Nehrajte si se sirkami

Jan Autor, Ústav UK, Praha

Abstract. The article presents a mathematical game theory which is a simplified version of Marienbad game. This version of the game is played only with two heaps of matchsticks and under slightly modified rules.

V článku [1] o hře *marienbad* jsme popsali strategii hry, v níž dva soupeři střídavě odebírají sirky z hromádek, přičemž prohrává (nebo podle jiné varianty vyhrává) hráč, na nějž již žádná sirka nezbude.

Teorie týkající se hry

Označení zvolíme obdobné jako posledně, tj. každou herní situaci popíšeme neuspořádanou dvojicí $\langle x; y\rangle$, kde $x, y \in \mathbb{N}_0$ a tyto proměnné značí aktuální počet sirek na hromádkách. Podle definice je prohrávající situací $\langle 0; 0\rangle$. Z pravidel hry dále plyne, že vyhrávají všechny pozice typu $\langle x; 0\rangle$ a $\langle x; x\rangle$, kde $x > 0$.

Tab. 1 naznačí metodu, jak hledat další prohrávající (L) a vyhrávající (W) situace. Tabulku můžete vložit i s využitím prostředí `table`.

Zaměřme se tedy pouze na prohrávající dvojice, v nichž je $x < y$. Zde nalezené prohrávající dvojice tvoří posloupnost se členy $\mathrm{L}_n = \langle x_n; y_n\rangle$ pro $n \in \mathbb{N}_0$, kde (x_n) a (y_n) jsou zjevně rostoucí posloupnosti, pro něž z konstrukce plyne

$$y_n = x_n + n, \tag{1}$$

neboť po nalezení prohrávající dvojice L_{n-1} je v uvažované části tabulky označeno jako vyhrávající n diagonál. Prozatím jsme nalezli tyto prohrávající dvojice: $\langle 0; 0\rangle$, $\langle 1; 2\rangle$, $\langle 3; 5\rangle$, $\langle 4; 7\rangle$, $\langle 6; 10\rangle$, $\langle 8; 13\rangle$.

Omezme se nyní na množinu přirozených čísel (bez nuly) a zaveďme množiny

$$\mathrm{X} = \{x_1, x_2, \dots\}, \quad \mathrm{Y} = \{y_1, y_2, \dots\}.$$

Ukážeme, že tyto množiny tvoří disjunktní rozklad množiny přirozených čísel, tj.

$$\mathrm{X} \cup \mathrm{Y} = \mathbb{N} \quad \text{a} \quad \mathrm{X} \cap \mathrm{Y} = \emptyset.$$

$x\backslash y$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
0	L_0	W_0	W_0	W_0	W_0	W_0	W_0	W_0	W_0	W_0	W_0	W_0	W_0	W_0
1	W_0	W_0	L_1	W_1	W_1	W_1	W_1	W_1	W_1	W_1	W_1	W_1	W_1	W_1
2	W_0	L_1	W_0	W_1	W_1	W_1	W_1	W_1	W_1	W_1	W_1	W_1	W_1	W_1
3	W_0	W_1	W_1	W_0	W_1	L_2	W_2	W_2	W_2	W_2	W_2	W_2	W_2	W_2
4	W_0	W_1	W_1	W_1	W_0	W_1	W_2	L_3	W_3	W_3	W_3	W_3	W_3	W_3
5	W_0	W_1	W_1	L_2	W_1	W_0	W_1	W_2	W_2	W_2	W_2	W_2	W_2	W_2
6	W_0	W_1	W_1	W_2	W_2	W_1	W_0	W_1	W_2	W_3	L_4	W_4	W_4	W_4
7	W_0	W_1	W_1	W_2	L_3	W_2	W_1	W_0	W_1	W_2	W_3	W_3	W_3	W_3
8	W_0	W_1	W_1	W_2	W_3	W_2	W_2	W_1	W_0	W_1	W_2	W_3	W_4	L_5
9	W_0	W_1	W_1	W_2	W_3	W_2	W_3	W_2	W_1	W_0	W_1	W_2	W_3	W_4
10	W_0	W_1	W_1	W_2	W_3	W_2	L_4	W_3	W_2	W_1	W_0	W_1	W_2	W_3
11	W_0	W_1	W_1	W_2	W_3	W_2	W_4	W_3	W_3	W_2	W_1	W_0	W_1	W_2
12	W_0	W_1	W_1	W_2	W_3	W_2	W_4	W_3	W_4	W_3	W_2	W_1	W_0	W_1
13	W_0	W_1	W_1	W_2	W_3	W_2	W_4	W_3	L_5	W_4	W_3	W_2	W_1	W_0

Tabulka 1: Jak hledat další prohrávající (L) a vyhrávající (W) situace

Hodnota tcs(p)	Počet prvočísel s danou hodnotou tcs(p)	Porovnání hodnot ze druhého sloupce v procentech
1	39158474	100
2	39160023	100.0039557
3	1	*
4	39158782	100.0007866
5	39158600	100.0003218
6	0	0.
7	39158653	100.0004571
8	39159690	100.0031053
9	0	0.

Tab. 2

Stojíme tedy před úkolem, jak algoritmizovat konstrukci množin X a Y, jinými slovy jak rozdělit množinu přirozených čísel na 2 disjunktní rostoucí posloupnosti (x_n) a (y_n) splňující vztah (1). K tomu účelu nejprve dokážeme jeden pomocný vztah. Pro všechna $n \in \mathbb{N}$ totiž platí

$$y_n = x_{x_n} + 1, \tag{2}$$

Důkaz. Zvolme pevně nějaké n a uvažujme množinu $\{1, 2, \ldots, y_n\}$. Její podmnožina $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ má n prvků, zbývající prvky patří množině X. Avšak vzhledem k (1) je těchto prvků $y_n - n = x_n$, jde tudíž o množinu $\{x_1, x_2, \ldots, x_{x_n}\}$. V důsledku (1) dále platí

$$y_n - y_{n-1} = x_n - x_{n-1} + 1 \geq 2.$$

Mezi y_{n-1} a y_n tedy musí ležet alespoň jeden prvek množiny X. Vzhledem k monotonii posloupnosti (x_n) je nejvyšší z nich roven x_{x_n}.

Spojením (1) a (2) dostáváme

$$x_{x_n} = x_n + n - 1. \tag{3}$$

Zjevně je $x_n \geq n$. Na druhé straně ukážeme, že $x_n - x_{n-1} \leq 2$, a tudíž $x_n \leq 2n$. V opačném případě by totiž mezi x_{n-1} a x_n ležely nejméně dva prvky množiny Y, mezi nimiž, jak jsme právě ukázali, by musel ležet další prvek množiny X, což je spor s monotonií posloupnosti (x_n).

Posloupnost (x_n) je tedy zdola i shora ohraničena lineární funkcí. Nabízí se tudíž hypotéza, že $x_n = [\alpha n]$, kde α je reálné číslo z intervalu $(1; 2)$ a závorky $[,]$ představují dolní celou část čísla umístěného v těchto závorkách. K jejímu ověření přistoupíme nejprve heuristicky, tj. budeme se snažit číslo α najít za předpokladu, že hypotéza platí. Z ní postupně plyne

$$\alpha n - 1 < x_n \leq \alpha n,$$
$$\alpha^2 n - \alpha < \alpha x_n \leq \alpha^2 n,$$
$$\alpha^2 n - \alpha - 1 < [\alpha x_n] \leq \alpha^2 n.$$

Spolu s (3) postupně máme

$$\alpha^2 n - \alpha - 1 < [\alpha n] + n - 1 < \alpha^2 n,$$
$$\alpha^2 n - \alpha < \alpha n + n < \alpha^2 n + 2,$$
$$-\frac{2}{n} < \alpha^2 - \alpha - 1 < \frac{\alpha}{n}.$$

Mají-li nerovnosti platit pro všechna přirozená čísla n, je třeba splnit rovnost
$$\alpha^2 - \alpha - 1 = 0. \tag{4}$$

Zarovnávat rovnice doporučujeme takto:
$$\begin{aligned} \alpha n - 1 &< x_n \le \alpha n, \\ \alpha^2 n - \alpha &< \alpha x_n \le \alpha^2 n, \\ \alpha^2 n - \alpha - 1 &< [\alpha x_n] \le \alpha^2 n. \end{aligned}$$

Existence čísla α je však pouze nutnou, nikoli však postačující podmínkou platnosti hypotézy. K jejímu důkazu je třeba ověřit, že hodnoty $[\alpha n]$ skutečně dávají x_n.

Máme tedy dokázat 2 tvrzení:

1. *Disjunktnost*: $\forall m, n \in \mathbb{N}\colon [\alpha m] \ne [\alpha^2 n]$
2. *Úplnost*: $\forall m \in \mathbb{N}\ \exists n \in \mathbb{N}\colon m = [\alpha n] \vee m = [\alpha^2 n]$

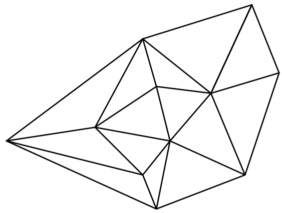
Ad 1. Předpokládejme, že existují čísla k, m, n tak, že
$$k = [\alpha m] = [\alpha^2 n].$$

Tedy platí
$$k < \alpha m < k + 1, \qquad k < \alpha^2 n < k + 1,$$
neboli
$$\frac{m}{k+1} < \frac{1}{\alpha} < \frac{m}{k},$$
$$\frac{n}{k+1} < \frac{1}{\alpha^2} < \frac{n}{k}.$$

Pro vysázení víceřádkové formule přesahující délku řádku se doporučuje i prostředí `multline`, resp. vše, co LaTeX 2_ε nabízí.

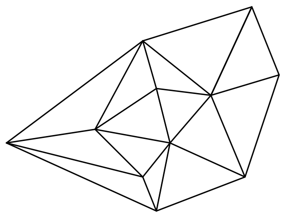
Příklad 1. Uvnitř daného konvexního n-úhelníku je zvoleno m různých bodů, které společně s vrcholy tohoto n-úhelníku jsou vrcholy neprotínajících se trojúhelníků pokrývajících celý n-úhelník. Určete počet takto určených trojúhelníků. (Na obr. 1 je pro ilustraci znázorněn případ pro $n = 6$, $m = 5$; trojúhelníků je celkem 14).

Při vkládání obrázku neuvádějte příponu (typ souboru), generuje se postskript pro tisk, ale zvolíte-li přímý výstup do pdf, měl by se při správné instalaci TEXu obrázek zkonvertovat – calda1-eps-converted-to.pdf.



Obr. 1

Obrázek lze vložit i do plovoucího prostředí.



Obr. 1: Případ pro $n = 6$, $m = 5$

Řešení. Označíme-li x počet těchto trojúhelníků, pro součet S velikostí všech jejich vnitřních úhlů platí zřejmě $S = x \cdot 180°$ a snadno vypočteme $x = 2m + n - 2$.

Závěr

Na závěr jednoduché cvičení pro čtenáře.

Literatura

[1] Tomsa, J.: Nehrajte si se sirkami I. *Rozhledy matematicko-fyzikální*, roč. 92 (2017), č. 1, s. 1–9.

[2] Řípa, M., Mlynář, J., Weinzettl, V., Žáček, F.: *Řízená termojaderná fúze pro každého.* Ústav fyziky plazmatu AV ČR, Praha, 2011.

[3] `https://en.wikipedia.org/wiki/Wythoff%27s_game`.