, že poměr celé úsečky vůči její větší části se rovná poměru větší části k té menší [2]. Postup nalezení převrácené hodnoty zlatého řezu je naznačen na obr. 1. Jestliže označíme  $[\varphi, 0]$  průsečík přímky  $h$  a osy  $x$ , pak má přímka  $h$  rovnici

$$y = 1 - \frac{x}{\varphi}.$$



Průsečík přímky  $h$  a paraboly získáme porovnáním jejich rovnic

$$1 - x^2 = 1 - \frac{x}{\varphi},$$

kde po zjednodušení je

$$x(\varphi x - 1) = 0,$$

dále

$$x_1 = 0, x_2 = \frac{1}{\varphi}.$$

Podrobný popis konstrukce převrácených hodnot pomocí jednotkových kuželoseček (kružnice, paraboly a hyperboly) lze nalézt např. v [8, 9, 10]. Pro úplnost dodejme, že číselnou hodnotu zlatého řezu získáme z řešení rovnice

$$\frac{x + y}{x} = \frac{x}{y},$$

kde  $x, y$  ( $x > y$ ) jsou části úsečky o délce  $x + y$ . Pokud dále položíme  $y = 1$ , pak po zjednodušení dostáváme rovnici

$$x^2 - x - 1 = 0, \tag{4}$$

pro jejíž kořeny platí

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Zlatým řezem  $\varphi$  je kladný kořen

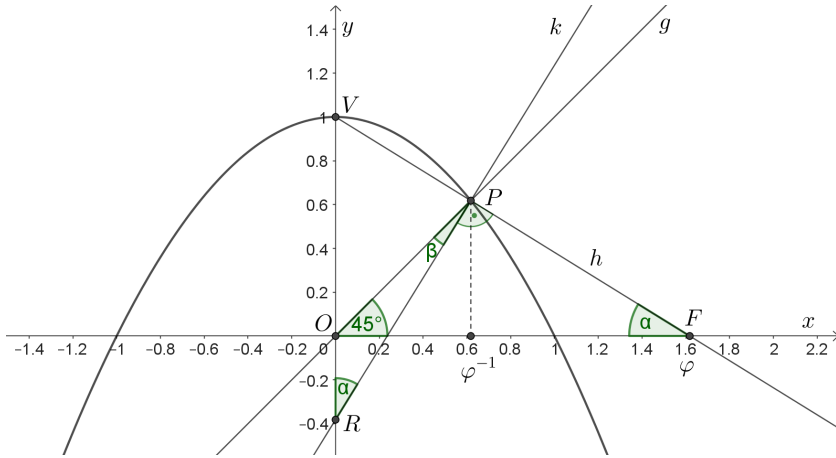
$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \tag{5}$$

převrácenou hodnotou pak

$$\varphi^{-1} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}. \tag{6}$$

### Odvození vzorce pro výpočet hodnoty čísla $\pi$

V této sekci odvodíme vztah pro výpočet čísla  $\pi$ , ve kterém využijeme výše uvedenou konstrukci převrácené hodnoty zlatého řezu. Východiskem pro naše další úvahy tedy bude situace znázorněná na obr. 1, kterou postupně vhodně doplníme (obr. 2).



Obr. 2: Geometrická situace pro odvození vzorce v rovnici (9)

Přímka  $k$ , která je kolmicí k přímce  $h$  v bodě  $P[\varphi^{-1}; \varphi^{-1}]$ , protíná osu  $y$  v bodě  $R$ . Podle věty  $uu$  platí, že

$$\triangle VRP \sim \triangle VFO,$$

a tedy

$$\alpha = |\sphericalangle OFV| = |\sphericalangle VRP|.$$

Pokud dále doplníme přímku  $g = \overleftrightarrow{PO}$ , pak lze snadno ověřit, že v trojúhelníku  $POR$  pro součet vnitřních úhlů  $\alpha, \beta$  platí

$$\frac{\pi}{4} = \alpha + \beta, \tag{7}$$

neboť přímka  $g$  je určena rovnicí  $y = x$ .

V trojúhelníku  $VFO$  pro úhel  $\alpha$  platí

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\varphi}, \tag{8}$$

a dále  $\alpha = \pi/4 - \beta$ , tj.

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} - \beta \right).$$

Použitím součtového vzorce pro funkci tangens dostáváme

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \beta\right) = \frac{\operatorname{tg}(\pi/4) - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}(\pi/4)\operatorname{tg}\beta},$$

porovnáním s rovnicí (8) dále

$$\frac{\operatorname{tg}(\pi/4) - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}(\pi/4)\operatorname{tg}\beta} = \frac{1}{\varphi}$$

a po zjednodušení s využitím  $\operatorname{tg}(\pi/4) = 1$

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\varphi - 1}{\varphi + 1}.$$

Použitím funkce arkus tangens pro velikost úhlů  $\alpha, \beta$  dostáváme

$$\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\varphi}\right), \quad \beta = \operatorname{arctg}\left(\frac{\varphi - 1}{\varphi + 1}\right),$$

a dále po dosazení do rovnice (7)

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\varphi}\right) + \operatorname{arctg}\left(\frac{\varphi - 1}{\varphi + 1}\right). \quad (9)$$

Z posledního vzorce je zřejmé, že tento závisí pouze na hodnotě zlatého řezu  $\varphi$ . V této chvíli se vrátíme k rozvoji funkce arkus tangens do nekonečné řady (1), kde po dosazení za  $x = 1/\varphi$ , resp.  $x = (\varphi - 1)/(\varphi + 1)$  postupně dostáváme

$$\begin{aligned} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\varphi}\right) &= \frac{1}{\varphi} - \frac{1}{3\varphi^3} + \frac{1}{5\varphi^5} - \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} \left(\frac{1}{\varphi}\right)^{2k-1}, \\ \operatorname{arctg}\left(\frac{\varphi - 1}{\varphi + 1}\right) &= \frac{\varphi - 1}{\varphi + 1} - \frac{1}{3} \left(\frac{\varphi - 1}{\varphi + 1}\right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{\varphi - 1}{\varphi + 1}\right)^5 - \dots = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} \left(\frac{\varphi - 1}{\varphi + 1}\right)^{2k-1}, \end{aligned}$$

a dále po dosazení do rovnice (9)

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} \left(\frac{1}{\varphi}\right)^{2k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} \left(\frac{\varphi - 1}{\varphi + 1}\right)^{2k-1}. \quad (10)$$

Součet členů nekonečných řad v posledním vzorci pro  $k \rightarrow \infty$  se blíží (konverguje) k hodnotě  $\pi/4$ , neboť

$$\left| \frac{1}{\varphi} \right| < 1 \wedge \left| \frac{\varphi - 1}{\varphi + 1} \right| < 1,$$

tj. obě nekonečné řady jsou konvergentní.

Výpočet můžeme provést např. podle níže uvedeného kódu MATLAB (GNU Octave), při výpočtu nastavíme pomocí parametru  $n$  počet sčítaných členů v nekonečných řadách.

```
p = (1+sqrt(5))/2;
arctan1 = 0;
arctan2 = 0;
n = 20;
output_precision(16);
for k = 1:n
    s = (-1)^(k-1);
    arctan1 = arctan1 + s/((2*k-1)*p^(2*k-1));
    arctan2 = arctan2 + (s*(p-1)^(2*k-1))/((2*k-1)*(p+1)^(2*k-1));
    value = 4*(arctan1 + arctan2);
end
```

V níže uvedené tabulce 1 jsou uvedené správné desetinné pozice čísla  $\pi$  pro vybrané hodnoty  $n$  vypočtené podle rovnice (10).

$n$	<i>Správné desetinné pozice <math>\pi</math></i>
5	3,14
10	3,141 5
15	3,141 592 6
20	3,141 592 653
25	3,141 592 653 5
30	3,141 592 653 589 7
35	3,141 592 653 589 793

Tabulka 1: Výpočet hodnoty čísla  $\pi$  využitím rovnice (10) pomocí programu MATLAB (GNU Octave)

## Kovové průměry

Kovové průměry byly popsány v knize [11] a dále v článku [12] Verou de Spinadel jako zobecnění pojmu tzv. *zlatého řezu*. Jestliže do rovnice (4) doplníme k lineárnímu členu jako parametr koeficient  $p$  tak, že  $p \in \mathbb{N}$ , pak získáme rovnici ve tvaru [11, 12]

$$x^2 - px - 1 = 0, \quad (11)$$

pro jejíž kořeny platí

$$x_{1,2} = \frac{p \pm \sqrt{p^2 + 4}}{2}. \quad (12)$$

Kovovým průměrem  $\sigma_p$  je kladný kořen rovnice (11), tj.

$$\sigma_p = \frac{p + \sqrt{p^2 + 4}}{2}. \quad (13)$$

Volbou parametru  $p = 1$  získáme výše zmíněný zlatý řez (*zlatý průměr*), pro volbu  $p = 2$  dostaneme tzv. *stříbrný průměr*

$$\sigma_2 = \frac{2 + \sqrt{8}}{2} = 1 + \sqrt{2},$$

pro volbu  $p = 3$  pak tzv. *bronzový průměr*

$$\sigma_3 = \frac{3 + \sqrt{13}}{2}.$$

Ačkoliv jsme vzorec v rovnici (9) odvodili použitím zlatého řezu  $\varphi$ , použití součtového vzorce pro funkci arkus tangens<sup>4)</sup>

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\varphi}\right) + \operatorname{arctg}\left(\frac{\varphi - 1}{\varphi + 1}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{\frac{1}{\varphi} + \frac{\varphi - 1}{\varphi + 1}}{1 - \frac{1}{\varphi} \cdot \frac{\varphi - 1}{\varphi + 1}}\right) = \operatorname{arctg} 1 \quad (14)$$

ukazuje, že rovnost je splněna pro libovolné kladné reálné číslo, které dosadíme za  $\varphi$ . Pokud nyní přepíšeme rovnici (9), kde položíme  $\varphi = \sigma_p$

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sigma_p}\right) + \operatorname{arctg}\left(\frac{\sigma_p - 1}{\sigma_p + 1}\right), \quad (15)$$

pak můžeme porovnat výkonnost vzorce při aproximaci hodnoty čísla  $\pi$  pro první tři kovové průměry.

<sup>4)</sup>  $\operatorname{arctg} u + \operatorname{arctg} v = \operatorname{arctg} \frac{u+v}{1-uv}$ ,  $uv \neq 1$

	$n = 10$	$n = 15$	$n = 20$
<i>zlatý průměr</i>	3,141 5	3,141 592 6	3,141 592 653
<i>stříbrný průměr</i>	3,141 592 65	3,141 592 653 5	3,141 592 653 589 793
<i>bronzový průměr</i>	3,141 592	3,141 592 653	3,141 592 653 589

Tabulka 2: Porovnání vybraných kovových průměrů při aproximaci hodnoty čísla  $\pi$  (uvedeny jsou správné desetinné pozice)

Tabulka 2 ukazuje, že pro daný počet členů nekonečné řady získáme různé rozsahy správných desetinných pozic čísla  $\pi$  v závislosti na použité hodnotě kovového průměru. Tabulka 2 současně naznačuje, že se výpočet použitím vzorce (15) blíží hodnotě čísla  $\pi$  nejrychleji pro stříbrný řez. Rigorózní důkaz platnosti této domněnky by bylo možné získat použitím postupu, který je uveden v článku [5]. Zmíněný postup by rovněž ukázal, že stříbrný řez představuje pro aproximaci nejlepší možnou volbu mezi kladnými reálnými čísly a dále, že vzorec (15) je obdobně efektivní jako výše uvedený vzorec Eulerův.

V článku jsme odvodili pomocí jednotkové paraboly a s využitím zlatého řezu vzorec umožňující aproximovat hodnotu čísla  $\pi$ . Obdobných vzorců existuje celá řada a lze je shrnout pod označením Machinovy vzorce (*Machin-like formulae*). V literatuře popsané Machinovy vzorce jsou v převážné míře založené na použití racionálních zlomků. Machinovy vzorce obsahující iracionální zlomky se objevily později, např. [6]

$$\frac{\pi}{2} = 2 \operatorname{arctg} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right) + \operatorname{arctg} \left( \frac{1}{\sqrt{8}} \right).$$

Jistou souvislost lze rovněž hledat v zájmu nejen profesionálních matematiků o některá iracionální čísla, jako je např. zlatý řez, popř. v širším pohledu tzv. kovové průměry. Jako příklady můžeme uvést vzorce využívající mocniny zlatého řezu [3]

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{4} &= \operatorname{arctg} \left( \frac{1}{\varphi} \right) + \operatorname{arctg} \left( \frac{1}{\varphi^3} \right), \\ \frac{\pi}{4} &= 2 \operatorname{arctg} \left( \frac{1}{\varphi^2} \right) + \operatorname{arctg} \left( \frac{1}{\varphi^6} \right), \\ \frac{\pi}{4} &= 3 \operatorname{arctg} \left( \frac{1}{\varphi^3} \right) + \operatorname{arctg} \left( \frac{1}{\varphi^5} \right). \end{aligned}$$

Závěrem lze konstatovat, že je poměrně komplikované zjistit, zda je určitý vzorec zcela nový, či byl již dříve ve stejné nebo obměněné podobě v literatuře popsán. Záměrem předloženého článku nebyl ovšem v první řadě samotný vzorec, jako spíše způsob jeho odvození vycházející v podstatné míře z použití nástrojů analytické geometrie a trigonometrie na úrovni dostupné středoškolským studentům. Neméně důležitým aspektem bylo poukázání na spojitost mezi jednotkovou parabolou, zlatým řezem (a kovovými průměry obecně) a číslem  $\pi$ , která nemusí být zdaleka tak zřejmou jako tradiční spojení kružnice a čísla  $\pi$ .

## Literatura

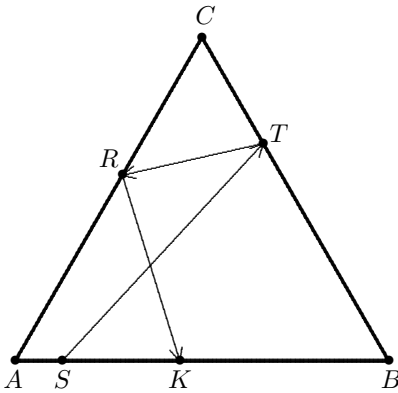
- [1] Abrarov, S. M., Siddiqui, R., Jagpal, R. K., Quine, B. M.: A new form of the Machin-like formula for  $\pi$  by iteration with increasing integers. *Journal of Integer Sequences*, roč. 25 (2022), Article 22.4.5, s. 1–17.
- [2] Bellos, A.: *Alexova dobrodružství v zemi čísel*. Dokořán, Praha, 2015.
- [3] Chan, H. Ch.: Machin-type formulas expressing  $\pi$  in terms of  $\varphi$ . *Fibonacci Quarterly*, roč. 46/47 (2008/2009), č. 1, s. 32–37.
- [4] Chien-Lih, H.: More Machin-Type Identities. *Mathematical Gazette*, roč. 81 (1997), č. 490, s. 120–121.
- [5] Lehmer, D. H.: On arccotangent relations for  $\pi$ . *American Mathematical Monthly*, roč. 45 (1938), č. 10, s. 657–664.
- [6] Luca, F., Stanica, P.: On Machin's formula with powers of the golden section. *International Journal of Number Theory*, roč. 5 (2009), č. 6, s. 973–979.
- [7] Nishiyama, Y.: Machin's formula and Pi. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, roč. 82 (2013), č. 3, s. 421–430.
- [8] Spíchal, L.: Jednotková parabola, zlatý řez a parabolické  $\pi$ . *Rozhledy matematicko-fyzikální*, roč. 96 (2021), č. 1, s. 8–17.
- [9] Spíchal, L.: About the harmonic mean on the unit parabola. *Symmetry: Culture and Science*, roč. 33 (2022), č. 1, s. 45–54.
- [10] Spíchal, L.: Konstrukce převrácených hodnot reálných čísel na jednotkových kuželosečkách. *Učitel matematiky*, roč. 30 (2022), č. 4, s. 217–228.
- [11] de Spinadel, V. W.: *From the golden mean to chaos*. Nueva Librería, Buenos Aires, 1998.
- [12] de Spinadel, V. W., Paz, J. M.: A new family of irrational numbers with curious properties. *Humanistic Mathematics Network Journal*, roč. 19 (1999), s. 33–37.

## Trojúhelníkový kulečnick

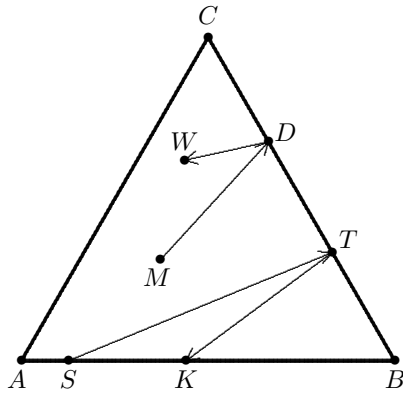
(podobnost trojúhelníků a analytická geometrie)

*Vlastimil Dlab, Bzí u Železného Brodu*

Mnohé z našich příspěvků jsou inspirovány specifickými příklady z literatury. Je totiž škoda nevyužít příklady zadané na různých soutěžích a formulovat je obecně tak, aby přispěly k porozumění souvislostí mezi často zdánlivě nesouvisejícími problémy. Dnes v tomto duchu využijeme úlohu určit polohu bodů odrazu  $T$  a  $R$  při kulečnickovém strku z bodu  $S$  do bodu  $K$ , či bodu odrazu  $D$  při strku z bodu  $M$  do  $W$ , na trojúhelníkovém stole, jak ukazují obr. 1 a 2. Zdůrazněme, že kulečnickový stůl má tvar rovnostranného trojúhelníku  $ABC$ . Připomeňme, že při každém strku je úhel dopadu na mantinel stolu roven úhlu odrazu, jak obrázky znázorňují. Tedy, na obr. 1 máme  $|\sphericalangle STB| = |\sphericalangle CTR|$  a  $|\sphericalangle TRC| = |\sphericalangle ARK|$  a na obr. 2 platí  $|\sphericalangle KTB| = |\sphericalangle CTS|$  a  $|\sphericalangle MDB| = |\sphericalangle CDW|$ .



Obr. 1



Obr. 2

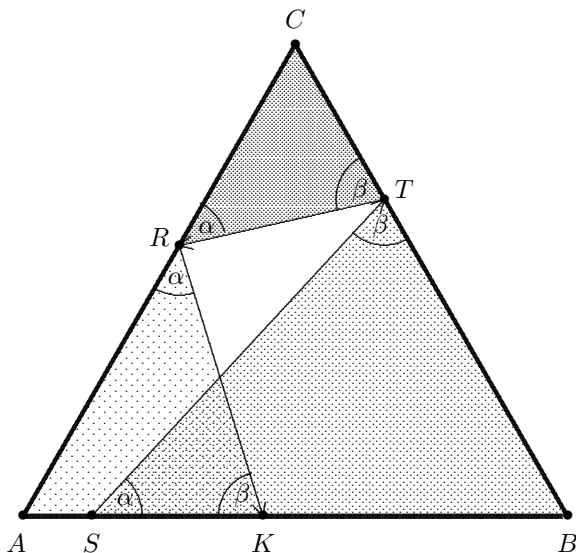
Věříme, že na základě řešení těchto úloh a jejich speciálních případů se pobavíte i dalšími podobnými úlohami, které si můžete lehce formulovat.

Řešme úlohu na obr. 1: Nechť strana rovnostranného trojúhelníku  $ABC$  má délku  $a$ . Dány jsou vzdálenosti  $|AS| = s$ ,  $|AK| = k$ . Nalezněte vzdálenost  $|BT| = t$ , tj. polohu bodu  $T$ , a  $|CR| = r$ , tj. polohu bodu  $R$ . Připomeňme, že  $|\sphericalangle STB| = |\sphericalangle CTR|$  a  $|\sphericalangle TRC| = |\sphericalangle ARK|$ . Je jasné, že



užitím analytické geometrie tak, jak je vyučována na dnešních školách, je možné úlohu řešit. Jde pouze o to, vyjádřit rovnice přímků určených úsečkami  $ST$ ,  $TR$ ,  $RK$  a určit průsečíky s příslušnými stranami trojúhelníku  $ABC$ . Výpočty lze ulehčit volbou ortonormální souřadnicové soustavy  $B = (0,0)$ ,  $C = (a,0)$ ,  $A = (\frac{a}{2}, \frac{a\sqrt{3}}{2})$ . Ale i tak jsou výpočty velmi komplikované. Proto využijeme podobnost trojúhelníků, jak naznačuje obr. 3. V něm jsou označeny úhly  $\alpha$  a  $\beta$ , které nás ihned dovedou k podobnosti trojúhelníků  $AKR$ ,  $BTS$  a  $CTR$ . Odtud dostáváme rovnost zlomků

$$\frac{a-r}{k} = \frac{a-s}{t} \quad \text{a} \quad \frac{a-s}{t} = \frac{r}{a-t}. \quad (1)$$



Obr. 3

Z rovností (1) dostáváme

$$-rt = k(a-s) - at, \quad rt = (a-s)(a-t),$$

sečtením  $0 = (a-s)(k+a-t) - at$ , neboli  $0 = (a-s)(a+k) - t(2a-s)$ , a tedy

$$t = \frac{(a+k)(a-s)}{2a-s}. \quad (2)$$

V kombinaci s první rovností v (1) dostáváme po úpravách také

$$r = \frac{a(a - k) + ks}{a + k}. \quad (3)$$

Zaznamenejme hodnoty  $t$  a  $r$  v následujících speciálních případech:

(i) Je-li  $s = 0$ , dostáváme

$$t = \frac{a + k}{2} \quad \text{a} \quad r = \frac{a(a - k)}{a + k}.$$

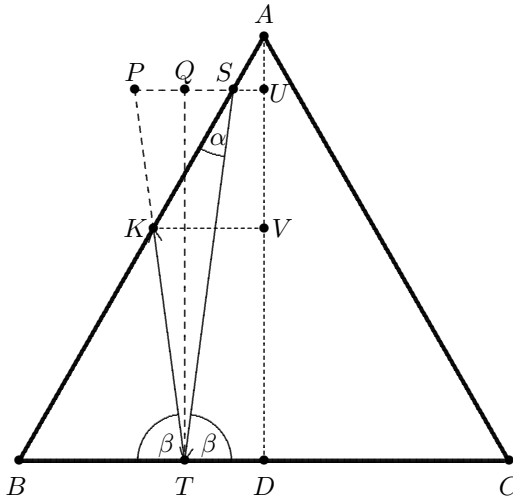
(ii) Je-li  $k = a$ , dostáváme

$$t = \frac{2a(a - s)}{2a - s} \quad \text{a} \quad r = \frac{s}{2}.$$

(iii) Je-li  $k = s$ , dostáváme

$$t = \frac{a^2 - s^2}{2a - s} \quad \text{a} \quad r = \frac{(a - s)^2 + as}{a + s}.$$

Popišme nyní strk  $S \rightarrow T \rightarrow K$  vyznačený na obr. 2; úlohu si usnadníme otočením kulečnickového stolu o  $-120^\circ$  kolem těžiště, dostaneme tak obr. 4.



Obr. 4

## MATEMATIKA

Opět označme  $|AB| = a$ ,  $|AS| = s$ ,  $|AK| = k$  a  $|BT| = t$ . Nyní zvolíme ortonormální souřadnicovou soustavu tak, že  $B = (0, 0)$  a  $C = (a, 0)$ . Potom  $A = (\frac{a}{2}, \frac{a\sqrt{3}}{2})$ .

Sestrojíme na výšce  $AD$  body  $U$  a  $V$  tak, že  $SU \parallel BC$  a  $KV \parallel BC$ . Jelikož  $|SU| = \frac{s}{2}$  a  $|KV| = \frac{k}{2}$ , máme  $U = (\frac{a}{2}, \frac{(a-s)\sqrt{3}}{2})$ ,  $V = (\frac{a}{2}, \frac{(a-k)\sqrt{3}}{2})$ ,  $D = (\frac{a}{2}, 0)$ , a tedy  $S = (\frac{a-s}{2}, \frac{(a-s)\sqrt{3}}{2})$  a  $K = (\frac{a-k}{2}, \frac{(a-k)\sqrt{3}}{2})$ . Jelikož  $T = (t, 0)$ , máme  $Q = (t, \frac{(a-s)\sqrt{3}}{2})$ , a proto  $P = (2t - \frac{a-s}{2}, \frac{(a-s)\sqrt{3}}{2})$ .

Přímka určená body  $P$  a  $T$  je popsána rovnicí

$$y = \frac{(a-s)\sqrt{3}}{2t-a+s}(x-t).$$

Jelikož bod  $K$  na této přímce leží, dostáváme pro  $t$  rovnici

$$(a-k)(2t-a+s) = (a-s)(a-k-2t),$$

jejímž řešením je

$$t = \frac{(a-k)(a-s)}{2a-k-s}.$$

Jelikož je tento výraz v závislosti na  $k$  klesající, je omezen hodnotami pro  $k = a$  a  $k = 0$ . Pro dané  $s$  je tedy

$$0 \leq t \leq \frac{a(a-s)}{2a-s}.$$

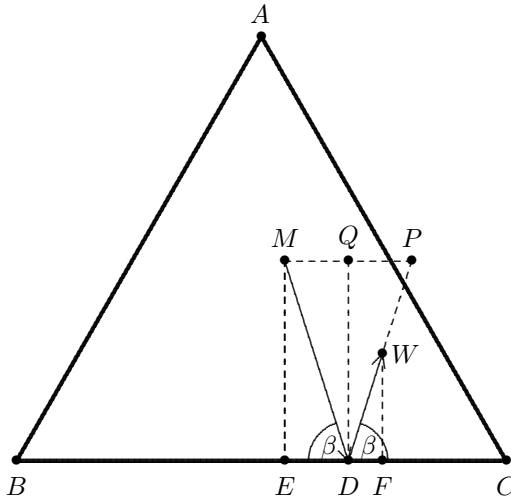
Pro  $s = 0$  je

$$t = \frac{a(a-k)}{2a-k}.$$

Pro  $s = k$  dostáváme

$$t = \frac{a-s}{2}.$$

Třetí úlohu, karambol z pozice  $M$  do  $W$ , opět vyřešíme ve výhodné volbě kulečnickového trojúhelníku, jak ukazuje obr. 5.



Obr. 5

Opět zvolme ortonormální souřadnicovou soustavu tak, že  $B = (0, 0)$ ,  $C = (a, 0)$ , a tedy  $A = (\frac{a}{2}, \frac{a\sqrt{3}}{2})$ . Necht'  $D = (d, 0)$ . Dány jsou výchozí pozice  $M = (p, q)$  a cílová pozice  $W = (u, v)$ . Je tedy  $Q = (d, q)$  a  $P = (2d - p, q)$ . Směrnice přímky dané body  $M$  a  $D$  se rovná opačné směrnici přímky určené body  $W$  a  $D$ , což znamená, že

$$\frac{v}{u - d} = \frac{q}{d - p},$$

odkud

$$d = \frac{pv + qu}{q + v}.$$

Zde možná někoho ze čtenářů překvapilo, jak jednoduchá byla řešení druhé a třetí úlohy. Hlavním důvodem je bezpochyby, v porovnání s první úlohou, že se jedná pouze o jeden odraz od mantinelu (v bodě  $T$ , resp.  $D$ ). V obou případech bylo nutné, vzhledem k zadání na obr. 2, otočit trojúhelník o  $-120^\circ$  kolem jeho těžiště. To je ale v případě rovnostranného trojúhelníku pro body ležící na stranách trojúhelníku (jak je tomu v druhé úloze) velice snadné. Ty jsou zde určeny pomocí vzdáleností od vrcholů trojúhelníku. Otočení o  $-120^\circ$  tedy v našem značení znamená, že trojúhelník  $ABC$  se zobrazí na trojúhelník  $BCA$ . Po vyřešení úlohy se vrátíme do původní situace otočením o  $120^\circ$ . Situace je zcela jednoduchá.

Poněkud jiný problém nastává v případě třetí úlohy. Jedná se opět o otočení (tedy rotaci) o  $-120^\circ$  do polohy vyobrazené na obr. 5. Popis tohoto zobrazení je opět možný několika způsoby. Snadný postup najdete např. na straně 258 publikace [1]. Zvolíme-li ortonormální souřadnicovou soustavu tak, že  $A = (0, 0)$ ,  $B = (a, 0)$ , a tedy  $C = (\frac{a}{2}, \frac{a\sqrt{3}}{2})$ , potom je obrazem bodu  $(g, h)$  bod

$$(\bar{g}, \bar{h}) = \left( \frac{a}{2} - \frac{g}{2} + \frac{h\sqrt{3}}{2}, \frac{a\sqrt{3}}{2} - \frac{g\sqrt{3}}{2} - \frac{h}{2} \right).$$

Označíme-li  $D = (e, f)$ , znamená to, že strk z pozice  $M = (p, q)$  do pozice  $W = (u, v)$  je určen předpisem

$$e = a - \frac{\bar{p}\bar{v} + \bar{q}\bar{u}}{2(\bar{q} + \bar{v})}, \quad f = \frac{\bar{p}\bar{v} + \bar{q}\bar{u}}{2(\bar{q} + \bar{v})}\sqrt{3},$$

kde

$$\begin{aligned} \bar{p} &= \frac{a}{2} - \frac{p}{2} + \frac{q\sqrt{3}}{2}, & \bar{q} &= \frac{a\sqrt{3}}{2} - \frac{p\sqrt{3}}{2} - \frac{q}{2}, \\ \bar{u} &= \frac{a}{2} - \frac{u}{2} + \frac{v\sqrt{3}}{2}, & \bar{v} &= \frac{a\sqrt{3}}{2} - \frac{u\sqrt{3}}{2} - \frac{v}{2}. \end{aligned}$$

Závěrem ještě ukažme, že je možné řešit první úlohu postupem, který jsme užili při řešení druhé úlohy. K tomu nám pomůže obr. 6, který slouží dvěma aplikacím, jak naznačuje značení bodů v závorkách. V první aplikaci volíme

$$0 < |CS| = s < a, \quad 0 < |BR| = r < a, \quad |AT| = t,$$

a tedy  $S = (\frac{a-s}{2}, \frac{(a-s)\sqrt{3}}{2})$ ,  $R = (\frac{2a-r}{2}, \frac{r\sqrt{3}}{2})$ ,  $T = (t, 0)$ ,  $Q = (t, \frac{(a-s)\sqrt{3}}{2})$ . Jelikož je  $Q$  středem úsečky  $SP$ , je  $P = (\frac{4t-a+s}{2}, \frac{(a-s)\sqrt{3}}{2})$ . Rovnice přímky určené body  $T$  a  $P$  je tedy

$$y = \frac{(a-s)\sqrt{3}}{2t-a+s} (x-t).$$

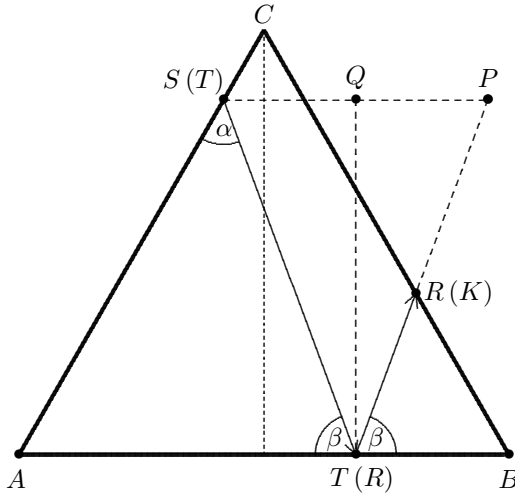
Bod  $R$  leží na této přímce a proto

$$\frac{r\sqrt{3}}{2} = \frac{(a-s)\sqrt{3}(2a-r-2t)}{2(2t-a+s)},$$

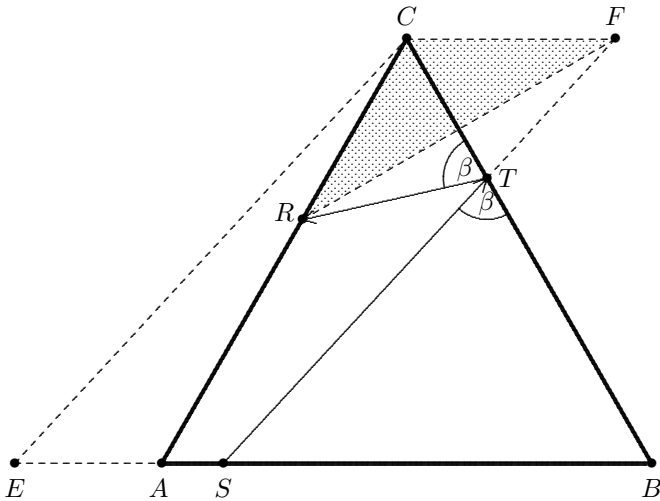
odkud dostáváme úpravou

$$t = \frac{a(a-s)}{a+r-s},$$

tj. po úpravě výraz (2).



Obr. 6



Obr. 7:  $EC \parallel SF$

V druhé aplikaci, kdy volíme značení

$$0 < |CT| = t < a, \quad 0 < |BK| = k < a, \quad |AR| = r,$$

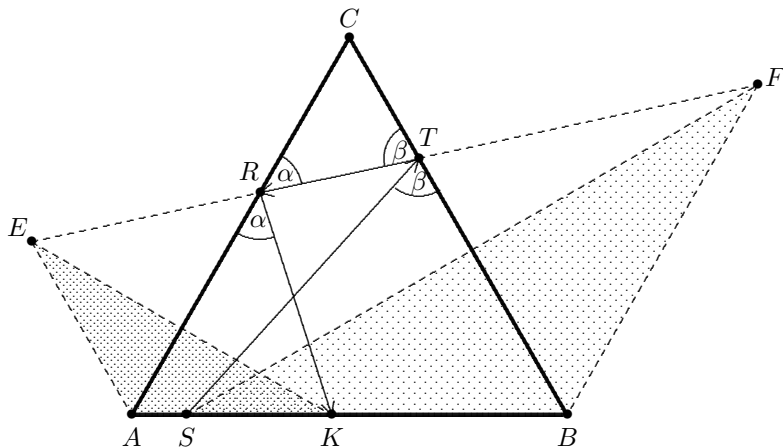
dostáváme naprosto stejným postupem vztah

$$r = \frac{a(a-t)}{a+k-t},$$

tj. výraz (3).

Přidejme nakonec několik slov ohledně konstrukce bodů odrazů  $T$ ,  $R$  a  $D$ , jak je vidíme na obr. 1 a 2. Ty jsou zcela jednoduché. Jak ukazuje obr. 7, v druhé úloze postačí sestrojít rovnoramenný trojúhelník  $CRF$  a bod odrazu  $T$  je průsečíkem úsečky  $FS$  a strany  $BC$ . Vztah  $t = |BT|$  plyne z podobnosti trojúhelníků  $SBT$  a  $EBC$ . Podobně je tomu s konstrukcí bodu  $D$  v třetí úloze. Kombinací této konstrukce potom nacházíme body  $T$  a  $R$  v první úloze zcela bezprostředně, jak ilustruje obr. 8.

Zakončeme úlohou: Odvoďte vzdálenosti  $t = |BT|$  a  $r = |CR|$ , tj. (2) a (3), užitím této konstrukce.



Obr. 8

### Literatura

[1] Dlab, V., Bečvář, J.: *Od aritmetiky k abstraktní algebře*. 2. vyd., ČVUT, Praha, 2022.

## Lichá čísla ve zlomcích ještě jednou

*Pavel Tlustý, Pedagogická fakulta JU, České Budějovice*

Cílem příspěvku je ukázat jednoduchý způsob sčítání posloupností po sobě jdoucích lichých čísel. V článku [1] se takové identity dokazují manipulativně, tj. úpravou příslušných algebraických výrazů (konečných sum po sobě jdoucích lichých čísel). Podívejme se nyní, jak lze tytéž identity (a mnohé jiné) zdůvodnit pomocí vhodného obrázku.

V článku [1] jsou postupně dokázány následující identity:

$$\frac{1}{3} = \frac{1+3}{5+7} = \frac{1+3+5}{7+9+11} = \dots = \frac{\sum_{k=1}^n (2k-1)}{\sum_{k=n+1}^{2n} (2k-1)} = \frac{1}{3}, \quad (1)$$

$$\frac{1}{3+5} = \frac{1+3}{5+7+9+11} = \dots = \frac{\sum_{k=1}^n (2k-1)}{\sum_{k=n+1}^{3n} (2k-1)} = \frac{1}{8}, \quad (2)$$

$$\frac{1+3}{5} = \frac{1+3+5+7}{9+11} = \dots = \frac{\sum_{k=1}^{2n} (2k-1)}{\sum_{k=2n+1}^{3n} (2k-1)} = \frac{4}{5}, \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \frac{1+3+5+7+9}{11+13} &= \frac{1+3+\dots+19}{21+23+25+27} = \dots = \\ &= \frac{\sum_{k=1}^{5n} (2k-1)}{\sum_{k=5n+1}^{7n} (2k-1)} = \frac{25}{24}. \end{aligned} \quad (4)$$

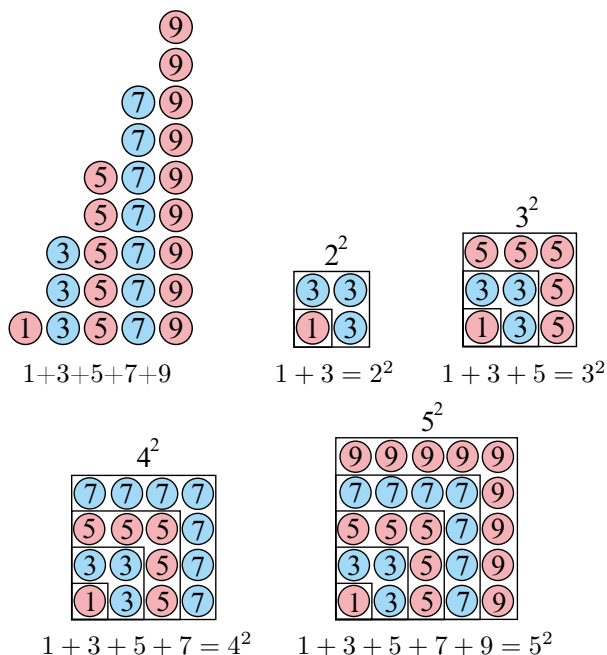
Ukažme si, jak lze pomocí obrázku ověřit jejich platnost.

Již od starověku je známo, že

$$1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n - 1) = n^2. \quad (5)$$

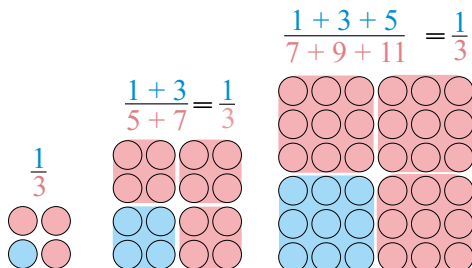
Platnost (5) lze prokázat mnoha způsoby. Použijeme zdůvodnění, které uváděl již řecký matematik Nicomachus (60–120). Na obr. 1 vidíme, jak postupným „zalamováním“ jednotlivých sloupců z levého obrázku, dostaneme součty prvních pěti lichých čísel.





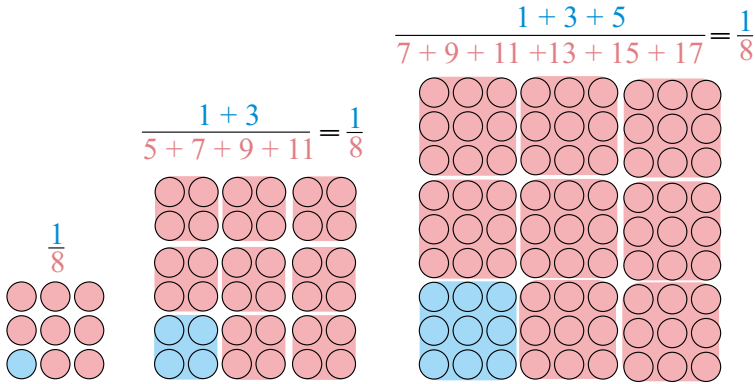
Obr. 1: Zdůvodnění rovnosti (5)

Podobně zdůvodníme identity (1)–(4). V rovnosti (1) je v každém čitateli stejný počet sčítanců jako ve jmenovateli. Hledáme tedy podíl součtů členů dvou stejně dlouhých konečných posloupností. Proto dělíme strany každého čtverce na dvě poloviny. Platnost (1) je zřejmá z následujícího obr. 2 (součet prvních  $n$  lichých čísel je vyznačen modře, součet následujících  $n$  lichých čísel je vyznačen červeně).



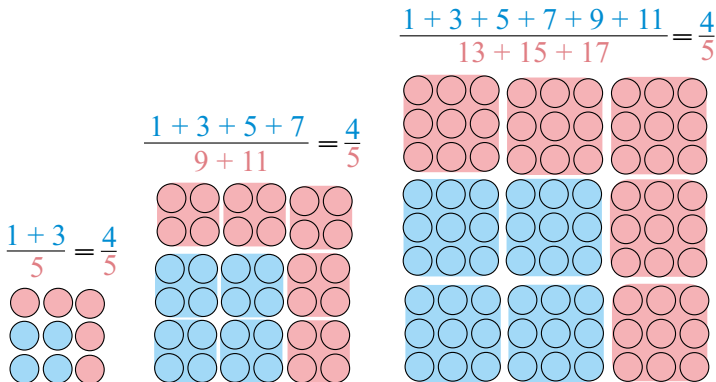
Obr. 2

V rovnostech (2), resp. (3), je v každém čitateli resp. jmenovateli dvojnásobný počet sčítanců než ve jmenovateli resp. čitateli. Strany každého čtverce tedy budeme dělit na tři stejné části. Platnost rovnosti (2) vyplývá z obr. 3:



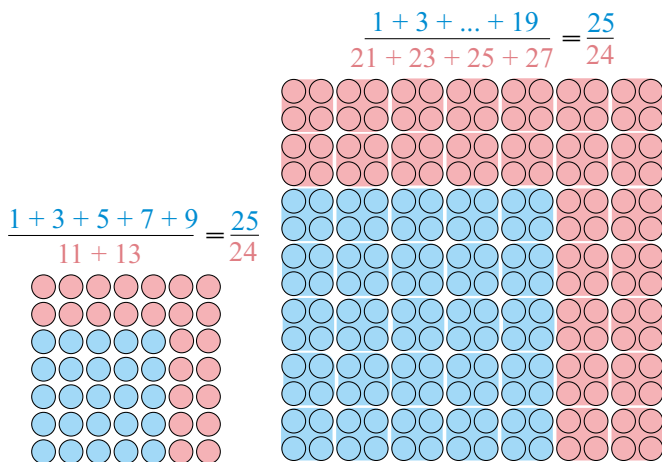
Obr. 3

zatímco zdůvodněním rovnosti (3) je obr. 4:



Obr. 4

V rovnosti (4) je poměr počtu sčítanců v čitateli a jmenovateli 5 : 2. Proto budeme každý čtverec rozdělovat na čtverečky 7 × 7, viz obr. 5, který zároveň ukazuje, proč je uvedená rovnost pravdivá.



Obr. 5

Jiné „vybarvení“ čtverečků ve čtverci  $7 \times 7$  vede např. ke zlomkům  $\frac{1}{48}$ ,  $\frac{4}{45}$ ,  $\frac{9}{40}$ ,  $\frac{16}{33}$ , čímž dostaneme identity:

$$\frac{1}{3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13} = \frac{1 + 3}{5 + 7 + \dots + 25 + 27} = \dots = \frac{\sum_{k=1}^n (2k - 1)}{\sum_{k=n+1}^{7n} (2k - 1)} = \frac{1}{48},$$

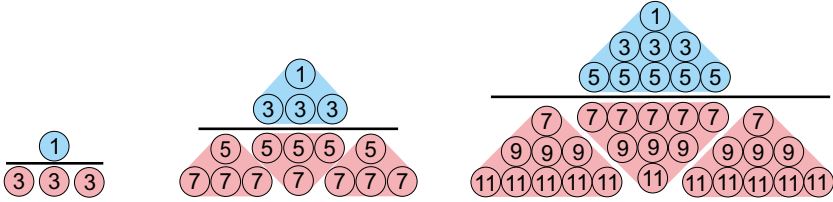
$$\frac{1 + 3}{5 + 7 + 9 + 11 + 13} = \frac{1 + 3 + 5 + 7}{9 + 11 + \dots + 25 + 27} = \dots = \frac{\sum_{k=1}^{2n} (2k - 1)}{\sum_{k=2n+1}^{7n} (2k - 1)} = \frac{4}{45},$$

$$\frac{1 + 3 + 5}{7 + 9 + 11 + 13} = \frac{1 + 3 + \dots + 11}{13 + 15 + \dots + 25 + 27} = \dots = \frac{\sum_{k=1}^{3n} (2k - 1)}{\sum_{k=3n+1}^{7n} (2k - 1)} = \frac{9}{40},$$

$$\frac{1 + 3 + 5 + 7}{9 + 11 + 13} = \frac{1 + 3 + \dots + 17}{19 + \dots + 25 + 27} = \dots = \frac{\sum_{k=1}^{4n} (2k - 1)}{\sum_{k=4n+1}^{7n} (2k - 1)} = \frac{16}{33}.$$

Analogickým způsobem je možné odvodit celou řadu dalších (i mnohem komplikovanějších) identit, jejichž důkaz obvyklým způsobem (formální úpravou konečných sum) by byl pracný a zdlouhavý.

Poznamenejme ještě, že v [2] najdeme jiné zdůvodnění rovnosti (1), které vychází z obr. 6.



Obr. 6

Čtenář si může vyzkoušet, jak by zdůvodnil výše uvedené identity pomocí takových „trojúhelníkových“ obrázků.

Literatura

- [1] Čerňanová, V.: Nepárne čísla v zlomkoch. *Rozhledy matematicko-fyzikální*, roč. 98 (2023), č. 2, s. 1–6.
- [2] Nelsen, R. B.: *Proofs Without Words*. The Mathematical Association of America, Washington, 1993.

## Zobecnění kritéria dělitelnosti třemi a devíti

*José Marcial Nájares Romero, ZŠ Gutova Praha 10*

Kritéria dělitelnosti daného přirozeného čísla  $n$  prvočíslem 3 či číslem 9 jsou známá již ze základní školy:

**Věta 1.** Číslo  $n$ , zapsané v desítkové soustavě, je dělitelné třemi (devíti) právě tehdy, když je součet všech jeho cifer dělitelný třemi (devíti).

Tedy, je-li

$$n = a_k \cdot 10^k + a_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \dots + a_1 \cdot 10 + a_0, \tag{1}$$

pak  $n$  je dělitelné třemi (devíti) právě tehdy, když součet  $\sum_{t=0}^k a_t$  je dělitelný třemi (devíti).

**Příklad 1.** Číslo  $n = 781\,260$  je dělitelné třemi, ale není dělitelné devíti, protože součet cifer je roven  $7+8+1+2+6+0 = 24$ , což je číslo dělitelné třemi, ale nikoliv devíti.

Tento postup lze zobecnit pro libovolné přirozené dělitele  $d$  čísla  $n$  využitím eukleidovského dělení.

**Věta 2.** *Nechť  $d$  je přirozené číslo a  $t$  je celé nezáporné číslo. Pak existují jednoznačně daná celá čísla  $q_t$  a  $r_t$  tak, že*

$$10^t = d \cdot q_t + r_t, \quad 0 \leq r_t < d. \quad (2)$$

Odtud již vidíme, že  $n$  s desítkovým zápisem (1) může být zapsané ve tvaru:

$$n = \sum_{t=0}^k a_t \cdot (d \cdot q_t + r_t) = d \cdot \sum_{t=0}^k a_t \cdot q_t + \sum_{t=0}^k a_t \cdot r_t. \quad (3)$$

Dostáváme tedy tvrzení:

**Věta 3.** *Číslo  $n$  s desítkovým zápisem (1) je dělitelné přirozeným číslem  $d$  právě tehdy, když je číslem  $d$  dělitelný součet*

$$a_k \cdot r_k + a_{k-1} \cdot r_{k-1} + \dots + a_1 \cdot r_1 + a_0 \cdot r_0, \quad (4)$$

kde  $r_t$  je definováno v (2) pro  $0 \leq t \leq k$ .

Uveďme si rovnou ještě vylepšenou variantu kritéria z věty 3. Tvrzení plyne ze stejných argumentů jako výše, jen si navíc musíme uvědomit, že  $10^t = d \cdot q_t + r_t \Leftrightarrow 10^t = d \cdot (q_t + 1) + (r_t - d)$ .

**Věta 4.** *Číslo  $n$  s desítkovým zápisem (1) je dělitelné číslem  $d$  právě tehdy, když je číslem  $d$  dělitelný součet*

$$a_k \cdot r_k^* + a_{k-1} \cdot r_{k-1}^* + \dots + a_1 \cdot r_1^* + a_0 \cdot r_0^*, \quad (5)$$

kde pro  $0 \leq t \leq k$  je  $r_t$  definováno v (2) a  $r_t^* = r_t$ , nebo  $r_t^* = r_t - d$ .

- Pro  $d = 3$  a  $d = 9$  jsou všechna  $r_t = 1$  a kritérium je velmi užitečné.
- Pro  $d = 11$  máme  $r_t = r_t^* = 1$  pro sudá  $t$  a  $r_t = 10$  a  $r_t^* = -1$  pro lichá  $t$ . Použitím věty 4 dostáváme kritérium, které se vyučuje ve škole: *číslo  $n$  je dělitelné 11 právě tehdy, když rozdíl součtu cifer na lichých místech a součtu cifer na sudých místech je dělitelný 11.*

**Příklad 2.** Číslo  $n = 781\,264$  je dělitelné 11, protože  $-7 + 8 - 1 + 2 - 6 + 4 = 0$  je číslo dělitelné 11.

- Pro  $d = 7$  je

$t$	$6s$	$1 + 6s$	$2 + 6s$	$3 + 6s$	$4 + 6s$	$5 + 6s$
$r_t$	1	3	2	6	4	5
$r_t^*$	1	3	2	-1	-3	-2,

kde  $s = 0, 1, \dots$

Porovnejme aplikaci kritéria pro dělitelnost sedmi z věty 3 a věty 4.

**Příklad 3.** Necht'  $n = 1\,865\,654$ . Podle věty 3 je  $n$  dělitelné sedmi, právě když je číslo  $1 \cdot 1 + 8 \cdot 5 + 6 \cdot 4 + 5 \cdot 6 + 6 \cdot 2 + 5 \cdot 3 + 4 \cdot 1 = 126$  dělitelné sedmi, a to dělitelné je:  $126 = 18 \cdot 7$ . Podle věty 4 je  $n$  dělitelné sedmi, právě když je číslo  $1 \cdot 1 + 8 \cdot (-2) + 6 \cdot (-3) + 5 \cdot (-1) + 6 \cdot 2 + 5 \cdot 3 + 4 \cdot 1 = -7$  dělitelné sedmi. Snad je tedy jasné, v čem spočívá výhoda věty 4 zejména pro počítání v ruce: zbytky  $r_t^*$  si můžeme volit tak, aby  $r_t \geq |r_t^*|$ .

**Příklad 4.** Ukázat pomocí věty 4 dělitelnost sedmi může být zdlouhavé. Uvažujme  $n = 6\,231\,887\,919\,328\,651\,846$ . Ukázat, že  $n$  je dělitelné sedmi, znamená podle věty 4 ukázat, že je dělitelné sedmi číslo

$$\begin{aligned}
 &6 \cdot 1 + 2 \cdot (-2) + 3 \cdot (-3) + 1 \cdot (-1) + 8 \cdot 2 + 8 \cdot 3 + \\
 &+ 7 \cdot 1 + 9 \cdot (-2) + 1 \cdot (-3) + 9 \cdot (-1) + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \\
 &+ 8 \cdot 1 + 6 \cdot (-2) + 5 \cdot (-3) + 1 \cdot (-1) + 8 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 6 \cdot 1 = 35.
 \end{aligned}$$

Výhodnější je zapsat číslo  $n$  v soustavě o základu  $10^6 = 1\,000\,000$ , tj. ve tvaru

$$n = 6 \cdot 10^{18} + 231\,887 \cdot 10^{12} + 919\,328 \cdot 10^6 + 651\,846,$$

a využít faktu, že číslo  $10^{6s} - 1$  je dělitelné sedmi pro všechna  $s = 0, 1, 2, \dots$ . Číslo  $n$  je tedy dělitelné sedmi, právě když je dělitelné sedmi číslo  $6 + 231887 + 919\,328 + 651\,846 = 1\,803\,067$ . Opět aplikujeme stejné kritérium a máme, že  $n$  je dělitelné sedmi, právě když  $1 + 803\,067$  je dělitelné sedmi. A tím dostaneme číslo

o šesti cifrách 803 068, které je podle věty 4 dělitelné sedmi, právě když  $8 \cdot (-2) + 0 \cdot (-3) + 3 \cdot (-1) + 0 \cdot 2 + 6 \cdot 3 + 8 \cdot 1 = 7$  je dělitelné sedmi.

Výhodné je rovněž zapsat číslo  $n$  v soustavě o základu  $10^3$ :

$$n = 6 \cdot 10^{18} + 231 \cdot 10^{15} + 887 \cdot 10^{12} + 919 \cdot 10^9 + 328 \cdot 10^6 + 651 \cdot 10^3 + 846.$$

V tomto případě využijeme fakt, že číslo  $10^{3s} - 1$  je dělitelné sedmi pro  $s$  sudé a číslo  $10^{3s} + 1$  je dělitelné sedmi pro  $s$  liché. Dostáváme tudíž analogické kritérium jako pro dělitelnost 11 pro číslo v desítkovém zápisu. Stačí zkontrolovat, že je dělitelný sedmi součet cifer se střídavými znaménky:

$$6 + 231(-1) + 887 + 919(-1) + 328 + 651(-1) + 846 = 266 = 38 \cdot 7.$$

**Úloha 1.** Stejně jako jsme určovali dělitelnost čísla prvočíslem 7, rozhodněte, zda číslo  $n = 47\,318\,800\,193\,208\,050\,806$  je dělitelné 13. Poznamenejme, že v tomto případě je  $r_t = 1$  pro  $t = 6s$ ,  $r_t = 10$  pro  $t = 1 + 6s$ ,  $r_t = 9$  pro  $t = 2 + 6s$ ,  $r_t = 12$  pro  $t = 3 + 6s$ ,  $r_t = 3$  pro  $t = 4 + 6s$  a  $r_t = 4$  pro  $t = 5 + 6s$ , kde  $s = 0, 1, \dots$

Nyní jsme připraveni popsat obecně postup, který využívá rozdělení desítkového zápisu čísla na „bloky“, tj. zápisu čísla  $n$  v soustavě s vhodným základem  $10^b$ .

Nechť  $b$  je přirozené číslo. Zapišme číslo  $n$  v soustavě o základu  $10^b$

$$n = B_k \cdot 10^{kb} + B_{k-1} \cdot 10^{(k-1)b} + \dots + B_1 \cdot 10^b + B_0, \quad (6)$$

kde  $B_t \in \{0, 1, \dots, 10^b - 1\}$  pro  $0 \leq t \leq k$ , tedy  $B_t$  získáme nasekáním desítkového zápisu  $n$  z (1) na bloky o  $b$  cifrách.

**Příklad 5.** Jak jsme již viděli, např.  $n = 6\,231\,887\,919\,328\,651\,846$  má zápis v bázi  $10^6$  roven  $n = 6 \cdot 10^{18} + 231\,887 \cdot 10^{12} + 919\,328 \cdot 10^6 + 651\,846$ .

Pro  $t \geq 0$  definujeme eukleidovským dělením  $r_t$ :

$$10^{tb} = d \cdot q_t + r_t, \quad 0 \leq r_t < d. \quad (7)$$

Tím jsme připraveni formulovat slibované tvrzení:

**Věta 5.** *Nechť  $b \in \mathbb{N}$ . Číslo  $n$  s desítkovým zápisem (1) je dělitelné přirozeným číslem  $d$  právě tehdy, když je  $d$  dělitelný součet*

$$B_k \cdot r_k + B_{k-1} \cdot r_{k-1} + \dots + B_1 \cdot r_1 + B_0 \cdot r_0,$$

kde čísla  $B_t$  a  $r_t$  pro  $0 \leq t \leq k$  jsou definována pomocí (6) a (7).

*Důkaz.* Stačí  $n$  zapsat s využitím (7) ve tvaru

$$n = \sum_{t=0}^k B_t \cdot (d \cdot q_t + r_t) = d \cdot \sum_{t=0}^k B_t \cdot q_t + \sum_{t=0}^k B_t \cdot r_t.$$

Pak je zřejmé, že  $n$  je dělitelné  $d$ , právě když  $\sum_{t=0}^k B_t \cdot r_t$  je dělitelné  $d$ .

Použití jsme ilustrovali v příkladu 4, když jsme číslo  $n$  zapsali v bázi  $10^6$ , resp.  $10^3$ .

Důležitý je speciální případ, kdy  $r_1 = 1$ , tj.  $10^b - 1$  je dělitelné  $d$ . Dosazením  $x = 10^b$  v rovnosti

$$x^t - 1 = (x - 1) \cdot (x^{t-1} + x^{t-2} + \dots + x + 1)$$

odvodíme, že  $r_t = 1$  pro každé  $t \in \{0, 1, \dots, k\}$ , a tedy můžeme formulovat následující důsledek.

**Důsledek 6.** *Jestliže se zbytek  $r_1$  ve větě 5 rovná 1, pak číslo  $d$  dělí  $n$  právě tehdy, když  $d$  dělí součet cifer  $\sum_{t=0}^k B_t$ .*

**Úloha 2.** Dokažte, že číslo  $n = 102\,345\,678\,987\,654\,321$  je dělitelné 17. Pro  $b = 16$  dostaneme aplikací důsledku 6: 17 dělí  $n$ , právě když 17 dělí  $10 + 2\,345\,678\,987\,654\,321 = 2\,345\,678\,987\,654\,331 =: n_1$ . Čtenáři doporučujeme pro ověření dělitelnosti  $n_1$  číslem 17 aplikovat větu 5 pro  $b = 4$ , případně opakovaně.

Závěrem poznamenejme, že pro každé prvočíslo  $d \neq 2$  a  $d \neq 5$  existuje  $b$  tak, že  $d$  dělí  $10^b - 1$ , tj.  $r_1 = 1$ . Malá Fermatova věta zaručuje, že takové  $b \leq d - 1$  existuje, protože  $d$  dělí  $10^{d-1} - 1$ . Opakovanou aplikací věty 5 lze tedy převést problém dělitelnosti libovolného přirozeného čísla prvočíslem  $d$  na dělitelnost čísla, které má nejvýše  $d - 1$  cifer. Poté je vhodné aplikovat větu 5 pro nějaké vhodné menší  $b$ , případně rovnou větu 4. Právě tak jsme postupovali v příkladu 4.

Pro další zajímavosti k tématu dělitelnosti doporučujeme článek [1].

## Poděkování

Velké poděkování patří redaktorům Rozhledů za jejich konečnou úpravu článku, především za jejich formulace definic a tvrzení.

## Literatura

- [1] Slavík, A.: Méně známá kritéria dělitelnosti. In: *Rozvíjení matematické gramotnosti na středních školách II*. MatfyzPress, Praha, 2019, s. 93–102.



# MATEMATICKÉ OŘÍŠKY

## Kritérium dělitelnosti sedmi

Tentokrát úkol pro čtenáře souvisí s článkem Josého Marciala Nájarese Romera: *Zobecnění kritéria dělitelnosti třemi a devíti* (strana 43). Konkrétně máme pro čtenáře za úkol:

*Dokažte následující kritérium dělitelnosti sedmi!*

**Věta.** *Nechť  $n$  je přirozené číslo s desítkovým zápisem  $(a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0)$ , tj.*

$$n = a_k \cdot 10^k + a_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \dots + a_1 \cdot 10 + a_0,$$

*pak  $n$  je dělitelné sedmi právě tehdy, když  $m - 2a_0$  je dělitelné sedmi, kde  $m$  je číslo s desítkovým zápisem  $(a_k a_{k-1} \dots a_1)$ .*

**Příklad.** Použijme kritérium dělitelnosti sedmi. Číslo 976 781 260 je dělitelné sedmi, právě když je sedmi dělitelné číslo

$$97\,678\,126 - 2 \cdot 0 = 97\,678\,126.$$

Použijeme kritérium znovu. Číslo 97 678 126 je dělitelné sedmi, právě když je dělitelné sedmi

$$9\,767\,812 - 2 \cdot 6 = 9\,767\,800.$$

Znovu použijeme kritérium: 9 767 800 je dělitelné sedmi, právě když je dělitelné sedmi 976 780, a to je dělitelné sedmi, právě když je dělitelné sedmi 97 678. A to je dělitelné sedmi, právě když je dělitelné sedmi

$$9\,767 - 2 \cdot 8 = 9\,751.$$

A to je dělitelné sedmi, právě když je sedmi dělitelné 975 – 2 · 1 = 973. A to je dělitelné sedmi, právě když je dělitelné sedmi 97 – 2 · 3 = 91. A to je dělitelné sedmi, právě když je dělitelné sedmi 9 – 2 · 1 = 7. Jelikož výsledek je dělitelný sedmi, je sedmi dělitelné i původní číslo 976 781 260.

A ještě navazující úkol: *Vymyslete nějaké vlastní šikovné kritérium dělitelnosti sedmi!*

\* \* \* \* \*

Minule měli čtenáři za úkol vysvětlit, proč najde Mařenka i Jeníček v následující hře poklad.

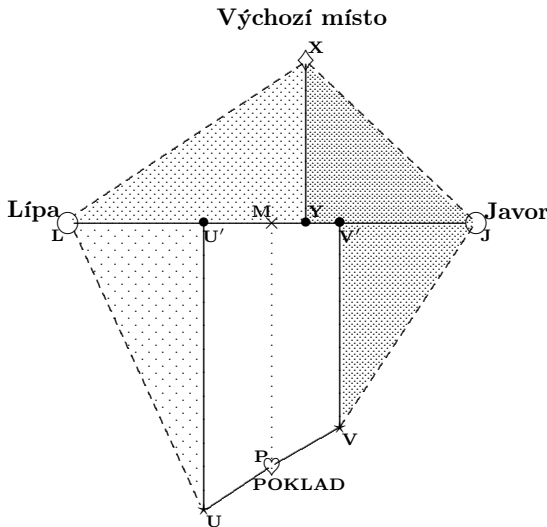
Na louce je lípa a javor, vzdálené od sebe 30 metrů. Instrukce jsou následující:

- Zaujmi libovolné místo.
- Z tohoto místa vykroč přímo k lípě.
- Tam se otoč doleva o  $90^\circ$  a přímočaře pokračuj v chůzi, až dosáhneš vzdálenosti rovné vzdálenosti výchozího místa od lípy.
- Toto místo označ kolíkem.
- Vrať se do výchozího místa.
- Odtud vykroč přímo k javoru.
- Tam se otoč doprava o  $90^\circ$  a pokračuj v chůzi, až dosáhneš vzdálenosti rovné vzdálenosti výchozího místa od javoru.
- Toto místo označ kolíkem.
- Poklad nalezněš na pulvicím bodě úsečky spojující oba kolíky.

Jeníček a Mařenka si vybrali dva různé výchozí body. Přesto našli poklad oba dva. *Jak je to možné?*

**Řešení:**

Úloha je adresována základním školám. Jednoduchý rozbor úlohy dává okamžité elementární řešení dostupné žákům těchto škol. Následující obrázek situaci ilustruje (viz též: <https://www.geogebra.org/m/eddqnpgr> nebo <https://www.geogebra.org/m/sfzyhdm2>).



Na obrázku jsou vyznačeny 4 pravoúhlé trojúhelníky: Trojúhelníky  $LYX$  a  $UU'L$  jsou shodné, neboť ramena úhlů  $\sphericalangle ULU'$  a  $\sphericalangle LXY$  jsou na sebe kolmá a délky stran  $LU$  a  $XL$  se rovnají. Ze stejného důvodu jsou shodné trojúhelníky  $JXY$  a  $VJV'$ . Proto

$$|LU'| = |XY| = |V'J|,$$

odkud

$$|LM| = |JM| = \frac{1}{2}|LJ|$$

a

$$|MP| = \frac{1}{2}(|UU'| + |VV'|) = \frac{1}{2}(|LY| + |JY|) = \frac{1}{2}|LJ|.$$

Středoškoláci se znalostí základů analytické geometrie mohou úlohu vyřešit následujícím způsobem.

Bez újmy na obecnosti označíme souřadnice lípy  $L = (0, 0)$  a javoru  $J = (d, 0)$ . Výchozí bod je  $X = (x, y)$ . Otočit se doleva o  $90^\circ$  u lípy a jít od ní stejnou vzdálenost znamená přičíst k  $L$  vektor kolmý na  $X - L$  a stejné velikosti jako  $X - L$ . Tím se dostaneme do bodu

$$U = (0, 0) + (y, -x) = (y, -x).$$

Podobně otočit se doprava o  $90^\circ$  u javoru a jít od něj stejnou vzdálenost znamená přičíst k  $J$  vektor kolmý na  $X - J$  a stejné velikosti jako  $X - J$ . Tím se dostaneme do bodu

$$V = (d, 0) + (-y, x - d) = (d - y, x - d).$$

Poklad leží na půli cesty mezi  $U$  a  $V$ , což je bod o souřadnicích

$$\frac{U + V}{2} = \frac{1}{2}[(y, -x) + (d - y, x - d)] = \frac{1}{2}(d, -d).$$

Středoškoláci se znalostí komplexních čísel mohou využít faktu, že násobení komplexní jednotkou  $i$  znamená otočení roviny kolem bodu  $(0, 0)$  o  $90^\circ$  v kladném smyslu, viz níže.

### Řešení Pavla Pokorného, člena redakční rady:

Situaci v rovině lze popsat komplexními čísly. Rozdíl  $A - B$  dvou komplexních čísel je komplexní číslo, které vyjadřuje krok (posunutí, translaci, vektor) od bodu  $B$  do bodu  $A$ . Vynásobení kroku komplexní

jednotkou  $i$  otočí tento krok o 90 stupňů proti směru hodinových ručiček, vynásobení číslem  $-i$  otočí o 90 stupňů ve směru hodinových ručiček.

Označme výchozí polohu komplexním číslem  $X$ , polohu lípy číslem  $L$  a polohu javoru číslem  $J$ . Krok od lípy do výchozí polohy je  $X - L$ . Tento krok otočený o 90 stupňů ve směru hodinových ručiček je  $-i(X - L)$ . Když tento krok uděláme od lípy, dostaneme se do bodu  $L - i(X - L)$ . Podobně když půjdeme od javoru dostaneme se do bodu  $J + i(X - J)$ . A půlicí bod úsečky spojující oba kolíky je

$$\frac{L - i(X - L) + J + i(X - J)}{2} = \frac{L + J}{2} + i \frac{L - J}{2},$$

tedy bod, do kterého se dostaneme, když ze středu úsečky  $LJ$  půjdeme kolmo s délkou kroku polovina této úsečky, nezávisle na výchozím bodu  $X$ .

\* \* \* \* \*

### SKALÁRY A VEKTORY

*Jednou večer, když na gauči  
sektorovém,  
přemítal jsem o prostoru  
vektorovém  
a mocně jsem nad problémem  
namáhal svůj um,  
pohled se mi svezl náhle  
na akvárium.  
V jeho vodách zcela jako  
na potvoru  
nebyla pražádná stopa  
po vektoru,  
skaláry tam jenom  
v hejnu plavaly,  
vektorové rozjímání  
ignorovaly.  
Od té doby netajím se  
názorem:  
Akvárium je skalárním  
prostorem!*

*Emil Calda<sup>\*)</sup>*

---

<sup>\*)</sup> Úvod do obecné teorie prostoru, Karolinum, Praha, 2003

## Joseph Fraunhofer (1787–1826) – zkoumáním spektra otevřel cestu k poznání složení hvězd

*František Jáchim, Základní škola Dukelská, Strakonice*

**Abstrakt.** Článek pojednává o životě a díle německého fyzika Josepha Fraunhofera. Předmětem jeho vědecké činnosti bylo studium světelného spektra. V článku jsou uvedené některé metody, jimiž zkoumal světelné spektrum včetně schémat technických zařízení, která k tomu účelu zhotovil.

Když pozitivistický filozof Auguste Comte (1798–1857) uváděl příklad absolutní nepoznatelnosti, napsal, že nikdy nezjistíme složení hvězd. Obrovské vzdálenosti zaručují navždy jejich nedostupnost, a jediné, co nám poskytují, je jejich světlo. Dnes víme, že se tento filozof mýlil a jím pronesený výrok o této absolutní nepoznatelnosti se stal ještě za jeho života nepravdivý. Cestu k tomu, co všechno lze vyčíst ze světla hvězd, odkryl bavorský fyzik Joseph Fraunhofer.



Obr. 1: Joseph Fraunhofer (1787–1826)

### Duha a čárový kód

Probleskne-li mezi dešťovými mraky slunce, můžeme spatřit krásný přírodní jev – duhu. Vzniká při lomu slunečního světla na vodních kap-

kách a vykresluje barevný oblouk po obloze. Na obr. 2 vidíme dokonce duhu dvojitou. Proč a jak vedlejší duha vzniká (je v ní opačné pořadí barev), nechť náš čtenář vnímá jako možnost uplatnit svoji zvědavost.



Obr. 2: Hlavní a vedlejší duha – výsledek lomu slunečního světla na kapkách vody

Na cestě k životu a dílu Josepha Fraunhofera si ještě prohlédneme jinou docela obyčejnou věc, jakou je čárový kód na obalu téměř každého výrobku (obr. 3).



Obr. 3: Čárový kód na obalu kakaa

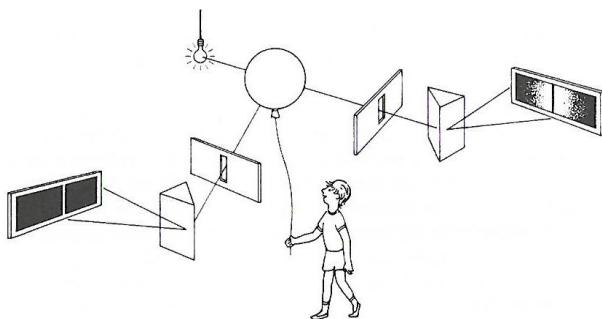
Z jedinečného uspořádání rovnoběžných čar přečte laserová čtečka u pokladny, že jde právě o kakao, a pokladna zobrazí jeho cenu. A jak spolu duha a čárový kód souvisejí? Vraťme se k fyzice. Na obr. 4 je spektrum bílého světla získané rozkladem po průchodu skleněným hranolem. Je složeno z řady barev, které plynule přechází jedna v druhou. Při podrobnějším pohledu na toto spektrum bychom zjistili, že jsou v něm jakési kazy, úzké temné čáry.



Obr. 4: Spojité spektrum

### Jak vznikají ve spektru čáry

Vznik čar ve spektru si můžeme v jednoduchosti vysvětlit pokusem podle obr. 5. Bílé světlo ze zdroje necháme procházet plynem, například vodíkem v balónku. Prošlé světlo rozložíme skleněným hranolem a ve spektru spatříme temnou čáru. To znamená, že plyn pohltil určitou barvu – přesněji konkrétní vlnovou délku světelného záření – a ostatní jím prošly. Podíváme-li se naopak na balónek s plynem ze strany, spatříme po rozkladu jeho svitu hranolem pouze právě tu jednu čáru spektra, kterou ze spojitého spektra žárovky plyn zachytil. V pravé části obrázku máme na stínítku absorpční spektrum plynu v balónku, v levé části je jeho spektrum emisní. Protože každý plyn vytváří při rozkladu světla jiný, a to jedinečný systém spektrálních čar, můžeme si vytvořit jakýsi vzorník spekter odpovídající různým plynům a využívat ho pro jejich identifikaci.



Obr. 5: Vznik čar ve spektru

### Od sklářského dělníka k fyzice

Joseph Fraunhofer se narodil v bavorském městě Straubingu jako jedenácté dítě sklářského mistra. Smutný život sirotka do jeho 14 let nesl s sebou téměř úplnou negramotnost. Přestože nechodil do školy, vyučil se sklářem a dostal podřadné místo pomocníka v jedné sklářské dílně.

Zde prožil velmi tragickou událost: Když se v roce 1801 sklářský dům najednou zřítíl a pod jeho troskami našla smrt většina sklářovy rodiny, on sám jen shodou náhod pod troskami přežil.

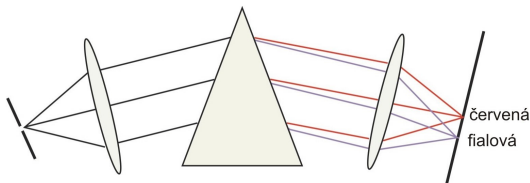
Ve dvaceti letech začal pracovat ve sklářské manufaktuře v hornobavorské obci Benediktbeuern a pro svoje nápady a zručnost byl v letech 1807–1819 vedoucím výroby. V dílně platil za největšího odborníka.

Sklo jako látka ho velice zajímalo a k poznání jeho možností se dal do studia optiky a sklářské technologie. Zkoumal složení různých druhů skl – korunových, flintových a olovnatých – a hledal i rozdíly v jejich optických vlastnostech. Dokonale ovládal výrobu čoček a našel i nové postupy při jejich broušení. Dokázal vyrobit velké skleněné součástky vhodné pro dopracování do čoček a hranolů do optických přístrojů. Později se stal významným výrobcem součástí hvězdářských dalekohledů.

## Zkoumání spektra

Předehrou k Fraunhoferovu zkoumání světelného spektra byl roku 1802 objev anglického fyzika, chemika a krystalografa Williama Hyde Wollastona (1766–1828). Ten si při prohlížení slunečního spektra všiml, že v některých místech jsou barvy přerušovány tmavými čarami. Tento jev nedokázal vysvětlit a ani se o něj dále nezajímal. To už byla záležitost J. Fraunhofera. K bližšímu zkoumání bylo třeba mít spektrum kvalitnější, řekněme „více roztažené“, aby vynikly jeho podrobnosti. Prvním Fraunhoferovým cílem bylo takové spektrum získat. Světelné spektrum lze získat dvojím způsobem – buď skleněným hranolem, nebo optickou mřížkou. Oba způsoby Fraunhofer použil a zdokonalil natolik, že mohl spektrum velmi podrobně prohlížet.

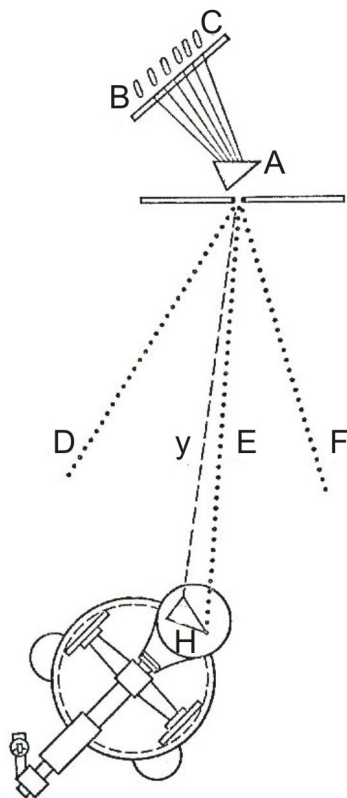
Technicky zdokonalil spektrometr uspořádáním podle obr. 6. Paprsky ze zdroje nechal projít štěrbinou a čočkou je rovnoběžně usměrnil. Během průchodu skleněným hranolem došlo k rozkladu světla, který se projevil na stínítku (pro jednoduchost jsou znázorněny jen paprsky okrajových barev červené a fialové).



Obr. 6: Schéma Fraunhoferova spektrometru



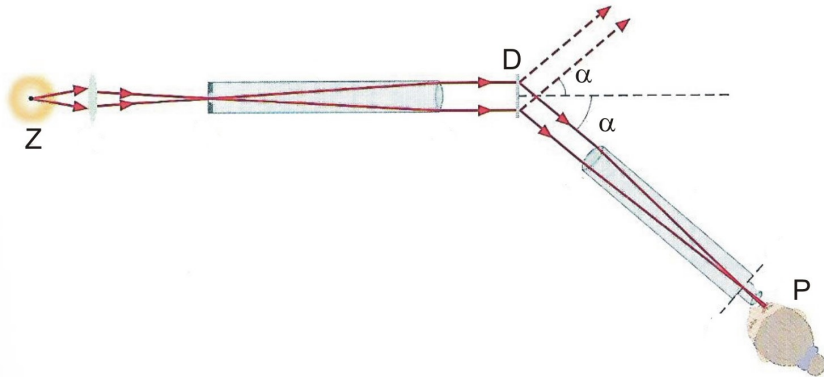
Pro podrobnější zkoumání tmavých čar si Fraunhofer spektrum rozšířil postupem podle obr. 7. Před hranol A umístil zdroj světla, který postupně přemísťoval mezi polohami B a C. Ze vzniklého spektra šterbinou vybral vždy úsek yE a podrobil ho dalšímu lomu v hranolu H spektrometru. Dalekohledem pak prohlížel jednotlivé části spektra.



Obr. 7: Fraunhoferovo rozšíření spektra

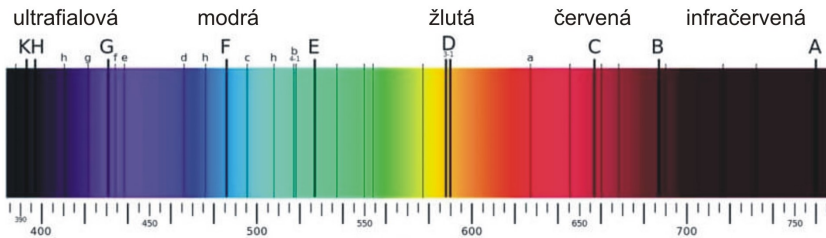
Roku 1814 objevil ve vodíkovém spektru tři základní tmavé čáry – po jedné v barvě červené, modré a fialové. Brzy jich našel 11 a při podrobnější prohlídce dokonce několik set. Každé čáře přisoudil nějakou hodnotu indexu lomu a začal je využívat jako stupnice. Dnes existují podrobné tabulky Fraunhoferových čar, které jsou rozmístěny prakticky po celém spektru.

Jako lepší nástroj než hranol se k získání spektra ukázala difrakční mřížka, jíž je Fraunhofer vynálezce. Nejprve ji zhotovoval jako hustou síť tenkých rovnoběžných drátků, později se jako nejvhodnější ukázal systém hustých vrypů (až několik set na milimetru) do skleněné destičky. Když místo hranolu vložil mřížku do spektroskopu (obr. 8), mohl při znalosti vzdálenosti dvou sousedních vrypů a změření úhlu odchýlení vypočítat vlnovou délku jednotlivých spektrálních čar.



Obr. 8: Chod paprsků ve spektroskopu s optickou mřížkou

Na obr. 9 je pod spektrem uvedena vlnová délka v nanometrech.



Obr. 9: Spektrum s Fraunhoferovými čarami

Jak své pokusy zdokonaloval, mohl pozorovat stále větší počet tmavých čar – až dospěl k počtu 576. Fraunhoferovi bylo zřejmé, že rozmístění tmavých čar není nahodilé a že nějak souvisí s látkou, která je jejich původem. Proto se jako významné ukázalo principiální odlišení spekter jednotlivých zdrojů. Když Fraunhofer získal spektrum světla Měsíce,

zjistil jeho identitu se světlem slunečním. Zatímco spektra hvězd Pollux, Capella, Betelgeuze aj. vykazovala od slunečního jen nepatrné odchylky, spektra Siria a Castora již byla značně odlišná. Otázkou zůstávalo, proč tomu tak je.

### Pokračovatelé

Podstatu Fraunhoferových čar objasnil Gustav Kirchhoff (1824–1887). Roku 1860 objevil zákon, podle něhož každá látka pohlcuje světlo takové vlnové délky, kterou může sama vyzařovat. Když byl k dispozici Wilhelmem Bunsenem (1811–1889) zhotovený hořák dávající stálé světlo, Kirchhoff sypáním kuchyňské soli do plamene vyvolal ve spektru plamene žlutou emisní dvojčáru (dublet) vždy na stejném místě. Byla-li v plameni jiná látka, byly při sledování emisního spektra čáry na jiných místech. Poloha těchto čar definovala látku. Na obr. 10 je emisní spektrum kadmia. Obráceně vzato – budeme-li mít emisní spektrum prozatím neznámé látky a bude-li se shodovat se spektrem uvedeným na obr. 10, pak je neznámou látkou právě kadmium.



Obr. 10: Spektrum s čarami kadmia

Bunsen s Kirchhoffem ve své laboratoři v Heidelbergu zjistili, že tmavé čáry ve slunečním spektru odpovídají jasným čarám spektra plamene, do něhož byly dopraveny atomy různých prvků. Podařilo se jim ke známým prvkům přiřadit spektrální čáry a o těch zbylých prohlásili, že patří dosud neznámým prvkům.

Rozmístění čar ve spektru čtenáři jistě připomene čárový kód uváděný v úvodu článku. Stejně jako čárový kód o zboží poskytuje systém spektrálních čar řadu informací o látkách, jež jsou jejich původem. A nejen to, případný posuv spektrálních čar ve světle hvězd poskytuje informaci o směru jejich pohybu. Jde o využití tzv. Dopplerova jevu v astronomii.

Pomocí soustav čar ve spektrech byly objeveny některé prvky – např. rubidium, cesium a indium. Jako zajímavost uvádíme skutečnost, že hélium bylo spektroskopicky prokázáno roku 1868 nejprve na Slunci a

teprve roku 1895 Williamem Ramseyem (1852–1916) i na Zemi. Průkopnickou práci v astrofyzice započal William Huggins (1824–1910), když připojil k dalekohledu spektroskop.

## Přístroje

Jak již bylo zmíněno, J. Fraunhofer zhotovoval astronomické dalekohledy. Jeho velkým dílem je objektiv k zrcadlovému dalekohledu s průměrem zrcadla 24 cm a ohniskovou vzdáleností 4,3 metru pro hvězdárnu v estonském Dorpatu (nyní Tartu). Jedním z dalekohledů zhotoveným Fraunhoferem změřil Friedrich Wilhelm Bessel (1784–1846) v roce 1838 první paralaxu hvězdy. Jiný využil zakladatel Pulkovské hvězdárny Friedrich Georg Wilhelm von Struve (1793–1864) k sestavení katalogu 3 110 dvojhvězd.

První veličinou – a dlouho jedinou, kterou astronomové odpradávná měřili – byla velikost úhlu mezi směry k nebeským objektům. Nejprve Jakubovou tyčí, někdy v 16. století sextanty, posléze dalekohledy s mikrometrickým nitkovým křížem. Principiálně odlišným zařízením, s nímž přišel J. Fraunhofer, je *heliometr*. Rozřízl objektiv dalekohledu na dvě poloviny, kterými bylo možné v rovině kolmé na směr pozorování mikrometrickými šrouby stranově posouvat. Při pozorování dvojhvězdy bylo možno dosáhnout posunutím polovin objektivu překrytí obrazu obou složek v obraz jediný. Heliometr tak nahrazoval úhlový posun nitkového vlákna dalekohledu.

V roce 1812 Fraunhofer postavil heliometr o průměru objektivu 76 mm s ohniskovou vzdáleností 1,15 m a poslal ho německému matematikovi a astronomovi Friedrichu Gaussovi (1777–1855). Další Fraunhoferem zhotovené heliometry dostaly hvězdárny v Berlíně a Wroclawi. Když zhotovil další heliometr, tentokrát s objektivem dvojnásobného průměru a ohniskem ve vzdálenosti 2,6 m, obdržel od Friedricha Wilhelma Bessela<sup>1)</sup> (1784–1846) několik rad k technickému zdokonalení, které sice nevyužil, ale ve spolupráci se sklářskými mistry přece jen přístroj ještě zdokonalil natolik, že když ho Bessel vyzkoušel, zařídil jeho umístění na hvězdárnu v Královci (nyní Kaliningrad v Ruské federaci).

## Závěrem

Joseph Fraunhofer jako velmi uznávaný fyzik odešel v roce 1819 do Mnichova, kde se stal členem Bavorské akademie věd a pracovníkem

<sup>1)</sup>Bessel jako první změřil heliometrem paralaxu hvězdy (61 Cygni).

## FYZIKA

jejího fyzikálního kabinetu. Byly mu poskytnuty i společenské pocty – čestné občanství Mnichova, pasování na rytíře a povýšení do šlechtického stavu. Zemřel 7. června 1826 na tuberkulózu. Jeho hrob je na mnichovském hřbitově Alte Arkaden (obr. 11).



Obr. 11: Fraunhoferův hrob

### Literatura

- [1] Houdek, F., Tůma, J.: *Objevy a vynálezy tisíciletí*. Nakladatelství Lidové noviny, Praha, 2002.
- [2] Štoll, I.: *Dějiny fyziky*. Prometheus, Praha, 2009.

## Recenze knihy I. Krause *Technicky talentované ženy a jejich vynálezy*

Zdeněk Janout

Kniha, kterou vydalo nakladatelství Česká technika – nakladatelství ČVUT v Praze r. 2023, je třetí knihou univerzitního profesora Ivo Krause, která je věnovaná problematice tvůrčí činnosti žen. V roce 2005 vydal v nakladatelství Prometheus brožuru *Příběhy učných žen* věnovanou geniálním vědkyním a ženám na královských trůnech, které podporovaly vědecký pokrok. O deset let později vydal v nakladatelství ČVUT knihu *Ženy v dějinách matematiky, fyziky a astronomie* věnovanou ženám, které významně přispěly k rozvoji exaktních věd.

Tentokrát vydává ve stejném nakladatelství knihu *Technicky talentované ženy a jejich vynálezy* věnovanou ženám, které svými vynálezy významně přispěly nejen k ulehčení běžných domácích prací, ale také zdokonalily výrobní postupy v řadě průmyslových odvětvích (např. potravinářství, strojírenství, stavebnictví).

Inspirací k napsání této knihy bylo autorovi první číslo periodického bulletinu *The Woman Inventor (Ženský vynálezce)*, které vyšlo v dubnu 1891 ve Washingtonu, D.C. a jehož zakladatelkou byla feministická reformátorka Charlotte Smithová. Tento bulletin byl prvním časopisem, ve kterém mohly vynálezky zveřejnit své nápady, nalézt rady jak psát patentové přihlášky a překonat překážky patentového řízení. Díky tomuto bulletinu se zachovala řada informací o amerických vynálezkyňích, zatímco o ženách – vynálezkyňích z evropských i jiných zemí je informací velice málo. Proto v knize převládají medailony amerických vynálezkyň.

Kniha je koncipovaná jako soubor 55 medailonů (biografických hesel) věnovaných technicky talentovaným ženám od starověku až po současnost. Kniha není pouhým vyprávěním o životě žen – vynálezkyň, jejich přínosech k oboru, funkcích, vyznamenáních, počtech, ale dokumentuje i prostředí, ve kterém vyrostly, žily jejich rodiny, s kým se stýkaly a spolupracovaly. Základní text je vhodně doplněn ilustracemi a obsáhlým poznámkovým aparátem, jehož cílem je usnadnit četbu bez vyhledávání neznámých pojmů na internetu nebo v odborné literatuře.

Kniha je napsána čtivě a svým zajímavým obsahem a podáním upoutá čtenáře široké veřejnosti. Lze ji doporučit všem, kteří se zajímají o histo-

## RECENZE

rii přírodních a technických věd. Vhodně rozšiřuje a doplňuje informace obsažené v odborných knihách, v odborném tisku či v učebnicích všech typů škol. Je poučením i pro současnost. Vhodně rozšíří knižní nabídku současnosti. Má 144 stran, je doplněna literaturou a jmenným rejstříkem. Lze ji zakoupit v Univerzitním knihkupectví odborné literatury (budova Národní technické knihovny) v Praze 6, Technická 6, nebo v internetovém obchodě <https://eobchod.cvut.cz>.



# ROZHLEDY matematicko-fyzikální

## obsah 98. ročníku

MATEMATIKA	strana/číslo
V. Čerňanová: Tri definície elipsy a ich názorné prepojenie . . . . .	2/1
V. Čerňanová: Nepárne čísla v zlomkoch . . . . .	1/3
V. David: Burnsideovo lemma aneb proč se starat o teorii grup . .	1/4
V. Dlab: Rovnoběžník ve čtverci . . . . .	6/3
V. Dlab: Trojúhelníkový kulečník (podobnost trojúhelníků a analytická geometrie) . . . . .	31/4
L. Pick, L. Dvořáková, S. Tomiczková, H. Turčinová: Česká matematická společnost . . . . .	28/2
Š. Gergelitsová, T. Holan: Problém s potrubím . . . . .	6/2
T. Kladivová: Barevné Výhonky . . . . .	12/4
J. Kopfová: Hrajeme si s pravděpodobností . . . . .	1/3
M. Makešová, M. Valentová: Proč si Češi pořizují solární panely?	25/1
D. Martišek: Krocení jedné bijekce aneb o zipu a tkaničkách . . .	13/2
D. Martišek: Jak to vlastně je? Fraktály . . . . .	15/3
J. M. Nájares Romero: Zobecnění kritéria dělitelnosti třemi a devíti	43/4
P. Pokorný: Přelévání vody mezi nádobami, teorie grafů a modulární aritmetika . . . . .	9/1
L. Spíchal: Aproximace čísla $\pi$ pomocí zlatého řezu a kovových průměrů . . . . .	20/4
P. Tlustý: Lichá čísla ve zlomcích ještě jednou . . . . .	39/4
Matematické oříšky: Nudný profesor . . . . .	34/1
Matematické oříšky: Bijekce . . . . .	31/2
Matematické oříšky: Hledání pokladu . . . . .	34/3
Matematické oříšky: Kritérium dělitelnosti sedmi . . . . .	48/4



## INFORMATIKA

strana/číslo

- P. Strachota: Transformace obrazu do frekvenční oblasti  
a jejich aplikace . . . . . 35/1

## FYZIKA

- F. Jáchim: Ernest Rutherford (1871–1937) – otevřel cestu  
do nitra atomu . . . . . 33/2
- F. Jáchim: Joseph Fraunhofer (1787–1826) – zkoumáním spektra  
otevřel cestu k poznání složení hvězd . . . . . 52/4
- I. Kraus: České stopy v Nobelových cenách za fyziku . . . . . 43/2
- E. Šubert: Proč mají hvězdy na fotografiích z Webbova  
vesmírného teleskopu osm cípů? (upoutávka) . . . . . 56/1
- E. Šubert: Proč mají hvězdy na fotografiích z vesmírného teleskopu  
Jamese Webba osm cípů? . . . . . 36/3
- L. Šlégrová, J. Šlégr: Keplerovy zákony v historických souvislostech 52/3

## ZPRÁVY

- L. Dvořáková: Slovo úvodem . . . . . 1/1
- M. Lausová: FYKOS a jeho aktivity pro středoškoláky . . . . . 54/2
- Ne Einstein, ale einstein . . . . . 53/2

## RECENZE

- Z. Janout: *Recenze knihy I. Krause* Technicky talentované ženy  
a jejich vynálezy . . . . . 61/4
- V. Wagner: *Recenze knihy J. Tomsy* Norimberský trychtýř aneb  
Průvodce přemýšlivého studenta středoškolskou fyzikou . . . . . 62/3